

Левкин Д.А.

Харьковский национальный  
технический университет сельского  
хозяйства имени П. Василенко,  
г. Харьков, Украина,  
E-mail: valoi@i.ua

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА  
ДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНОГО ЛУЧА  
НА МНОГОСЛОЙНЫЙ  
МИКРОБИОЛОГИЧЕСКИЙ ОБЪЕКТ

УДК 519.6:001.5

*В статье рассмотрены вопросы математического моделирования действия лазерного луча на многослойный шарообразный микробиологический материал. Акцент исследования сделан на эмбрион, как на сферический многослойный, неоднородный микробиологический объект сложной пространственной структуры. В связи с этим, при действии лазерным лучом, происходит неоднородный нагрев эмбриона, что влечет к термическому повреждению. Для повышения качества биотехнологического процесса лазерного деления микробиологического объекта необходимо повысить точность и быстродействие реализации прикладных оптимизационных математических моделей.*

*Специфика оптимизации систем «эмбрион-лазер» такова, что точность и быстродействие реализации прикладных оптимизационных математических моделей зависят от корректности постановки расчетных математических моделей. Так как, в основе расчетной математической модели процесса лазерного воздействия на эмбрион, лежит краевая задача системы четырех неоднородных дифференциальных уравнений теплопроводности, имеющих свои особенности, то актуален вопрос обоснования корректности решения.*

**Ключевые слова:** *расчетная математическая модель, корректность, оптимизационная математическая модель.*

**Введение.** Для оптимизации параметров физических полей многослойных систем необходимо многократное решение серии краевых задач в процессе моделирования. Существование и единственность решения можно гарантировать только в случае классической формы материала. В данной статье в качестве шарообразного микробиологического объекта многослойной (трехслойной) структуры, рассмотрим эмбрион. В основе расчетной математической модели, описывающей процесс действия лазерного луча на эмбрион, лежит краевая задача системы четырех неоднородных, нелинейных, многомерных и нестационарных дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат. Для осуществления оптимизации параметров функции цели (температурного поля) необходимы корректная постановка и реализация рассматриваемой расчетной математической модели. Вопросы корректности краевой задачи рассмотрены в работах [1, 2]. С целью оптимизации параметров функции цели в данной работе построена расчетная математическая модель процесса действия лазерного луча на эмбрион, с учетом пространственной формы и трехслойной структуры микробиологического объекта. Учет на этапе математического моделирования неоднородной структуры микробиологического объекта позволит рассчитать тепловой режим лазерного нагрева эмбриона, что даст возможность на техническом уровне осуществить процессы лазерного деления и контроля травмируемости последнего. Некоторые аспекты оптимизации параметров температурного поля эмбриона, подвергаемого воздействию на него лазерным излучением, рассматривались в работах [3, 4].

**Анализ последних достижений и публикаций.** Остановимся на анализе научных публикаций [5 – 12], касающихся вопросов расчета и оптимизации однослойных и многослойных систем с локальным воздействием на них источников соответствующих физических полей.

Вопросы параметризации физических полей при проектировании технических систем с дискретными источниками рассматривались в монографиях [6, 7]. В этих работах отмечалась важность данного этапа для формализации оптимизационных математических моделей с целью рационального проектирования различных физико-механических систем. Однако, в них не рассматривались вопросы оптимизации технических параметров систем «многослойный микробиологический материал-лазер». Последние системы существенно отличаются не только их исходными расчётными моделями (краевыми задачами), но и особенностями действия лазерного луча на многослойную микробиологическую систему.

Некоторые способы параметризации температурных полей на базе приближённо-аналитических решений краевых задач рассматривались в работах [8, 9].

Особо следует отметить авторское свидетельство на изобретение [10] для сегментации лазерным лучом раннего элитного эмбриона с целью получения жизнеспособных частей эмбриона для их последующей трансплантации. При этом, луч лазера проходит через блок фокусирования и направляется на эмбрион, прорезает оболочку эмбриона и осуществляет его деление. Для эффективной реализации этого способа [10] необходимо предварительное рассмотрение вопросов расчёта и оптимизации теплофизического процесса в многослойной биологической среде, каковой является эмбрион.

В работе [11] авторами приведено распределение температурных полей в слоях эмбриона при действии лазерным лучом. Однако, несмотря на то, что в данной работе берется во внимание трехслойная структура эмбриона, в ней не учитывается неоднородность его слоев, что влечет к погрешности расчетов температур лазерного нагрева, и, как следствие чего, к излишней травмируемости эмбриона.

В работе [12] авторами рассмотрены вопросы применения действия лазерного луча для удаления бластомеров из частично поврежденных эмбрионов. Значительное внимание авторами работы [12] уделяется уменьшению травмируемости зародышей в процессе удаления бластомеров. При этом в работе не учитывается неоднородная структура эмбриона и её теплофизические параметры, что ведет к травмируемости микробиологического объекта, из-за усреднения теплофизических характеристик.

**Цель исследования.** Построить корректную расчетную математическую модель, описывающую процесс действия лазерного луча на многослойный шарообразный микробиологический объект.

**Результаты исследований.** На этапе математического моделирования, процесс действия лазерного луча на эмбрион описывается с помощью краевой задачи четырех многомерных, неоднородных, нестационарных, нелинейных дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0 \quad \text{при } r \in [r_1; r_2], t \in [t_1; t_2]; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0 \quad \text{при } r \in [r_2; r_3], t \in [t_2; t_3]; \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} - \lambda_3 \left( \frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + q_3 = 0 \quad \text{при } r \in [r_3; r_4], t \in [t_3; t_4]; \\ \rho_4 c_4 \frac{\partial T_4}{\partial t} - \lambda_4 \left( \frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{2}{r_4} \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + q_4 = 0 \quad \text{при } r \in [r_4; r_5], t \in [t_4; t_5]. \end{array} \right. \quad (1)$$

где  $\rho_e$  – коэффициент плотности  $e$ -го слоя эмбриона;  $c_e$  – коэффициент теплоемкости;  $T_e = T_e(r, t)$  – температурное поле эмбриона;  $r$  – пространственная переменная;  $t$  – длительность действия лазерного луча;  $r_e$  – расстояние от центра источника теплового воздействия в виде пятна до точки в  $e$ -ом слое эмбриона, в которой определяется значение температурного поля;  $\lambda_e$  – коэффициент теплопроводности  $e$ -го слоя;  $q_e$  – удельная плотность мощности тепловых нагрузок в эмбрионе.

Для учета начала и конца действия лазерного луча на эмбрион воспользуемся граничными условиями Дирихле:

$$\begin{cases} T(r_0, t_0) = T_n; \\ T(r_5, t_5) = T_k, \end{cases} \quad (2)$$

где  $T_n$  – температура эмбриона в начале действия лазерного луча;  $T_k$  – температура эмбриона в конце действия лазерного луча.

Для учета многослойной (трехслойной) структуры применяются равенства раздела сред и равенства непрерывности температурных полей по временной координате. Равенства раздела сред имеют следующий вид:

$$\begin{cases} T_1(r_1, t_1) = T_2(r_2, t_2), & -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \quad \text{при } r \in [r_1; r_2]; \\ T_2(r_2, t_2) = T_3(r_3, t_3), & -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} \quad \text{при } r \in [r_2; r_3]; \\ T_3(r_3, t_3) = T_4(r_4, t_4), & -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r} \quad \text{при } r \in [r_3; r_4]; \\ T_4(r_4, t_4) = T_5(r_5, t_5), & -\lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial r} = -\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial r} \quad \text{при } r \in [r_4; r_5]; \\ T_5(r_5, t_5) = T_6(r_6, t_6), & -\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial r} = -\lambda_6 \frac{\partial T_6}{\partial r} \quad \text{при } r \in [r_5; r_6]. \end{cases} \quad (3)$$

Равенства непрерывности температурных полей по временной координате:

$$\begin{cases} T(r_1; t_1 - 0) = T(r_1; t_1 + 0); \\ T(r_2; t_2 - 0) = T(r_2; t_2 + 0); \\ T(r_3; t_3 - 0) = T(r_3; t_3 + 0); \\ T(r_4; t_4 - 0) = T(r_4; t_4 + 0); \\ T(r_5; t_5 - 0) = T(r_5; t_5 + 0). \end{cases} \quad (4)$$

Для задания граничных условий теплового обмена на границе раздела оболочки эмбриона (зоны пеллюцида) и окружающей среды (граничных условий третьего рода) воспользуемся граничными условиями:

$$\left( \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - A(T_1 - T_{ext}) \right) \Big|_{r=0} = 0, \quad (5)$$

где  $\lambda_1$  – коэффициент теплопроводности зоны пеллюцида эмбриона;  $A$  – параметр теплоотдачи зоны пеллюцида;  $T_1$  – температура зоны пеллюцида;  $T_{ext}$  – температура окружающей среды.

В случае действия на эмбрион лазерного луча, образующего источник теплового воздействия в виде пятна, граничные условия (5) будут иметь вид граничных условий теплового потока от зоны пеллюцида к окружающей среде:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0, t) = qS, \quad 0 \leq t \leq h, \quad (6)$$

где  $q$  – удельный тепловой поток;  $S$  – диаметр источника теплового воздействия, т.е. – пятна;  $h$  – длительность действия источника.

Для нахождения удельного теплового потока, воспользуемся следующей формулой:

$$q = \frac{T_1 - T_{ext}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_{ext}} + \sum_{e=1}^N \frac{\delta_{0e}}{\lambda_e}}, \quad (7)$$

где  $\alpha_1$  – коэффициент теплоотдачи зоны пеллюцида;  $\alpha_{ext}$  – коэффициент теплоотдачи окружающей среды;  $\delta_{0e}$  – толщина  $e$ -го слоя эмбриона.

Решив краевую задачу, получим распределения температурных полей в эмбрионе. Некоторые аспекты реализации данной расчетной математической модели рассмотрены в работе [13]. Алгоритмическая основа процедуры оптимизации параметров действия лазерного луча на эмбрион рассмотрена в работах [3, 4].

**Выводы.** В работе построена расчетная математическая модель процесса действия лазерного луча на эмбрион с учетом специфики электронно-лучевого нагрева и неоднородной, трехслойной структуры микробиологического объекта. Реализация математической модели с применением численных методов и на цифровых ПЭВМ, даст возможность:

- во-первых, формализации ограничений на результирующее температурное поле эмбриона, рассмотренных в работе [3];
- во-вторых, формализации функции цели в основной оптимизационной задаче и в её прикладных математических моделях, рассмотренных в работах [3, 4].

### Литература:

1. Макаров А.А. Задача Коши для экспоненциально-корректных псевдодифференциальных операторов / А.А. Макаров, Д.А. Левкин // Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика і механіка; вип. 64. – Харків, 2012. – № 990. – С. 42–47.
2. Мегель Ю.Е. Математическая модель теплового нагрева многослойного микробиологического объекта / Ю.Е. Мегель, Д.А. Левкин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2012. – № 3/4 (57). – С. 4–8.
3. Левкін Д.А. Математичні моделі оптимізації параметрів дії лазерного променя на багаточарові біосистеми / Д.А. Левкін // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2014. – № 60 (1102). – С. 77–84.
4. Мегель Ю.Е. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы / [Мегель Ю.Е., Путятин В.П., Левкин Д.А., Левкин А.В.] // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. – Х.: НТУ «ХПІ». – 2017. – № 20 (1242). – С. 60–64.
5. Мегель Ю.Е. Обработка визуальной информации для оценки состояния биообъектов с помощью автоматической системы / Ю.Е. Мегель, А.И. Рыбалка // АСУ и приборы автоматики. – Х.: Вища школа, 2002. – Вып. 118. – С. 11 – 16.

6. Стоян Ю.Г. Размещение источников физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин. – К.: Наук. думка, 1981. – С. 59–87.
7. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин. – К.: Наук. думка, 1988. – С. 44–48.
8. Рвачев В.Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1978. – 140 с.
9. Рвачев В.Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В.Л. Рвачев, А.П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1976. – 290 с.
10. А.с. 1059584 СССР, МКИ<sup>3</sup> G 06 G 7/56. Устройство для моделирования физических полей / Ю.М. Мацевитый, Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин (СССР). – опубл. 07.12.83, Бюл. № 45.
11. Douglas-Hamilton D.H. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling / D.H. Douglas-Hamilton, J. Conia // Journal of Biomedical Optics. – 2001. – Vol. 6, Issue 2. – P. 205. doi: 10.1117/1.1353796.
12. Laser-assisted removal of necrotic blastomeres from cryopreserved embryos that were partially damaged / [Rienzi L., Nagy Z., Ubaldi F. и др.] // Fertility and Sterility. – 2002. – Vol. 77, Issue 6. – pp. 1196. – 1201.
13. Левкин Д.А. Аналитическое решение уравнения теплопроводности для многослойного микробиологического объекта / Д.А. Левкин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – Харьков, 2012. – № 4/4 (58). – С. 29 – 32.

### Summary

**Levkin D.A.** The mathematical model of an action process of a laser beam on a multilayer microbiological object

*In the article, the calculated mathematical model of an action process of a laser beam on multilayer spherical microbiological material was constructed. The given mathematical model is universal, because, despite the consideration of multilayer structure of microbiological material, the numerical values of the biophysical parameters, which are peculiar to layers of specific microbiological material, and the technical parameters of an electron-beam impact are not established in it. It allows, setting the certain values of parameters, to get the correct calculated mathematical model of an action process of a laser beam on multilayer spherical microbiological material.*

*The researches given in this article have novelty in connection with the fact that the constructed calculated mathematical model is correct, the complex multilayer structure of microbiological material and peculiarities of an electron-beam impact are taken into account. The actuality of the researches is denoted in works of leading foreign and domestic scientists. The task of the researchers is calculation and search of rational values of technical parameters of biotechnological process of a laser division of multilayer microbiological material. It will allow to improve the quality of biotechnological process of a division of microbiological material due to the increase of exactness and operating speed of realization of the applied optimization mathematical models.*

*In the article, an embryo is considered as a spherical three-layered microbiological object with the heterogeneous inclusions. The basis of the calculated mathematical model is presented by the boundary-value problem of four multidimensional, nonlinear, unsteady and heterogeneous differential equations of thermal conductivity in the spherical coordinate system. In the construction of the calculated mathematical model of an action process of a laser beam, for the consideration of the spherical three-layered structure of a microbiological object under an influence of a laser beam, the conditions of the conjugation of temperature fields in layers of an embryo and of equality of division of environments are entered in the boundary-*

value problem. Inserting the numeral values of biophysical and technical parameters of process of a laser effect on an embryo, we will get the correct calculated mathematical model of the action process. The realization, with the applying of numerical methods or net processors of the obtained calculated mathematical model, will allow to improve the quality of biotechnological process of a laser division of an embryo due to the increase of exactness and operating speed of realization of the applied optimization mathematical models.

**Keywords:** calculated mathematical model, correct, optimization mathematical models.

## References

1. Makarov, A., Levkin, D. (2012). Zadacha Koshi dlya eksponentsialno-korrektnykh psevdodifferentsialnykh operatorov. *Visnyk Harkivskogo natsionalnogo universitetu imeni V.N. Karazina. Seriya: Matematika, prikladna matematika i mehanika*, 64. – Kharkiv, № 990, 42–47.
2. Megel', Yu., Levkin, D. (2012). Matematicheskaya model teplovogo nagreva mnogoslono-mikrobiologicheskogo ob'ekta. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. Kharkov, № 3/4 (57)*, 4–8.
3. Levkin, D. (2014). Matematychni modeli optymizatsii parametriv dii lazernoho promenia na bahatosharovi biosystemy. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya Mekhaniko-tekhnologichni systemy ta komplekxy, Kh.: NTU «KhPI, № 60 (1102)*, 77–84.
4. Megel', Ju., Putjatin, V., Levkin, D., Levkin, A. (2017). Matematicheskoe modelirovanie i optimizatsiya parametrov deystviya lazernogo luchu na mnogoslonyie biomaterialyi. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya Mekhaniko-tekhnologichni systemy ta komplekxy, Kh.: NTU «KhPI, № 20 (1242)*, 60–64.
5. Megel', Ju., Rybalka, A. (2002). Obrabotka vizual'noj informatsii dlja ocenki sostojaniya bioob'ektov s pomoshh'ju avtomaticheskoy sistemy. *ASU i pribory avtomatiki. H.: Vyshha shkola*, 118, 11–16.
6. Stojan, Ju., Putjatin, V. (1981). Razmeshhenie istochnikov fizicheskikh polej. *K.: Nauk. dumka*, 59–87.
7. Stojan, Ju., Putjatin, V. (1988). Optimizatsiya tehniceskikh sistem s istochnikami fizicheskikh polej. *K.: Nauk. dumka*, 44–48.
8. Rvachev, V., Slesarenko, A. (1978). Algebro-logicheskie i proekcionnye metody v zadachah teploobmena. *K.: Nauk. dumka*, 140.
9. Rvachev, V., Slesarenko, A. (1976). Algebra logiki i integralnyie preobrazovaniya v kraevykh zadachah. *K.: Nauk. dumka*, 290.
10. Matsevityiy, M., Stojan, Ju., Putjatin, V. (1983). A.s. 1059584, MKI<sup>3</sup> G 06 G 7/56. Ustroystvo dlya modelirovaniya fizicheskikh polej. *SSSR. Opubl. 07.12.83, Byul. № 45*.
11. Douglas-Hamilton, D., Conia, J. (2001). Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics, Vol. 6, Issue 2.*, 205. doi: 10.1117/1.1353796.
12. Rienzi, L., Nagy, Z., Ubaldi, F. i dr. (2002). Laser-assisted removal of necrotic blastomeres from cryopreserved embryos that were partially damaged. *Fertility and Sterility, Vol. 77, Issue 6.*, 1196–1201.
13. Levkin, D. (2012). Analiticheskoe reshenie uravneniya teploprovodnosti dlya mnogoslono-mikrobiologicheskogo ob'ekta. *Vostochno-Evropeyskiy zhurnal peredovykh tekhnologiy. Kharkov, № 4/4 (58)*, 29–32.