Аксенов А.А.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова»
Малюков С.В.
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический университет имени Г.Ф. Морозова»

РАСЧЁТ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ МОДИФИЦИРОВАНИИ ДРЕВЕСИНЫ ТЕРМООБРАБОТКОЙ СВЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ЭНЕРГИЕЙ

УДК 674.04

Получена математическая модель, характеризующая СВЧ нагрев древесины, позволяющая оценить влияние различных характеристик на развитие температурных полей.

Ключевые слова: древесина, нагрев, термообработка, СВЧ сушка, температурные поля, математическая модель.

Постановка проблемы. Нагрев древесины с целью её сушки или термообработки в электромагнитном поле представляет не только научный, но и большой производственный интерес. Так, известно, что сушка древесины является одним из наиболее энергоёмких технологических процессов в деревообработке и строительной индустрии. Поэтому усовершенствование техники и технологии сушки особенно важно при разработке новых энерго- и ресурсосберегающих высоких технологий. Следует отметить, что во многих странах в деревообработке широко применяется энергия электромагнитного поля, например, при склеивании древесины, при изготовлении деталей мебели, корпусов радиоприёмников, гардинных реек и т.д. Однако для термообработки древесины при ее модифицировании этот вид энергии недостаточно изучен и почти не используется [1, 2].

Для отработки режимов нагрева подвергающихся сушке изделий из древесины в поле СВЧ электромагнитной энергии, которые позволили бы свести к минимуму действия деформационных явлений, сопровождающих процесс нагрева, необходимо знать не только температуру на облучаемой поверхности, но и характер распределения температуры по толщине бруска. Получить такую информацию экспериментальным путём не представляется возможным из-за отсутствия приборов, позволяющих измерять температуру объектов за время действия поля СВЧ энергии (вводимые в древесину термопары не дают истинного представления о её температурном поле, т.к. сами являются источниками теплового возмущения). В этом случае разработка математической модели процесса нагрева и проведение на его основе численных экспериментов при использовании на ЭВМ для широкого набора характеристик температурного поля при нагреве СВЧ энергией имеет большое теоретическое и практическое значение [3, 4].

Целью теоретического исследования при СВЧ сушке или термообработке древесины является аналитическое прогнозирование обеспечивания минимальных градиентов температуры и влажности, что в конечном состоянии обеспечит минимальные напряжения и, следовательно, снизит брак в качестве нарушения внешней формы и появления внутренних и внешних трещин.

Основная часть. При проведении расчёта за основу принимается образец из древесины, который с тепловой точки зрения представим как «неограниченную пластину». Это обстоятельство существенно упростит задачу и позволит вести тепловые расчёты только вдоль оси X, т.е. будет рассмотрена одномерная задача. При решении предполагаем, что внутри образца из древесины происходит её интенсивный нагрев, который подчиняется заданному экспоненциальному закону $t(0,\tau)=t_1=t_m-(t_m-t_2)e^{\kappa\tau}$. В решении начало координат расположим в середине толщины образца из древесины, которую обозначим через 2R, тогда R – половина толщины образца в виде бруска. В результате в решении получим внутреннюю симметричную задачу, т.е. рассмотрим нагрев (или охлаждение) древесины изнутри при её сушке или термообработке в поле СВЧ энергии. При этом принимаем, что в начальный момент времени ограничивающие поверхности имеют температуру среды t_2, которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса нагрева.

Условие задачи математически может быть сформулировано следующим образом. Нестационарное одномерное температурное поле при экспоненциальной зависимости изменения температуры внутри образца описывается уравнением теплопроводности

$$a \cdot \frac{\partial^2 t(x,\tau)}{\partial x^2} = \frac{\partial t(x,\tau)}{\partial \tau}. \tag{1}$$

Начальные и граничные условия в этом случае будут

$$\begin{aligned} &\tau=0;\quad t(x,0)=t_2;\\ &x=0;\quad t(0,\tau)=t_1=t_m-(t_m-t_2)\cdot e^{k\tau};\\ &x=R;\quad \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial x} = -h[t(R,\tau)-t_2]; \end{aligned} \tag{2}$$

где a – коэффициент температуропроводности, м^2/с;

t – температура, ^{0}С;

t_2 – температура среды, окружающей брусок, ^{0}С;

t_m – температура внутри бруска, ^{0}С;

τ – время, с;

R – половина толщины бруска, м;

к – постоянный коэффициент, характеризующий интенсивность скорости нагрева, 1/с;

$h=\alpha/\lambda$ – коэффициент, зависящий от теплопроводящих свойств древесины и окружающей среды, а также от степени её изоляции со средой, 1/м;

α – коэффициент теплоотдачи, Вт/м$^2\cdot{}^0$С;

λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м$\cdot{}^0$С.

Для решения дифференциального уравнения (1) с начальными и граничными условиями (2) принимаем некоторые допущения:

1. Так как у уплотнённой древесины анизотропия существенно снижается по сравнению с неуплотнённой древесиной, то для упрощения расчётов принимаем, что уплотнённая не древесина является анизотропным материалом.
2. Коэффициенты теплопроводности λ, теплоёмкости C и температуропроводности a являются постоянными и не зависят от температуры.

В решении используем преобразование Лапласа.

Дифференциальное уравнение теплопроводности (1) после преобразования Лапласа относительно переменной τ будет иметь вид

$$T''(x,g) - \frac{g}{a} T(x,g) + \frac{t_2}{a} = 0, \tag{3}$$

где g – это изображение оригинала переменной τ.

Начальные условия $t(x,0)=t_2=Const$ использованы при переходе от уравнения в частных производных (1) для оригинала $t(x,\tau)$ к уравнению (3) для изображения $T(x,g)$.

Граничные же условия для изображения будут иметь следующий вид:

$$x=0;\qquad T(0,g) = \frac{t_m}{g} - \frac{t_m - t_2}{k+g}$$

$$x=R; \qquad T'(R,g)=-h\left[T(R,g)-\frac{t_2}{g}\right] \tag{4}$$

Тогда решение дифференциального уравнения (3) можно записать в виде

$$T(x,g)-\frac{t_2}{g}=A\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x+B\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x. \tag{5}$$

Постоянные коэффициенты A и B определим из граничных условий:
при x=0 имеем

$$T(0,g)=\frac{t_m}{g}-\frac{t_m-t_2}{k+g}=\frac{t_2}{g}+A\cdot 1; \qquad A=\frac{k(t_m-t_2)}{g(g+k)}; \tag{6}$$

при x=R имеем

$$A\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R+B\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R=-h\left[\left(A\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R+B\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R+\frac{t_2}{g}\right)-\frac{t_2}{g}\right]; \tag{7}$$

Из уравнения (7) с учётом постоянной A определим B

$$B=-\frac{k(t_m-t_2)}{g(g+k)}\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)}{\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)}. \tag{8}$$

Тогда решение для изображения (5) будет иметь вид

$$T(x,g)-\frac{t_2}{g}=\frac{k(t_m-t_2)}{g(g+k)}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x-\frac{k(t_m-t_2)\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}x}}{g(g+k)\left(cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\sqrt{\frac{a}{g}}\right)}-\frac{k(t_m-t_2)\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g(g+k)\left(\frac{1}{h}\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}+th\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)}; \tag{9}$$

Для получения решения уравнения (9) в оригинале рассмотрим в правой его части каждое составляющее отдельно. Тогда первое слагаемое запишем

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{k(t_m-t_2)}{g(g+k)}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x\right]=(t_m-t_2)\,\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{g+k}\right)\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x; \tag{10}$$

где L – обозначает операцию интегрального преобразования Лапласа.
Рассмотрим преобразование первого сомножителя

$$\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{g}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{h}}x\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{g}\cdot e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x}+\frac{1}{g}e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[erfc\left(-\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)+erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right]=\frac{1}{2}\left(2-erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}+erfc\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right)=1; \tag{11}$$

так как *erfc(-W)=2-erfcW.*

При рассмотрении преобразования второго сомножителя из изображения в оригинал решения в уравнении (10) имеем

$$\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{g+k}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)=\frac{1}{2}\,\mathrm{L}^{-1}\left(\frac{1}{g+k}\cdot e^{-\sqrt{\frac{g}{a}}x}+\frac{1}{g+k}\cdot e^{\sqrt{\frac{g}{a}}x}\right)=$$

$$=\frac{e^{-k\tau}}{2}\left[\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{a}}\cdot x\right)\cdot erfc\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{a\tau}}-i\sqrt{k\tau}\right)\right]+$$

$$+\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{a}}\cdot x\right)\cdot erfc\left(\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a\tau}}+i\sqrt{k\tau}\right)+\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\cdot erfc\left[-\left(\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{a\tau}}+i\sqrt{k\tau}\right)\right]+$$

$$+\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\times\left[-\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}-i\sqrt{k\tau}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot e^{-k\tau}\left[\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\times\right. \tag{12}$$

$$\times erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}-i\sqrt{k\tau}\right)+\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}+i\sqrt{k\tau}\right)+2\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)-$$

$$-\exp\left(i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\cdot erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}+i\sqrt{k\tau}\right)+2\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)-\exp\left(-i\sqrt{\frac{k}{a}}x\right)\times$$

$$\left.\times erfc\left(\frac{x}{2\sqrt{a\tau}}-i\sqrt{k\tau}\right)\right]=\frac{1}{2}\cdot e^{-k\tau}\left(2e^{i\sqrt{\frac{k}{a}}x}+2e^{-i\sqrt{\frac{k}{a}}x}\right)=2e^{-k\tau}\cdot chi\sqrt{\frac{k}{a}}x=2\cdot e^{-k\tau}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{a}}\cdot x;$$

Окончательно оригинал уравнения (10) будет равен

$$L^{-1}\left[\frac{k(t_m-t_2)}{g(g+k)}\cdot ch\sqrt{\frac{g}{a}}x\right]=(t_m-t_2)\left(1-2\cdot e^{-k\tau}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{a}}\cdot x\right); \tag{13}$$

Рассмотрим второе слагаемое первой части уравнения (9). Числитель умножим и разделим на $\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)$ для того, чтобы при решении избавиться от возможной неопределённости

$$\frac{k(t_m-t_2)\cdot sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g(g+k)\left(cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\sqrt{\frac{a}{g}}\right)}=\frac{k(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}\cdot\sqrt{\frac{g}{a}}x}{g(g+k)\cdot\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)}=$$

$$=\frac{k(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}\cdot x\cdot\frac{g}{a}}{g(g+k)\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)}=\frac{\frac{k}{a}(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{a}}x}{\sqrt{\frac{g}{a}}x}\cdot x}{g(g+k)\cdot\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)}= \tag{14}$$

$$=\frac{\frac{kx}{a}(t_m-t_2)\left[1+\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)^2\cdot\frac{1}{3!}+\left(\sqrt{\frac{g}{a}}x\right)^4\cdot\frac{1}{5!}+...\right]}{(g+k)\left[\sqrt{\frac{g}{a}}\left(1+2e^{-2\sqrt{\frac{g}{a}}R}+2e^{-4\sqrt{\frac{g}{a}}R}+2e^{-6\sqrt{\frac{g}{a}}R}+...\right)+h\right]}=\frac{\phi_1(g)}{\psi_1(g)};$$

Выражение (14) представляет отношение двух полиномов относительно (g). Так как обобщённый полином $\psi_1(g)$ не содержит постоянной (первый член равен (g+k)), то все условия теоремы разложения соблюдены и её можно применить для перехода решения изображения (14) к решению для оригинала, используя при этом формулу разложения

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\phi_1(g)}{\psi_1(g)}\right]=\sum_{n=1}^{n}\frac{\phi_1(g_n)}{\psi_1(g_n)}\cdot e^{g_n\tau}; \tag{15}$$

где g – корни полинома $\psi_1(g)$.

Найдём корни (g_n). Для этого приравняем $\psi_1(g)$ к нулю

$$(g+k)\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)=0; \tag{16}$$

Тогда получим:

1) простой корень ($g=-k$);
2) бесконечное множество корней $g_n=-\frac{a}{R^2}\cdot\mu_n^2$, определяемых из уравнения (16), в котором $\mu_n=i\sqrt{\frac{g_n}{a}}R$.

Из уравнения (16) имеем следующее решение

$$\begin{gathered}\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h=i\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{R}{R}\cdot ctgi\sqrt{\frac{g}{a}}R+h=\frac{\mu}{R}\cdot ctg\mu+h=0;\\ ctg\mu=-\frac{hR}{\mu}=-\frac{B_i}{\mu};\end{gathered} \tag{17}$$

где μ – корни характеристического уравнения (17).

Для применения формулы (15) определим производную функции $\psi_1(g_n)$

$$\psi_1'(g_n)=(g+k)'\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)+(g+k)\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)'=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{g}{a}}cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+h\right)+(g+k)\left[\frac{1}{2\sqrt{ag}}\cdot cth\sqrt{\frac{g}{a}}R+\frac{R}{2a\left(\sin i\sqrt{\frac{g}{a}}R\right)^2}\right]= \tag{18}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}cth\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R+h\right)+(g+k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g}\left[\left(\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}cth\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R+h\right)-h+\frac{R\cdot g}{\mathrm{a}\left(\sin i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right]=$$

$$=(g+k)\cdot\frac{1}{2g}\left(-h+\frac{R\cdot g}{\mathrm{a}\left(\sin i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right)=-\frac{\mathrm{a}\mu^2-kR^2}{2R\mathrm{a}}\cdot\frac{\left(\mu^2+B_i\cdot\sin^2\mu\right)}{\mu^2\cdot\sin^2\mu};$$

В уравнении (18) выражение в скобках $\left(\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}cth\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R+h\right)$ равно нулю на основании соотношения (16). Тогда с учётом последнего и используя теорему разложения (15) для различных корней, получим следующее выражение

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{\phi_1(g_n)}{\psi_1(g_n)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{k(t_m-t_2)\cdot R\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot 2R\cdot\mathrm{a}\cdot\mu_n^2\cdot\sin^2\mu_n}{\mathrm{a}\cdot\mu_n\left(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2\right)\left(\mu_n^2+B_i\cdot\sin^2\mu_n\right)}\exp\left(-\mu_n^2\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right)=$$

$$=-(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}}{\mathrm{a}\cdot\mu_n^2-kR^2}\cdot\frac{2R^2\cdot\sin^2\mu_n^2}{\mu_n\left(\mu_n^2\cdot\sin^2\mu_n+\mu_n^2\cdot\cos^2\mu_n+B_i\sin^2\mu_n\right)}\times$$

$$\times\exp\left(-\mu_n^2\cdot\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right)=-(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}}{\mathrm{a}\cdot\mu_n^2-kR^2}\cdot\frac{2R^2}{\mu_n\left(1+\frac{B_i^2}{\mu_n^2}+B_i\cdot\frac{1}{\mu_n^2}\right)}\cdot\exp\left(-\mu_n^2\cdot\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right)=$$

$$=-(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{kR^2}{\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2}\cdot\frac{B_i}{B_i}\cdot\frac{2\sin\mu_n\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\mu_n+\cos^2\mu_n}}{\sin\mu}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp\left(-\mu_n^2\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right)= \tag{19}$$

$$=-k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2}{\mu_n\cdot B_i\left(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2\right)}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\frac{2B_i\sqrt{B_i^2+\mu_n^2}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp\left(-\mu_n^2\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right)=$$

$$=-k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_nR^2}{\mu_n\cdot B_i\left(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2\right)}\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp\left(-\mu_n^2\frac{\mathrm{a}\tau}{R^2}\right);$$

где $A_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2B_i\sqrt{B_i^2+\mu_n^2}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}$ - начальная тепловая амплитуда.

Рассмотрим третье слагаемое правой части уравнения (9) и проведём с ним операции, аналогичные второму слагаемому этого же уравнения

$$\frac{k(t_m-t_2)\cdot sh\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}{g(g+k)\left(\frac{1}{h}\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}+th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)}=\frac{k(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}{\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}\cdot\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}{g(g+k)\left(\frac{g}{\text{a}h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)\sqrt{\frac{\text{a}}{g}}}=$$

$$=\frac{\frac{k}{\text{a}}(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}{\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}\cdot gx}{g(g+k)\left(\frac{g}{\text{a}h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)}=\frac{\frac{k}{\text{a}}(t_m-t_2)\cdot\frac{sh\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}{\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x}\cdot x}{(g+k)\left(\frac{g}{\text{a}h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)}= \tag{20}$$

$$=\frac{\frac{kx}{\text{a}}(t_m-t_2)\left[1+\left(\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x\right)^2\cdot\frac{1}{3!}+\left(\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}x\right)^4\cdot\frac{1}{5!}+\ldots\right]}{(g+k)\left[\frac{g}{\text{a}h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}\left(1-2e^{-2\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R}+2e^{-4\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R}-2e^{-6\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R}+\ldots\right)\right]}=\frac{\phi_2(g)}{\psi_2(g)};$$

В выражении (20) имеем отношение двух обобщённых полиномов относительно (g). Условия разложения полиномов соблюдены – свободных членов в $\psi_2(g)$ нет. Следовательно, воспользуемся теоремой разложения

$$L_{\tau}^{-1}\left[\frac{\phi_2(g)}{\psi_2(g)}\right]=\sum_{n=1}^{n}\frac{\phi_2(g_n)}{\psi_2(g_n)}\cdot e^{g_n\tau}; \tag{21}$$

Для этого определим корни выражения $\psi_2(g)$, приравнивая полином нулю. Тогда получим:

1) простой корень ($g = -k$);
2) бесчисленное множество корней $g_n=-\frac{\text{a}}{R^2}\cdot\mu_n^2$, определяемых из следующего решения
3)

$$\frac{g}{\text{a}h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R=\frac{1}{h}\cdot\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}\cdot\frac{i\cdot R}{i\cdot R}+\frac{1}{i}tgi\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R=\frac{\mu_n}{B_i}+tg\mu_n=0;$$

$$ctg\ \mu_n=\frac{B_i}{\mu_n}; \tag{22}$$

Определим производную $\psi_2'(g_n)$

$$\psi_2'(g_n)=(g+k)'\left(\frac{g}{\text{a}\cdot h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)+(g+k)\left(\frac{g}{\text{a}\cdot h}+\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\text{a}}}R\right)'=$$

$$=(g+k)\left(\frac{1}{\mathrm{a}\cdot h}+\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{a}g}}\cdot th\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R+\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}\frac{R}{2\sqrt{\mathrm{a}g}}\cdot\frac{1}{\left(\cos i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right)=$$

$$=(g+k)\left[\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{a}g}}\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{g}}\left(\left(\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}th\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R+\frac{g}{\mathrm{a}h}\right)-\frac{g}{\mathrm{a}h}\right)+\frac{g}{\mathrm{a}h}+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\mathrm{a}}\cdot\frac{1}{\left(\cos\ i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right]= \tag{23}$$

$$=(g+k)\left[-\frac{1}{2g}\cdot\frac{g}{\mathrm{a}\cdot h}+\frac{1}{\mathrm{a}\cdot h}+\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\mathrm{a}}\cdot\frac{1}{\left(\cos\ i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right]=\frac{(g+k)}{2\mathrm{a}}\cdot\left[\frac{1}{h}+\frac{R}{\left(\cos\ i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}\right]$$

$$=\frac{(g+k)\left[\left(\cos\ i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2+B_i\right]}{2\mathrm{a}\cdot h\cdot\left(\cos\ i\sqrt{\frac{g}{\mathrm{a}}}R\right)^2}$$

Применяя теорему разложения к выражению (20), в окончательном виде получим

$$\mathrm{L}_\tau^{-1}\left[\frac{\phi_2(g_n)}{\psi_2(g_n)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k(t_m-t_2)\cdot R\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot 2\mathrm{a}\cdot h\cdot R^2\mu_n^2\cdot\cos^2\mu_n}{\mathrm{a}\cdot\mu_n\left(k\cdot R^2\text{-}\mathrm{a}\cdot\mu_n^2\right)\left(\cos^2\mu_n+B_i\right)}\exp\left(-F_0\cdot\mu_n^2\right)=$$

$$=k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2\cdot B_i\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}}{kR^2-\mathrm{a}\mu_n^2}\cdot\frac{2\cdot\cos^2\mu_n}{\mu_n\left(\cos^2\mu_n+B_i\cdot\sin^2\mu_n+B_i\cdot\cos^2\mu_n\right)}\cdot\exp\left(-F_0\cdot\mu_n^2\right)=$$

$$=-k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n\frac{x}{R}}{(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2)}\cdot\frac{R^2\cdot B_i^2\cdot 2\cdot\sin\mu_n\cdot\frac{\sqrt{\sin^2\mu_n+\cos\mu_n^2}}{\sin\mu_n}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}\cdot\exp(-F_0\cdot\mu_n^2)=$$

$$=-k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2\cdot B_i}{(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2)}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\frac{2\cdot B_i\sqrt{B_i^2+\mu_n^2}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}\cdot\frac{1}{\mu_n}\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp(-F_0\cdot\mu_n^2)= \tag{24}$$

$$=-k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R^2\cdot B_i}{(\mathrm{a}\mu_n^2-kR^2)}\cdot\frac{1}{\mu_n}\cdot A_n\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp(-F_0\cdot\mu_n^2);$$

Тогда аналитическое уравнение, определяющее температурное поле в древесине, в случае, если температура в ней меняется по экспоненциальному закону, будет следующим

$$t(x,\tau)-t_2=(t_m-t_2)\cdot\left(1-2\cdot e^{-k\tau}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{\text{a}}}x\right)+k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cdot R^2}{\mu_n\cdot B_i\cdot(\text{a}\mu_n^2-kR^2)}\times$$

$$\times\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp(-F_0\mu_n^2)+k(t_m-t_2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}\cdot\frac{A_n\cdot R^2\cdot B_i}{(\text{a}\mu_n^2-kR^2)}\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\times\exp(-F_0\mu_n^2); \tag{25}$$

Окончательно имеем

$$t(x,\tau)-t_2=(t_m-t_2)\cdot\left[1-2\cdot e^{-k\tau}\cdot\cos\sqrt{\frac{k}{\text{a}}}x+k\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cdot\left(\frac{R^2B_i}{\mu_n}+\frac{R^2}{B_i\mu_n}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{(\text{a}\mu_n^2-kR^2)}\right)\cdot\sin\mu_n\frac{x}{R}\cdot\exp(-F_0\mu_n^2)\right]; \tag{26}$$

где $A_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2\cdot B_i\sqrt{B_i^2+\mu_n^2}}{\mu_n\left(B_i+B_i^2+\mu_n^2\right)}$ - начальная тепловая амплитуда;

$F_0=\dfrac{\text{a}\tau}{R^2}$ – критерий Фурье;

$B_i=h\cdot R$ – критерий Био.

Выводы. Полученное аналитическое уравнение (26) позволяет установить закономерность формирования температурного поля внутри бруска древесины при его обработке СВЧ электромагнитной энергией в том случае, когда температурное поле изменяется по экспоненциальному закону.

На основании полученного алгоритма математической модели (26), характеризующей СВЧ нагрев древесины, представляется возможным оценить влияние различных характеристик на развитие температурных полей. Основными факторами влияния соответственно являются теплофизические характеристики древесины (λ, c, *a*), условия тепломассообмена с окружающей средой (α, β), энергетические и временные факторы воздействия СВЧ электромагнитной энергии (tgδ, ε, *f*(τ)). Воздействуя на энергетические параметры тангенс угла энергетических потерь tgδ и диэлектрическую проницаемость, представляется возможным оптимизировать процесс сушки.

Литература

1. Белый В. А., Врублевская В. И., Купчинов Б. И. Древесно-полимерные композиционные материалы и изделия. – Минск: Наука и техника, 1980. – 278 с.
2. Белокуров В. П. Температурный режим узлов трения лесных машин и их работоспособность. – Воронеж: Издательство Воронежского государственного университета, 1997. – 184 с.
3. Винник Н. И., Мильцин А. Н., Аксенов А. А. Разработка математических моделей по исследованию и расчету узлов трения с подшипниками из модифицированной древесины. – Воронеж: ВГЛТА, 1999. – 112 с.
4. Шамаев В. А. Модификация древесины. – М.: Экология, 1990. – 128 с.

Aksenov A. A., Malyukov S. V. **Calculation of the temperature field during the treatment of wood heat treatment by microwave electromagnetic energy**

The mathematical model describing the microwave heating of wood Xinyi, allowing to estimate influence of various characteristics on the development of temperature fields.

Key words: wood heating, heat treatment, the microwave drying, temperature fields, a mathematical model.

References

1. Belyi V.A.,Rublevskaya VI, Kupchinov BI Wood-polymer composite materials and products. - Minsk: Science and technology, 1980. - 278 p.
2. Belokurov VP Temperature friction units of forest machines and their efficiency. - Voronezh: Publishing house of the Voronezh State University, 1997. - 184 p.
3. Vinnik NI, Miltsin AN Aksenov AA Development of mathematical models for the study and calculation of friction units with bearings of modified wood. - Voronezh: VGLTA, 1999. - 112 p.
4. Shamaev VA Modification of wood. - M .: Ecology, 1990. - 128 p.