УДК 539.3

М.С. Синєкоп, д-р техн. наук, проф.
Л.О. Пархоменко, асист.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ СКЛАДЕНОГО ЦИЛІНДРА

Розглянуто задачу теорії пружності про розрахунок власних коливань складеного пружного циліндра скінченної довжини. Її розв'язання здійснюється спільним застосуванням методу R-функцій і варіаційного, що дозволяє звести вихідну задачу до задачі на власні значення.

Рассматривается задача теории упругости о расчете собственных колебаний составного упругого цилиндра конечной длины. Ее решение осуществляется совместным использованием метода R-функций и вариационного, что позволяет свести исходную задачу к задаче на собственные значения.

The elasticity theory problem of the calculation of free vibration for a composite elastic cylinder of finite length is considered. Combined using R-function method and variational method for solving problem is proposed, at that the original problem is reduced to the eigenvalue problem.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Циліндр скінченної довжини широко використовується в машинобудуванні, а також часто зустрічається в конструкціях двигунів та енергетичному устаткуванні. Збільшення навантаження на такі деталі зумовлює необхідність дослідження їх власних коливань. Математичною моделлю коливальних процесів у пружному тілі є рівняння руху [1], а врахування усталеності коливань дозволяє вихідну задачу зводити до алгебраїчної проблеми власних чисел.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача про розрахунок коливань циліндра класичної форми розглянута в [2]. Відхилення геометрії циліндра від класичної потребує використання наближених методів, зокрема – методу скінченних елементів [3].

Мета та завдання статті. У цій роботі пропонується наближений метод розрахунку усталених коливань циліндра скінченної довжини, що складається із двох різних матеріалів, з використанням методу R-функцій і варіаційного. Такий підхід дозволяє розглядати циліндри довільної бічної форми та будувати структури розв'язку, в яких враховується геометрична інформація.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай Ω – скінченне тіло обертання з межею $\partial\Omega$, що розглядається в циліндричній системі координат Orz (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Досліджується випадок відсутності масових і поверхневих сил.

Нехай тіло обертання висоти h складається з двох виконаних із різних матеріалів частин Ω_1 і Ω_2, що жорстко закріплені по площині розділу $z = h_0$ та характеризуються сталими Ламе λ_1, μ_1 та λ_2, μ_2 відповідно. Рух пружного тіла визначається векторним рівнянням [1]

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{graddiv}U - \mu\,\mathrm{rotrot}U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де $U(t,r,z) = \begin{cases} U_1(t,r,z), (r,z) \in \Omega_1 \\ U_2(t,r,z), (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$ – вектор зміщень; $\lambda = \begin{cases} \lambda_1, (r,z) \in \Omega_1 \\ \lambda_2, (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$, $\mu = \begin{cases} \mu_1, (r,z) \in \Omega_1 \\ \mu_2, (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$, $\rho = \begin{cases} \rho_1, (r,z) \in \Omega_1 \\ \rho_2, (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$ – густина матеріалу.

Припускаємо періодичність коливальних процесів у часі та вважаємо, що

$$U(t,r,z) = e^{-i\gamma t} u(r,z); \; u = \begin{cases} u_1, (r,z) \in \Omega_1 \\ u_2, (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}; \; u_i(r,z) = \begin{pmatrix} u_{ir}(r,z) \\ u_{iz}(r,z) \end{pmatrix}, (i = 1,2), \tag{2}$$

де γ – кругова частота процесу.

Позначимо через β відношення швидкості розповсюдження поперечних хвиль c_2 до швидкості розповсюдження повздовжніх хвиль c_1 в нескінченному пружному середовищі, тобто $\beta = c_2 / c_1$, при цьому $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $c_2^2 = \mu/\rho$.

Візьмемо за масштаб довжини деяку характерну величину R, за масштаб часу – величину R/c_2. Компоненти вектора зміщень і тензора напружень вважаємо співвіднесеними відповідно до $R\sigma_0/\mu$ і σ_0 (σ_0 – деяка стала, яка має розмірність напруження). Ураховуючи співвідношення (2), рівняння (1) в безрозмірних величинах набуває вигляду

$$\frac{1}{\beta^2}\,\mathrm{graddiv}u - \mathrm{rotrot}u = -\gamma^2 u, \tag{3}$$

де $\beta = \begin{cases} \beta_1, (r,z) \in \Omega_1 \\ \beta_2, (r,z) \in \Omega_2 \end{cases}$.

Вважаємо, що ділянка $\partial\Omega_{01}$ межі тіла $\partial\Omega$, що відповідає площині $z=0$, є закріпленою, а на ділянці $\partial\Omega_{02}=\partial\Omega\setminus\partial\Omega_{01}$ задані нульові нормальне $\sigma_\nu=\begin{cases}\sigma_{1\nu},(r,z)\in\partial\Omega_1\\ \sigma_{2\nu},(r,z)\in\partial\Omega_2\end{cases}$ та дотичне $\tau_\nu=\begin{cases}\tau_{1\nu},(r,z)\in\partial\Omega_1\\ \tau_{2\nu},(r,z)\in\partial\Omega_2\end{cases}$ напруження:

$$u_1=0\,,(r,z)\in\partial\Omega_{01}\,;$$

$$\sigma_\nu=0\,;\ \tau_\nu=0\,,\ (r,z)\in\partial\Omega_{02}\,, \tag{4}$$

де ν – зовнішня нормаль до межі області.

На межі розділу $z=h_0$ повинні виконуватися наступні умови:

$$u_1=u_2\,,\ \sigma_{1\nu}=\sigma_{2\nu}\,,\ \tau_{1\nu}=\tau_{2\nu}\,. \tag{5}$$

Рівняння (3) можна переписати в операторному вигляді як

$$Au=ku\,, \tag{6}$$

де

$$k=\gamma^2\,;\ Au=-\left(\frac{1}{\beta^2}\operatorname{graddiv}u-\operatorname{rotrot}u\right). \tag{7}$$

Таким чином, дослідження коливань тіла, що розглядається, зводиться до задачі на власні значення (6) за умов (4)–(5).

Для розв’язання отриманої задачі застосуємо варіаційний метод. Знаходження мінімального власного значення оператора A, визначеного рівністю (6), еквівалентно задачі про знаходження мінімуму функціонала енергії [2]

$$E(u)=E(u_1)+E(u_2)\,, \tag{8}$$

де

$$E(u_i)=\int\limits_{\Omega_i}\left\{\frac{1-2\beta_i^{\,2}}{\beta_2^{\,2}}\left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial r}+\frac{u_{ir}}{r}+\frac{\partial u_{iz}}{\partial z}\right)^2+2\left(\left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{u_{ir}}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_{iz}}{\partial z}\right)^2\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial u_{ir}}{\partial z}+\frac{\partial u_{iz}}{\partial r}\right)^2\right\}\mathrm{d}\,\Omega_i\,,\ i=1{,}2$$

за умови
$$\int_{\Omega_1}\left(u_{1r}^2+u_{1z}^2\right)\mathrm{d}\Omega_1+\int_{\Omega_2}\left(u_{2r}^2+u_{2z}^2\right)\mathrm{d}\Omega_2=1. \tag{9}$$

Згідно з методом R-функцій [4] наближений розв’язок задачі (8–9) будемо шукати у вигляді:

$$\begin{aligned}u_{1r}=\omega_{01}\Phi_1-\omega\Bigg\{&D_1(\omega_{01}\Phi_1)-2(1-\beta_1^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}T_1(\omega_{01}\Phi_1)+\\&+(1-2\beta_1^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\omega_{01}\Phi_1}{r}-\left[\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta_1^2)\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_{01}\Phi_2)\Bigg\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{1z}=\omega_{01}\Phi_2-\omega\Bigg\{&D_1(\omega_{01}\Phi_2)+2(1-\beta_1^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}T_1(\omega_{01}\Phi_2)+\\&+(1-2\beta_1^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\frac{\omega_{01}\Phi_1}{r}-\left[(1-2\beta_1^2)\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_{01}\Phi_1)\Bigg\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_{2r}=\omega_{01}\Phi_1-\omega_2\Bigg\{&\left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1\right)\frac{\omega_{02}}{\omega_{02}+\omega_0}\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\left(\dfrac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial r}+\dfrac{\omega_{01}\Phi_1}{r}+\dfrac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial z}\right)}{1-(1-2\beta_2^2)\left(\dfrac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2+\omega_2^2}+\\&+\frac{\omega_0}{\omega_{02}+\omega_0}\Bigg[D_1(\omega_{01}\Phi_1)-2(1-\beta_2^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}T_1(\omega_{01}\Phi_1)+\\&+(1-2\beta_2^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\omega_{01}\Phi_1}{r}-\left(\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta_2^2)\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\right)^2\right)T_1(\omega_{01}\Phi_2)\Bigg]\Bigg\};\end{aligned}$$

$$u_{2z}=\omega_{01}\Phi_1+\omega_2\left\{\left(\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}-1\right)\frac{\omega_{02}}{\omega_{02}+\omega_0}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\left(\dfrac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial r}+\dfrac{\omega_{01}\Phi_1}{r}+\dfrac{\partial(\omega_{01}\Phi_1)}{\partial z}\right)}{1-(1-2\beta_2^2)\left(\dfrac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2+\omega_2^2}-\right.$$

$$-\frac{\omega_0}{\omega_{02}+\omega_0}\left[D_1(\omega_{01}\Phi_2)+2(1-\beta_2^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}T_1(\omega_{01}\Phi_2)+\right.$$

$$\left.\left.+(1-2\beta_2^2)\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\frac{\omega_{01}\Phi_1}{r}-\left((1-2\beta_2^2)\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\right)^2\right)T_1(\omega_{01}\Phi_1)\right]\right\}. \quad (10)$$

Тут:

1. Функції $\omega_i(r,z)$, $\omega_{0i}(r,z), \omega(r,z)\in C^1(\Omega)$ ($i=1,2$), побудовані за допомогою апарату R-функцій, є лівими частинами нормалізованих до першого порядку рівнянь меж $\partial\Omega_i$, $\partial\Omega_{0i}$ ($i=1,2$) та $\partial\Omega\wedge\{z=h_0\}$ відповідних областей [4] та мають такі властивості:

а) $\omega_i, \omega_{0i}, \omega>0$ всередині відповідних областей;

б) $\omega_i\big|_{\partial\Omega_i}=0$, $\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_i}=-1$; $\omega_{0i}\big|_{\partial\Omega_{0i}}=0$, $\left.\frac{\partial\omega_{0i}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_{0i}}=-1$ ($i=1,2$);

$\omega\big|_{\partial\Omega\wedge\{z=h_0\}}=0$; $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=-1$; $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{z=h_0}=0$.

2. Оператори D_1 і T_1 визначаються рівностями

$$D_1 g=\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z};\quad T_1 g=-\frac{\partial\omega_{02}}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{\partial\omega_{02}}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z}.$$

3. Функції $\Phi_i(r,z)$ $(i=1,2)$ є довільними. При будь-якому їх виборі умови (4)–(5) виконуються точно. У чисельній реалізації структур розв'язку (10) функції Φ_i подаються у вигляді розвинення за елементами деякої повної системи функцій (поліномів Чебишева, сплайнів та ін.):

$$\Phi_1(r,z)=\sum_{m=1}^{n_1}C_{1,m}\varphi_m^{(1)}(r,z);\quad \Phi_2(r,z)=\sum_{m=1}^{n_2}C_{2,m}\varphi_m^{(2)}(r,z). \quad (11)$$

Підставивши (11) у формули (10), надамо наближений розв'язок задачі (8–9) у вигляді:

$$u_{1rn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{11,i}(r,z)\ ;\quad u_{1zn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{12,i}(r,z)\,,$$

$$u_{2rn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{21,i}(r,z)\,;\quad u_{2zn}(r,z)=\sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{22,i}(r,z)\,, \qquad (12)$$

де $n=n_1+n_2\,;\,C_i=\begin{cases} C_{1,i}\ , & i\le n_1 \\ C_{2,i}\ , & n_1<i\le n \end{cases}\,;\,\Psi_{kl,i}(r,z)\ \ (i=\overline{1,n};\,k,l=1{,}2)-$ деякі функції, що визначаються структурами (10).

Мінімізуючи функціонал (8) на множині функцій (12), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i\left(a_{ij}-k\cdot b_{ij}\right)=0\ \ (\,j=\overline{1,n}\,), \qquad (13)$$

де

$$a_{ij}=a_{1,ij}+a_{2,ij}\ ;$$

$$a_{k,ij}=\int_{\Omega_k}\left\{\frac{1-2\beta_k^2}{\beta_k^2}\left(\frac{\partial\Psi_{k1,i}}{\partial r}+\frac{\Psi_{k1,i}}{r}+\frac{\partial\Psi_{k2,i}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi_{k1,j}}{\partial r}+\frac{\Psi_{k1,j}}{r}+\frac{\partial\Psi_{k2,j}}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{\partial\Psi_{k1,i}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi_{k1,j}}{\partial r}+\frac{\Psi_{k1,i}\Psi_{k1,j}}{r^2}+\frac{\partial\Psi_{k2,i}}{\partial z}\frac{\partial\Psi_{k2,j}}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial\Psi_{k1,ii}}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_{k2,i}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Psi_{k1,j}}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_{k2,j}}{\partial r}\right)\right\}\mathrm{d}\Omega_k$$

,;

$$b_{ij}=\int_{\Omega_1}(\Psi_{11,i}\Psi_{11,j}+\Psi_{12,i}\Psi_{12,j})\,\mathrm{d}\Omega_1+\int_{\Omega_2}(\Psi_{21,i}\Psi_{21,j}+\Psi_{22,i}\Psi_{22,j})\,\mathrm{d}\Omega_2\ ; \qquad (14)$$

$$(\,k=1{,}2;\ i,\,j=\overline{1,n}\,).$$

Перші n власних значень $k_1<k_2<\ldots<k_n$ задачі (6) визначаються рівнянням, що випливає із системи (13):

$$\det(A-kB)=0\,,$$

де $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $B=\{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Коефіцієнти C_i апроксимуючих розвинень (12) визначаються для кожного власного значення $k=k_i$ $(\,i=\overline{1,n}\,)$ як розв’язки системи лінійних рівнянь (13) за умови (9). Вони визначають власні форми задачі (8–9).

Чисельні результати. Розглянемо одновимірну задачу про власні коливання складеного стрижня довжини l, розташованого в декартовій системі координат Oxy вздовж осі абсцис. Вважаємо лівий кінець стрижня закріпленим в початку координат. Нехай точка $x = l_0$ розбиває стрижень на дві частини, виготовлені із різних матеріалів, що характеризуються параметрами β_1 і β_2. Маємо наступну задачу:

$$-\frac{1}{\beta^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \gamma u\ ; \tag{15}$$

$$u_1\big|_{x=0} = 0\ ;\ \left.\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l} = 0\ ;$$

$$u_1\big|_{x=l_0-0} = u_2\big|_{x=l_0+0}\ ;\ \left.\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l_0-0} = \left.\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l_0+0} \tag{16}$$

де $u = \begin{cases} u_1(x),\ x \in [0;l_0) \\ u_2(x),\ x \in (l_0;l] \end{cases}$, $\beta = \begin{cases} \beta_1,\ x \in [0;l_0) \\ \beta_2,\ x \in (l_0;l] \end{cases}$, $\gamma -$ кругова частота коливального процесу.

Точний розв'язок задачі (15)–(16) легко отримати за допомогою методу Фур'є відокремлювання змінних.

Отримаємо наближений розв'язок задачі про власні коливання складеного стрижня за допомогою методу, запропонованого вище. Структури (10) наближеного розв'язку мають вигляд

$$u_1 = \omega_1\Phi,\ \ x \in [0;l_0)\,;$$

$$u_2 = \omega_1\Phi - \omega_2\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}(\omega_1\Phi)}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{\beta_2^2}{\beta_1^2}\frac{l-x}{l-l_0}\right),\ \ x \in (l_0;l]\,,$$

де $\omega_1 = x$, $\omega_2 = \dfrac{(l-x)(x-l_0)}{l-l_0}$. При цьому при побудові розвинення типу (11) за повну систему функцій $\{\varphi_m(r,z)\}_{m=1}^{\infty}$ береться система степеневих поліномів.

Інтеграли (14) обчислювались наближено за допомогою квадратурних формул Гаусса, порядок яких узгоджувався зі степенями апроксимуючих поліномів.

У таблиці наведено перші чотири власних значення у порівнянні із точним розв'язком. У наведених результатах степінь апроксимуючого полінома $n = 6$. Для обчислень покладено $l = 10$; $l_0 = 4$; $\beta_1 = 0{,}4844$; $\beta_2 = 0{,}5521$. Усі розрахунки виконано в середовищі Maple 9.5.

Таблиця – **Власні значення складеного стрижня**

Власне значення	k_1	k_2	k_3	k_4
Точний розв'язок	0,09641	0,79804	2,22046	4,43636
Наближений розв'язок	0,09676	0,80180	2,24767	4,59434

На рисунку показано власні форми f_1, f_2, f_3, f_4, що відповідають першим чотирьом власним значенням, та стрижень у стані спокою f_0.

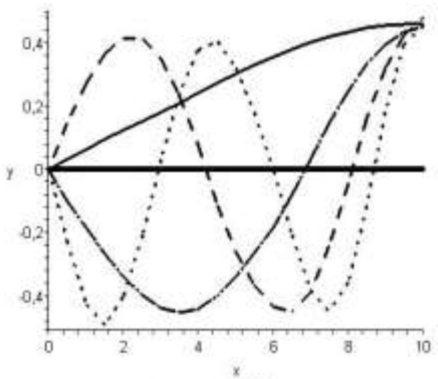

Рисунок – Власні форми коливання складеного стрижня: ▬ – f_0;── – f_1; —·– – f_2; - - - – f_3;……… – f_4;

Висновки. Розроблено універсальний алгоритм для розрахунку власних коливань циліндрів довільної бічної форми, складених із двох різних матеріалів. Координатні послідовності варіаційної задачі будуються за допомогою лівих частин нормалізованих до першого порядку рівнянь меж областей. Алгоритм реалізовано за допомогою програмного пакету Maple 9.5.

Список літератури

1. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах [Текст] / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко. – К. : Наук. думка, 1981.– 284 с.
2. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин. – М. : Наука, 1970.– 512 с.
3. Чирков, А. Ю. Применение смешанных вариационных формулировок МКЭ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел [Текст] / А. Ю. Чирков // Проблемы прочности. – 2008. – № 2. – С. 121–140.
4. Рвачев, В. Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности [Текст] / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекоп. – К. : Наук. думка, 1990. – 216 с.

Отримано 31.03.2010. ХДУХТ, Харків.

УДК 664.8.033:664.8.036

Ю.І. Єфремов, канд. техн. наук, доц.
С.В. Михайлова, асп.
К.В. Кострова, студ.
А.А. Деменко, студ.

РОЗРОБКА ПЕРСПЕКТИВНИХ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕРОБКИ ДИКОРОСЛОЇ ТА ПРЯНО-АРОМАТИЧНОЇ СИРОВИНИ Й ОБЛАДНАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ НВЧ-НАГРІВУ І ВАКУУМУВАННЯ

Досліджено дрібнодисперсні системи на основі рослинної сировини з використанням НВЧ-нагріву і вакуумування, отримано нові продукти з дикорослої та пряно-ароматичної сировини, які краще засвоюються організмом людини.

Исследованы мелкодисперсные системы на основе растительного сырья с использованием СВЧ-нагрева и вакуумирования, получены новые продукты из дикорастущего и пряно-ароматического сырья, которые лучше усваиваются организмом человека.