

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний біотехнологічний університет
ФАКУЛЬТЕТ МЕХАТРОНІКИ ТА ІНЖИНІРИНГУ

Кафедра фізики і математики

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Основи теорії та методика розв'язування задач
з варіантами індивідуальних завдань

для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої
освіти інженерних спеціальностей

Затверджено
Рішенням Науково-методичної
ради ФМІ ДБТУ
Протокол № 5 від 27.03.2025 р.

Харків
2025

Схвалено
на засіданні кафедри фізики і математики

Протокол № 8 від 26.03.2025 р.

Випадкові величини: основи теорії та методика розв'язування задач з варіантами індивідуальних завдань для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец./ О.І.Завгородній [та ін.]; Держ. біотехнол. ун-т.— Харків: ДБТУ, 2025. — 148 с.

Навчально-методичний посібник призначений для вивчення основного розділу теорії ймовірностей “Випадкові величини”. Для самостійної роботи і придбання практичних навичок розв’язку задач наведена необхідна теоретична інформація та варіанти індивідуальних завдань. Розібрана достатня кількість прикладів і приведено зразок виконання індивідуального завдання. Для більш глибокого розуміння матеріалу і поліпшення ефективності роботи над індивідуальним завданням показана комп’ютерна технологія розв’язку задач засобами «Mathcad».

Розрахована на студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти інженерних спеціальностей.

Рецензенти:

А. О. Пак, докт. техн. наук, професор, зав. кафедрою фізики і математики
Державного біотехнологічного університету

А. О. Рамський, канд. фіз.-мат. наук, доцент, зав. кафедрою вищої математики та комп’ютерних застосувань Хмельницького національного університету.

Відповідальний за випуск О. І. Завгородній, д-р техн. наук., проф.

© Завгородній О. І., Соловиченко О.В.
Стороженко І.П., Левкін Д.А.,
Сичова Т.О., 2025
© ХБТУ, 2025

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА	7
1. ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ.....	8
1.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин	11
1.2 Закони розподілу неперервних випадкових величин	18
2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ	25
2.1. Числові характеристики розміщення значень випадкових величин.....	25
2.1.1. Математичне сподівання $M[X]$	25
2.1.2. Мода $M_0[X]$	28
2.1.3. Медіана $M_d[X]$	29
2.2. Числові характеристики розсіювання значень випадкових величин.....	33
2.2.1. Дисперсія $D[X]$	33
2.2.2. Середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$	35
2.2.3. Коефіцієнт варіації $V[X]$	35
2.3. Початкові і центральні моменти, числові характеристики скошеності і крутизни розподілу	39
2.3.1. Асиметрія $A[X]$	40
2.3.2. Ексцес $E[X]$	41
3. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН	44
3.1. Біноміальний розподіл.....	45
3.2. Розподіл Пуассона.....	49
3.3. Рівномірний закон розподілу	52
3.4. Показниковий закон розподілу	56
3.5. Нормальний закон розподілу (Гауса).....	60

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ В СЕРЕДОВИЩІ

MATHCAD	70
4.1. Приклад виконання індивідуального завдання	71
4.2. Коротка довідка про використання влаштованих функцій «Mathcad»	76
ДОДАТКИ (контрольна робота, індивідуальні завдання, таблиці математичної статистики)	92
ЛІТЕРАТУРА	147

ПЕРЕДМОВА

Аналітичне дослідження закономірностей в природі, технологічних процесів у виробництві тощо часто відрізняється високим рівнем складності, що гальмує оволодіння відповідними знаннями про процеси, які розглядаються. В цих випадках успішно застосовуються методи теорії ймовірностей та математичної статистики. Важливим розділом теорії ймовірності є “Випадкові величини”, тому без оволодіння методами цієї дисципліни проводити зазначені дослідження досить складно. Відзначимо, що теорія ймовірностей є частиною тих розділів вищої математики, які обов’язкові для вивчення студентами закладів вищої освіти технічних спеціальностей.

Мета посібника прищепити студентам навички у розв’язуванні задач методами теорії випадкових величин у різних галузях народногосподарського виробництва.

У першому розділі розглядаються загальні поняття, що стосуються випадкових величин та питання про способи їх задання. Окремо розглянуті дискретні та неперервні випадкові величини, закони їх розподілу, зв’язок з імовірностями.

Другий розділ присвячено числовим характеристикам випадкових величин, які вказують на розміщення та розсіювання їх значень, скошеність та гостровершинність розподілів.

В третьому розділі розглядаються найрозповсюдженіші закони розподілу, в тому числі – нормальний закон (Гауса).

З метою поліпшення ефективності роботи над індивідуальними завданнями та більш глибокого оволодіння студентами сучасних комп’ютерних технологій в четвертому розділі наведено приклад виконання індивідуального завдання в середовищі «Mathcad». Надана коротка інформація щодо інструментів, які при цьому використовуються.

В останній частині посібника наведено додатки з контрольною роботою, індивідуальними завданнями, таблицями математичної статистики, необхідними для розв’язку задач. Окремо дається індивідуальне завдання, пристосоване для виконання в середовищі «Mathcad».

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики і буде корисним для студентів денної і заочної форм навчання.

1. Загальні поняття

Базовим поняттям теорії ймовірностей є “випробування”¹, в результаті якого може очікуватися якісний чи кількісний результат. Якісний результат – це “подія”, яка з певною ймовірністю може відбутися, чи не відбутися. Кількісним наслідком експерименту є деякі числові значення, які теж виникають з певною ймовірністю. Наприклад, якщо випробування полягає в пострілі по мішені, то “попадання в мішень” – якісна, а “число попадань” – кількісна характеристика випробування, яка в цьому прикладі приймає значення 0 або 1. Величини, які можуть приймати в результаті випробування будь-яке з можливих значень, невідомо яке заздалегідь, заслуговують особливої уваги і є предметом подальшого вивчення.

Під **випадковою величиною** розуміють таку, яка в результаті випробування з випадковим наслідком приймає те чи інше значення.

Випадкова величина позначається великими літерами латинського алфавіту: **$X, Y, Z, \dots$**

Значення випадкової величини **X** позначаються відповідними малими літерами: **$x_1, x_2, x_3, \dots$**

Наприклад, при одноразовому підкиданні грального кубика може з'явитися одне з чисел: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Яке саме з цих чисел випаде передбачити неможливо із-за великої кількості факторів, які впливають на експеримент (підкидання). При першому підкиданні може з'явитися “одиниця”, при другому – “трійка” або ж знову “одиниця” і т. д. Отже “число випавших очок” в указаному випробуванні і є випадковою величиною.

Якщо **випадкова величина** приймає окремі ізольовані значення, які можна перелічити числами натурального ряду (злічена множина), то її називають **дискретною**.

¹ Застосовуються також терміни “дослід”, “експеримент”

В попередньому прикладі “число випавших очок” – дискретна випадкова величина.

Розглянемо тепер випробування, яке полягає в підкиданні монети до першої появи числа. Випадковою величиною будемо вважати “число випавших підряд гербів”. Очевидно, що ця випадкова величина може приймати нескінченну множину значень: 0; 1; 2; 3... . Але їх можна перелічити числами натурального ряду, тому маємо справу з дискретною випадковою величиною.

Якщо **випадкова величина** приймає всі значення деякої ділянки числової осі (незлічена множина), то її називають **неперервною**.

“Кількість опадів на добу”, “затрати палива на одиницю відстані”, “дальність польоту артилерійського снаряду” – приклади неперервних випадкових величин.

П р и м і т к а. Відмінністю дискретних випадкових величин є те, що в проміжку між двома їх послідовними значеннями немає інших значень цієї ж випадкової величини. У неперервних же випадкових величин, навпаки, не можна вказати проміжок між двома значеннями випадкової величини, між якими не було б інших значень.

В наступних прикладах пропонується встановити які з наведених випадкових величин є дискретними, а які – неперервними.

1. Число бракованих виробів у випадково взятій партії з 50 виробів.
2. Діаметр валиків, що виготовляються за кресленням на токарному станку.
3. Число випавших гербів при підкиданні п'яти монет.
4. Час польоту артилерійського снаряду при враженні одного й того ж об'єкту.
5. Число присутніх студентів групи з 30 чоловік на заняттях з профільної дисципліни у першому семестрі.

Нехай випадкова величина X має значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, а випадкова величина Y – значення $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$. З цих випадкових величин за певними правилами (діями) можна утворювати інші випадкові величини.

Сумою $X + Y$ випадкових величин X і Y називають випадкову величину $Z = X + Y$, яка приймає значення: $x_1 + y_1, x_1 + y_2, \dots, x_1 + y_m, x_2 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_2 + y_m, \dots, x_n + y_1, x_n + y_2, \dots, x_n + y_m$.

Тобто, якщо в результаті випробування випадкова величина X прийме одне з можливих значень x_i , а випадкова величина Y – одне з можливих значень y_j , то одним з можливих значень випадкової величини Z буде сума $x_i + y_j$.

Добутком XY випадкових величин X і Y називають випадкову величину $Z = XY$, яка приймає значення: $x_1y_1, x_1y_2, \dots, x_1y_m, x_2y_1, x_2y_2, \dots, x_2y_m, \dots, x_ny_1, x_ny_2, \dots, x_ny_m$.

Поняття суми і добутку випадкових величин легко розповсюджується на будь-яке скінченне число випадкових величин ($Z_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_k$, $Z_2 = X_1X_2 \dots X_k$).

Добутком CX випадкової величини X на сталу C називають випадкову величину $Z = CX$, можливі значення якої: $Cx_1, Cx_2, Cx_3, \dots, Cx_n$.

Крім названих упрощаються також дії віднімання $X - Y$ та ділення X/Y випадкових величин. Вони визначаються аналогічно, але в останньому випадку величина Y не повинна приймати нульових значень.

Приклад 1. Випадкова величина X приймає значення $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$, а випадкова величина Y – значення $y_1 = 3, y_2 = 4, y_3 = 5$. Тоді випадкова величина $Z = X + Y$ може приймати значення $z_1 = 3, z_2 = 4, z_3 = 5, z_4 = 6, z_5 = 7$, а випадкова величина $Z = XY$ – $z_1 = 0, z_2 = 3, z_3 = 4, z_4 = 5, z_5 = 6, z_6 = 8, z_7 = 10$. Для величини $Z = 7X$ можливими значеннями будуть $z_1 = 0, z_2 = 7, z_3 = 14$.

1.1. Закони розподілу дискретних випадкових величин

Як стверджувалось вище, не можна вказати заздалегідь яке саме значення випадкової величини з'явиться при проведенні заданого випробування. Але важливим є питання про ступінь можливості появи того чи іншого значення. Якщо значення $z_2 = 3$ випадкової величини $Z = X + Y$ (приклад 1) виникає лише тоді, коли з'являться числа $x = 0$, $y = 3$ випадкових величин X і Y , то значення $z_3 = 5$ виникає, коли з'являться або числа $x = 0$, $y = 5$, або $x = 1$, $y = 4$, або $x = 2$, $y = 3$. Таким чином, більш очікуваним значенням випадкової величини Z є: $z_3 = 5$.

Отже, найбільш повно випадкова величина характеризується тоді, коли крім області її значень задані також ймовірності набування цих значень.

Будь-яке співвідношення між можливими значеннями дискретної випадкової величини та їх ймовірностями називають **законом розподілу цієї випадкової величини**.

Про саму випадкову величину кажуть, що вона розподілена за цим законом або підкоряється цьому закону.

Закон розподілу можна задати таблицею, графіком або аналітично. При табличному зображенні закону в першому рядку таблиці вказують значення випадкової величини в зростаючому порядку, а в другому рядку – відповідні ймовірності. Така **таблиця називається рядом розподілу**.

Таблиця 1. Ряд розподілу випадкової величини X

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

П р и м і т к а. В результаті проведення випробування обов'язково з'явиться одне з чисел x_i , тобто події $X = x_i$, утворюють повну групу. Це значить, що сума ймовірностей p_i у другому рядку таблиці дорівнює одиниці [5]:

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1. \quad (1.1)$$

Приклад 2. Побудувати ряд розподілу для випадкової величини X – число гербів при підкиданні двох монет.

При підкиданні двох монет на кожній з них може випасти або число – “Ч”, або герб – “Г” з однаковими ймовірностями $P(Ч) = P(Г) = 0,5$. Отже в даному випробуванні можливі наступні події: “ЧЧ”, “ЧГ”, “ГЧ”, “ГГ”, де перша літера відображає результат підкидання першої монети, а друга літера – другої монети. При цьому герб може з'явитися 0 разів, 1 раз або 2 рази. Ці події можна представити через елементарні “Ч”, “Г” в такому виді: $(X=0) = ЧЧ$, $(X=1) = ЧГ + ГЧ$, $(X=2) = ГГ$. Тоді на основі теорем про додавання та множення ймовірностей маємо: $P(X=0) = P(Ч)P(Ч) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$; $P(X=1) = P(Ч)P(Г) + P(Г)P(Ч) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 = 0,5$; $P(X=2) = P(Г)P(Г) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$.

По відомим значенням $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ випадкової величини X і їх ймовірностям будуємо ряд розподілу числа гербів при підкиданні двох монет.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

Графічне зображення ряду розподілу називають **многокутником розподілу** ймовірностей випадкової величини.

При побудові графіка по вісі абсцис відкладають значення випадкової величини, а по вісі ординат – їх ймовірності. Одержані точки з'єднують ламаною лінією. Очевидно, **що сума ординат многокутника повинна дорівнювати одиниці**. Многокутник розподілу, як і ряд розподілу, повністю характеризує випадкову величину і є одним із способів задання закону розподілу.

Приклад 3. Побудувати многокутник розподілу для випадкової величини X – число гербів при підкиданні двох монет.

Для побудови многокутника розподілу використаємо ряд розподілу з попереднього прикладу (табл.2).

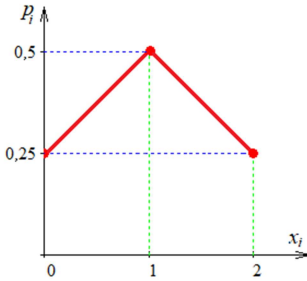


Рис.1

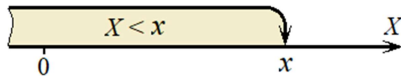
Як бачимо, многокутник розподілу містить ту ж інформацію, що і ряд розподілу.

Для аналітичного задання закону розподілу випадкової величини X використовують ймовірність події ($X < x$).

Функцією $F(x)$ розподілу випадкової величини X називають ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менші, ніж x :

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.2)$$

Геометрично функція $F(x)$ означає ймовірність того, що значення випадкової величини X попаде на інтервал числової осі лівіше точки x :



В загальному випадку при зміні положення точки x величина інтервалу $X < x$ буде змінюватись, а значить і ймовірність $P(X < x)$ буде залежати від цього положення, тобто буде функцією аргумента x . Тим самим формула (1.2) грає в теорії ймовірностей важливу роль, так як дає можливість застосовувати для задач теорії ймовірностей здобутки математичного аналізу функцій дійсної змінної.

Властивості функції розподілу $F(x)$:

$$1) 0 \leq F(x) \leq 1; \quad (1.3)$$

Властивість витікає з того, що функція $F(x)$ це ймовірність (1.2), а вона приймає значення в інтервалі $[0; 1]$.

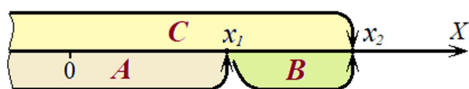
$$2) F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1; \quad (1.4)$$

$F(-\infty) = P(X < -\infty)$. Але випадкова величина не може прийняти значення, менші за “ $-\infty$ ”, тому подія $(X < -\infty)$ – неможлива і значить її ймовірність дорівнює нулю.

$F(\infty) = P(X < \infty)$. Але, якими б не були значення випадкової величини, вони завжди менші, ніж “ ∞ ”, тому подія $(X < \infty)$ є вірогідною. Ймовірність же вірогідної події дорівнює одиниці.

$$3) F(x_2) \geq F(x_1) \text{ при } x_2 > x_1, \\ \text{тобто } F(x) \text{ – неспадająca функція.} \quad (1.5)$$

Розглянемо події: $A = (X < x_1)$; $B = (x_1 \leq X < x_2)$; $C = (X < x_2)$.



Очевидно, що $C = A + B$. За теоремою про додавання несумісних подій маємо: $P(C) = P(A) + P(B)$. Тут $P(A) = P(X < x_1) = F(x_1)$; $P(B) = P(x_1 \leq X < x_2)$; $P(C) = P(X < x_2) = F(x_2)$. Звідси: $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$. Так як $P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, то $F(x_2) \geq F(x_1)$. Властивість підтверджено.

Відмітимо, що останні викладки дають для теорії ймовірностей важливий наслідок, який можна сформулювати так: **ймовірність попадання значень випадкової величини на проміжок $[x_1; x_2)$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:**

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (1.6)$$

Розглянемо тепер функцію розподілу для дискретних випадкових величин. Нехай задано ряд розподілу у виді табл.1.

Якщо $x \leq x_1$, то $F(x) = P(X < x_1) = 0$, так як подія $(X < x_1)$ неможлива.

Якщо $x_1 \leq x < x_2$, то $F(x) = p_1$, так як подія $(X < x)$ відбудеться тільки тоді, коли відбудеться подія $(X = x_1)$ з імовірністю p_1 .

Якщо $x_2 \leq x < x_3$, то $F(x) = p_1 + p_2$, так як подія $(X < x)$ є сумою подій $(X = x_1)$ і $(X = x_2)$ з імовірностями p_1 і p_2 і т. д.

.....

Якщо, нарешті, $x > x_n$, то $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, так як подія $(X < x)$ є сумою всіх можливих подій з імовірностями, сума яких дорівнює одиниці (1.1).

Взагалі, зрозуміло, що при $x_i \leq x < x_{i+1}$ маємо значення $F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$, тому функцію розподілу дискретної випадкової величини можна записати у вигляді:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i, \quad (1.7)$$

де сума береться для тих індексів i , для яких $x_i < x$.

В подальшому для побудови функції розподілу дискретної випадкової величини зручно застосовувати саме цю формулу.

П р и м і т к а. При обчисленні значень функції розподілу будь-якої дискретної випадкової величини доцільно мати на увазі, що її значення в першому і останньому проміжках відомі заздалегідь і дорівнюють відповідно “нулю” і “одиниці”.

Приклад 4. Побудувати графік функції розподілу для випадкової величини X – число гербів при підкиданні двох монет.

Використаємо ряд розподілу заданої випадкової величини (табл.2) та формулу (1.7).

Якщо $x \leq 0$, то $F(x) = 0$.

Якщо $0 < x \leq 1$, то $F(x) = p_1 = 0,25$.

Якщо $1 < x \leq 2$, то $F(x) = p_1 + p_2 = 0,25 + 0,5 = 0,75$.

Якщо $x > 2$, то $F(x) = 1$.

Отже, аналітичний вираз функції розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 0,25 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0,75 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

За одержаним виразом будуємо графік.

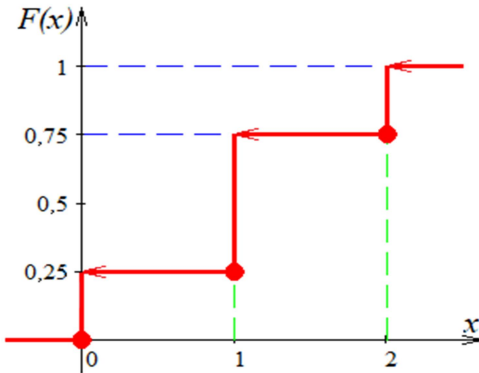


Рис.2

Нагадаємо, що затушований кружок показує, що точка належить відповідному проміжку, а кінець стрілки, що вона відсутня.

Принцип знаходження функції розподілу показує, що графік цієї функції для будь-яких дискретних випадкових величин є обов'язково ступінчатим, що наглядно показує рис.2.

Приклад 5. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини X (з попереднього прикладу) на проміжок $[1; 1,5]$.

Застосовуємо формулу (1.6) при $x_1 = 0,5$ і $x_2 = 1,5$. Значення функції $F(x)$ в заданих точках знаходимо з її аналітичного виразу, наведеного в прикладі 4, або безпосередньо з наявного графіка.

$$P(1 \leq x < 1,5) = F(1,5) - F(1) = 0,75 - 0,25 = 0,5.$$

Ймовірність набування випадковою величиною X деякого окремого значення $X = \alpha$ можна обчислити, як ймовірність попадання значень на проміжок $[\alpha; \beta)$ при умові що β прямує до α , тобто:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]. \quad (1.8)$$

Приклад 6. Знайти ймовірність набування випадковою величиною X (число гербів при підкиданні двох монет) значень $X=1$ та $x=1,5$.

Застосовуємо формулу (1.8) і аналітичний вираз функції $F(x)$ з прикладу 4.

$$P(X = 1) = \lim_{\beta \rightarrow 1} [F(\beta) - F(1)] = \lim_{\beta \rightarrow 1} (0,75 - 0,25) = 0,5.$$

$$P(X = 1,5) = \lim_{\beta \rightarrow 1,5} [F(\beta) - F(1,5)] = \lim_{\beta \rightarrow 1,5} (0,75 - 0,75) = 0.$$

Детальніше зупинимось на, одержаному в цьому прикладі, результаті, який буде корисним в подальшому. Як бачимо, **ймовірність набування випадковою величиною окремого значення $X = \alpha$ не є нульовою, якщо при $X = \alpha$ спостерігається стрибок функції розподілу $F(x)$.** При цьому зазначена ймовірність дорівнює якраз величині цього стрибка. **Якщо ж значення $X = \alpha$ попадає в область неперервності функції $F(x)$, то ймовірність цього значення дорівнює нулю.**

1.2 Закони розподілу неперервних випадкових величин

Якщо випадкова величина має незлічене число значень то для неї не можна скласти таблицю (ряд розподілу) з нескінченним числом стовпців, як не можна і побудувати многокутник розподілу з нескінченним числом вершин. Отже, ряд і многокутник розподілу можна застосувати лише для дискретних випадкових величин. Що ж стосується функції розподілу $F(x)$, то її визначення (1.2) і властивості не спираються на поняття дискретності чи неперервності, а тому вона є універсальною – застосовною як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

На відміну від ступінчатого графіка дискретної випадкової величини, в якому спостерігаються стрибки, рівновеликі ймовірності кожного значення, графік неперервної випадкової величини є безступінчастим, так, як ймовірність кожного окремого значення неперервної випадкової величини дорівнює нулю.

Якщо всі значення неперервної випадкової величини знаходяться в проміжку $[a; b]$, то другу властивість функції розподілу більш точно можна записати так:

$$2) F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; F(x) = 1 \text{ при } x \geq b. \quad (1.9)$$

Для неперервної випадкової величини виконуються співвідношення:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta) = P(\alpha < X \leq \beta). \quad (1.10)$$

Вони є зрозумілими, адже $P(X = \alpha) = 0$, $P(X = \beta) = 0$, тому виключення чи внесення окремої точки в числовий проміжок не змінює ймовірності попадання значень на цей проміжок. В зв'язку з цим формулу (1.6) для неперервних випадкових величин можна записати у вигляді:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \quad (1.11)$$

Приклад 6. Функція розподілу неперервної випадкової величини

X задана виразом:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{4}, \\ \lambda \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right] & \text{при } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти коефіцієнт λ і ймовірність попадання значень випадкової величини X в інтервал $(-\pi/4; \pi/4)$. Побудувати графік функції $F(x)$.

Скористаємося другою властивістю функції розподілу:

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 &\Rightarrow \lambda \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right] = 1 \Rightarrow \lambda(\cos 0 + 1) = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 1/2 \end{aligned}$$

Будуємо графік при відомому значенні коефіцієнта λ .

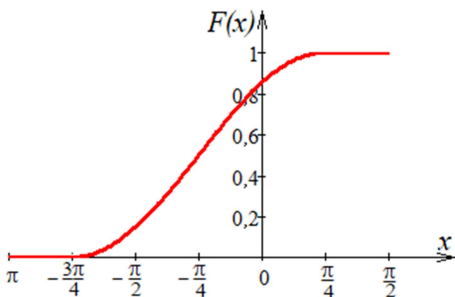


Рис.3

Графік на відрізку $[-3\pi/4; \pi/4]$ побудовано, як графік стандартної функції $\cos x$, який перенесли вправо вздовж вісі абсцис на $\pi/4$, вгору вздовж вісі ординат на одиницю і стиснули вдвічі по вісі ординат із-за наявності множника $\lambda = 1/2$.

Далі застосовуємо формулу (1.11) при $\alpha = -\pi/4$, $\beta = \pi/4$:

$$\begin{aligned} P(-\pi/4 \leq x \leq \pi/4) &= F(\pi/4) - F(-\pi/4) = 0,5(\cos 0 + 1) - \\ &- 0,5[\cos(-\pi/2) + 1] = 0,5(2 - 1) = 0,5 \end{aligned}$$

Введення функції розподілу – не єдиний спосіб задання неперервної випадкової величини. Її можна задати за допомогою щільності ймовірності, яку називають ще диференціальною функцією розподілу.

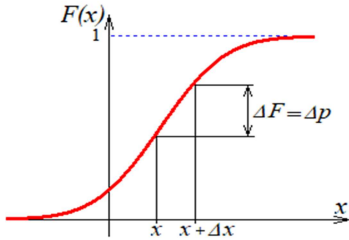


Рис.4

Нехай неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу $F(x)$, яка є неперервною і диференційовною. За формулою (1.11) ймовірність попадання значень випадкової величини X на елементарну ділянку Δx (рис.4) дорівнює:

$$\Delta p = P(x < X < x + \Delta x) = \Delta F = F(x + \Delta x) - F(x). \quad (1.12)$$

Знайдемо тепер ймовірність, яка припадає на довжину виділеної ділянки:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}. \quad (1.13)$$

Це співвідношення визначає середню щільність ймовірності на обраній ділянці. Щоб знайти точне значення щільності в точці x перейдемо в ньому до границі за умови, що довжина ділянки прямує до нуля:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x). \quad (1.14)$$

Одержана нова функція розподілу ймовірностей, яку звично позначають $f(x)$.

Щільністю ймовірності або **диференціальною функцією розподілу** випадкової величини X називається перша похідна від функції розподілу $F(x)$:

$$f(x) = F'(x). \quad (1.15)$$

Щільність ймовірності, особливо її графічна інтерпретація, вигідно відрізняється від функції $F(x)$ в сенсі наглядності представлення випадкових величин. Вона дає чітке уявлення про те, які значення випадкової величини є більш очікуваними, а які – менш очікуваними при проведенні випробування.

Оскільки $F(x)$ є первісною для $f(x)$, то, враховуючи формулу Ньютона-Лейбніца² [10], вираз (1.11) можна записати таким чином:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx. \quad (1.16)$$

Графічно це означає, що ймовірність попадання значень випадкової величини на інтервал $(\alpha; \beta)$ дорівнює площі

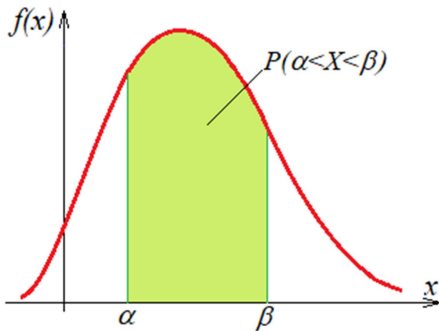


Рис.5

криволінійної трапеції (на рис.5 – заштрихована), обмеженої графіком щільності, віссю абсцис та вертикальними прямими $x = \alpha$, $x = \beta$.

² $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Властивості щільності ймовірності $f(x)$:

1) щільність невід'ємна функція, як похідна від неспадної функції, а значить – **графік щільності лежить не нижче вісі абсцис;**

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty) = 1. \quad (1.17)$$

Інтеграл (1.17) дорівнює ймовірності **вірогідної** події – “**попадання значень випадкової величини в інтервал $(-\infty; \infty)$** ”, тому він і дорівнює одиниці. З іншого боку інтеграл визначає площу, яка накривається кривою щільності. Отже, **площа під кривою щільності дорівнює одиниці.**

Для вирішення різних задач одна з функцій $F(x)$ чи $f(x)$ може виявитися більш зручною. Якщо, наприклад, відомою є функція $F(x)$, а нам потрібно скористатися функцією $f(x)$, то слід визначити цю функцію за формулою (1.15). Отже, залишається ще відкритим питання, як по відомій функції $f(x)$ знайти $F(x)$.

Запишемо, спочатку, очевидне співвідношення: $F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x)$. Далі знадобиться формула (1.16) для знаходження ймовірності попадання значень випадкової величини на заданий інтервал:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (1.18)$$

Як відомо, визначений інтеграл не залежить від змінної інтегрування. До того ж верхня межа інтегрування і змінна інтегрування грають у визначеному інтегралі різні ролі. Маючи це на увазі, змінну інтегрування у виразі (1.18) позначено буквою t , відмінною від x . Якщо функція $f(x)$ відома, то функцію $F(x)$ знаходять інтегруванням за виразом (1.18). Тут буде доречно привести і її уточнену назву: **$F(x)$ – інтегральна функція розподілу.**

Приклад 7. Випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$, як у прикладі 6. Знайти диференціальну функцію розподілу і побудувати її графік.

$$\text{Якщо } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \text{ то } F(x) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right].$$

Тоді на цьому відрізку:

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 \right]' = -\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

На інших ділянках $f(x) = 0$, як похідна від сталих 0 та 1. Отже, диференціальна функція розподілу має вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -\frac{\pi}{4}, \\ -\frac{1}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) & \text{при } -\frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

При побудові графіка функції $f(x)$ використовуємо синусоїду $\sin x$, яку переносимо вправо вздовж вісі абсцис на $\pi/4$, стискаємо вдвічі вздовж вісі ординат і відображаємо криву вертикально відносно вісі абсцис. Графік зображено на рис.6.

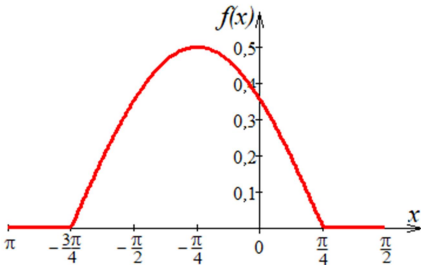


Рис.6

Приклад 8. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 3(x-1)^2 & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу і побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Інтегральну функцію знайдемо за співвідношенням (1.18). Але функція $f(x)$ задана неоднаково на різних інтервалах, тому кожен інтервал слід розглядати окремо.

1. Якщо $x < 1$, то $f(x) = 0$. Маємо:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

2. Якщо $1 \leq x \leq 2$, то $f(x) = 3(x-1)^2$. Тоді:

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + 3 \int_1^x (t-1)^2 dt = 0 + 3 \left. \frac{(t-1)^3}{3} \right|_1^x = (x-1)^3.$$

3. Якщо $x > 2$, то $f(x) = 0$. Отже:

$$F(x) = \int_{-\infty}^1 0 dx + 3 \int_1^2 (x-1)^2 dx + \int_2^x 0 dx = 0 + 3 \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_1^2 + 0 = 1.$$

Інтегральна функція розподілу знайдена:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ (x-1)^3 & \text{при } 1 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ представлені нижче (рис.7, а, б).

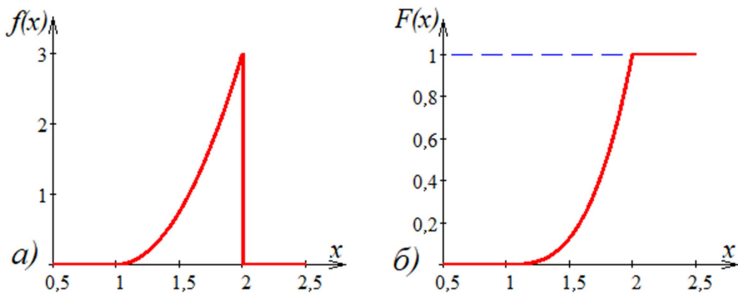


Рис.7

2. Числові характеристики випадкової величини

На основі викладеного вище, можна стверджувати, що функція розподілу (в будь-якій її формі) містить всю інформацію про задану випадкову величину. Але часто аналітичний вираз функції розподілу є досить складним з використанням, наприклад, неелементарних функцій тощо. В цих випадках виявлення характерних рис випадкової величини стає непростю задачею. Складання таблиць значень таких функцій розподілу не набагато спрощують ситуацію. З іншого боку розв'язування практичних задач вимагає, як правило, не всієї інформації про випадкову величину, а лише знань про певні параметри, що характеризують її істотні ознаки. Ці параметри, які є не функціями, а **числами, називають числовими характеристиками випадкових величин**. До них відносяться математичне сподівання, дисперсія, моменти різних порядків і т. д. Допоміжно відзначимо, що їх призначення – в стислій формі показати найбільш важливі риси розподілу випадкової величини.

2.1. Числові характеристики розміщення значень випадкових величин

Мова піде про числові характеристики, що грають роль деяких центрів, навколо яких групуються значення випадкових величин.

2.1.1. Математичне сподівання $M[X]$

Нехай маємо дискретну випадкову величину X зі значеннями $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ та їх ймовірностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні ймовірності появи цих значень:

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (2.1)$$

Якщо випадкова величина приймає нескінченне злічене число значень, то її математичне сподівання виражається формулою:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \quad (2.2)$$

Існування математичного сподівання в цьому випадку диктується збіжністю ряду в правій частині рівності (2.2). Якщо цей ряд збігається абсолютно, то математичне сподівання існує, в противному разі воно відсутнє.

Приклад 9. Нехай матеріальні точки масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ розміщені на числовій прямій і мають, відповідно, координати $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Центр ваги цієї системи точок обчислюється за формулою, відомою зі шкільного курсу фізики:

$$x_C = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + \dots + x_n m_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}.$$

Замінімо в цій формулі маси точок m_i на ймовірності p_i :

$$\frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} = M[X].$$

При цьому враховано, що сума ймовірностей в знаменнику дорівнює одиниці (1.1).

Таким чином, при виконаній заміні центр ваги стає рівним математичному сподіванню. Це допоміжно показує, що математичне сподівання цілком природно може бути використано, як центр значень випадкової величини, навколо якого вони розміщуються.

Розглянемо далі неперервну випадкову величину X , яка приймає значення на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо довільним чином цей відрізок точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n частинних відрізків довжиною $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$. В кожному такому відрізку виберемо довільно точку $\tilde{x}_i$. Ймовірність попадання значення $\tilde{x}_i$ випадкової величини на

відрізок Δx_i дорівнює площі ΔS_i затушованого прямокутника (рис.8), тобто наближено вона складає $\Delta p_i \approx f(\tilde{x}_i)\Delta x_i$.

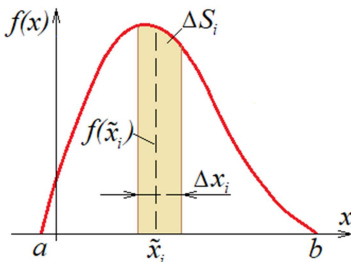


Рис.8

Далі скористаємося формулою (2.1), замінивши в ній x_i на $\tilde{x}_i$, а p_i на Δp_i , що дає:

$$M[X] \approx \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \Delta p_i \approx \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i f(\tilde{x}_i) \Delta x_i. \quad (2.3)$$

В записаному співвідношенні перейдемо до границі за умови, що найбільший з частинних відрізків Δx_i прямує до нуля (при цьому $n \rightarrow \infty$):

$$M[X] = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i f(\tilde{x}_i) \Delta x_i = \int_a^b x f(x) dx. \quad (2.4)$$

Результат (2.4) одержано, спираючись на поняття визначеного інтегралу [10].

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , заданої на відрізку $[a; b]$, називається визначений інтеграл

$$M[X] = \int_a^b x f(x) dx. \quad (2.5)$$

Якщо можливі значення випадкової величини розповсюджуються на всю числову пряму, то:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (2.6)$$

Припускається, що невластний інтеграл у формулі (2.6) існує.

Відмітимо структурну єдиність формул (2.1) і (2.5) для математичного сподівання дискретних і неперервних випадкових величин. Завдяки цьому формула (2.6) може бути одержана з формули (2.1) заміною окремого значення x_i поточним значенням x , ймовірності p_i – елементом ймовірності $f(x)dx$, а знаку підсумовування – знаком визначеного інтегралу. В подальшому будемо при нагоді використовувати цей підхід, як досить раціональний. Введемо ще позначення dp для елемента ймовірності і привласним йому свій номер для можливості посилання на нього в разі необхідності:

$$dp = f(x)dx. \quad (2.7)$$

2.1.2. Мода $M_o[X]$

Моду називають таке значення випадкової величини X , яке відповідає максимальній ймовірності для дискретної випадкової величини або максимальному значенні щільності для неперервної випадкової величини.

Відрізняють одномодальні, двохмодальні, ... розподіли випадкових величин або, взагалі – антимодальні.

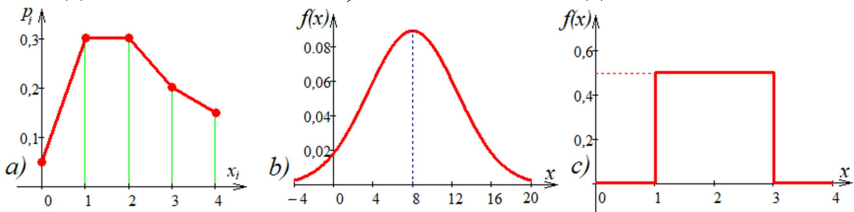


Рис.9

На рис.9, а зображено многокутник розподілу випадкової величини, яка має дві моди: $M_o[X]_1 = 1$, $M_o[X]_2 = 2$. Ці значення відповідають максимальним і однаковим значенням ймовірності $p_i = 0,3$ (двохмодальний розподіл).

На рис.9, b маємо щільність розподілу випадкової величини, максимальне значення якої відповідає числу 8. Отже тут $M_o[X] = 8$ (одномодальний розподіл).

Випадкова величина на рис.9, c антимодальна, так як максимальне значення щільності відсутнє.

2.1.3. Медіана $M_e[X]$

Медіаною неперервної випадкової величини X , називають таке число, для якого однаково ймовірно – попадуть значення випадкової величини X лівіше, чи правіше цього числа.

Визначення медіани проілюстровано рисунком.

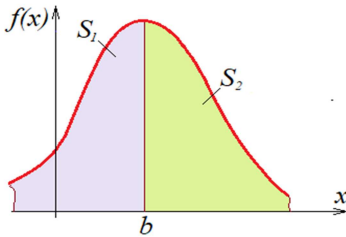


Рис.10

Якщо $S_1 = S_2 = 0,5$ або $P(X < b) = P(X > b) = 0,5$, то: $M_e[X] = b$. Отже, медіану визначають з рівняння:

$$F(M_e[X]) = 0,5. \quad (2.8)$$

Якщо випадкова величина задана диференціальною функцією розподілу, то медіану можна знайти з рівнянь:

$$\int_a^{M_e[X]} f(x)dx = \frac{1}{2} \quad \text{або} \quad \int_{-\infty}^{M_e[X]} f(x)dx = \frac{1}{2}. \quad (2.9)$$

Перше з них застосовують коли значення випадкової величини розміщені на відрізку $[a; b]$, а друге – коли ці значення займають всю числову пряму $(-\infty; \infty)$.

Серед наведених трьох числових характеристик найбільш поширеним є математичне сподівання. Його успішне застосування багато в чому визначається його властивостями. Для дискретних і неперервних випадкових величин вони є спільними. Обмежимося доведенням цих властивостей для одного з указаних видів випадкових величин. Відсутні ж доведення (досить прості) пропонуємо провести читачеві самостійно.

Властивості математичного сподівання:

$$1) M[C] = C \quad (2.10)$$

– математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій величині;

В доведенні врахуємо те, що визначений інтеграл від функції $f(x)$ в області значень випадкової величини (площа під щільністю) дорівнює одиниці.

$$M[C] = \int_{-\infty}^{\infty} Cf(x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C.$$

$$2) M[X + C] = M[X] + C \quad (2.11)$$

– при додаванні сталої до випадкової величини її математичне сподівання зростає на цю сталу;

$$\begin{aligned} M[X + C] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x + C)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + C \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \\ &= M[X] + C. \end{aligned}$$

Враховано співвідношення (2.6).

$$3) M[CX] = CM[X] \quad (2.12)$$

– сталий множник випадкової величини можна виносити за знак математичного сподівання;

$$M[CX] = \int_{-\infty}^{\infty} Cxf(x)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = CM[X].$$

$$4) M[X \pm Y] = M[X] \pm M[Y] \quad (2.13)$$

– математичне сподівання алгебраїчної суми двох випадкових величин дорівнює алгебраїчній сумі їх математичних сподівань;

Нехай випадкова величина X приймає значення $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з імовірностями $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, а випадкова величина Y – значення $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ з імовірностями $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$. Для появи значення $x_i \pm y_j$ випадкової величини $X \pm Y$ необхідно, щоб з імовірністю p_i з'явилося значення x_i

та з імовірністю q_i з'явилося значення y_j . За теоремою множення **незалежних подій** ймовірність їх одночасної появи дорівнює $p_i q_j$. Математичне сподівання випадкової величини $X \pm Y$ дорівнює сумі добутків можливих значень цієї випадкової величини на відповідні ймовірності:

$$\begin{aligned} M[X \pm Y] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i \pm y_j) p_i q_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i p_i q_j \pm \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_j p_i q_j = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^m q_j \pm \sum_{j=1}^m y_j q_j \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n x_i p_i \pm \sum_{j=1}^m y_j q_j = M[X] \pm M[Y] \end{aligned}$$

Можна довести, що ця властивість справедлива також і для суми будь-якого скінченного числа випадкових величин:

$$M\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n M[X_i]. \quad (2.14)$$

$$5) M[XY] = M[X]M[Y] \quad (2.15)$$

– математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

Аналогічно попередньому запишемо:

$$M[XY] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^n x_i p_i \sum_{j=1}^m y_j q_j = M[X]M[Y]$$

і також
$$M\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n M[X_i]. \quad (2.16)$$

Приклад 10. Випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

Знайти моду і математичне сподівання випадкової величини.

З найбільшою ймовірністю (0,4) приймається значення $x = 1$.

$$M_o[X] = 1.$$

$$M[X] = \sum_{i=1}^5 x_i p_i = -1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,8.$$

Приклад 11. Диференціальна функція розподілу випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, моду і медіану випадкової величини X .

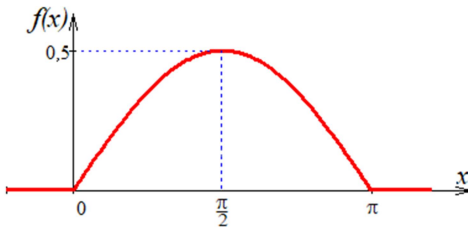


Рис.11

Математичне сподівання знаходимо за формулою (2.5). Інтегрування проводимо частинами.

$$\begin{aligned} M[X] &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} x=U \\ \sin x dx = dV \end{array} \right. \begin{array}{l} dU = dx \\ V = -\cos x \end{array} \Bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = \frac{1}{2} \left(\pi + \sin x \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Моду є значення, що відповідає максимуму щільності. Спираючись на властивості синусоїди (рис.11), одержимо:

$$M_o[X] = \pi/2.$$

Для знаходження медіани використаємо рівняння (2.9):

$$\begin{aligned} \int_0^{M_e[X]} \frac{1}{2} \sin x dx &= \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{M_e[X]} \sin x dx = 1 \Rightarrow -\cos x \Big|_0^{M_e[X]} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\cos(M_e[X]) + \cos 0 = 1 \Rightarrow \cos(M_e[X]) = 0. \end{aligned}$$

Коренем цього рівняння, який лежить на відрізку $[0; \pi]$, є

$$M_e[X] = \pi/2.$$

Збіг значень математичного сподівання і медіани не випадкове, адже для синусоїди $x = \pi/2$ є лінією симетрії.

2.2. Числові характеристики розсіювання значень випадкових величин

Розглянуті вище характеристики ($M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$) вказують лише на деякий центр розміщення значень випадкової величини. Не виключена ситуація, коли навіть абсолютно різні випадкові величини (по фізичній суті, області числових значень, симетрії розподілу та ін.) мають близькі, або однакові значення цих характеристик. Отже, зрозуміло, що зазначені характеристики дають обмежену інформацію про випадкові величини.

2.2.1. Дисперсія $D[X]$

Однією з ознак випадкових величин, які не враховуються вказаними характеристиками є розсіювання значень. Його можна оцінити відхиленням значень від центра розподілу – $M[X]$, тобто величиною $X - M[X]$. Оскільки ця величина є випадковою, то було б доцільно за міру розсіювання взяти деяке фіксоване значення, яким є її математичне сподівання. Проведемо попередні розрахунки, спираючись на властивості (2.10), (2.13):

$$M[X - M[X]] = M[X] - M[M[X]] = M[X] - M[X] = 0. \quad (2.17)$$

Як бачимо, спроба ввести міру розсіювання значень у виді $M[X - M[X]]$ не вдала, так як для будь-якої випадкової величини вона буде однаковою і рівною нулю. Це пояснюється тим, що відхилення $X - M[X]$ мають різні знаки і компенсуються при підсумовуванні. Щоб уникнути цього ефекту можна залучити абсолютну величину відхилення $|X - M[X]|$ або його квадрат $(X - M[X])^2$. Перевагу віддають квадрату відхилення із-за більшої зручності у використанні.

Дисперсією випадкової величини X , називають математичне сподівання квадрату відхилення значень випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[X] = M[(X - M[X])^2]. \quad (2.18)$$

Очевидно, що закони розподілу випадкових величин X і $(X - M[X])^2$ однакові. Тоді, маючи на увазі формулу (2.1) для математичного сподівання, одержимо:

$$D[X] = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^2 p_i \quad (2.19)$$

Замінивши тут x_i – поточним значенням x , ймовірність p_i – елементом ймовірності (2.7), а суму – інтегралом, для неперервної випадкової величини в залежності від області її значень будемо мати:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx \quad (2.20)$$

або
$$D[X] = \int_a^b (x - M[X])^2 f(x) dx. \quad (2.21)$$

Інтегрування в формулах (2.20), (2.21) не завжди буває простим. Тоді рекомендується застосовувати більш просту формулу:

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] \quad (2.22)$$

– дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом математичного сподівання.

В формулі (2.22):

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i, \quad (2.23)$$

або
$$M[X^2] = \int_a^b x^2 f(x) dx, \quad \text{або} \quad M[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (2.24)$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} D[X] &= M[(X - M[X])^2] = M[X^2 - 2XM[X] + M^2[X]] = \\ &= M[X^2] - M[2XM[X]] + M^2[X] = M[X^2] - 2M[X]M[X] + \\ &+ M^2[X] = M[X^2] - M^2[X]. \end{aligned}$$

2.2.2. Середнє квадратичне відхилення $\sigma[X]$

Формули (2.18)-(2.23) показують, що дисперсія має розмірність квадрата розмірності самої випадкової величини, що ускладнює оцінку величини розсіювання. Більш природною є ситуація, коли вказані розмірності співпадають. Це досягається шляхом добування квадратного кореня з дисперсії.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X , називають квадратний корінь з її дисперсії:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}. \quad (2.25)$$

Очевидно, що середнє квадратичне відхилення має ту ж розмірність, що і сама випадкова величина.

2.2.3. Коефіцієнт варіації $V[X]$

Середнє квадратичне відхилення зручно застосовувати для порівняння ступеня розсіювання значень випадкових величин, які мають однакову розмірність. В противному разі вона менш ефективна. Нехай, наприклад, $\sigma[X] = 0,1 \text{ Н}$; $\sigma[Y] = 0,1^\circ \text{C}$. Тоді не можна впевнено говорити, що значення випадкових величин X і Y розсіяні однаково, тому що невідомо як співвідносяться між собою “Ньютони” і “градуси Цельсія”. В цьому випадку для порівняння була б доречною безрозмірна числова характеристика.

Коефіцієнтом варіації випадкової величини X , називають відношення її середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання:

$$V[X] = \sigma[X]/M[X]. \quad (2.26)$$

Так як і середнє квадратичне відхилення, і математичне сподівання мають однакову розмірність, то їх відношення – безрозмірна величина.

Властивості дисперсії:

$$1) D[C] = 0 \quad (2.27)$$

– дисперсія сталої величини дорівнює нулю;

Застосовуємо формулу (2.22) та властивість (2.10) математичного сподівання:

$$D[C] = M[C^2] - M^2[C] = C^2 - C^2 = 0.$$

$$2) D[X + C] = D[X] \quad (2.28)$$

– при додаванні сталої до випадкової величини дисперсія випадкової величини не змінюється;

Застосовуємо визначення дисперсії (2.18) і властивості математичного сподівання:

$$\begin{aligned} D[X + C] &= M[(X + C - M[X + C])^2] = M[(X + C - M[X] - C)^2] = \\ &= M[(X - M[X])^2] = D[X]. \end{aligned}$$

$$3) D[CX] = C^2 D[X] \quad (2.29)$$

– сталий множник випадкової величини можна виносити за знак дисперсії з одночасним піднесенням його до другого степеня;

$$\begin{aligned} D[CX] &= M[C^2 X^2] - M^2[CX] = C^2 M[X^2] - C^2 M^2[X] = \\ &= C^2 (M[X^2] - M^2[X]) = C^2 D[X]. \end{aligned}$$

Наслідок:

$$\sigma[CX] = |C| \sigma[X]; \quad (2.30)$$

Його одержано добуванням квадратного кореня з рівності (2.29). Враховано, що $\sqrt{C^2} = |C|$.

$$4) D[X \pm Y] = D[X] + D[Y] \quad (2.31)$$

– дисперсія алгебраїчної суми двох незалежних випадкових величин X і Y дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$\begin{aligned} D[X \pm Y] &= M[(X \pm Y - (M[X] \pm M[Y]))^2] = M[(X - M[X] \pm (Y - M[Y]))^2] = \\ &= M[(X - M[X])^2 \pm 2(X - M[X])(Y - M[Y]) + (Y - M[Y])^2] = \\ &= M[(X - M[X])^2] \pm 2M[(X - M[X])(Y - M[Y])] + M[(Y - M[Y])^2]. \end{aligned}$$

Середній доданок одержаного виразу дорівнює нулю ($M[X - M[X]] = 0$ (2.17)), а два крайніх є сумою дисперсій випадкових величин X і Y , що й треба було довести.

Приклад 12. Випадкова величина X задана рядом розподілу:

X	-1	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1

Знайти дисперсію, середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації випадкової величини.

Знайдемо математичне сподівання квадрата заданої випадкової величини:

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^5 x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,3 + 1^2 \cdot 0,4 + 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,1 = 1,8.$$

Математичне сподівання величини X уже знайдено в десятому прикладі ($M[X] = 0,8$). Тоді:

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 1,8 - 0,8^2 = 1,16;$$

$$\sigma[X] = \sqrt{M[X]} = \sqrt{1,16} = 1,08;$$

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{1,08}{0,8} = 1,35.$$

Приклад 13. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти дисперсію випадкової величини X .

Знайдемо, спочатку математичні сподівання величин X та X^2 :

$$M[X] = \int_0^1 x \cdot 2x dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (1 - 0) = \frac{2}{3};$$

$$M[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = \frac{2}{4} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Дисперсія випадкової величини X дорівнює:

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Приклад 14. Кожна з випадкових величин X і Y задана своїм рядом розподілу:

X	1	2	4	5	7
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Y	2	3	6	8
Q	0,1	0,4	0,3	0,2

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини $Z = X - Y$.

Знайдемо математичне сподівання і дисперсію випадкових величин X і Y .

$$M[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,4 + 5 \cdot 0,2 + 7 \cdot 0,1 = 3,8;$$

$$M[X^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 4^2 \cdot 0,4 + 5^2 \cdot 0,2 + 7^2 \cdot 0,1 = 17,2;$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = 17,2 - 3,8^2 = 2,76;$$

$$M[Y] = \sum_{i=1}^n y_i q_i = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,2 = 4,8;$$

$$M[Y^2] = \sum_{i=1}^n y_i^2 q_i = 2^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,4 + 6^2 \cdot 0,3 + 8^2 \cdot 0,2 = 27,6;$$

$$D[Y] = M[Y^2] - M^2[Y] = 27,6 - 4,8^2 = 4,56$$

Далі для знаходження математичного сподівання і дисперсії випадкової величини Z використовуємо властивості (2.13) і (2.31):

$$M[Z] = M[X] - M[Y] = 3,80 - 4,80 = -1;$$

$$D[Z] = D[X] + D[Y] = 2,76 + 4,56 = 7,32.$$

2.3. Початкові і центральні моменти, числові характеристики скошеності і крутизни розподілу

Основні числові характеристики випадкових величин можна виразити через початкові та центральні моменти. Тут ми розглянемо два види моментів і числові характеристики, які доповнюють розглянуті вище.

Початковим моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k :

$$\nu_k = M[X^k]. \quad (2.32)$$

У відповідності з цим визначенням початкові моменти знаходять за формулами:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^n x_i^k p_i \quad (2.33)$$

— для дискретних випадкових величин;

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (2.34)$$

— для неперервних випадкових величин.

Якщо неперервна випадкова величина задана на обмеженому відрізку $[a; b]$, то нескінченно великі межі в інтегралі (2.34) слід замінити на a і b . Тут і в подальшому результат такої заміни в аналогічних обставинах наводити не будемо, але цю можливість будемо мати на увазі.

Центральним моментом k -го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини $(X - M[X])^k$:

$$\mu_k = M[(X - M[X])^k]. \quad (2.35)$$

Центральні моменти знаходять за формулами:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - M[X])^k p_i \quad (2.36)$$

— для дискретних випадкових величин;

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^k f(x) dx \quad (2.37)$$

– для неперервних випадкових величин.

Для визначення моментів (2.35) використовується відхилення (відстань) значень випадкової величини від центра (математичного сподівання), тому вони називаються центральними. Для визначення моментів (2.32) використовується відстань від точки $x = 0$ (початок координат), тому вони і називаються початковими.

З визначень математичного сподівання (2.1) і дисперсії (2.18) та виразу (2.17) випливає:

$$\nu_1 = M[X]; \quad \nu_2 = M[X^2]; \quad (2.38)$$

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = D[X]. \quad (2.39)$$

Можна також довести співвідношення, які спрощують відповідні обчислення:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad (2.40)$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4. \quad (2.41)$$

2.3.1. Асиметрія $A[X]$

Нехай розподіл випадкової величини буде симетричним відносно математичного сподівання. Очевидно, що для такого розподілу всі непарні центральні моменти ($k = 2n + 1$) перетворюються на нуль. Це пояснюється тим, що будь-якому додатному значенню величини $x - M[X]$ знайдеться симетричне від'ємне значення цієї ж величини. Навпаки, якщо непарні центральні моменти будуть відмінними від нуля, то це буде свідчити про несиметричність (асиметрію) розподілу. Геометрично це відображається на скошеності графіка щільності чи многокутника розподілу. Отже, для характеристики скошеності розподілу можна застосувати непарний центральний момент. Так як момент першого порядку дорівнює нулю, то приймається момент третього порядку.

Очевидно, що моменти k -го порядку (центральні чи початкові) мають розмірність k -го степеня розмірності самої випадкової величини, що не завжди практично оправдано. Щоб мати безрозмірні величини вказані моменти ділять на відповідну степінь середнього квадратичного відхилення (μ_k / σ^k). Ці величини називають **нормованими моментами k -го порядку**.

Асиметрію (коефіцієнтом асиметрії) випадкової величини X називають нормований центральний момент третього порядку:

$$A[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.42)$$

Якщо асиметрія від'ємна, то більш впливовими є від'ємні відхилення ($x_i - M[X]$) і лінія розподілу більш полого зліва (рис.12, a – зелений колір).

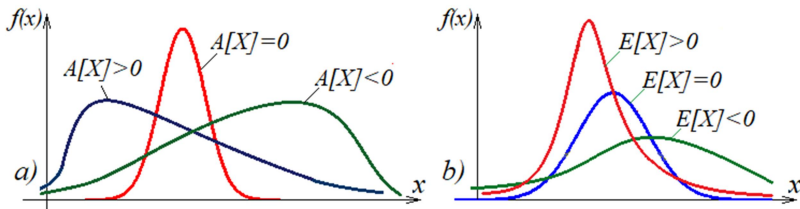


Рис.12

При додатній асиметрії вона має більшу пологість справа (рис.12, a – синій колір). Якщо ж асиметрія дорівнює нулю, то лінія розподілу випадкової величини симетрична (рис.12, a – червоний колір).

2.3.2. Ексцес $E[X]$

Дисперсія (другий центральний момент), як відомо, є мірою розсіювання значень випадкової величини. З цією ознакою тісно зв'язана інша – гостровершинність розподілу: чим більше розсіювання, тим менша гостровершинність і навпаки. Але дисперсія має розмірність квадрата випадкової

величини. В цих умовах спадає на думку запропонувати для оцінки гостровершинності нормований центральний момент другого порядку. Однак виявляється, що для будь-якого розподілу він має одне й те ж значення, яке дорівнює одиниці: $\mu_2/\sigma^2 = D[X]/D[X] = 1$. Отже, розглянута величина не може бути характеристикою гостровершинності. Але вже нормований момент четвертого порядку (позбавлений вказаної особливості), як найпростіший серед інших моментів парного порядку, рекомендується для використання.

Ексцесом випадкової величини X називають нормований центральний момент четвертого порядку, зменшений на три одиниці:

$$E[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (2.43)$$

Поява трійки в формулі (2.43) зобов'язана найбільш розповсюдженому **нормальному закону розподілу**. Нижче буде показано, що для цього закону $\mu_4/\sigma^4=3$, тому формула (2.43) завдяки наявності трійки дає $E[X] = 3 - 3 = 0$. Тим самим, нормальний закон грає роль деякого шаблону, з яким зручно порівнювати інші закони на гостровершинність.

Якщо для даного розподілу ексцес приймає додатне значення (рис.12, b – червоний колір), то крива розподілу більш гостровершинна, ніж крива нормального розподілу (рис.12, b – синій колір). Розподіли з від'ємним ексцесом мають більш плосковершинні криві розподілу (рис.12, b – зелений колір).

Приклад 15. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти асиметрію і ексцес випадкової величини X .

Насамперед обчислимо початкові моменти від першого до четвертого порядків. Перші два з них знайдено у прикладі 13:

$$\nu_1 = M[X] = \frac{2}{3}; \quad \nu_2 = M[X^2] = \frac{1}{2};$$

$$\nu_3 = M[X^3] = \int_0^1 x^3 \cdot 2x dx = \frac{2}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{2}{5}(1-0) = \frac{2}{5};$$

$$\nu_4 = M[X^4] = \int_0^1 x^4 \cdot 2x dx = \frac{2}{6} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

За відомими значеннями початкових моментів знаходимо центральні моменти третього та четвертого порядків за формулами (2.40) і (2.41):

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^2 = \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{1}{135};$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} + 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{1}{135}.$$

Знаходимо середнє квадратичне відхилення (за відомою з прикладу 13 дисперсією $D[X] = 1/18$) та його степені:

$$\sigma = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6};$$

$$\sigma^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{108}; \quad \sigma^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^4 = \frac{1}{324}.$$

За формулами (2.42), (2.43) знаходимо, відповідно, асиметрію та ексцес:

$$A[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = -\frac{108}{135\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{5} = -0,566;$$

$$E[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{324}{135} - 3 = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

Знайдені від'ємні значення показників свідчать про те, що ліва вітка графіка щільності ймовірностей більш полого, ніж права ($A[X] < 0$). При цьому він більш плосковершинний, ніж графік нормального розподілу ($E[X] < 0$).

3. Основні закони розподілу випадкових величин

Для спрощення дослідження законів розподілу дискретних випадкових величин часто використовуються імовірнісні твірні функції.

Нехай дискретна випадкова величина X приймає значення $0, 1, 2, \dots, k, \dots$ з імовірностями, відповідно, $p_0, p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$. Тоді функція:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_m x^m + \dots \quad (3.1)$$

називається імовірнісною твірною функцією для випадкової величини X .

Розглянемо властивості функції $\varphi(x)$:

1) Коефіцієнтом при x^k є ймовірність p_k того, що випадкова величина прийме значення k ($k = 0, 1, 2, \dots$);

2. При $x = 1$ маємо (1.1)

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1;$$

3. Ймовірність p_k будь-якого значення k випадкової величини може бути знайдена за допомогою функції $\varphi(x)$

$$p_k = \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0),$$

де $\varphi^{(k)}(0)$ – k -та похідна цієї функції при $x = 0$;

4. Перша похідна функції $\varphi(x)$ при $x = 1$ дає

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1} p_k \Rightarrow \varphi'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M[X];$$

5. Друга похідна функції $\varphi(x)$ при $x = 1$ дає

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} p_k \Rightarrow \varphi''(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M[X^2] - \varphi'(1) \Rightarrow M[X^2] = \varphi''(1) + \varphi'(1). \end{aligned}$$

З останніх двох властивостей витікають практично важливі формули для знаходження:

– **математичного сподівання**

$$M[X] = \phi'(1); \quad (3.2)$$

– **дисперсії**

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \phi''(1) + \phi'(1) - [\phi'(1)]^2. \quad (3.3)$$

3.1. Біноміальний розподіл

Дискретна випадкова величина **X** має **біноміальний розподіл** з параметрами **p, n** , якщо вона приймає значення **$0, 1, 2, \dots, m, \dots, n$** з імовірностями:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{де } 0 < p < 1, q = 1 - p. \quad (3.4)$$

Числові характеристики біноміального закону розподілу:

$$\begin{aligned} M[X] &= np; & D[X] &= npq; & \sigma[X] &= \sqrt{npq}; \\ V[X] &= \sqrt{\frac{q}{np}}; & A[X] &= \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; & E[X] &= \frac{1-6pq}{npq}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ряд розподілу для біноміального закону має вигляд.

Таблиця 2.

X	0	1	2	...	m	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Для перевірки умови нормування по ймовірностям застосовується формула бінома Ньютона:

$$(a + b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^m b^{n-m}. \quad (3.6)$$

За цієї формулою одержуємо:

$$\sum_{m=0}^n p_m = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = (p + q)^n = 1. \quad (3.7)$$

Тобто, згадана умова виконана.

Знайдемо імовірнісну функцію:

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} x^m = \sum_{m=0}^n C_n^m (px)^m q^{n-m} = (px + q)^n. \quad (3.8)$$

Для підтвердження основних числових характеристик обчислимо $\varphi'(1)$ та $\varphi''(1)$ за допомогою одержаного виразу:

$$\varphi'(x) = n(px + q)^{n-1} p \Rightarrow \varphi'(1) = np; \quad (3.9)$$

$$\varphi''(x) = n(n-1)(px + q)^{n-2} p^2 \Rightarrow \varphi''(1) = n^2 p^2 - np^2. \quad (3.10)$$

Далі застосуємо формули (3.2) і (3.3):

$$M[X] = np; \quad (3.11)$$

$$D[X] = \cancel{n^2 p^2} - np^2 + np - \cancel{n^2 p^2} = np(1-p) = npq. \quad (3.12)$$

Формули для $\sigma[X]$, $V[X]$ витікають як наслідки з результатів (3.11), (3.12).

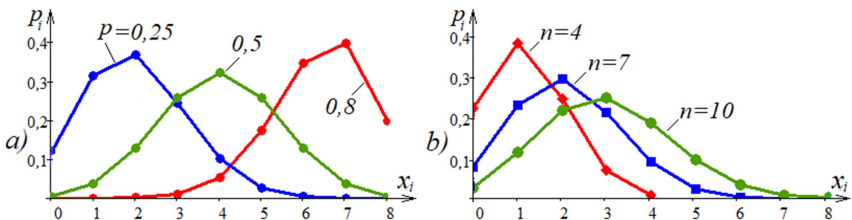


Рис.13

З'ясуємо вплив параметрів p і n на форму многокутника розподілу. Криві на рис.13, а побудовані при $n=8$. Вони показують, що ймовірності значень випадкової величини спочатку зростають, досягаючи найбільшої величини при деякому значенні $m_o = M_o[X]$, потім спадають. Відомо [5], що це значення – моду можна знайти, як ціле число з одиничного діапазону:

$$np - q \leq m_o \leq np + p. \quad (3.13)$$

Якщо ж цілими числами виявляться кінці діапазону, то кожне з них і буде модою (випадок двохмодального розподілу).

Біноміальний розподіл асиметричний, за виключенням випадку, коли $p = 0,5$ (крива зеленого кольору). При цьому асиметрія додатна при $p < 0,5$ (синій колір) і від'ємна при $p > 0,5$ (червоний колір).

З ростом числа n многокутник розподілу зміщується вправо і стає більш плосковершинним та наближається до симетричної форми (рис.13, b , де прийнято $p = 0,3$). Про це свідчать і формули (3.5), які показують, що і асиметрія, і ексцес з ростом n прямують до нуля. Можна стверджувати, що при $p \rightarrow 0,5$, $n \rightarrow \infty$ біноміальний закон розподілу прямує до нормального, який буде розглянуто нижче.

Приклад 16. Проводяться n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p . Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k появи події A ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) в n випробуваннях, якщо $n = 4$; $p = 0,6$. Побудувати многокутник розподілу. Знайти числові характеристики випадкової величини.

За формулою Бернуллі (3.4):

$$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \frac{4!}{k!(4-k)!} \cdot 0,6^k \cdot 0,4^k.$$

$$p_0 = \frac{4!}{0!(4-0)!} \cdot 0,6^0 \cdot 0,4^4 = 0,0256;$$

$$p_1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot 0,6^1 \cdot 0,4^3 = 0,1536;$$

$$p_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^2 = 0,3456;$$

$$p_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,6^3 \cdot 0,4 = 0,3456; ;$$

$$p_4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0,6^4 \cdot 0,4^0 = 0,1296.$$

Тепер можемо зобразити ряд розподілу.

k	0	1	2	3	4
p_k	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

За даними таблиці будемо многокутник розподілу.

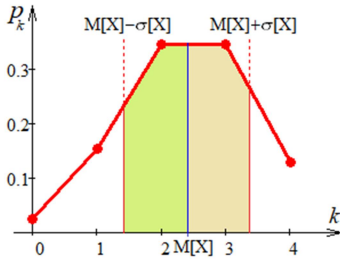


Рис.14

Числові характеристики розподілу визначаємо за формулами (3.5):

$$M[X] = np = 4 \cdot 0,6 = 2,4;$$

$$M_o[X]_1 = 2; \quad M_o[X]_2 = 3;$$

$$D[X] = npq = 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,96;$$

$$\sigma[X] = \sqrt{npq} = \sqrt{0,96} = 0,98;$$

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{0,98}{2,4} = 0,408;$$

$$A[X] = \frac{q - p}{\sqrt{npq}} = \frac{0,4 - 0,6}{0,98} = -0,204;$$

$$E[X] = \frac{1 - 6pq}{npq} = \frac{1 - 6 \cdot 0,6 \cdot 0,4}{0,96} = -0,458.$$

Як бачимо, закон розподілу ймовірностей виявився двохмодальним. Для більшої наглядності на многокутнику розподілу показані математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

3.2. Розподіл Пуассона

Дискретна випадкова величина **X** має **розподіл Пуассона** з параметром **λ** якщо вона приймає значення **$0, 1, 2, \dots, t, \dots$** з імовірностями:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad (3.14)$$

Числові характеристики розподілу Пуассона:

$$\begin{aligned} M[X] &= \lambda; & D[X] &= \lambda; & \sigma[X] &= \sqrt{\lambda}; \\ V[X] &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; & A[X] &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}; & E[X] &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ряд розподілу для закону Пуассона має вигляд:

Таблиця 3.

X	0	1	2	...	t	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	...

Для перевірки умови нормування використаємо розкладання експоненціальної функції в степеневий ряд Маклорена [11]:

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

З урахуванням формули (3.14) знаходимо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1.$$

Для обчислення основних числових характеристик випадкової величини сформуємо імовірнісну функцію для пуассонівського закону розподілу:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} p_m x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} x^m = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(x) = e^{\lambda(x-1)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Знаходимо похідні $\varphi'(1)$ та $\varphi''(1)$:

$$\varphi'(x) = \lambda e^{\lambda(x-1)} \Rightarrow \varphi'(1) = \lambda; \quad (3.17)$$

$$\varphi''(x) = \lambda^2 e^{\lambda(x-1)} \Rightarrow \varphi''(1) = \lambda^2. \quad (3.18)$$

Одержані результати разом зі співвідношеннями (3.2), (3.3) дозволяють встановити:

$$M[X] = \varphi'(1) = \lambda; \quad (3.19)$$

$$D[X] = \varphi''(1) + \varphi'(1) - [\varphi'(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda. \quad (3.20)$$

Отже, математичне сподівання і дисперсія співпадають і дорівнюють параметру λ , що є відмінною особливістю розподілу Пуассона.

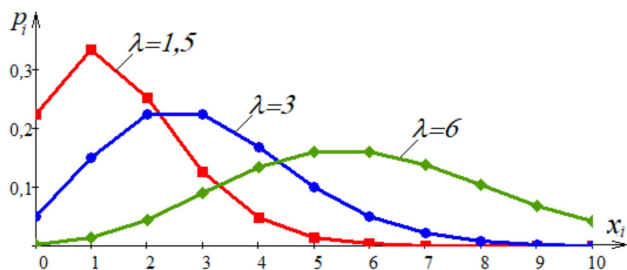


Рис.15

На рис.15 – багатокутники розподілу Пуассона при $p=0,3$ і різних значеннях параметра λ . Як бачимо, збільшення параметра λ приводить до зміщення багатокутників вправо з одночасним їх наближенням до симетричної форми. Взагалі цей розподіл має додатні значення коефіцієнтів асиметрії і ексцесу (3.15), тому багатокутники є плосковершинними та мають більшу пологість справа. Але із збільшенням λ ($\lambda \rightarrow \infty$) асиметрія і ексцес (3.15) прямують до нуля ($A[X] \rightarrow 0$, $E[X] \rightarrow 0$), а це вказує на те, що в цих умовах розподіл трансформується до нормального.

Підкреслимо, що на відміну від біноміального закону тут випадкова величина може приймати нескінченну множину значень, а формула Пуассона (3.14) є асимптотичною форму-

лою Бернуллі (3.4) при $np = \lambda = \text{const}$. Припускається також, що число n досить велике, а значить ймовірність p надзвичайно мала. Звідси ще одна назва цього закону – **закон розподілу рідкісних явищ**. Він описує число подій m , які відбуваються за однакові проміжки часу з однаковою середньою інтенсивністю $\lambda = np$. Наприклад: кількість дзвінків на телефонну станцію за певний час; число деяких мікробів в одиниці об'єму тощо.

Приклад 17. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде з ладу під час роботи приладу, дорівнює 0,004. Визначити $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $A[X]$, $E[X]$ випадкової величини X – числа мікроелементів, що вийдуть з ладу під час роботи приладу.

Оскільки ймовірність виходу з ладу мікроелемента дуже мала, випадкова величина X підкоряється закону розподілу Пуассона (рідкісних явищ). Отже, можемо скористатися формулами (3.15) при $n = 1000$, $p = 0,004$, $\lambda = np = 4$.

$$M[X] = D[X] = \lambda = 4, \quad \sigma[X] = \sqrt{\lambda} = \sqrt{4} = 2,$$

$$A[X] = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = 0,5, \quad E[X] = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Так як в основі розподілу Пуассона лежить формула (3.14), яка є наближеною (асимптотичною) формулою Бернуллі (3.4), то залишається актуальним співвідношення (3.13):

$$np - q < M_o[X] < np + p \Rightarrow 4 - 0,996 < M_o[X] < 4 + 0,004 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3,004 < M_o[X] < 4,004 \approx \boxed{3 < M_o[X] < 4.}$$

Таким чином, кінці інтервалу є практично цілі числа, тому можна вважати закон розподілу двохмодальним:

$$M_o[X]_1 = 3, \quad M_o[X]_2 = 4.$$

Перевірка за формулою (3.14) показує, що ймовірності p_3 і p_4 є найбільшими та майже не відрізняються.

3.3. Рівномірний закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має **рівномірний розподіл з параметрами a, b** , якщо її щільність ймовірностей на проміжку $[a, b]$ є стала величина:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (3.21)$$

Числові характеристики рівномірного розподілу:

$$\begin{aligned} M[X] = M_e[X] &= \frac{a+b}{2}; & D[X] &= \frac{(b-a)^2}{12}; & \sigma[X] &= \frac{b-a}{2\sqrt{3}}; \\ V[X] &= \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)}; & A[X] &= 0; & E[X] &= -1,2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу.

1. Якщо $x \leq a$, то $f(x) = 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

2. Якщо $a < x \leq b$, то $f(x) = \frac{1}{b-a}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{1}{b-a} (t) \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

3. Якщо $x > b$, то $f(x) = 0$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b \frac{dt}{b-a} + \int_b^x 0 dt = \frac{1}{b-a} (t) \Big|_a^b = 1.$$

Отже:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases} \quad (3.23)$$

Графіки обох функцій зображені на рис.16.

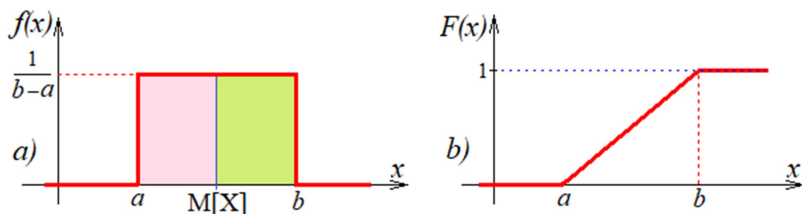


Рис.16

Умовою нормування щільності ймовірностей, як відомо, є обмеження на площу під кривою щільності, яка повинна бути рівною одиниці (1.17). Очевидно, що ця умова однозначна виконана (див. рис.16, а).

Відзначимо, що щільність рівномірного закону розподілу має лінію симетрії $x = (a + b)/2$ (рис.16, а – синій колір). Ця лінія визначає центр розподілу, тобто математичне сподівання і медіану (рожева і зелена площі під кривою щільності однакові), а також вказує на те, що асиметрія в цьому випадку зводиться до нуля. Отже, можемо відразу записати:

$$M[X] = M_e[X] = \frac{a+b}{2}; \quad A[X] = 0.$$

Крім того, цей **розподіл є антимодальним** (див. коментар під рис.9, с), тому мода відсутня.

Далі для доведень знадобляться формули (2.22), (2.24), (2.25), (2.26), (2.37), (2.43).

$$M[X^2] = \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a} \right) dx = \frac{1}{b-a} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_a^b = \frac{b^2 + ab + b^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} D[X] &= M[X^2] - M^2[X] = \frac{b^2 + ab + b^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{4(b^2 + ab + b^2) - 3(b^2 + 2ab + b^2)}{12} = \frac{b^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)}.$$

$$\begin{aligned}\mu_4 &= \int_a^b (x-M[X])^4 f(x) dx = \int_a^b \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^4 \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{5(b-a)} \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^5 \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{5(b-a)} \left[\left(b - \frac{b+a}{2}\right)^5 - \left(a - \frac{b+a}{2}\right)^5 \right] = \frac{1}{5(b-a)} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^5 \right] = \\ &= \frac{1}{5(b-a)} \left[\frac{(b-a)^5}{2^5} + \frac{(b-a)^5}{2^5} \right] = \frac{(b-a)^4}{80}.\end{aligned}$$

$$E[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{(b-a)^4}{80} \cdot \frac{144}{(b-a)^4} - 3 = 1,8 - 3 = -1,2.$$

Одержане значення $E[X] = -1,2 = \text{const}$ показує, що щільність ймовірностей рівномірного розподілу при будь-яких значеннях параметрів a і b є більш плосковершинною в порівнянні з нормальним законом.

Виходячи з форми згаданого графіка (рис.16, а), **рівномірний розподіл називають також прямокутним**. Він виникає в ситуаціях, коли випадкова величина приймає значення на чітко визначеному відрізку і ймовірність попадання значень на деякі частини однакового розміру цього відрізка одна й та ж незалежно від їх розташування. До таких випадкових величин відноситься, наприклад, похибка округлення, яка приймає значення в межах однієї поділки вимірювального приладу. Сюди також можна віднести показання хвилинної стрілки годинника в момент його зупинки (виходу з ладу) протягом поточної години. Очевидно, що названі показання відповідатимуть відрізку часу величиною 60 хв.

Приклад 18. Розкручене колесо обертається під дією моменту тертя до повної зупинки. Завдяки мітці на колесі створено можливість визначати кутове положення колеса в момент зупинки (в межах одного обороту). Визначити щільність розподілу випадкової величини X – кута розміщення колеса в момент зупинки та знайти її числові характеристики. Знайти ймовірність того, що зупинка колеса відбудеться в межах кутів $[\pi/4; \pi/2]$.

Випадкова величина X приймає значення на проміжку $0 \leq x < 2\pi$. Вона відповідає рівномірному закону розподілу, адже немає підстав вважати, що значення кута зупинки колеса з певного діапазону будуть більш ймовірними, ніж значення кута з іншого діапазону рівного розміру. Отже, приймаємо: $a = 0$; $b = 2\pi$; $b - a = 2\pi$; $1/(b - a) = 1/2\pi$. Тоді функція щільності ймовірностей для випадкової величини X приймає вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{2\pi} & \text{при } 0 < x \leq 2\pi, \\ 0 & \text{при } x > 2\pi. \end{cases}$$

Числові характеристики (3.22):

$$\begin{aligned} M[X] &= \frac{a+b}{2} = \frac{0+2\pi}{2} = \pi; & M_e[X] &= \pi; & M[X] &= \pi; \\ D[X] &= \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2\pi-0)^2}{12} = \frac{\pi^2}{3}; & \sigma[X] &= \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi-0}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}; \\ V[X] &= \frac{b-a}{\sqrt{3}(b+a)} = \frac{2\pi-0}{\sqrt{3}(2\pi+0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}; & A[X] &= 0; & E[X] &= -1,2. \end{aligned}$$

Шукана ймовірність (1.16):

$$P\left(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{2}\right) = \int_a^b f(x)dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2\pi} dx = \left(\frac{1}{2\pi} x\right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}.$$

3.4. Показниковий закон розподілу

Неперервна випадкова величина X має **показниковий розподіл з параметром λ** якщо її щільність ймовірностей задається виразом:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Числові характеристики показникового розподілу:

$$M[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad M_e[X] = \frac{\ln 2}{\lambda}; \quad D[X] = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma[X] = \frac{1}{\lambda}; \quad (3.25)$$

$$V[X] = 1; \quad A[X] = 2; \quad E[X] = 6.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу (1.18).

1. Якщо $x \leq 0$, то: $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.

2. Якщо $x > 0$, то:

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = - \int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = - \left(e^{-\lambda t} \right)_0^x =$$

$$= -e^{-\lambda x} + e^0 = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Інтегральна функція розподілу має вид:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Графіки диференціальної та інтегральної функцій показникового розподілу зображені нижче.

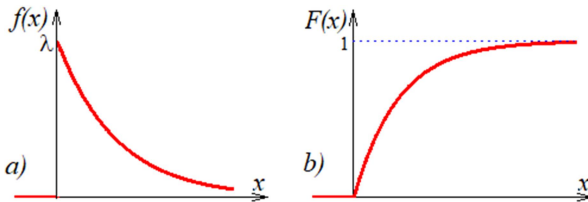


Рис.17

Покажемо розрахунки, на основі яких наведено числові характеристики (3.25). При цьому будемо враховувати загальні формули з другого розділу.

$$\begin{aligned} 1. M[X] &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x d(-e^{-\lambda x}) = (-x e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} d(-\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

При обчисленні математичного сподівання використана формула інтегрування частинами:

$$\boxed{\int_a^b U dV = (UV) \Big|_a^b - \int_a^b V dU} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} 2. F(M_e[X]) &= \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\lambda M_e[X]} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{-\lambda M_e[X]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\lambda M_e[X] &= \ln \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda M_e[X] = -\ln 2 \Rightarrow M_e[X] = \frac{\ln 2}{\lambda}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. M[X^2] &= \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} x^2 d(-e^{-\lambda x}) = -x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \cdot dx = \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$4. \sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

$$5. V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} = \frac{1}{\lambda} : \frac{1}{\lambda} = 1.$$

$$\mu_3 = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 d(-e^{-\lambda x}) = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} +$$

$$\begin{aligned}
& +3 \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 d(-e^{-\lambda x}) = -\frac{1}{\lambda^3} + \\
& + \frac{3}{\lambda} \left[\left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^2 (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} dx \right] = -\frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{\lambda^3} + \\
& + \frac{6}{\lambda^2} \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right) d(e^{-\lambda x}) = \frac{2}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda^2} \left[\left(x - \frac{1}{\lambda}\right) (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} + \right. \\
& \left. + \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} (e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\lambda^3} - \frac{6}{\lambda^3} + \frac{6}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^3} \\
\mu_4 & = \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^4 d(-e^{-\lambda x}) = \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^4 (-e^{-\lambda x}) \Big|_0^{\infty} + 4 \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 e^{-\lambda x} dx = \\
& = \frac{1}{\lambda^4} + \frac{4}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^3 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^4} + \frac{4}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{9}{\lambda^4}.
\end{aligned}$$

При обчисленні центрального моменту третього порядку формула інтегрування частинами (3.27) для усунення множника $(x - 1/\lambda)^3$ застосовувалась послідовно три рази підряд. При обчисленні центрального моменту четвертого порядку формула (3.27) була застосована одноразово, після чого одержано інтеграл, значення якого $(2/\lambda^3)$ знайдено при розрахунку моменту μ_3 . Підстановка у первісну верхньої межі невластного інтегралу фактично зводилася до обчислення границі за правилом Лопітала: $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - 1/\lambda)^k e^{-\lambda x} = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$.

$$6. A[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2}{\lambda^3} : \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 = 2.$$

$$7. E[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{9}{\lambda^4} : \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 - 3 = 9 - 3 = 6.$$

Як бачимо, і графік щільності (рис.17, а), і обчислені значення асиметрії та ексцесу ($A[X] > 0$, $E[X] > 0$) показують, що права вітка графіка більш полого, а гостровершинність більша, ніж у нормального розподілу.

Показниковому розподілу, як правило, підкоряється величина проміжку часу між появою двох послідовних рідкісних явищ, наприклад: час безвідмовної роботи вузлів машин, величина терміну служби пристроїв і т. д. Тому цей розподіл найчастіше з'являється при дослідженні надійності машин. Характерною особливістю, яка має місце тільки для показникового розподілу, є одиничне значення коефіцієнта варіації. Якщо емпіричне оцінювання цього коефіцієнта для деякої випадкової величини дає значення близьке до одиниці, то є підстави припускати, що ця випадкова величина підкоряється саме показниковому розподілу.

Приклад 19. Відомо, що час T знаходження застряглих зернин в отворах решета зерноочисної машини, обладнаної очисником решіт, є випадкова величина, яка має закон розподілу:

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{nT_p}} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leq 0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини T і ймовірність того, що зернина застрягне в отворі решета за перші 10с процесу, якщо $n = 2,5$ – середнє необхідне число циклів очищення, $T_p = 5с$ – період роботи очисника.

Маємо показниковий розподіл, заданий інтегральною функцією (3.26). Таким чином:

$$\lambda = \frac{1}{nT_p} \Rightarrow M[T] = \frac{1}{\lambda} = nT_p = 2,5 \cdot 5 = 12,5с.$$

Для обчислення зазначеної ймовірності застосуємо формулу (1.16) при $\alpha = 0$, $\beta = 10$:

$$P(0 < T < 10) = 1 - e^{-\frac{10}{12,5}} - 1 + e^{-\frac{0}{12,5}} = 1 - e^{-0,8} = 0,551.$$

3.5. Нормальний закон розподілу (Гауса)

Неперервна випадкова величина X розподілена за **нормальним законом з параметрами a і σ** , якщо її щільність ймовірностей має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.28)$$

Числові характеристики нормального розподілу:

$$\begin{aligned} M[X] &= a; & M_o[X] &= a; & M_e[X] &= a; & D[X] &= \sigma^2; \\ \sigma[X] &= \sigma; & V[X] &= \sigma/a; & A[X] &= 0; & E[X] &= 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

В подальших обчисленнях будемо спиратися на інтеграл Ейлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (3.30)$$

Виконаємо, спочатку, перевірку наведених числових характеристик (3.29). Для цього використаємо загальноприйнятні формули, показані у попередньому розділі.

$$\begin{aligned} 1. M[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \left[\frac{(x-a)}{\sqrt{2\sigma}} = t; \quad x = \sqrt{2\sigma}t + a; \right. \\ &\quad \left. dx = \sqrt{2\sigma}dt; \quad t_1 = -\infty; \quad t_2 = \infty \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2\sigma}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{2\sigma}t + a) e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\sigma}t e^{-t^2} dt + a \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = a. \end{aligned}$$

Тут перший інтеграл в дужках дорівнює нулю, так як береться в симетричних межах від непарної функції, а другий дорівнює $\sqrt{\pi}$, як інтеграл Ейлера-Пуассона.

2. Візьмемо першу та другу похідні від функції щільності:

$$f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -\frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} + \frac{(x-a)^2}{\sigma^5 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \\
 &= \frac{1}{\sigma^3 \sqrt{2\pi}} \left[\frac{(x-a)^2}{\sigma^2} - 1 \right] e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Очевидно, що $f'(a) = 0$ і $f''(a) = -1/(\sigma^3 \sqrt{2\pi}) < 0$. Це є умовою максимуму функції при $x = a$. Тоді з визначення (п.2.1.2) маємо: $M_o[X] = a$.

3. Виберемо два значення аргумента x симетрично лінії $x = a$. Нехай це будуть $x_1 = a - \rho$ та $x_2 = a + \rho$. Оскільки $(x_1 - a)^2 = (a - \rho - a)^2 = \rho^2$ і $(x_2 - a)^2 = (a + \rho - a)^2 = \rho^2$, то:

$$f(x_1) = f(x_2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}}.$$

Доведено, що щільність розподілу симетрична лінії $x = a$, тобто ця лінія розділяє площу під щільністю на дві рівних частини. Звідси маємо зразу два наслідки. По-перше, число a є медіаною розподілу, а по-друге – асиметрія розподілу дорівнює нулю:

$$M_e[X] = a; \quad A[X] = 0.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad D[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\
 &= \left| \frac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma} = t; \quad x = \sqrt{2}\sigma t + a; \right. \\
 &\quad \left. dx = \sqrt{2}\sigma dt; t_1 = -\infty; t_2 = \infty \right| = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2\sigma^2 t^2 e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t d(-e^{-t^2}) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left(-te^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right) = \sigma^2.
 \end{aligned}$$

В останньому рядку обчислень застосовано метод інтегрування частинами (3.27), який приводить до інтегралу (3.30) Ейлера Пуассона.

По знайденим величинам одержуємо ще дві числові характеристики:

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sigma; \quad V[X] = \sigma[X]/M[X] = \sigma/a.$$

5. Далі для визначення ексцесу знайдемо відношення:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_4}{\sigma^4} &= \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^4 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{(x-a)}{\sqrt{2}\sigma} = t; \quad x-a = \sqrt{2}\sigma t; \\ dx = \sqrt{2}\sigma dt; \quad t_1 = -\infty; \quad t_2 = \infty \end{array} \right| = \frac{1}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 4\sigma^4 t^4 e^{-t^2} \sqrt{2}\sigma dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 \cdot 2te^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 d(-e^{-t^2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(-t^3 e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} 3t^2 e^{-t^2} dt \right) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \frac{3}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} td(-e^{-t^2}) dt = 3. \end{aligned}$$

В обчисленнях використано метод інтегрування частинами. Останній інтеграл дорівнює $\sqrt{\pi}$, що показано у п.4. Отже, ексцес нормального розподілу дорівнює:

$$E[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 3 - 3 = 0.$$

Зазначимо тут ще раз, що штучне **нормування ексцесу (приведення його до нуля)** виконано для зручності порівняння різних розподілів випадкових величин з нормальним за цією характеристикою.

При відомій точці максимуму щільності $x=a$ знаходимо:

$$f_{\max}(x) = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Друга похідна (3.32) приймає нульові значення в точках $x = a \pm \sigma$, яким відповідає ордината:

$$f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

Легко бачити, що при переході через точки $x = a \pm \sigma$ друга похідна змінює знак на протилежний, тому вони є точками перегину графіка щільності. Отже, маємо точку максимуму A та дві точки перегину B_1 , B_2 з координатами:

$$A\left(a; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right); \quad B_1\left(a - \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right); \quad B_2\left(a + \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right). \quad (3.33)$$

Враховуючи значення констант $\sqrt{2\pi}$ і $\sqrt{2\pi e}$ цей запис можна подати у вигляді, більш зручному для використання:

$$A\left(a; \frac{0,399}{\sigma}\right); \quad B_1\left(a - \sigma; \frac{0,242}{\sigma}\right); \quad B_2\left(a + \sigma; \frac{0,242}{\sigma}\right). \quad (3.34)$$

Варто звернути увагу на те, що друга похідна (3.32) в області максимуму між точками B_1 , B_2 – від’ємна, а зовні цього відрізка – зліва від точки B_1 та справа від точки B_2 – додатна. Це значить, що між точками B_1 , B_2 крива щільності опукла, а за межами відрізка B_1B_2 – угнута.

Для побудови графіка щільності нормального розподілу важливим є також наступний результат:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0,$$

тобто вісь абсцис є горизонтальною асимптотою графіка.

Похили асимптоти відсутні, адже спроба знайти кутовий коефіцієнт для цих асимптот дає нуль:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{x} = 0.$$

Проведених досліджень достатньо для схематичної побудови графіка диференціальної функції нормального розподілу (рис.18, а).

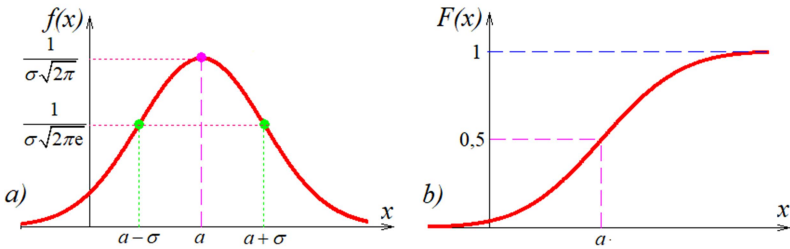


Рис.18

Виходячи з графічного зображення нормального розподілу, з'ясуємо геометричний зміст параметрів a і σ .

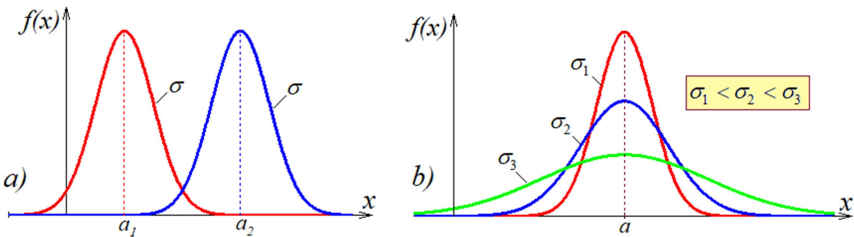


Рис.19

Якщо змінюється лише параметр a , то форма кривої не змінюється (рис.19, а). При цьому зі збільшенням a графік зміщується вздовж вісі абсцис вправо.

При зміні параметра σ форма кривої змінюється. При збільшенні σ максимальне значення $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ функції $f(x)$ зменшується і крива стискається – наближається до вісі Ox . Але, так як площа під щільністю завжди одна й та ж сама і дорівнює одиниці, то крива одночасно розтягується вздовж цієї осі. Це узгоджується зі змістом середнього квадратичного відхилення, як характеристики розсіювання: чим більше значення σ , тим більше розсіювання значень випадкової величини.

При розв'язуванні певних задач на ймовірність зручно використовувати інтегральну функцію розподілу $F(x)$. Але інтеграл (1.18) для нормального розподілу не береться в елементарних функціях, тому $F(x)$ виражається через спеціальну функцію, яка називається інтегралом ймовірностей чи функцією Лапласа. Розглянемо функцію Лапласа та її властивості.

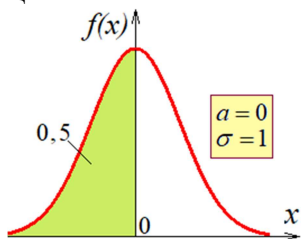


Рис.20

Нехай $a = 0$, $\sigma = 1$. При цих значеннях параметрів функція щільності (3.28) називається нормованою або стандартною кривою Гауса (рис.20):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.35)$$

Наступний інтеграл від виразу (3.35) зі змінною верхньою межею і є функцією Лапласа:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (3.36)$$

Основні властивості функції Лапласа:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) $\Phi(\infty) = 0,5$;
- 3) $\Phi(-z) = -\Phi(z)$ – функція непарна.

Перша властивість виконується тому, що інтеграл з однаковими межами інтегрування (від 0 до 0) дорівнює нулю.

Друга властивість за геометричним змістом показує половину площі під кривою щільності (рис.20) на проміжку $(0; \infty)$, яка, як відомо, дорівнює 0,5.

Для доведення непарності функції Лапласа виконаємо очевидні перетворення:

$$\Phi(-z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \left| \begin{array}{ll} t = -x; & x_1 = 0; \\ dt = -dx; & x_2 = z \end{array} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\Phi(z).$$

Отже, непарність доведена.

Як уже відзначено, інтеграл (3.36) “не береться”, тому для зручності використання функція Лапласа затабульована для додатних значень аргумента (додаток 4). За цією ж таблицею, завдяки третій властивості, можна легко знаходити значення функції Лапласа і для від’ємного аргумента.

Для визначення інтегральної функції нормального розподілу задіємо співвідношення (1.18):

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(z) dz = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dz = \left| \frac{z-a}{\sigma} = t; \quad t_2 = \frac{x-a}{\sigma}; \right. \\ &\quad \left. dz = \sigma dt; \quad t_1 = -\infty. \right| = \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \end{aligned}$$

Розіб’ємо проміжок інтегрування на дві частини, першою з яких приймемо: $(-\infty; 0)$. Тоді інтеграл в цих межах дає 0,5 – половину площі під щільністю (на рис.20 затушована).

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0,5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Ми прийшли до функції Лапласа (3.36) при $z=(x-a)/\sigma$. Отже, інтегральна функція нормального розподілу має вид:

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (3.37)$$

Графік цієї функції зображено на рис.18, b.

Проведемо, тепер, перетворення, зв’язані з формулами (1.11) та (3.37):

$$\begin{aligned} P(\alpha < X < \beta) &= F(\beta) - F(\alpha) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \\ &- \left[0,5 + \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \right] = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$P(|x-a| < \delta) = P(a-\delta < x < a+\delta) = \Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

Одержано важливі формули для обчислення ймовірностей **нормально розподілених** випадкових величин. Виділимо їх окремо.

Ймовірність попадання значень випадкової величини на інтервал $(\alpha; \beta)$:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (3.38)$$

Ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання не перевищують δ :

$$P(|x-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (3.39)$$

Підрахуємо за останньою формулою ймовірність того, що відхилення значень деякої нормально розподіленої випадкової величини не перевищать 3σ :

$$P(|x-a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Значення $\Phi(3) = 0,49865$ взято з таблиці (додаток 5).

Отже, ймовірність того, що в результаті проведення досліду випадкова величина прийме значення за межами проміжку $[a-3\sigma; a+3\sigma]$ дорівнює 0,0027, що становить всього 0,27%. Тобто, практично можна вважати, що при проведенні одного досліду ця подія не відбудеться.

Одержаний результат можна сформулювати у вигляді **“правила трьох сигм”**: якщо випадкова величина підкоряється нормальному закону, то відхилення її значень від математичного сподівання за абсолютною величиною практично не перевищують потрійного середнього квадратичного відхилення.

Це правило дає можливість грубо, але досить просто оцінити середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини, за умови що її мінімальне $x_{\min}$ та максимальне $x_{\max}$ значення відомі з проведеного випробування. Як впливає з вищевикладеного, треба розмах значень $R = x_{\max} - x_{\min}$ поділити на шість ($\sigma \approx R/6$).

Нормальний розподіл має велике значення, адже він є одним з тих, які зустрічаються найбільш часто. Як правило, в практиці виникають випадкові величини, які є сумою багатьох інших випадкових величин. За теоремою Ляпунова [4] при досить нежорстких вимогах до кожної випадкової величини, що додаються (відсутність домінування, близькі дисперсії), їх сума підкоряється нормальному закону розподілу. В цьому і є секрет його надзвичайної розповсюдженості. Якщо, наприклад, деяка деталь виготовляється на токарному станку, то на її розмір впливають багато різних причин: неоднорідність матеріалу, неточність установки деталі, деформації вузлів станка, коливання напруги в електромережі, знос інструмента тощо. Ці причини випадкові і не суперечать умовам теореми Ляпунова, тому є всі підстави вважати розмір деталі випадковою величиною, що підлягає нормальному закону розподілу.

Приклад 20. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами: $a = 4$, $\sigma = 3$. Записати формулу щільності розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(0; 5)$. Знайти ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання не перевищать 1,5.

Запишемо формулу щільності розподілу (3.28) з врахуванням числових значень параметрів:

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 3^2}} \Rightarrow f(x) = 0,133 e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}.$$

Знайдемо точку максимуму графіка та точки перегину (3.34):

$$\frac{0,399}{3} = 0,133, \quad \frac{0,242}{3} = 0,081,$$

$$A(4; 0,133), \quad B_1(1; 0,081), \quad B_2(7; 0,081).$$

Спираючись на властивості функції щільності та характерні точки A , B_1 , B_2 , будуємо графік.

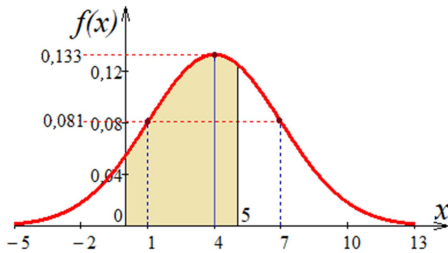


Рис.21

Запитані ймовірності знаходимо відповідно за формулами (3.38) та (3.39). Значення функції Лапласа вибираємо з таблиці (додаток 5).

$$P(0 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-4}{3}\right) = \Phi(0,33) - \Phi(-1,33) = 0,12930 + 0,40824 = 0,538.$$

$$P(|x-4| < 1,5) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2 \cdot \Phi(0,5) = 2 \cdot 0,19146 = 0,383.$$

Приклад 21. Завод виготовляє кульки для підшипників з номінальним розміром $D=10\text{мм}$. Фактичний розмір випадковий і розподілений за нормальним законом з параметрами $a=10\text{мм}$, $\sigma=0,4\text{мм}$. Придатними вважаються кульки, які проходять через отвір діаметром $10,7\text{мм}$ і не проходять в отвір діаметром $9,3\text{мм}$. Знайти процент браку.

Знайдемо, спочатку, ймовірність виготовлення придатних кульок:

$$P(|x-10| < 0,7) = 2\Phi(0,7/0,4) = 2\Phi(1,75) = 2 \cdot 0,4599 = 0,9198.$$

Отже, процент придатних кульок дорівнює $91,98\%$, а процент браку складає:

$$100\% - 91,98\% = 8,02\%.$$

4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ В СЕРЕДОВИЩІ MATHCAD

Викладений матеріал переконливо вказує на те, що багато задач на випадкові величини приводять до рутинних розрахунків. Це стосується, наприклад, знаходження числових характеристик випадкових величин, особливо моментів високих порядків. При цьому до неперервних випадкових величин залучається такий досить трудомісткий процес, як інтегрування функцій. Побудова графіків функцій розподілу, що є найбільш ефективним знаряддям розкриття особливостей випадкових величин, також займає немало часу. В цих умовах доцільно впроваджувати програмні методи розрахунків і графічних зображень. З цієї точки зору «Mathcad» є одною з найбільш прийнятних програм. Секрет надзвичайної популярності цієї програми і колосальної переваги перед іншими засобами полягає в легкості і наглядності розв'язування задач, зображенні складних математичних виразів в тому вигляді, в якому вони записуються на аркуші паперу. Тобто, в «Mathcad» не існує спеціальної мови програмування, що дає можливість швидкого та якісного оформлення звітів з розрахунками, таблицями, графіками і текстом.

Ще однією особливістю програми є її широкі можливості. Розв'язок алгебраїчних і диференціальних рівнянь, аналіз функцій, пошук екстремумів, числове і аналітичне диференціювання та інтегрування, вивід таблиць і графіків при аналізі знайдених результатів, обробка експериментальних даних – далеко не повний перелік того, що “уміє” «Mathcad». Програма має також символічний процесор, який дозволяє знаходити розв'язок задач аналітично.

Далі наведемо приклад виконання індивідуального завдання в середовищі «Mathcad» та деякі відомості про, використані при цьому, влаштовані інструменти програми.

4.1. Приклад виконання індивідуального завдання

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано у вигляді таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію і ексцес. Побудувати многокутник розподілу і показати на графіку математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення. Визначити функцію розподілу і побудувати її графік.

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 21 & 41 & 61 & 81 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix} \quad \text{ORIGIN} := 1$$

$$i := 1..5 \quad x_i := B_{1,i} \quad p_i := B_{2,i}$$

Числові характеристики розподілу випадкової величини

Математичне сподівання: $M[X] := p \cdot x$

$$M[X] = 43$$

Маємо дві моди:

$$Mo[X]_1 := 41 \quad Mo[X]_2 := 61$$

Дисперсія: $D[X] := (x - M[X])^2 \cdot p$

$$D[X] = 516$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma[X] := \sqrt{D[X]}$

$$\sigma[X] = 22.716$$

Коефіцієнт варіації: $V[X] := \frac{\sigma[X]}{M[X]}$

$$V[X] = 0.528$$

Асиметрія: $A[X] := (\sigma[X])^{-3} \cdot [(x - M[X])^3 \cdot p]$

$$A[X] = -0.197$$

Ексцес: $E[X] := (\sigma[X])^{-4} \cdot [(x - M[X])^4 \cdot p] - 3$

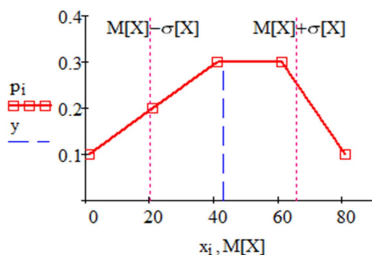
$$E[X] = -0.754$$

Многокутник та інтегральна функція розподілу

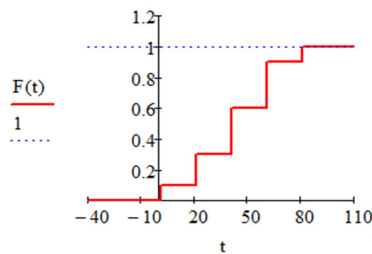
$$S_i := \sum_{k=1}^i p_k \quad S^T = (0.1 \quad 0.3 \quad 0.6 \quad 0.9 \quad 1)$$

Перенесення строки на додаванні:
Ctrl + Enter

$$F(t) := 0 \cdot (t \leq 1) + 0.1 \cdot (1 < t \leq 21) + 0.3 \cdot (21 < t \leq 41) + 0.6 \cdot (41 < t \leq 61) \dots + 0.9 \cdot (61 < t \leq 81) + 1 \cdot (t > 81)$$



Многокутник розподілу



Функція розподілу

2. Проводяться n випробувань за схемою Бернуллі, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p . Скласти закон розподілу випадкової величини X - числа k появи події A ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Знайти числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію і ексцес. Побудувати графіки функцій розподілу.

$$p := 0.7 \quad n := 4 \quad q := 1 - p \quad i := 0..n$$

$$P_i := \text{dbinom}(i, n, p) \quad P^T = (0.0081 \quad 0.0756 \quad 0.2646 \quad 0.4116 \quad 0.2401)$$

$$F(x) := \text{pbinom}(x, n, p)$$

Ряд розподілу випадкової величини

$$B_{0,i} := i \quad B_{1,i} := P_i \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.0081 & 0.0756 & 0.2646 & 0.4116 & 0.2401 \end{pmatrix}$$

Числові характеристики Біноміального розподілу

Математичне сподівання: $M[X] := n \cdot p$ $M[X] = 2.8$

Мода: $n \cdot p - q \leq \text{Mo}[X] \leq n \cdot p + p$ $\text{solve, Mo}[X] \rightarrow 3.0$ $\text{assume, Mo}[X] = \text{integer} \rightarrow 3.0$ $\text{Mo}[X] = 3$

Дисперсія: $D[X] := n \cdot p \cdot q$ $D[X] = 0.84$

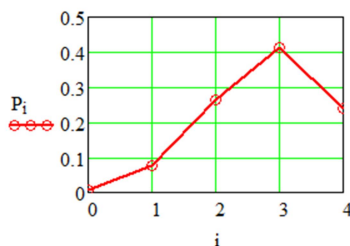
Середнє квадратичне відхилення: $\sigma[X] := \sqrt{D[X]}$ $\sigma[X] = 0.917$

Коефіцієнт варіації: $V[X] := \frac{\sigma[X]}{M[X]}$ $V[X] = 0.327$

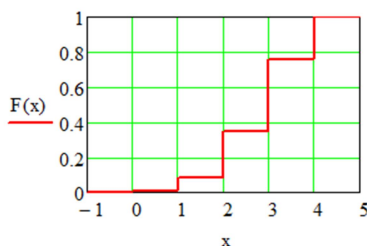
Асиметрія: $A[X] := \frac{q - p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$ $A[X] = -0.436$

Ексцес: $E[X] := \frac{1 - 6 \cdot p \cdot q}{n \cdot p \cdot q}$ $E[X] = -0.31$

Функції розподілу



Многокутник розподілу

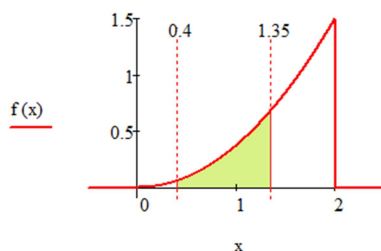
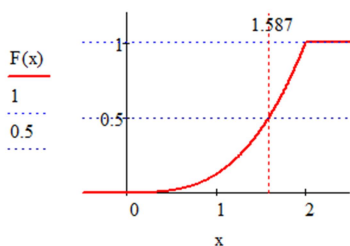


Функція розподілу

3. Випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Знайти щільність розподілу $f(x)$, числові характеристики випадкової величини (математичне сподівання, медіану, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію, ексцес), ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(0,4; 1,35)$.

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{x^3}{8} & \text{if } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{3x^2}{8} & \text{if } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Числові характеристики розподілу випадкової величини

Математичне сподівання, медіана: $Me[X] := \text{root}(F(x) - 0.5, x, 0, 2)$ $Me[X] = 1.587$

$$M[X] := \int_0^2 x \cdot f(x) dx \quad M[X] = 1.5$$

Дисперсія, середнє квадратичне відхилення і коефіцієнт варіації:

$$D[X] := \int_0^2 (x - M[X])^2 \cdot f(x) dx \quad D[X] = 0.15 \quad \sigma[X] := \sqrt{D[X]} \quad \sigma[X] = 0.387$$

Асиметрія та ексцес:

$$V[X] = \frac{\sigma[X]}{M[X]} \quad V[X] = 0.258$$

$$A[X] := \frac{1}{\sigma[X]^3} \cdot \int_0^2 (x - M[X])^3 \cdot f(x) dx \quad A[X] = -0.861$$

$$E[X] := \frac{1}{\sigma[X]^4} \cdot \int_0^2 (x - M[X])^4 \cdot f(x) dx - 3 \quad E[X] = 0.095$$

Ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(0,4; 1,35)$

$$P(0.4 < x < 1.35) = F(1.35) - F(0.4) = 0.2995$$

4. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу $\varphi(x)$. Знайти невідомий коефіцієнт "а", інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки обох функцій. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини X в інтервал $(0; 1.6)$.

$$\varphi(x) = \text{if} \left(1 < x \leq 2, ax^2 - \frac{6}{5} \cdot x, 0 \right) \quad \leftarrow \text{оператор if вибирається із списку функцій } f(x)$$

Позначимо: $U(a) := \int_1^2 a \cdot x^2 - \frac{6}{5} \cdot x \, dx$. Коефіцієнт "а" знаходиться із умови: $U(a) = 1$

Символьний розв'язок: $U(a) = 1 \text{ solve, } a \rightarrow \frac{6}{5}$ $a := \frac{6}{5}$

Отже, щільність розподілу набуває виду: $f(x) := \text{if} \left[1 < x \leq 2, \frac{6}{5}(x^2 - x), 0 \right]$

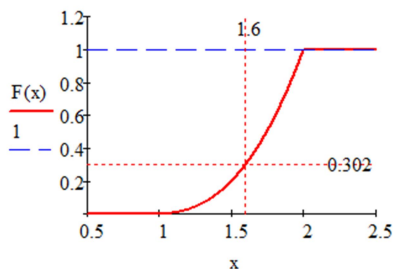
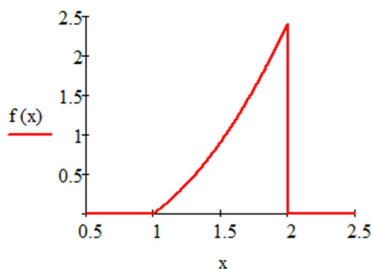
Знаходження інтегральної функції розподілу

1) При $x \leq 1$: $F(x) = \int_{-\infty}^x 0 \, dt \rightarrow 0$

2) При $1 < x \leq 2$: $F(x) = \int_{-\infty}^1 0 \, dt + \int_1^x \frac{6}{5}(t^2 - t) \, dt \text{ simplify } \rightarrow \frac{(x-1)^2 \cdot (2 \cdot x + 1)}{5}$

3) При $x > 2$: $F(x) = \int_{-\infty}^1 0 \, dt + \int_1^2 \frac{6}{5}(t^2 - t) \, dt + \int_2^x 0 \, dt \rightarrow 1$

Таким чином: $F(x) := \text{if} \left[x \leq 1, 0, \text{if} \left[1 < x \leq 2, \frac{(x-1)^2 \cdot (2 \cdot x + 1)}{5}, 1 \right] \right]$



Ймовірність попадання значень випадкової величини на інтервал $(0; 1.6)$

$$P(0 < x < 1.6) = F(1.6) - F(0) = 0.302$$

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням " a " і середнім квадратичним відхиленням " σ ". Записати формулу щільності розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$. Знайти ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання не перевищать δ .

$$a := 8$$

$$\sigma := 4.5$$

$$\alpha := 3$$

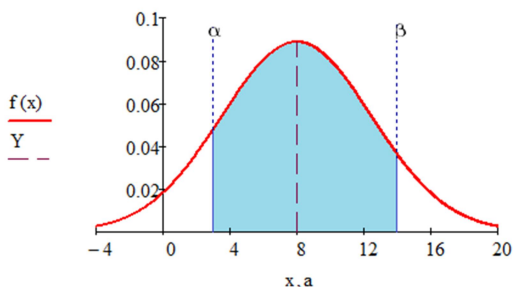
$$\beta := 14$$

$$\delta := 1.5$$

$$f(x) := \text{dnorm}(x, a, \sigma)$$

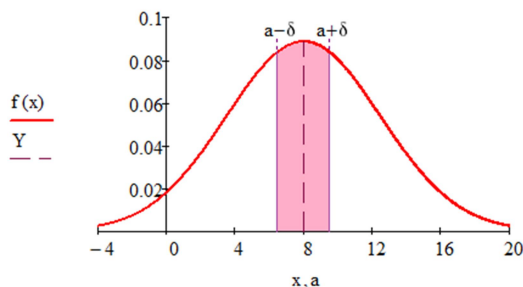
<= влаштовані функції нормального розподілу

$$F(x) := \text{pnorm}(x, a, \sigma)$$



Ймовірність попадання значень випадкової величини на інтервал (α, β) :

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0.7755$$



Ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання не перевищать δ :

$$P(|x - a| < \delta) = F(a + \delta) - F(a - \delta) = 0.2611$$

4.2. Коротка довідка про використання влаштованих функцій «Mathcad»

Для виконання індивідуального завдання в середовищі МАТКАД передбачаються знання цієї програми в певному обсязі. В цьому розділі пропонується “знайомство” з деякими інструментами МАТКАД (функціями, операторами...), які використовуються безпосередньо у вказаному завданні.

Крім формул в МАТКАДі можливе введення тексту. Місце введення вказується на робочому листі курсором Windows шляхом одноразового клацання лівою кнопкою мишки. Тоді на робочому листі з'являється мітка у вигляді червоного хрестика (+). З цього місця і розпочинається введення. Спочатку, якщо не вказано інше, МАТКАД відкриває “формульну область”. Якщо потрібно вводити текст, то відкривають “текстову область” клавішею <”>. Введення формул відмічається синім курсором ($b = 3$), а введення тексту – червоним (текст|).

Для присвоєння значень використовується символ $\langle := \rangle$, а для виведення результату – звичайний знак “дорівнює”. Наприклад:

$$b := 3 \qquad b = 3$$

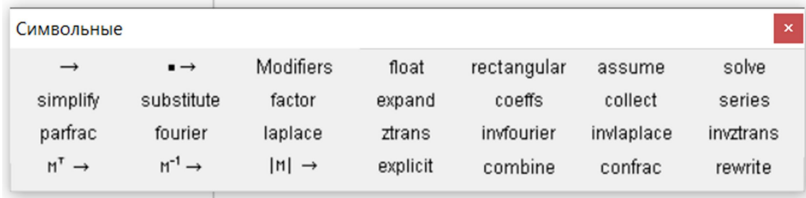
МАТКАД – це програма-інтерпретатор, яка при кожному включенні виконує всі дії розрахункового листа зліва-направо та зверху-вниз. При цьому важливо, щоб знак виведення результату був розміщений після знаку присвоєння. Інакше результат не буде показано:

$$b = \blacksquare \qquad b := 3$$

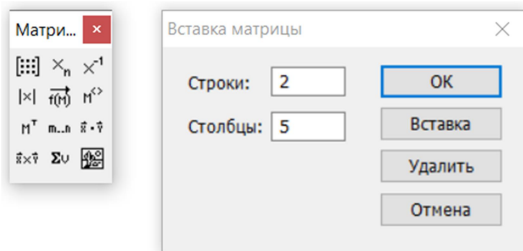
Ще один знак – “жирний знак дорівнює” використовується для запису рівнянь:

$$a \cdot x = b \text{ solve } x \rightarrow \frac{b}{a}$$

Тут рівняння $ax=b$ розв'язано за допомогою оператора «solve», в якому після коми вказують невідому (в нашому випадку – x), яку треба знайти. Оператор «solve» вставляють з панелі інструментів “Символьні”, яка зображена нижче. Для цього достатньо навести курсор на цей оператор та натиснути ліву кнопку мишки.



Вправа 1. Умовою вправи є ряд розподілу, який дається матрицею $B_{2 \times 5}$. Для її введення треба в панелі інструментів “Матриці” натиснути на шаблон матриці, в результаті чого з’явиться вікно меню “Вставка матриці” (див. нижче). В цьому вікні треба вказати число рядків – 2 та число стовпців – 5 і натиснути клавішу **OK**. В шаблоні матриці, який з’явився, треба в першому рядку набрати з клавіатури числові значення випадкової величини, а в другому – їх імовірності. При цьому важливо пам’ятати, що в МАТКАДі десяткові дробі записуються з точкою, а не із загальноприйнятою комою!



Системна змінна «ORIGIN» показує з якого номера розпочинаються індекси масивів. За попередніми стандартними налаштуваннями вона дорівнює нулю, але більш звичною в матричній алгебрі є одиниця. Тому присвоюємо вказаній системній змінній це значення: **ORIGIN := 1**. При цьому ім’я змінної набираємо з клавіатури.

Наступний рядок теж набираємо з клавіатури.

$$i := 1..5 \quad x_i := B_{1,i} \quad p_i := B_{2,i}$$

Двокрапка між цифрами 1 і 5 набирається однією клавішею $\langle ; \rangle$. Тоді змінній “i” присвоюються значення від одного до п’яти з одиничним кроком. Для набору нижніх індексів використовують клавішу $\langle [\rangle$ – ліва квадратна дужка. При цьому з’являється шаблон нижнього індексу, який треба заповнити відповідним значенням.

Набір в МАТКАДі виконують латинським шрифтом, інакше значна кількість операторів стане недоступною!

Після вказаних дій значення випадкової величини і їх ймовірності будуть сприйняті системою МАТКАД і можуть бути використані для подальших розрахунків. Можна вивести значення цих параметрів в будь-якому місці програми, наприклад:

$$x_1 = 1 \quad p_1 = 0.1 \quad x_4 = 61 \quad p_4 = 0.3$$

Імена “x” та “p” (без індексів) сприймаються МАТКАДом, як вектори-стовпці з відповідними координатами:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 21 \\ 41 \\ 61 \\ 81 \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Скалярний добуток цих векторів, як “сума добутків однойменних координат” співпадає з математичним сподіванням – сумою добутків значень випадкової величини на їх ймовірності. Тому формула для математичного сподівання в МАТКАДі може бути записана у вигляді скалярного добутку:

$$M[X] := x \cdot p = 43$$

Матриця-рядок не сприймається МАТКАДом, як вектор. Тоді більш компактним, якщо це буде доцільно, є запис векторів-стовпців у транспонованому вигляді:

$$\mathbf{x}^T = (1 \ 21 \ 41 \ 61 \ 81) \quad \mathbf{p}^T = (0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 0.3 \ 0.1)$$

Оператор транспонування (M^T) вибирають з панелі інструментів “Матриці”.

Імена змінних в МАТКАДі можуть складатися з латинських, грецьких та інших букв і цифр та обмеженої кількості символів: штриха ('), знаку підкреслювання (), символу процента (%), знаку нескінченності (∞), які вводяться з клавіатури. Числа та вказані символи не можуть стояти на першому місці імені змінної за виключенням знаку нескінченності, який може стояти лише на першому місці. Отже, просто ввести з клавіатури імена числових характеристик випадкової величини ($M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, ..., $E[X]$) в загальноприйнятому вигляді із-за наявності квадратних дужок не вдається. Вихід з цієї ситуації в тому, що фрагмент з квадратними дужками ($[X]$) набирають в текстовому режимі. Для цього в МАТКАДі передбачена комбінація клавіш: $\langle \text{ctrl} \rangle + \langle \text{shift} \rangle + \langle k \rangle$. Вона забезпечує вказаний перехід до текстового режиму, про що свідчитиме зміна синього формульного курсору на червоний текстовий. Після набору виразу $[X]$ треба ще раз повторити цю комбінацію клавіш для повернення до набору в формульному режимі.

На відміну від скалярного добутку векторів в МАТКАДі квадрат вектора дає вектор, елементами якого є квадрати відповідних елементів. Взагалі, n -на степінь вектора – це вектор, елементами якого є n -ні степені відповідних елементів:

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c}^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \\ 81 \end{pmatrix}$$

Це дає можливість спростити запис формул для обчислення дисперсії (2.19), асиметрії (2.42) та ексцесу (2.43):

$$D[X] := (x - M[X])^2 \cdot p$$

$$A[X] := \sigma[X]^{-3} \cdot [(x - M[X])^3 \cdot p]$$

$$E[X] := \sigma[X]^{-4} \cdot [(x - M[X])^4 \cdot p] - 3$$

Для побудови інтегральної функції розподілу спочатку знаходились її значення на окремих інтервалах:

$$S^T = (0.1 \ 0.3 \ 0.6 \ 0.9 \ 1)$$

На першому інтервалі ($t \leq 1$), як відомо, ця функція дорівнює нулю. Аргументом вибрана змінна t , так як змінна x використана в попередніх обчисленнях. Очевидно, що стандартний запис функції розподілу для заданої дискретної випадкової величини має вид:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 1, \\ 0,1 & \text{при } 1 < t \leq 21, \\ 0,3 & \text{при } 21 < t \leq 41, \\ 0,6 & \text{при } 41 < t \leq 61, \\ 0,9 & \text{при } 61 < t \leq 81, \\ 1 & \text{при } t > 81. \end{cases}$$

В МАТКАДі існує практично еквівалентна форма запису такої функції:

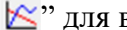
$$F(t) := \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{if } t \leq 1 \\ 0.1 & \text{if } 1 < t \leq 21 \\ 0.3 & \text{if } 21 < t \leq 41 \\ 0.6 & \text{if } 41 < t \leq 61 \\ 0.9 & \text{if } 61 < t \leq 81 \\ 1 & \text{if } t > 81 \end{array} \right.$$

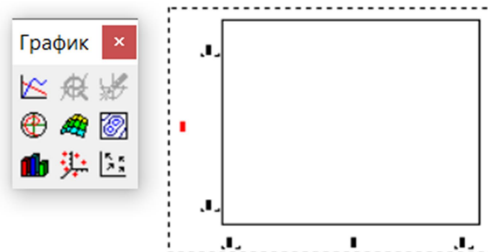
Вертикальна лінія “Add Line” та умовний оператор “**■ if ■**” вибираються з панелі інструментів “Програмування”. В ліву частину оператора “**■ if ■**” записують вираз, який обчислюється тоді, коли виконана умова, що внесена в праву частину оператора.

Недоліком наведеної форми запису функції розподілу є її некомпактність. В цьому сенсі вигідно відрізняється наступна форма запису цієї функції:

$$F(t) := 0 \cdot (t \leq 1) + 0.1 \cdot (1 < t \leq 21) + 0.3 \cdot (21 < t \leq 41) + 0.6 \cdot (41 < t \leq 61) \dots + 0.9 \cdot (61 < t \leq 81) + 1 \cdot (t > 81)$$

Тут нерівності в дужках сприймаються МАТКАДом, як деякі логічні висловлювання, яким надається значення “одиниця”, якщо вони вірні і “нуль”, якщо невірні. Щоб помістити запис по ширині листа виконано перенос рядка за допомогою комбінації клавіш **<ctrl>+<enter>** (такий перенос можливий лише тоді, коли наступним символом рядка є знак додавання – “плюс”).

Для графічного зображення многокутника та функції розподілу необхідно в робочий лист МАТКАДу вставити шаблони графіків у прямокутних координатах. Для цього використовують панель інструментів “Графік”. В ній містяться піктограми різних видів зображень: в прямокутних, в полярних, просторових координатах; лінії рівня; стовпчаста діаграма та ін. Першою є піктограма “” для вставки шаблону графіка в прямокутних координатах.



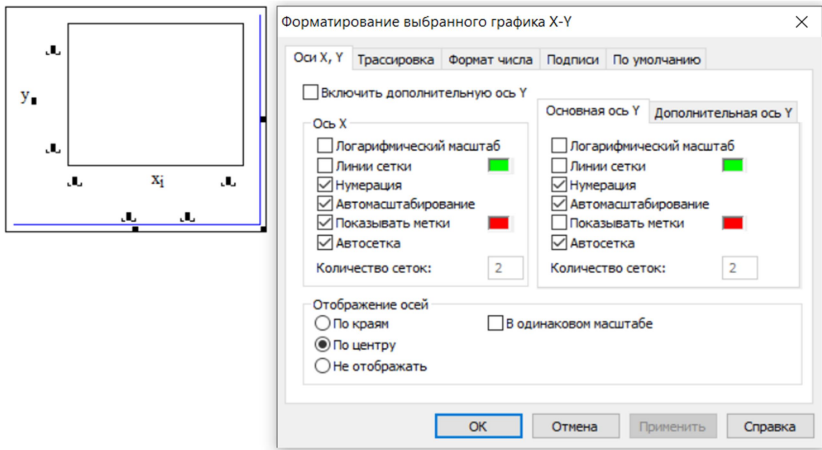
Після вставки шаблону треба ввести з клавіатури деяку інформацію в місця, відмічені чорними та червоною мітками. Обов'язковими для заповнення є мітки, розміщені посередині контура графіка. В нижню середню мітку вводять ім'я аргумента, а в ліву (червону) – ім'я функції, або її аналітичний вираз. Інші дві мітки вздовж вісі абсцис і дві – вздовж вісі ординат показують відповідні інтервали зображення функції і заповнюються МАТКАДом автоматично. Але часто таке заповнення не є раціональним, тому в цих випадках проводять його самостійно. В нашому випадку, наприклад, при побудові многокутника розподілу для вісі абсцис назначено інтервал 0-90, а для вісі ординат – інтервал 0-0,4.

Якщо необхідно в одному шаблоні зобразити кілька графіків – набирають кілька імен функцій через кому. Те ж саме стосується і аргументів, якщо вони різні для різних функцій. Якщо ж для всіх функцій аргумент один і той же, то його достатньо набрати тільки один раз.

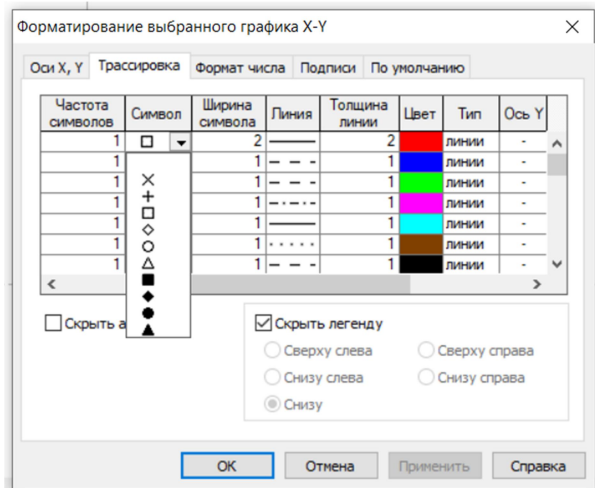
Якщо в якості аргумента ввести сталу величину, а в якості функції – будь-яку змінну, то графіком буде вертикальна лінія (паралельна вісі ординат). Такою лінією зручно позначати на графіку деякі числові характеристики. Цим способом на многокутнику розподілу відзначене математичне сподівання (синя пунктирна лінія).

Зручним інструментом оформлення графіків є влаштовані допоміжні дві мітки на кожній координатній осі. Вони активуються з закладки “Вісі X, Y” вікна “Форматування вибраного графіка X-Y”, яке з'являється після подвійного клацання мишкою в області графіка. Допоміжні мітки з'являються, як тільки буде вибрано в цій закладці опцію “Показувати мітки”.

Нижче зображено вікно форматування з включеною опцією “Показувати мітки” та шаблон графіка, на якому в нижній частині виведені допоміжні мітки.



При заповненні мітки іменем змінної, якій присвоєно числове значення, на графік виводиться вертикальна пунктирна лінія, що відповідає цьому числу, а також ім'я змінної біля верхнього кінця пунктирної. Щоб показати на графіку значення середнього квадратичного відхилення, ліва і права допоміжні мітки в нашому випадку заповнювались, відповідно, виразами $M[X] - \sigma[X]$ та $M[X] + \sigma[X]$.

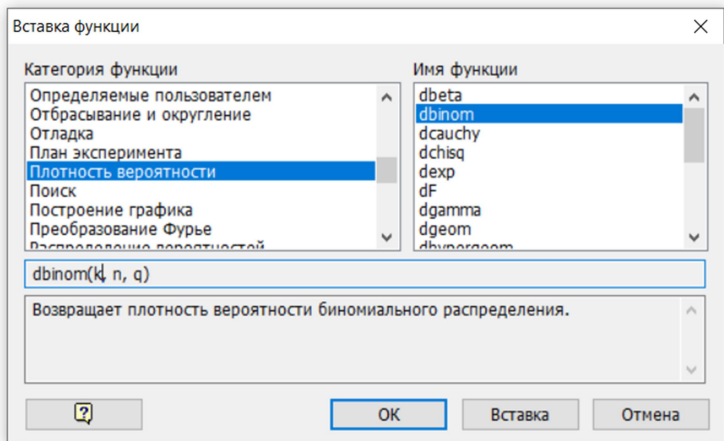


Дві інші допоміжні мітки для вісі ординат використовують аналогічно.

У вікні “Форматування вибраного графіка X-Y” в різних закладках пропонується багатий вибір опцій для форматування. В закладці “Трасировка”, наприклад, для позначення вузлових точок многокутника розподілу вибрані пустотілі квадратики шириною 2 одиниці, лінія графіка вибрана суцільною, товщиною 2 одиниці, червоного кольору (1 рядок на рис. вище).

Вправа 2. Числові значення параметрів вправи введені за допомогою знаку присвоєння: $p:=0.7$, $n:=4$. Випадкова величина може приймати цілі значення від 0 до n , що показано виразом $i=0..n$ (двокрапка, як i у першій вправі набирається однією клавішею $\langle ; \rangle$).

Функція для обчислення ймовірностей числа i появи події A та інтегральна функція розподілу є влаштованими і вибираються із списку $f(x)$ основного меню. При активації піктограми $f(x)$ відкривається дворівневий список, в першій частині якого за допомогою курсора вказують категорію, а в другій – необхідну функцію. На рисунку нижче показано вибір функції $\text{dbinom}(\cdot, \cdot, \cdot)$. Для вставки функції в документ МАТКАД достатньо натиснути клавішу «Вставка» або «ОК».



З цього ж списку вибирається і функція `rbinom(, , , )` тільки в **категорії функцій** вказують “Розподіл ймовірностей”, а в **імені функції** вказують “`rbinom`”. Отже, для подальших розрахунків одержано дві функції:

$$P_i := \text{dbinom}(i, n, p) \qquad F(x) := \text{rbinom}(x, n, p)$$

Тут “**P**” – вектор-стовпець ймовірностей того, що випадкова величина прийме значення $i = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$P^T = (0.0081 \quad 0.0756 \quad 0.2646 \quad 0.4116 \quad 0.2401)$$

де “**T**” – оператор транспонування.

Ряд розподілу подається у вигляді матриці $B_{2 \times 5}$. Нульовому рядку цієї матриці присвоюються значення $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ($B_{0,i} := i$), а першому рядку – ймовірності P_i ($B_{1,i} = P_i$). В цій вправі системна змінна **ORIGIN = 0** не перевизначалась, тому нумерація рядків (як і елементів) матриці B розпочинається з нуля. Ряд розподілу (**матриця B**) виводиться автоматично за допомогою знаку “дорівнює”, який набирається з клавіатури.

Числові характеристики розподілу обчислювались за стандартними формулами (3.5). Слід відмітити, що в останніх версіях МАТКАД знаки присвоювання значень ($:=$) і виведення результату ($=$) можуть належати одній і тій же формульній області, тобто, використовуватись послідовно. Наприклад:

$$M[X] := n \cdot p = 2.8$$

Раніше вимагалось, щоб обчислення та виведення результату були в двох послідовно розміщених областях:

$$M[X] := n \cdot p \qquad M[X] = 2.8$$

У вправі обрано саме цей вид обчислень, який має сенс в усіх версіях МАТКАД.

Значення моди ($M_o[X]$) легко знаходиться при відомому ряду розподілу, або многокутнику розподілу. У вправі

показано як можна знайти моду, не будуючи ні ряду, ні многокутника розподілу, а лише за відомих значень n і p . Для цього використані: знак нерівності “ $\leq$ ”, оператори “solve” і “assume”, модифікатор “integer”. Наводимо аналогічний приклад:

$p := 0.6$

$n := 4$

$q := 1 - p$

$$n \cdot p - q \leq Mo[X] \leq n \cdot p + p \quad \left| \begin{array}{l} \text{solve}, Mo[X] \\ \text{assume}, Mo[X] = \text{integer} \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} 3.0 \\ 2.0 \end{pmatrix}$$

Нерівність “ $\leq$ ” набирається з панелі інструментів “Булева алгебра”, оператори “solve” і “assume” – з панелі “Символьні”, модифікатор “integer” – з панелі “Модифікатор”.

Оператором “solve” розв’язуються не тільки рівняння, а і нерівності. Оператор “assume” вказує на умову, при якій повинна розв’язуватися нерівність. Сама умова “ $\text{■} = \text{integer}$ ”, якщо її доповнити іменем $Mo[X]$, вимагає, щоб мода була цілим числом. При послідовному наборі операторів “solve” і “assume” другий оператор зміщується в другий рядок і вертикальна лінія з’являється автоматично.

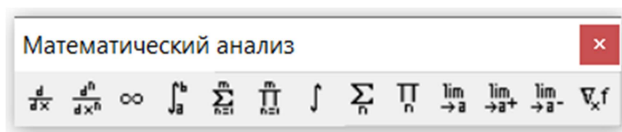
Як бачимо, розв’язком є вектор-стовпець з двома елементами. Це значить, що в умовах даної задачі спостерігається дві моди: $Mo[X]_1=3$; $Mo[X]_2=2$.

У вікні “Форматування вибраного графіка X-Y” активовані опції “Лінії сітки (зеленого кольору)”, що полегшує читання графіка. При такому оформленні графіків більш доцільним є заміна центральних осей обрамляючим прямокутником. Для цього в тому ж вікні в полі “Відображення осей” активізують опцію “По краям”.

Вправа 3. Для знаходження щільності розподілу взято співвідношення (1.15). Інтегральна функція розподілу задана простим аналітичним виразом, похідна від якого обчислюється досить просто, тому засоби МАТКАД для цього не були задіяні. Але на панелі “Математичного аналізу” є оператори диференціювання, що дозволяє одержувати похідну автоматично. Для цієї вправи, наприклад, можна знайти:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{8} \right) \rightarrow \frac{3 \cdot x^2}{8}$$

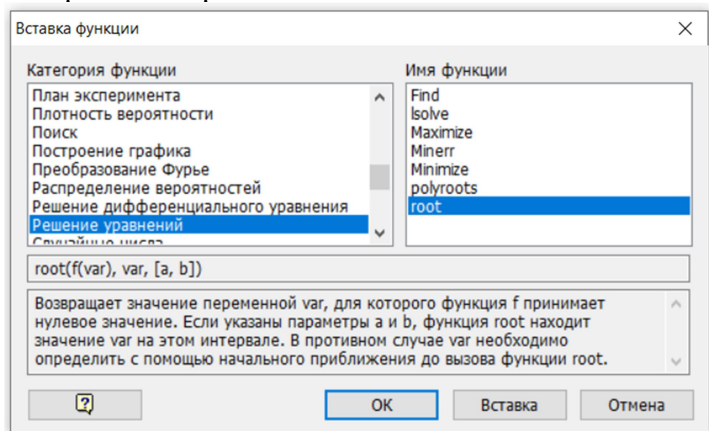
На панелі “Математичного аналізу” містяться також засоби для інтегрування, обчислення сум, добутків, границь тощо.



При побудові графіка щільності ймовірностей $f(x)$ кольором виділено площу, яка чисельно дорівнює ймовірності попадання значень випадкової величини на інтервал $(0,4; 1,35)$. Засобів для заливки площі кольором в МАТКАДі немає. Тому рисунок через буфер обміну був поміщений в графічний редактор “Paint”, де і була виконана заливка. Далі, не змінюючи розміру рисунка, він знову був повернений до МАТКАДу через буфер обміну.

Для знаходження числових характеристик використані стандартні формули (п.2.2). При обчисленні медіани використана влаштована функція “ $\text{root}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ ” із списку функцій $f(x)$. Після задіяння цієї піктограми у вікні “Вставка функції”, що з’явилося, треба відмітити “Категорію функції” та “Ім’я функції”. Категорією функції в нашому випадку є “розв’язок рівнянь”, а ім’ям функції – “root”. У першу мітку (чорний прямокутник) функції “root” вносять вираз $F(x) - 0,5$,

який задає рівняння, що розв'язується ($F(x) - 0.5 = 0$). У другій мітці вказують змінну (x), значення якої треба знайти. В останніх двох мітках вказують інтервал ($0; 2$), на якому шукають розв'язок рівняння.



Функція “root” використовує числовий алгоритм “ділення відрізка пополам”, а вказане рівняння ($F(x) - 0.5 = 0$) дає на кінцях відрізка значення, відповідно $(-0,5)$ та $(0,5)$, протилежні по знаку. Тому, враховуючи неперервність функції розподілу $F(x)$, можна стверджувати, що цей алгоритм при визначенні медіани буде завжди успішним.

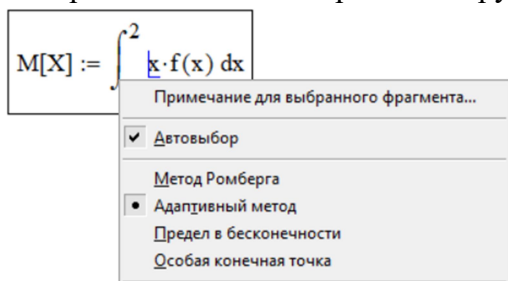
Медіану можна також знаходити за допомогою оператора “solve” з панелі інструментів “Символьні”.

$$F(x) - \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} \text{solve, } x \\ \text{assume, } x = \text{real} \end{array} \right. \rightarrow 4^{\frac{1}{3}} = 1.587$$

При цьому бажано вводити умову “ $\blacksquare$ assume, $x = \text{real} \rightarrow$ ”, яка вказує, що корінь x – дійсне число, щоб не виводити зайві комплексні корені, знайдені символьним процесором. В рівняння дробові числа краще вводити в раціональній формі ($1/2$ замість 0.5). Інакше результат буде знайдено у вигляді десяткового дробу з 20 значущими цифрами, в чому, як пра-

вило, немає потреби. Символьний результат ($\sqrt[3]{4}$) можна перетворити до десяткового вигляду (1.587), якщо додати після нього знак “=”.

В МАТКАДі визначений інтеграл можна знаходити за допомогою, як числового, так і символьного методів. Але часто, в залежності від виду підінтегральної функції, символьний метод у порівнянні з числовим займає багато часу. Тому для обчислення числових характеристик випадкової величини рекомендується використовувати саме числовий метод, який активізується при виведенні результату знаком “=”. Символ визначеного інтегралу набирається з панелі “Математичного аналізу”. Клацання правою кнопкою мишки в області формули безпосередньо по символу інтеграла відкриває вікно, в якому можна вибрати числовий алгоритм інтегрування.



Метод Ромберга – для більшості функцій, що не мають особливостей.

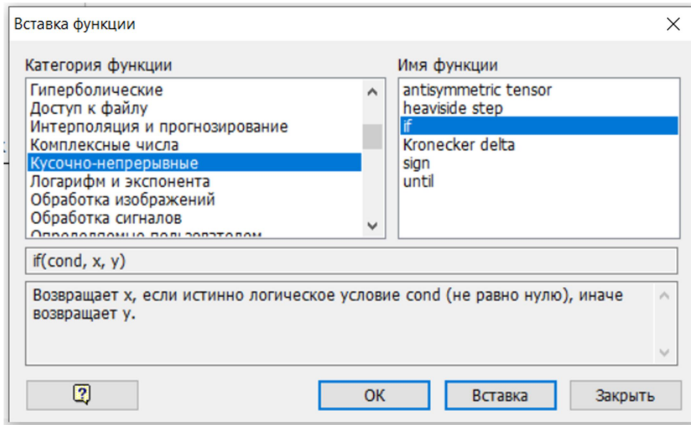
Адаптивний метод – для функцій, які швидко змінюються на відрізьку інтегрування.

Границя в нескінченності – для інтегралів з нескінченними межами інтегрування.

Особлива кінцева точка – для функцій, не визначених на одному чи обох кінцях відрізьку інтегрування.

В цьому вікні за попередніми налаштуваннями відмічена опція “Автовибір”. Рекомендується не виключати цю опцію і залишити вибір алгоритму інтегрування за МАТКАДом. Рисунок показує, що активним наразі є “Адаптивний метод”.

Вправа 4. Функція щільності задається умовним оператором “if(■,■,■)” із списку $f(x)$ категорії “Кусочно-неперервні”.



В першу мітку оператора вводять деяку умову ($1 < x \leq 2$). В другу мітку – вираз ($ax^2 - \frac{6}{5}x$), який має місце коли умова виконана, а в третю мітку – вираз (0), який має місце коли умова не виконана.

Невідому a знаходять з умови нормування функції щільності ймовірностей: площа $U(a)$ під кривою щільності повинна дорівнювати одиниці ($U(a)=1$). Для знаходження значення коефіцієнта a застосовано символічний оператор “solve”.

Коефіцієнт a можна знайти також за допомогою функції “root(■,■,■,■)” з використанням числового алгоритму “ділення відрізка пополам”.

$$U(1) - 1 = -0.467 \quad U(2) - 1 = 1.867$$

$$a := \text{root}(U(a) - 1, a, 1, 2) = 1.2$$

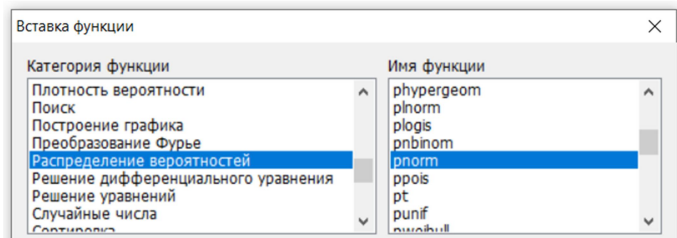
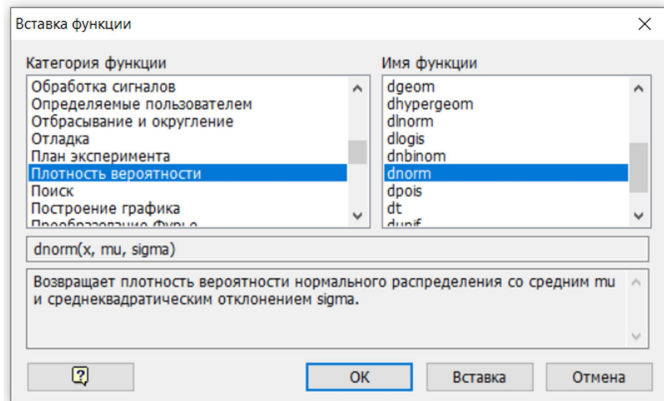
Цей алгоритм, як відомо, вимагає, щоб функція ($U(a)-1$) приймала значення різного знаку на кінцях відрізка (1; 2).

Особливістю знаходження інтегральної функції розподілу є застосування визначеного інтегралу зі змінною верхньою межею. Такі інтеграли приводять до результату в аналітичній формі. Отже, набір цих інтегралів закінчують знаком виведення символьного результату у вигляді стрілки ($\rightarrow$). Його можна ввести з панелей “Обчислення”, “Символьні” або з клавіатури комбінацією клавіш $\langle \text{ctrl} \rangle + \langle > \rangle$.

Вправа 5. Для виконання вправи були використані влаштовані функції нормального розподілу:

$$f(x) = \text{dnorm}(x, a, \sigma); \quad F(x) = \text{pnorm}(x, a, \sigma).$$

Їх вибір зі списку функцій $f(x)$ показано нижче.



Для геометричної інтерпретації ймовірностей $P(\alpha < x < \beta)$ і $P(|x - a| < \delta)$ задіяні мітки на вісі абсцис, а відповідні площі затшовані в графічному редакторі “Paint”.

Варіант 1

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	1	3	5	7
P	0,2	0,3		0,35

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати многокутник розподілу і вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)/2 & \text{при } 1 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 2

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	10	15	30
P	0,1	0,3		0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати многокутник розподілу і вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2; \\ (x+2)^2/25 & \text{при } -2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 3

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	7	10	12	15
P	0,2	0,1		0,4

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ (x+1)^2/4 & \text{при } -1 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 4

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею;

X	5	10	15	30
P	0,4	0,2	0,3	

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 9/5; \\ 5x - 9 & \text{при } 9/5 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 5

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	2	4	6	10
P	0,1		0.4	0,25

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.
2. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1/3; \\ 3x-1 & \text{при } 1/3 < x \leq 2/3; \\ 1 & \text{при } x > 2/3. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 6

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	10	20	30
P	0,4		0,3	0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.
2. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2; \\ (x+2)/3 & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 7

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею

X	5	7	10	15
P		0,25	0,3	0,15

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 8

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	3	7	12	15
P	0,1	0,2		0,4

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2 \\ (x+2)^2/16, & \text{при } -2 < x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 9

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	10	15	20	30
P	0,1		0,3	0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/16, & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 10

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	10	15	20	30
P	0,05	0,1		0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 9x & \text{при } 0 < x \leq 1/9; \\ 1 & \text{при } x > 1/9. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 11

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	4	6	9	13
P	0,3	0,15		0,25

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/25 & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 12

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	10	25	30
P	0,3	0,2		0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ (x+1)^2/4 & \text{при } -1 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 13

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	6	10	15
P	0,05		0,4	0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/16 & \text{при } 0 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 14

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	10	15	20	30
P	0,1	0,4		0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x/5 & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 15

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	10	13	17	22
P	0,05	0,2		0,4

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 + 2x/8, & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 16

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	4	8	10	15
P		0,25	0,4	0,05

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -2; \\ (x+2)^2/9 & \text{при } -2 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 17

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	9	13	18
P	0,25		0,4	0,05

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/64 & \text{при } 0 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 18

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	4	8	11	17
P	0,25	0,4		0,05

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/25 & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 19

1. Випадкова величина X задана таблицею:

X	12	15	22	30
P	0,1	0,5		0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)/4 & \text{при } 1 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 20

1. Випадкова величина X задана таблицею:

X	4	9	14	21
P	0,15	0,25		0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина X задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)/3 & \text{при } 1 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 21

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	6	13	16	23
P	0,2	0,4		0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/4 & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 22

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	10	12	14	17
P	0,2	0,2		0,5

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ x^2 - 1 & \text{при } 1 < x \leq \sqrt{2}; \\ 1 & \text{при } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 23

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	4	8	12	22
P	0,15		0,7	0,05

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)/5 & \text{при } 1 < x \leq 6; \\ 1 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 24

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	6	12	18	24
P	0,1	0,3		0,5

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^3/8 & \text{при } 0 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 25

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	1	3	5	8
P	0,2	0,3		0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x-1)/7 & \text{при } 1 < x \leq 8; \\ 1 & \text{при } x > 8. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 26

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	7	12	17	20
P	0,1	0,3		0,2

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ (x^2 - 1)/2 & \text{при } 1 < x \leq \sqrt{3}; \\ 1 & \text{при } x > \sqrt{3}. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти математичне сподівання $M[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 27

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	3	6	9	12
P	0,1	0,6		0,1

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/9 & \text{при } 0 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 28

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	5	10	20	25
P	0,3	0,2		0,4

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3; \\ x/6 - 1/2 & \text{при } 3 < x \leq 9; \\ 1 & \text{при } x > 9. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 29

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	8	16	24	32
P	0,1	0,2		0,3

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ x-1 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 30

1. Випадкова величина
- X
- задана таблицею:

X	7	10	12	15
P	0,2	0,1		0,4

- а) заповнити пусту клітинку в цьому законі розподілу;
 б) побудувати багатокутник розподілу та вказати на ньому моду;
 в) знайти середнє квадратичне відхилення.

2. Випадкова величина
- X
- задана інтегральною функцією:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2/25 & \text{при } 0 < x \leq 5; \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

- а) знайти щільність розподілу $f(x)$;
 б) знайти середнє квадратичне відхилення $\sigma[x]$;
 в) побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$.

Варіант 1

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	36	39	42	45	47
p_i	0,1	p_2	0,2	0,1	0,05

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=5$, $p=0,1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{7}(x\sqrt{x} - 1) & \text{при } 1 < x \leq 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1,5; 3]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 3x - 2) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=8$ і $\sigma=2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2;12)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 2

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	9	12	16	18	24
p_i	0,15	0,22	0,18	0,4	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,15$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \ln x & \text{при } 1 < x \leq e \\ 1 & \text{при } x > e \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 5x - 6) & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq 2) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 2,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=7$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 10)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 3

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	16	29	32	35	41
p_i	0,1	0,4	0,2	p_4	0,08

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=3$, $p=0,2$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 0,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 7x - 12) & \text{при } 3 < x \leq 4 \\ 0 & \text{при } (x \leq 3) \vee (x > 4) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[3; 3,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=6$ і $\sigma=3$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=3$.

Варіант 4

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	6	9	12	15	17
p_i	0,05	0,15	p_3	0,5	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=6$, $p=0,9$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{1}{5}(x^2 - 4) & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 2,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 0,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$ і $\sigma=4$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=4$.

Варіант 5

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	14	19	24	27	30
p_i	p_1	0,14	0,4	0,3	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,8$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2}(x+1) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0,5; 0,75]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} ax(2-x) & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0,5; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=9$ і $\sigma=5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 6

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	4	9	14	19	22
p_i	0,1	0,4	p_3	0,1	0,2

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=5$, $p=0,75$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{1}{3} \\ 3x+1 & \text{при } -\frac{1}{3} < x \leq 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[-1/3; -1/4]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(1-x^2) & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq -1) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=8$ і $\sigma=4$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 4$.

Варіант 7

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	3	6	10	12	14
p_i	0,15	p_2	0,25	0,4	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=6$, $p=0,7$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{x}{4} \left(1 + \frac{x}{2}\right) & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 - x + 2) & \text{при } -2 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq -2) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[-1; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=6$ і $\sigma=2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 8)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 8

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	5	9	12	14	17
p_i	0,08	p_2	0,22	0,4	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,65$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{2} - 1 & \text{при } \sqrt{2} < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1, 5; 2]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 2x - \frac{3}{4}) & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{при } (x \leq \frac{1}{2}) \vee (x > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0, 5; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$ і $\sigma=5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 9)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 3$.

Варіант 9

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	10	13	14	15	17
p_i	0,1	0,12	0,4	0,28	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=3$, $p=0,6$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \sqrt{3} \\ \frac{x}{6} \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) & \text{при } \sqrt{3} < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 4x - 3) & \text{при } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=5$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 5)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 10

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	3	7	12	15	18
p_i	0,11	0,15	0,25	0,4	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,55$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \pi/2 \\ 1 - \sin x & \text{при } \pi/2 < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[\pi/2; 2\pi/3]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + x) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0,5; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=7$ і $\sigma=3$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 4)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 11

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	7	9	12	15	18
p_i	p_1	0,14	0,24	0,12	0,15

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=7$, $p=0,2$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1/2 \\ x(2x-1) & \text{при } 1/2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0,5; 0,8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + x + 2) & \text{при } -1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq -1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=9$ і $\sigma=4$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=3$.

Варіант 12

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	6	9	13	15	17
p_i	0,16	0,2	0,3	p_4	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=6$, $p=0,3$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 1 - \cos 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4 \\ 1 & \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; \pi/8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + x + 1) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 3/4]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=9$ і $\sigma=3$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 5)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 13

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	2	5	9	12	17
p_i	0,1	0,25	p_3	0,35	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 5$, $p = 0,4$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{8}(3x^2 - x - 2) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1,5; 1,8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 8x - 7) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=7$ і $\sigma=2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 9)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 5$.

Варіант 14

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	8	10	14	17	20
p_i	0,1	0,4	p_3	0,3	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,3$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq e \\ \ln x - 1 & \text{при } e < x \leq e^2 \\ 1 & \text{при } x > e^2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[e; e^{1,5}]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + \frac{5}{2}x - 1) & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq \frac{1}{2}) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=6$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 1$.

Варіант 15

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	8	10	13	15	17
p_i	p_1	0,26	0,3	0,2	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=3$, $p=0,5$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ 2^x - 1 & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 12x - 9) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$ і $\sigma=5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(4; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 16

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	10	13	15	18	24
p_i	p_1	0,23	0,3	0,15	0,25

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 6$, $p = 0,55$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \pi/2 \\ -\cos x & \text{при } \pi/2 < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[\pi/2; 2\pi/3]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 8x - 9) & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq 2) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 2,5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=8$ і $\sigma=3$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 3$.

Варіант 17

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	11	14	16	19	24
p_i	0,08	p_2	0,32	0,3	0,2

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=4$, $p=0,1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{3(x-2)}{x} & \text{при } 2 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 2,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 7x - 6) & \text{при } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 3]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=7$ і $\sigma=2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=5$.

Варіант 18

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	12	15	18	22	25
p_i	0,1	p_2	0,33	0,2	0,3

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=5$, $p=0,3$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{2}{7} \left(\frac{x^3-1}{x} \right) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 3x + 1) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=9$ і $\sigma=6$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(4; 8)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 3$.

Варіант 19

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	3	7	10	15	17
p_i	0,05	0,2	0,4	0,2	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=3$, $p=0,4$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 3x - 1) & \text{при } 0,5 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0,5) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=5$ і $\sigma=2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 4)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 20

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	15	19	23	25	27
p_i	0,1	0,4	0,3	p_4	0,08

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,25$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^2/16 & \text{при } 0 < x \leq 4 \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 3]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 3x + \frac{6}{25}) & \text{при } -\frac{1}{5} < x \leq \frac{6}{5} \\ 0 & \text{при } (x \leq -\frac{1}{5}) \vee (x > \frac{6}{5}) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=4$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 5)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 1$.

Варіант 21

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	9	14	17	21	24
p_i	0,07	0,23	0,5	p_4	0,08

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 6$, $p = 0,15$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{e^x - 1}{e - 1} & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 0,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 9x - 18) & \text{при } 4 < x \leq 6 \\ 0 & \text{при } (x \leq 4) \vee (x > 6) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[4; 5]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 6$ і $\sigma = 2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(4; 8)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 22

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	26	29	32	35	37
p_i	0,06	0,3	0,4	0,2	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=7$, $p=0,1$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x\sqrt{x} & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 0,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 4x + 5) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0,2; 0,7]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=6$ і $\sigma=4$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 7)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 23

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	6	9	14	17	19
p_i	0,1	p_2	0,22	0,3	0,2

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=5$, $p=0,2$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3/2 & \text{при } 0 < x \leq \sqrt[3]{2} \\ 1 & \text{при } x > \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 8x - 1) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1,5; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=7$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(3; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 24

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	3	6	10	14	17
p_i	0,15	0,25	0,32	p_4	0,09

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,35$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{3}(x^2 - 1) & \text{при } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1, 1, 1, 8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + x + 6) & \text{при } \frac{3}{2} < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq \frac{3}{2}) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 3]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=5$ і $\sigma=3$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 4)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 1$.

Варіант 25

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	3	7	11	15	17
p_i	p_1	0,12	0,23	0,34	0,24

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 3$, $p = 0,35$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2 \\ \frac{1}{21}(x^2 - 4) & \text{при } 2 < x \leq 5 \\ 1 & \text{при } 5 > x \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[3; 4]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 7x - 1) & \text{при } \frac{1}{2} < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq \frac{1}{2}) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 4$ і $\sigma = 2$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 10)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 3$.

Варіант 26

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	9	11	14	18	20
p_i	p_1	0,18	0,35	0,25	0,2

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=6$, $p=0,4$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(3^x - 1) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 0,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 4) & \text{при } -1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{при } (x \leq -1) \vee (x > 2) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 2]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=2$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 3)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=1$.

Варіант 27

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	5	9	12	16	20
p_i	0,12	0,18	0,5	p_4	0,05

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 5$, $p = 0,22$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{при } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{при } x > 3 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1,5; 2,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(-x^2 + \frac{9}{4}\right) & \text{при } 0 < x \leq \frac{3}{2} \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee \left(x > \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=3$ і $\sigma=1,5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 2)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 2$.

Варіант 28

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	5	9	14	17	20
p_i	0,1	0,3	p_3	0,18	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 4$, $p = 0,47$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ x^3/8 & \text{при } 0 < x \leq 2 \\ 1 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[1; 1,5]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a\left(-x^2 - \frac{5}{3}x + 4\right) & \text{при } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq -1) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=4$ і $\sigma=1,5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(2; 3)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 1$.

Варіант 29

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	7	9	12	14	17
p_i	0,4	0,2	p_3	0,16	0,1

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n=3$, $p=0,33$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k=0,1,2,\dots,n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi/2 \\ 1 & \text{при } x > \pi/2 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; \pi/4]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 - 4x + 5) & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{при } (x \leq 0) \vee (x > 1) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; 1]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=9$ і $\sigma=3,5$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(4; 6)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon=2$.

Варіант 30

1. Закон розподілу випадкової величини X задано у вигляді таблиці:

x_i	4	7	12	15	19
p_i	0,12	0,14	0,36	0,2	p_5

Знайти: а) невідому ймовірність p_i ; б) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, в) функцію розподілу $F[X]$ і побудувати її графік.

2. Проводяться випробування за схемою Бернуллі з параметрами $n = 6$, $p = 0,45$. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) появи події A . Побудувати многокутник та функцію $F[X]$ розподілу. Знайти числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$, $A[X]$, $E[X]$.

3. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x & \text{при } 0 < x \leq \pi/4 \\ 1 & \text{при } x > \pi/4 \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу $f(x)$; б) числові характеристики $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; в) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[0; \pi/8]$. Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

4. Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} a(-x^2 + 5x - 4) & \text{при } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{при } (x \leq 1) \vee (x > 3) \end{cases}$$

Знайти: а) невідомий коефіцієнт a ; б) функцію розподілу $F[X]$; в) числові характеристики: $M[X]$, $M_o[X]$, $M_e[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$, $V[X]$; г) ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[2; 3]$; Побудувати графіки функцій $F(x)$, $f(x)$.

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=8$ і $\sigma=1$. Записати формулу щільності розподілу $f(x)$ і побудувати її графік. Знайти: а) ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 10)$; б) ймовірність того, що відхилення значень X від математичного сподівання за абсолютною величиною буде меншим за $\varepsilon = 1$.

Індивідуальне завдання 2

ДОДАТОК 3

1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано у вигляді таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію і ексцес. Побудувати многокутник розподілу і показати на графіку математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення. Визначити функцію розподілу і побудувати її графік.

$B_{N^{\circ}} \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 \end{pmatrix}$	№ - номер варіанта
$B1 \equiv \begin{pmatrix} 36 & 39 & 42 & 45 & 47 \\ 0.1 & 0.55 & 0.2 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$	$B2 \equiv \begin{pmatrix} 9 & 12 & 16 & 18 & 24 \\ 0.15 & 0.22 & 0.18 & 0.4 & 0.05 \end{pmatrix}$
$B3 \equiv \begin{pmatrix} 16 & 29 & 32 & 35 & 41 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.22 & 0.08 \end{pmatrix}$	$B4 \equiv \begin{pmatrix} 14 & 19 & 24 & 27 & 30 \\ 0.15 & 0.14 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$
$B5 \equiv \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 17 \\ 0.05 & 0.15 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$	$B6 \equiv \begin{pmatrix} 4 & 9 & 14 & 19 & 22 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$
$B7 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 & 12 & 14 \\ 0.15 & 0.1 & 0.25 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$	$B8 \equiv \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 14 & 17 \\ 0.08 & 0.2 & 0.22 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$
$B9 \equiv \begin{pmatrix} 10 & 13 & 14 & 15 & 17 \\ 0.1 & 0.12 & 0.4 & 0.28 & 0.1 \end{pmatrix}$	$B10 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 7 & 12 & 15 & 118 \\ 0.11 & 0.15 & 0.25 & 0.4 & 0.09 \end{pmatrix}$
$B11 \equiv \begin{pmatrix} 7 & 9 & 12 & 15 & 18 \\ 0.35 & 0.14 & 0.24 & 0.12 & 0.15 \end{pmatrix}$	$B12 \equiv \begin{pmatrix} 6 & 9 & 13 & 15 & 17 \\ 0.16 & 0.2 & 0.3 & 0.24 & 0.1 \end{pmatrix}$
$B13 \equiv \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 & 12 & 17 \\ 0.1 & 0.25 & 0.2 & 0.35 & 0.1 \end{pmatrix}$	$B14 \equiv \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 & 17 & 20 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$
$B15 \equiv \begin{pmatrix} 8 & 10 & 13 & 15 & 17 \\ 0.14 & 0.26 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$	$B16 \equiv \begin{pmatrix} 10 & 13 & 15 & 18 & 24 \\ 0.07 & 0.23 & 0.3 & 0.15 & 0.25 \end{pmatrix}$
$B17 \equiv \begin{pmatrix} 11 & 14 & 16 & 19 & 24 \\ 0.08 & 0.1 & 0.32 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$	$B18 \equiv \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 & 22 & 25 \\ 0.1 & 0.07 & 0.33 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$
$B19 \equiv \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 & 15 & 17 \\ 0.05 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.15 \end{pmatrix}$	$B20 \equiv \begin{pmatrix} 15 & 19 & 23 & 25 & 27 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.12 & 0.08 \end{pmatrix}$
$B21 \equiv \begin{pmatrix} 9 & 14 & 17 & 21 & 24 \\ 0.07 & 0.23 & 0.5 & 0.12 & 0.08 \end{pmatrix}$	$B22 \equiv \begin{pmatrix} 26 & 29 & 32 & 35 & 37 \\ 0.06 & 0.3 & 0.4 & 0.2 & 0.04 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
 B_{23} &\equiv \begin{pmatrix} 6 & 9 & 14 & 17 & 19 \\ 0.1 & 0.18 & 0.22 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} & B_{24} &\equiv \begin{pmatrix} 3 & 6 & 10 & 14 & 17 \\ 0.15 & 0.25 & 0.32 & 0.19 & 0.09 \end{pmatrix} \\
 B_{25} &\equiv \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 & 15 & 17 \\ 0.07 & 0.12 & 0.23 & 0.34 & 0.24 \end{pmatrix} & B_{26} &\equiv \begin{pmatrix} 9 & 11 & 14 & 18 & 20 \\ 0.2 & 0.18 & 0.35 & 0.25 & 0.2 \end{pmatrix} \\
 B_{27} &\equiv \begin{pmatrix} 5 & 9 & 12 & 16 & 20 \\ 0.12 & 0.18 & 0.5 & 0.15 & 0.05 \end{pmatrix} & B_{28} &\equiv \begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 17 & 20 \\ 0.1 & 0.3 & 0.32 & 0.18 & 0.1 \end{pmatrix} \\
 B_{29} &\equiv \begin{pmatrix} 7 & 9 & 12 & 14 & 17 \\ 0.4 & 0.2 & 0.16 & 0.16 & 0.1 \end{pmatrix} & B_{30} &\equiv \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 & 15 & 19 \\ 0.12 & 0.14 & 0.36 & 0.2 & 0.18 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Проводяться n випробувань за схемою Бернуллі, в кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p . Скласти закон розподілу випадкової величини X - числа k появи події A ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Знайти числові характеристики випадкової величини: математичне сподівання, моду, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію і ексцес.
Побудувати графіки функцій розподілу.

$BN^{\circ} \equiv (n, p)$ N° - номер варіанта

$$\begin{aligned}
 B_1 &\equiv (5 \ 0.1)^T & B_2 &\equiv (4 \ 0.15)^T & B_3 &\equiv (3 \ 0.2)^T \\
 B_4 &\equiv (6 \ 0.9)^T & B_5 &\equiv (4 \ 0.8)^T & B_6 &\equiv (5 \ 0.75)^T \\
 B_7 &\equiv (6 \ 0.7)^T & B_8 &\equiv (4 \ 0.65)^T & B_9 &\equiv (3 \ 0.6)^T \\
 B_{10} &\equiv (4 \ 0.55)^T & B_{11} &\equiv (7 \ 0.2)^T & B_{12} &\equiv (6 \ 0.3)^T \\
 B_{13} &\equiv (5 \ 0.4)^T & B_{14} &\equiv (4 \ 0.3)^T & B_{15} &\equiv (3 \ 0.5)^T \\
 B_{16} &\equiv (6 \ 0.55)^T & B_{17} &\equiv (4 \ 0.2)^T & B_{18} &\equiv (5 \ 0.3)^T \\
 B_{19} &\equiv (3 \ 0.4)^T & B_{20} &\equiv (4 \ 0.25)^T & B_{21} &\equiv (6 \ 0.15)^T \\
 B_{22} &\equiv (7 \ 0.1)^T & B_{23} &\equiv (5 \ 0.2)^T & B_{24} &\equiv (4 \ 0.35)^T \\
 B_{25} &\equiv (3 \ 0.35)^T & B_{26} &\equiv (6 \ 0.4)^T & B_{27} &\equiv (5 \ 0.22)^T \\
 B_{28} &\equiv (4 \ 0.47)^T & B_{29} &\equiv (3 \ 0.33)^T & B_{30} &\equiv (6 \ 0.45)^T
 \end{aligned}$$

3. Випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$.

Знайти щільність розподілу $f(x)$, числові характеристики випадкової величини (математичне сподівання, моду, медіану, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації, асиметрію, ексцес), ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1; \\ \varphi(x) & \text{при } x_1 < x \leq x_2; \\ 1 & \text{при } x > x_2. \end{cases}$$

$$BN^{\circ} \equiv (\varphi(x) \quad x_1 \quad x_2 \quad \alpha \quad \beta)$$

№ - номер варіанта

$$B1 \equiv \left[\frac{1}{7} \cdot (x \cdot \sqrt{x} - 1) \quad 1 \quad 4 \quad 1.5 \quad 3 \right]^T$$

$$B2 \equiv (\ln(x) \quad 1 \quad e^1 \quad 1 \quad 2)^T$$

$$B3 \equiv (x^3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5)^T$$

$$B4 \equiv \left(\frac{x^2 - 4}{5} \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2.5 \right)^T$$

$$B5 \equiv \left[\frac{x}{2} \cdot (x^2 + x) \quad 0 \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.75 \right]^T$$

$$B6 \equiv \left(3x + 1 \quad -\frac{1}{3} \quad 0 \quad -\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{4} \right)^T$$

$$B7 \equiv \left[\frac{1}{4} \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} \right) \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1.8 \right]^T$$

$$B8 \equiv \left(\frac{x^2}{2} - 1 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 1.5 \quad 2 \right)^T$$

$$B9 \equiv \left[\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \quad \sqrt{3} \quad 3 \quad 1 \quad 2 \right]^T$$

$$B10 \equiv \left(1 - \sin(x) \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{2 \cdot \pi}{3} \right)^T$$

$$B11 \equiv \left(2x^2 - x \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 0.5 \quad 0.8 \right)^T$$

$$B12 \equiv \left(1 - \cos(2x) \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \frac{\pi}{8} \right)^T$$

$$B13 \equiv \left[\frac{1}{8} \cdot (3x^2 - x - 2) \quad 1 \quad 2 \quad 1.5 \quad 1.8 \right]^T$$

$$B14 \equiv (\ln(x) - 1 \quad e^1 \quad e^2 \quad e^1 \quad e^{1.5})^T$$

$$B15 \equiv (2^x - 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1.5)^T$$

$$B16 \equiv \left(-\cos(x) \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{2\pi}{3} \right)^T$$

$$B17 \equiv \left[\frac{3 \cdot (x - 2)}{x} \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2.5 \right]^T$$

$$B18 \equiv \left[\frac{2}{7} \cdot \left(\frac{x^3 - 1}{x} \right) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1.5 \right]^T$$

$$B19 \equiv \left[\frac{2}{3} \cdot \left(x - \frac{1}{x} \right) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1.5 \right]^T$$

$$B20 \equiv \left(\frac{1}{16} \cdot x^2 \quad 0 \quad 4 \quad 1 \quad 3 \right)^T$$

$$B21 \equiv \left(\frac{e^x - 1}{e^1 - 1} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5 \right)^T$$

$$B22 \equiv (x \cdot \sqrt{x} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5)^T$$

$$B23 \equiv \left(\frac{1}{2} \cdot x^3 \quad 0 \quad \sqrt[3]{2} \quad 0 \quad 1 \right)^T$$

$$B24 \equiv \left[\frac{1}{3} \cdot (x^2 - 1) \quad 1 \quad 2 \quad 1.1 \quad 1.8 \right]^T$$

$$B25 \equiv \left[\frac{1}{21} \cdot (x^2 - 4) \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \right]^T$$

$$B26 \equiv \left[\frac{1}{2} \cdot (3^x - 1) \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5 \right]^T$$

$$B27 \equiv \left[\frac{1}{2} \cdot (x - 1) \quad 1 \quad 3 \quad 1.5 \quad 2.5 \right]^T$$

$$B28 \equiv \left(\frac{1}{8} \cdot x^3 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 1.5 \right)^T$$

$$B29 \equiv \left(\sin(x) \quad 0 \quad \frac{\pi}{2} \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \right)^T$$

$$B30 \equiv \left(\tan(x) \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0 \quad \frac{\pi}{4} \right)^T$$

4. Неперервну випадкову величину X задано щільністю розподілу $f(x, a)$. Знайти невідомий коефіцієнт "a", інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати графіки обох функцій. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини X в інтервал $(\alpha; \beta)$.

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \varphi(x) & \text{при } x_1 < x \leq x_2 \\ 0 & \text{при } (x \leq x_1) \vee (x > x_2) \end{cases} \quad \text{BN}^{\circ} \equiv (\varphi(x) \quad x_1 \quad x_2 \quad \alpha \quad \beta)$$

N° – номер варіанта

$B1 \equiv [(-x^2 + 3x - 2) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 1.5]$	$B2 \equiv [(-x^2 + 5x - 6) \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2.5]$
$B3 \equiv [(-x^2 + 7x - 12) \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 3.5]$	$B4 \equiv [(-x^2 + x) \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5]$
$B5 \equiv [(-x^2 + 2x) \quad 0 \quad 2 \quad \frac{1}{2} \quad 1]$	$B6 \equiv [(-x^2 + 1) \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$
$B7 \equiv [(-x^2 - x + 2) \quad -2 \quad 1 \quad -1 \quad 1]$	$B8 \equiv [(-x^2 + 2x - \frac{3}{4}) \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1]$
$B9 \equiv [(-x^2 + 4x - 3) \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad \frac{3}{2}]$	$B10 \equiv [(-x^2 + x + \frac{1}{3}) \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad 1]$
$B11 \equiv [(-x^2 + x + 3) \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 1]$	$B12 \equiv [(-x^2 + x + 1) \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{3}{4}]$
$B13 \equiv [(-x^2 + 8x - 7) \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3]$	$B14 \equiv [(-x^2 + \frac{5}{4} \cdot x - 1) \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 1.5]$
$B15 \equiv [(-x^2 + 12x - 9) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2]$	$B16 \equiv [(-x^2 + 8x - 9) \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 2.5]$
$B17 \equiv [(-x^2 + 7x - 6) \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3]$	$B18 \equiv [(-x^2 + 3x + 1) \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2]$
$B19 \equiv [(-x^2 + 3x - 1) \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 2]$	$B20 \equiv [(-x^2 + x + \frac{6}{25}) \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{6}{5} \quad 0 \quad 1]$
$B21 \equiv [(-x^2 + 9x - 18) \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 5]$	$B22 \equiv [(-x^2 + 4x + 5) \quad 0 \quad 1 \quad 0.2 \quad 0.7]$
$B23 \equiv [(-x^2 + 8x - 1) \quad 1 \quad 2 \quad 1.5 \quad 2]$	$B24 \equiv [(-x^2 + x + 6) \quad \frac{3}{2} \quad 3 \quad 2 \quad 3]$
$B25 \equiv [(-x^2 + 7x - 1) \quad \frac{1}{2} \quad 2 \quad 1 \quad 2]$	$B26 \equiv [(-x^2 + 4) \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 2]$
$B27 \equiv [(-x^2 + \frac{9}{4}) \quad 0 \quad \frac{3}{2} \quad 0 \quad 1]$	$B28 \equiv [(-x^2 - \frac{5}{3} \cdot x + 4) \quad -1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$
$B29 \equiv [(-x^2 - 4x + 5) \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0.5]$	$B30 \equiv [(-x^2 + 5x - 4) \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3]$

5. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням " α " і середнім квадратичним відхиленням " σ ". Записати формулу щільності розподілу і побудувати її графік. Знайти ймовірність попадання значень випадкової величини в інтервал $(\alpha; \beta)$. Знайти ймовірність того, що відхилення значень випадкової величини від математичного сподівання не перевищать ϵ .

$B.N^{\circ} \equiv (\alpha \quad \sigma \quad \alpha \quad \beta \quad \epsilon)$	$N^{\circ} - \text{номер варіанта}$
$B1 \equiv (8 \quad 2 \quad 2 \quad 12 \quad 1)$	$B2 \equiv (7 \quad 1 \quad 3 \quad 10 \quad 2)$
$B3 \equiv (6 \quad 3 \quad 1 \quad 6 \quad 3)$	$B4 \equiv (10 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 4)$
$B5 \equiv (9 \quad 5 \quad 1 \quad 6 \quad 2)$	$B6 \equiv (8 \quad 4 \quad 3 \quad 7 \quad 4)$
$B7 \equiv (6 \quad 2 \quad 1 \quad 8 \quad 1)$	$B8 \equiv (10 \quad 5 \quad 2 \quad 9 \quad 3)$
$B9 \equiv (5 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 1)$	$B10 \equiv (7 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \quad 2)$
$B11 \equiv (9 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 3)$	$B12 \equiv (9 \quad 3 \quad 1 \quad 5 \quad 6)$
$B13 \equiv (7 \quad 2 \quad 3 \quad 9 \quad 5)$	$B14 \equiv (6 \quad 1 \quad 2 \quad 7 \quad 1)$
$B15 \equiv (10 \quad 5 \quad 4 \quad 6 \quad 2)$	$B16 \equiv (8 \quad 3 \quad 2 \quad 7 \quad 3)$
$B17 \equiv (7 \quad 2 \quad 3 \quad 6 \quad 5)$	$B18 \equiv (9 \quad 6 \quad 4 \quad 8 \quad 3)$
$B19 \equiv (5 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \quad 2)$	$B20 \equiv (4 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \quad 1)$
$B21 \equiv (6 \quad 2 \quad 4 \quad 8 \quad 2)$	$B22 \equiv (6 \quad 4 \quad 2 \quad 7 \quad 3)$
$B23 \equiv (7 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 2)$	$B24 \equiv (5 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1)$
$B25 \equiv (4 \quad 2 \quad 1 \quad 10 \quad 3)$	$B26 \equiv (2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1)$
$B27 \equiv (3 \quad 1.5 \quad 1 \quad 2 \quad 2)$	$B28 \equiv (4 \quad 1.5 \quad 2 \quad 3 \quad 1)$
$B29 \equiv (9 \quad 3.5 \quad 4 \quad 6 \quad 2)$	$B30 \equiv (8 \quad 1 \quad 1 \quad 10 \quad 3)$

Таблиця значень локальної функції Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3353
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблиця значень інтегральної функції Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38433	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
x	$\Phi(x)$		x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,0	0,49865		3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977		3,6	49984	3,7	49989	3,8	49993	3,9	49995
4,0	499968									
4,5	499997									
5,0	49999997									

ДОДАТОК 6

Таблиця значень квантилю розподілу Стьюдента $t_{\alpha} = t(\alpha, n)$

n	α			n	α		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,54	4,03	6,86	25	2,064	2,894	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,648	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

ДОДАТОК 7

Таблиця значень функції $q = q(\alpha, n)$

n	α			n	α		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів вільності, k	Рівень значущості γ					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,36	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,56	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

$$\text{Значення ймовірності } P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 \lambda^2}$$
[illegible]

ЛІТЕРАТУРА

1. Васильків І.М. Основи теорії ймовірностей і математичної статистики: навч. посіб. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2020. – 184 с.
2. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.
3. Сметанкін В.О., Завгородній О.І., Мазнева Г.Г., Сметанкіна Н.В. Випадкові величини та математична статистика: навчально-методичний посібник. – Харків: КП Міськдрук, 2009. – 100 с.
4. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика. Ч. І. Математична статистика. – Київ: КНЕУ, 2007. – 304 с.
5. Завгородній О.І., Сметанкін В.О., Мазнева Г.Г., Сметанкіна Н.В. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Харків: ХНТУСГ, 2005. – 275 с.
6. Білушак Т.І., Чабанюк Я.М. Теорія ймовірностей і математична статистика. – Практикум. – Львів: 2001. – 418 с.
7. Завгородній О. І., Соловиченко О.В., Сичова Т.О., Зотова О. С., Нетецький Л.Г. Визначений інтеграл. Навчально-методичний посібник. – Харків: ХНТУСГ ім. Петра Василенка, 2020. – 72с.
8. Завгородній О. І., Соловиченко О.В., Стороженко І.П., Левкін Д.А. Ряди. Основи теорії та методика розв'язування задач з варіантами індивідуальних завдань – Харків: ДБТУ, 2022. – 94 с.
9. Бойко Т.В., Квітка О.О., Шахновський Ф.М. Комп'ютерна техніка та організація обчислювальних робіт: організація розрахунків у середовищі «MATHCAD» – навч. посіб. для студ. спец. “Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології”. – Київ: КПІ ім. Сікорського, 2019. – 64с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Основи теорії та методика розв'язування задач
з варіантами індивідуальних завдань

ЗАВГОРОДНІЙ Олексій Іванович
СОЛОВИЧЕНКО Ольга Володимирівна
СТОРОЖЕНКО Ігор Петрович
ЛЕВКІН Дмитро Артурович
СИЧОВА Тетяна Олександрівна

Формат 60x84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. 6,7

Наклад 100 пр.

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44