УДК 474.571

Н.В. Бойко, асистент

ПРО РОЗСТАНОВКУ ОПЕРАТОРНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ РЯДУ І УЗАГАЛЬНЕНУ ОПУКЛІСТЬ

Досліджено ефекти, пов'язані з заміною у визначенні безумовної збіжності ряду розстановки коефіцієнтів ±1 на розстановку деякої множини операторів. Отримано аналоги теорії котипу і теореми М.І. Кадеця про ряди, що безумовно збігаються в рівномірно опуклому просторі, а також деяких інших теорем теорії опуклості.

Изучаются эффекты, связанные с заменой в определении безусловной сходимости ряда расстановки коэффициентов ±1 на расстановку некоторого множества операторов. Получены аналоги теории котипа и теоремы М.И. Кадеца о безусловно сходящихся рядах в равномерно выпуклом пространстве, а также некоторых других теорем теории выпуклости.

We research the effects which appear when the selection of ±1 coefficient in the definition of unconditional convergence is replaced by selection of operators from a fixed collection of operators. The analogues of the theory of cotype and the famous Kadets's theorem about unconditionally convergent series in uniform convex space and some another theorems of convexity theory are obtained.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Ряди, що безумовно збігаються, – це корисний апарат теорії банахових просторів, і теорія рядів, що безумовно збігаються, перетинається з багатьма суміжними розділами математики: гармонійним аналізом, теорією ймовірності та ін. [3]. Саме тому виникає питання узагальнення поняття безумовної збіжності з метою посилення цього апарату.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Різні види збіжності рядів у банахових просторах та їх застосування в інших розділах математики описуються у [3].

Мета та завдання статті. У даній роботі вивчаються ефекти, пов'язані із заміною у визначенні безумовної збіжності ряду розстановки коефіцієнтів ±1 на розстановку деякої множини операторів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Усюди в тексті X та Y використовуються для позначення банахових просторів; $L(X,Y)$ − простір безперервних лінійних операторів, що діють з X в Y; $L(X):=L(X,X)$; S_X − одинична сфера простору X.

Визначення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів простору X називається таким, що безумовно збігається, якщо для будь-якої розстановки коефіцієнтів $c_n = \pm 1$ перед членами ряду ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ збігається.

Ряди, що безумовно збігаються, - це корисний апарат теорії банахових просторів, і теорія рядів, що безумовно збігаються, перетинається з багатьма суміжними розділами математики: гармонійним аналізом, теорією ймовірності та ін. [3]. У даній роботі вивчаються ефекти, пов'язані із заміною у визначенні безумовної збіжності ряду розстановки коефіцієнтів ±1 на розстановку деякої безлічі операторів.

Визначення. Нехай *X,Y* – банахові простори, G − підмножина L(*X,Y*). Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ в *X* називається таким, що G-збігається, якщо для будь-якого набору операторів T_n з G збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} T_n x_n$.

Наведемо ряд теорем про зв'язок безумовної збіжності із G-збіжністю і властивостей останньої для різних множин G (доведення цих теорем можна знайти у статті [1]).

Теорема. Якщо G − обмежена сім’я, то будь-який ряд, що абсолютно збігається, G-збігається.

Наступна теорема дає нам ознаку G-збіжності рядів.

Теорема. Нехай G − довільна сім’я операторів L(*X,Y*) і $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ − ряд у просторі *X*. Тоді наступні умови еквівалентні:

A. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ − ряд, що G-збігається.

B. Для будь-якого ε> 0 існує такий індекс N, що для будь-яких m>n>N і будь-якого вибору T_k з G виконується нерівність $|\sum_{k=n}^{m} T_k x_k| < \varepsilon$.

Теорема. Нехай G − правильна сім’я операторів з L(*X,Y*) у банаховому просторі *X*. Тоді для будь-якого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, що G-збігається в *X*, всі ряди $\sum_{n=1}^{\infty} T_n x_n$, де $T_n \in G$, збігаються безумовно. Зокрема, якщо G містить обмежений знизу оператор, то і сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ збігається безумовно.

Теорема. Нехай існує така послідовність операторів $\{U_1,U_2,...\}\subset L(X,Y)$, що $\sum_{n=1}^{\infty}\|U_k\|=C<\infty$ і що G належить до замикання $\{\sum_{n=1}^{N} a_kU_k:N\in\mathbf{N},\ |a_k|\le 1\}$. Тоді з безумовної збіжності в просторі X ряду $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ випливає його G-збіжність.

У теорії збіжності рядів ми маємо багато прикладів, коли на збіжність ряду впливають властивості простору, до якого належать елементи цього ряду. Однією з таких властивостей є опуклість. Тому при розгляданні узагальнення безумовної збіжності природно виникає поняття модуля опуклості по відношенню до сім'ї операторів G.

Визначення. Нехай G – підмножина $L(X)$. Модулем опуклості простору X по відношенню до сім'ї операторів G назвемо функцію

$$\delta^G(t)=\inf\{\sup\{\|x+tTy\|:\ T\in G\}-1,\ \|x\|=\|y\|=1\}.$$

Простір X назвемо рівномірно опуклим по відношенню до сім'ї операторів G, якщо $\delta^G(t)>0$ для $t>0$.

Окремими випадками рівномірної опуклості по відношенню до сім'ї операторів G є добре відомі рівномірна опуклість (при $G=\{I,-I\}$) та комплексна рівномірна опуклість (при $G=\{e^{i\Theta}I:\ \Theta\in(0,2\pi]\}$). Вдається довести, що модуль опуклості по відношенню до сім'ї операторів володіє багатьма властивостями модулів опуклості й комплексної опуклості. І що для нього має місце наступний аналог відомої теореми М.І. Кадеця [1]:

Теорема. Нехай X – рівномірно опукло по відношенню до сім'ї операторів G; G − підмножина $B_L(X)$. Тоді для будь-якого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$, що G-збігається, збігатиметься ряд $\sum_{n}\delta^G(\|x_n\|)$.

Властивістю "правильності" ми називаємо приналежність 0 замиканню опуклої оболонки елементів G. Для кінцевих груп така властивість еквівалентна умові, що сума всіх операторів групи є нульовим оператором. Інтерес до такої властивості сім'ї G природним чином витікає з випадків опуклості, комплексної опуклості, оскільки групи, що розглядаються в них, є симетричними відносно 0. Отже, доведення узагальнених теорем для сімейств операторів із такою симетрією автоматично дає доведення класичних теорем теорії опуклості.

Наступні теореми дають приклади такого узагальнення.

Теорема. Нехай G – кінцева правильна група, X – строго опуклий простір. Тоді X − строго G-опукло [2].

Відомо, що для простору l_∞ існує еквівалентна строго опукла норма. Тоді з останньої теореми ми одержуємо такий наслідок.

Наслідок. Для будь-якої кінцевої групи G, що підкоряється умові правильності, на просторі l_∞ існує еквівалентна строго G-опукла норма.

Теорема. Нехай G − кінцева правильна група, X має строго G-опуклу норму $\|\cdot\|$. Тоді будь-яка еквівалентна строго G-опукла норма $|\cdot|$, задана на інваріантному щодо групи G підпросторі Y, може бути продовжена до еквівалентної строго G-опуклої норми, заданої на всьому просторі X [5].

Оскільки для групи $G=\{I,-I,iI,-iI\}$ G-опуклість співпадає з комплексною опуклістю, з останньої теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. Нехай X має строго комплексно опуклу норму $\|\cdot\|$. Тоді будь-яка еквівалентна строго комплексно опукла норма $|\cdot|$, задана на підпросторі Y, може бути продовжена до еквівалентної строго комплексно опуклої норми, заданої на всьому просторі X.

Нехай (Ω,Σ,μ) − простір з мірою. Функція $f:\Omega\to X$ називається сильно вимірною, якщо існує послідовність простих вимірних функцій, що сходиться до f майже всюди. Через $\mathrm{L_p}(\mu,\mathrm{X})$ позначимо простір сильно вимірних функцій, для яких

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega\|f(t)\|^p d\mu(t)\right)^{1/p}<\infty \quad ,$$

при цьому функції, що співпадають майже всюди вважаються одним і тим же елементом.

Для випадку звичайної рівномірної опуклості добре відомо, що простори $L_p(0,1)$ при $1<p<\infty$ рівномірно опуклі (наприклад [6]). Для комплексної опуклості в статті [5] доведено, що якщо простір X − комплексно рівномірно опуклий, то простір $\mathrm{L_1}(\mu,\mathrm{X})$ також комплексно рівномірно опукло, а з результатів роботи випливає аналогічний результат для $\mathrm{L_p}(\mu,\mathrm{X})$ при довільному $1\le p<\infty$.

Аналогічне питання знаходження опуклих $\mathrm{L_p}(\mu,\mathrm{X})$ просторів виникає і для поняття опуклості по відношенню до сім’ї операторів. Проте, у зв'язку з тим, що сім’я G задана як сім’я операторів, що діють на елементи простору X, необхідно визначити аналог цієї сім’ї на просторі $\mathrm{L_p}(\mu,\mathrm{X})$. Це можна зробити наступним природним чином: $\widetilde{\mathrm{G}}=\{\ \widetilde{T}:(\widetilde{T}f)(\tau)=T(f(\tau)),T\in G\}$. Надалі там, де це не викликає плутанини, ми ототожнюємо сім’ї G і $\widetilde{G}$.

Теорема про наслідування опуклості. Нехай G – правильна скінченна група, тоді при $1<p<\infty$ рівномірна G-опуклість простору X

еквівалентна рівномірній G-опуклості простору $\mathrm{L}_\mathrm{p}(\mu,\mathrm{X})$ для будь-якого простору з мірою (Ω,Σ,μ) [2].

Слід зазначити, що простір $\mathrm{L}_\infty(\mu,\mathrm{X})$ не може бути рівномірно G-опуклим, якщо тільки виключити вироджений випадок міри, для якої Ω є атомом. А простір $\mathrm{L}_1(\mu,\mathrm{X})$ (окрім виродженого випадку) не строго опуклий (а значить, і не рівномірно опуклий), але комплексно рівномірно опуклий. Що в термінах G-опуклості можна записати таким чином: при $X=\mathbf{R}$, $G=\{-\mathrm{I}\ +\mathrm{I}\}$ простір $\mathrm{L}_1(\mu,\mathrm{X})$ не успадковує рівномірну G-опуклість простору *X*. У той час, при *X*=**C**, $G=\{\pm\mathrm{I},\ \pm i\mathrm{I}\}$ простір $\mathrm{L}_1(\mu,\mathrm{X})$ вже успадковує рівномірну G-опуклість простору *X*. Природно, виникає питання: які відмінності між групами і дають такі відмінності в наслідуванні опуклості. На даний момент повної відповіді на це питання не знайдено, і робота в цьому напрямі продовжується.

Висновки. Побудовано узагальнення безумовної збіжності. Вивчене наслідування властивостей безумовної збіжності новим поняттям. Також розглянуто зв'язок безумовної та абсолютної збіжностей зі збіжністю відносно різних сім’ей операторів. Доведена ознака G-збіжності рядів. Побудовано аналог теореми М.І. Кадеця про ряди в рівномірно опуклих просторах та пов’язане з цим узагальнення поняття опуклості. Вивчено властивості G-опуклості, та доведені теореми про зв'язок строгої опуклості простору з G-опуклістю для різних груп G. Розглянуто питання наслідування опуклості просторами функцій.

Список літератури

1. Бойко, Н. В. О расстановке операторных коэффициентов ряда [Текст] / Н. В. Бойко // Вісник Харківського національного університету. – 2008. – № 826 (58). – С. 197–210.

2. Boyko, N. Uniform G:convexity for vector-valued Lp spaces [Text] / N. Boyko, V. Kadets // Serdica Mathematical Journal. – 2009. – № 35. – C. 1–14.

3. Kadets, M. I. Series in Banach Spaces: conditional and unconditional convergence [Text] / M. I. Kadets, V. M. Kadets // Birkhouser: Operator Theory Advances and Applications. – 1997. – Vol. 94.– 286 p.

4. Кадец, В. М. О комплексной равномерной выпуклости пространств Лебега-Бохнера [Текст] / В. М. Кадец // Теория функций, функциональный анализ и приложения. – 1983. – № 40. – С. 71–74.

5. Diestel, J. Geometry of Banach Spaces – Selected Topics [Text] / J. Diestel // Springer-Verlag. − 1975.

6. Wee-Kee Tang On the extension of rotund norms [Text] / Wee-Kee Tang // Manuscripta math. – 1996. – № 91. – C. 73–82.

Отримано 01.10.2010. Харків.