



**Міністерство освіти і науки України  
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет енергетики, робототехніки та  
комп'ютерних технологій**

**Кафедра електропостачання та  
енергетичного менеджменту**

**О. А. Савченко**

## **ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ЕНЕРГЕТИКИ**

**Конспект лекцій**

**для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
денної та заочної форми навчання  
зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та  
електромеханіка»**

**Харків  
2024**

Міністерство освіти і науки України  
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
Факультет енергетики, робототехніки та  
комп'ютерних технологій  
Кафедра електропостачання та енергетичного менеджменту

О. А. Савченко

## **ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ЕНЕРГЕТИКИ**

Конспект лекцій

**для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти  
денної та заочної форми навчання  
зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та  
електромеханіка»**

Затверджено рішенням  
науково-методичної ради  
факультету енергетики,  
робототехніки та комп'ютерних  
технологій  
Протокол №3  
від 26 грудня 2024 року

Харків  
2024

УДК 621.31

С 31

Схвалено на засіданні кафедри  
електропостачання та енергетичного менеджменту

Протокол №4 від 11.12.2024 р.

**Рецензенти:**

**Н. Г. Косуліна**, д-р техн. наук, проф., проф. кафедри електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та електротехніки ДБТУ;

**Ю. М. Хандола**, канд. техн. наук, зав. кафедри електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та електротехніки ДБТУ.

С 31 Оптимізаційні задачі енергетики: конспект лекцій для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форми навч. зі спец. 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» / Держ. біотехнол. ун-т; авт.-уклад.: О. А. Савченко – Харків: [б. в.], 2024. – 164 с.

Конспект лекцій розроблено відповідно до програми навчальної дисципліни. Видання включає перелік тем та питань для вивчення, контрольні запитання та перелік рекомендованої літератури.

Видання призначена для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної та заочної форми навчання зі спеціальності 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка».

**УДК 621.31**

**Відповідальний за випуск: О. О. Мірошник**, д-р техн. наук

© Савченко О. А., 2024.

© ДБТУ, 2024

## ЗМІСТ

Вступ .....	6
Мета та завдання вивчення дисципліни .....	7
Тема 1. Математичне моделювання. Основні поняття і принципи побудови моделей .....	8
Тема 2. Загальні принципи, завдання та методи оптимізації .....	29
Тема 3. Методи лінійного програмування .....	38
Тема 4. Методи та приклади розв'язання задач лінійного цілочисельного програмування .....	70
Тема 5. Методи нелінійного програмування .....	89
Тема 6. Транспортні задачі .....	112
Тема 7. Особливості розв'язання задач стохастичного програмування та теорії ігор .....	134
Перелік літератури .....	163

## ВСТУП

Підвищення ефективності в енергетиці аграрного виробництва ставить нові вимоги до творчого потенціалу фахівців і, в першу чергу, у напрямі проектування, розробки та експлуатації сучасних електротехнічних комплексів і систем, електрифікованих технологічних процесів та електрообладнання, систем електропостачання та електроспоживання, вирішення питань мінімізації енергетичних, фінансових та сировинних ресурсів в усіх сферах енергетичної галузі, питань енергоефективності та ресурсозбереження.

Фахівець, що займається енергетичними питаннями в аграрному виробництві, повинен мати не тільки високу професійну підготовку, але й володіти знаннями основ математичного моделювання, вмінням складати математичні моделі для забезпечення, формулювання та розв'язання оптимізаційних задач, тобто пошуку найкращого рішення серед множини допустимих розв'язань, можливістю використання методів математичного програмування, вміння користуватися існуючими програмами сучасної комп'ютерної техніки для одержання високоефективних розв'язків.

Відомо, що сьогодні розроблена велика кількість математичних методів призначених для розв'язання багато чисельних оптимізаційних задач, що і обумовлює необхідність знання фахівцем енергетиком не тільки методів математичного програмування, але й вміння знайти доцільний метод вирішення конкретної технічної задачі, в т.ч. і за допомогою програмного забезпечення Excel тощо.

У конспекті лекцій розглянуті матеріали, які являють собою теоретичну базу до розуміння основних принципів побудови математичних моделей та методів розв'язання оптимізаційних задач, що найбільше зустрічаються в практичній та дослідницькій діяльності фахівців галузі. Детально розглядаються питання за основними класами задач лінійного, нелінійного та інших методів програмування, особливості їх розв'язання.

## МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ВИВЧЕННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Мета вивчення дисципліни – засвоєння теоретичного базису знань з оптимізаційних задач, що є характерними для електроенергетики, отримання практичних навичок з вирішення даних задач.

Завдання вивчення дисципліни:

- знаходити варіанти підвищення енергоефективності та надійності електроенергетичного, електротехнічного та електромеханічного обладнання й відповідних комплексів і систем;

- реконструювати існуючі електричні мережі, станції та підстанції, електротехнічні і електромеханічні комплекси та системи з метою підвищення їх надійності, ефективності експлуатації та продовження ресурсу;

- володіти методами математичного та фізичного моделювання об'єктів та процесів у електроенергетичних, електротехнічних та електромеханічних системах.

# ТЕМА 1. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ПРИНЦИПИ ПОБУДОВИ МОДЕЛЕЙ

## ПЛАН

- 1.1 Принципи системного підходу
- 1.2 Планування та обробка результатів досліджень. Отримання математичних моделей
- 1.3 Основні види та методи розв'язання математичних моделей
- 1.4 Цільова функція, обмеження та граничні умови при побудові моделі (опису) об'єкта

Розв'язок усіх завдань ставить нові вимоги до творчого потенціалу фахівців при переозброєнні та структурній перебудові багатьох питань в електрифікації сільського господарства шляхом застосування обчислювальної техніки, методів математичного моделювання та оптимізації. Вирішення таких питань вимагає вдосконалення уяви про різні процеси, явища, об'єкти, отримання нових знань, інформації, об'єктивність отримання яких, в значній мірі визначається рівнем організації проведення фундаментальних і наукових досліджень, теоретико-експериментальних методів пізнання, і в першу чергу математичного моделювання на базі розробки і побудови математичних моделей.

Математичне моделювання є одним із найрозповсюдженіших способів дослідження різних процесів та явищ. Математичне моделювання включає в себе одержання та застосування математичних моделей. Аналітичний аспект його складається із змістовного опису об'єкта у математичній формі.

Математичне моделювання реалізується у 3<sup>х</sup> взаємозв'язаних стадіях:

- формалізація процесу, тобто побудова математичної моделі шляхом складання математичного опису об'єкта та системи;
- програмування розв'язку задачі для знаходження числових значень, параметрів (розробка алгоритмів та програм);
- встановлення адекватності математичної моделі, її відповідності об'єкту моделювання.

### 1.1 Принципи системного підходу

Важливою складовою частиною наукового дослідження є застосування принципів системного підходу, згідно з яким

досліджуваний об'єкт (процес, явище) повинен розглядатися як сукупність деякої кількості взаємопов'язаних і взаємодіючих елементів, підсистем, останні з яких являють собою також окрему систему [3].

При дослідженні та оптимізації енергетичних систем (об'єктів) необхідно виходити з методології системного підходу. Особливо це стосується складних технічних систем, коли виникає необхідність структуризації об'єкту як системи взаємозв'язаних елементів (підсистем) та можливість динаміки розвитку окремих елементів системи.

Системний підхід означає, що будь-яка складна система, прикладом якої можуть бути різні енергетичні системи агропромислового комплексу, становить інтегральне ціле навіть тоді, коли побудована з окремих роз'єднаних функціональних систем і підсистем.

Реальні складні системи працюють в умовах дії великої кількості факторів, головними ознаками яких є:

- велика кількість взаємодіючих між собою елементів;
- складність функціональної системи;
- цілі функціонування складових підсистем підпорядковані загальній меті системи;
- наявність системи керування ієрархічної за структурою, головною властивістю якої є значні потоки різноманітної інформації, в т.ч. взаємодія з навколишнім середовищем, вплив різних факторів, зміна їх у широких межах.

Безумовно методи системного підходу повинні бути направлені на пошук і визначення оптимуму цільових функцій складних систем за окремими показниками і, в першу чергу, в напрям досягнення мети. Якість функціонування таких систем оцінюють залежно від її особливостей різноманітними критеріями, серед яких є: ефективність, собівартість, надійність, продуктивність, точність тощо.

Дослідження складних систем, наприклад таких як: технічні та організаційні заходи з енергозбереження, оптимальне енергопостачання та енерговикористання, баланс енергії в нелінійних системах електропостачання тощо, повинні базуватися на системному аналізі і включати такі етапи:

- визначення об'єкта та предметів дослідження;
- формулювання мети і завдань дослідження;
- встановлення форми розподілу системи на підсистеми, елементи і взаємозв'язку між ними;



– складання математичної моделі системи та її аналізу з метою визначення її екстремальних значень і умов існування з метою оптимізації.

Системний підхід широко використовується при вирішенні питань оптимізації енергопостачання та енергозбереження. Використання системного підходу сприяє забезпеченню раціональних структурних перебудов енергетичних систем, господарств, отримання максимального енергозберігаючого ефекту та екологічної безпеки, можливість розробки перспективних напрямів розвитку цих систем, особливо в питаннях підвищення енергоефективності.

Серед завдань, що виникають у зв'язку з дослідженнями складних систем при розробці, проектуванні та експлуатації різних електротехнічних систем, електрифікованих технологій у сільськогосподарському виробництві можна виділити два основних класи завдань:

– аналізу – пов'язані з вивченням поведінки системи залежно від її структури, величини параметрів та властивостей;

– синтезу – що обумовлює вибір структури системи і визначення значень параметрів, виходячи з необхідних властивостей та особливостей системи.

Разом з тим, сучасний рівень розробки теоретичних основ аналізу і синтезу складних систем та процесів в енергетиці сільськогосподарського виробництва, на жаль, ще недостатній для вирішення широкого кола оптимізаційних задач, більшість яких є багатокритеріальними.

Вирішення подібних задач повинно здійснюватись шляхом формулювання будь-якої технічної, технологічної, економічної та іншої задачі математичною мовою, тобто запису за допомогою конкретних математичних виразів, співвідношень (моделей) залежно від мети, завдань та можливостей досліджень [7]. Моделі, призначені для опису об'єкта (система, процес та ін.), класифікують, виходячи з методу їх отримання. Основними методами отримання моделей є аналітичні, експериментальні та аналітично-експериментальні.

## **1.2 Планування та обробка результатів експериментальних досліджень для отримання математичних моделей**

У реальних умовах для визначення показників якості, надійності, ефективності та ін. при функціонуванні складних систем

застосовують аналітично-експериментальні методи, які поєднують експериментальні методи (особливо при дослідженнях окремих підсистем або елементів) і аналітичні на базі методів моделювання (особливо при дослідженнях системи в цілому).

Враховуючи те, що на практиці дуже часто існують ситуації, які не обумовлюють можливості отримання для цільової функції аналітичного виразу, експериментальні значення її визначають дослідним шляхом, тобто отримання моделі шляхом спеціального спланованого експерименту. При цьому, такий експеримент являє цілеспрямоване спостереження, відтворення об'єкта пізнання, що обумовлює визначення об'єктивних, реальних закономірностей, встановлення впливу різних факторів, як один на одного, так і на вихідні параметри.

Безумовно експериментальні дослідження повинні бути правильно організовані з методичних позицій, базуватися на можливостях переходу від цілеспрямованих спостережень до логічного узагальнення результатів досліджень. Такі дослідження повинні бути забезпечені відповідними методологічними положеннями та метрологією, підтверджувати відомий вислів: "наука починається там, де починаються вимірювання"; здійснюватися за наявності натурного або експериментального зразка (макета) в межах допустимих шуканих величин параметрів і режимів їх роботи. Ступінь впливу різних факторів на досліджуваний об'єкт, систему повинна оцінюватись методами факторного аналізу з використанням апарату планування експерименту, який являє собою сукупність прийомів, що дозволяють досліднику (експериментатору) розумно здійснювати і ставити експеримент, правильно обробити та інтерпритувати результати із врахуванням мети, можливості отримання математичного опису досліджуваного об'єкта, який являв би математичну форму функції відгуку або математичну модель у вигляді рівняння регресії, системи рівнянь, нерівностей тощо.

Перед тим, як безпосередньо переходити до планування експерименту треба враховувати необхідність вирішення двох задач: інтерполяційної, метою якої є побудова поверхні відгуку в процесі зміни факторів, які характеризують дію на об'єкт і визначають вплив кожного з них на функцію відгуку –  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  та оптимізаційної, метою якої є визначення найкращого сполучення факторів, тобто умови для забезпечення експериментального значення функції відгуку.

Основними складовими планування експерименту є:

- визначення мети і задач досліджень;

- вибір змінних та незалежних величин, їх рівнів;
- визначення необхідної кількості спостережень;
- вибір плану експерименту та методу обробки експериментальних даних;
- побудова залежностей, математичних або регресійних рівнянь (моделей), тобто математичного опису об'єкта, який показує зв'язок вихідних факторів з діючими, розрахунок і оцінка коефіцієнтів регресії математичної моделі;
- статистичний аналіз, перевірка на адекватність і ефективність моделі, інтерпретація результатів.

Визначення наведених складових можна здійснювати, виконуючи три основні вимоги:

1. Похибка вимірювання факторів на багато разів менша ніж похибка вимірювання функції відгуку.
2. Досліди повинні бути відтворені, тобто від досліду до досліду суттєво не змінюватися (перевірка здійснюється за критерієм Кохрена).
3. Похибка розподіляється за нормальним законом Пірсона.

Процедура планування експериментів передбачає отримання емпіричної (експериментальної) математичної моделі, тобто відшукування залежності кожної з вихідних (відгуків) величин об'єкта від варіюємих факторів (аргументів) [5, 12].

У теорії експерименту вираз функції відгуку прийнято подавати у вигляді:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 + \dots, \quad (1.1)$$

який становить собою розклад функції в ряд Тейлора. Рівняння такого вигляду називається рівнянням регресії, яке фактично описує досліджуваний об'єкт і являє собою математичну форму функції відгуку або математичну модель.

При цьому, особливо при пошуку оптимальних умов вихідні величини об'єкта повинні приймати експериментальні (max/min) значення. Необхідно підкреслити, що методи планування експериментів повинні передбачати послідовне проведення експериментів, яке обумовить врешті – решт вихід в область оптимуму (екстремуму).

В основі обробки результатів експериментів є регресійний аналіз, який обумовлює відшукування параметрів коефіцієнтів моделі, наприклад математичної, що в більшості випадків здійснюється із

залученням методу найменших квадратів і статистичної обробки даних. Таким чином, регресійний аналіз забезпечує підбір такої математичної моделі, яка має найменше відхилення від оригіналу, а статистична обробка і відповідний аналіз отриманої моделі дає змогу оцінити значимість коефіцієнтів регресії і перевірити адекватність математичної моделі (рис. 1.1).

Крім цього, для побудови математичної моделі необхідно мати інформацію про закономірності та взаємозв'язок між досліджуваними параметрами, параметрами, які являють собою інтерес дослідника. В цьому випадку важливу інформацію може подати так звана статистична модель (рис. 1.1), яка може узагальнювати якісну і кількісну інформацію, про процес, явище, обладнання тощо, що вивчаються, адекватність і точність їх визначення, а також оцінку вірогідності їх (інформації).

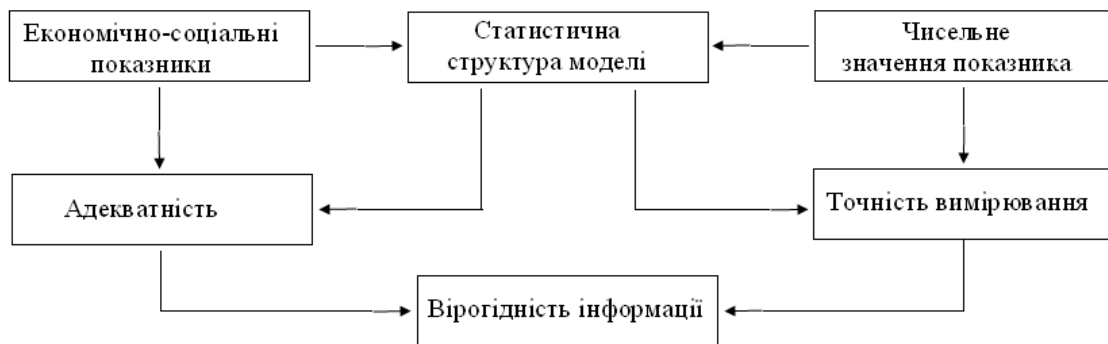


Рис. 1.1. Статистична модель показника

Оцінка "якості" результатів досліджень, їх точності, однорідності і інформативності здійснюється шляхом визначення та обчислення основних особливостей досліджуваних параметрів, і в першу чергу характеристик розсіювання (математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації та ін.), кореляційної залежності, достовірності і однорідності досліджень, перевірки адекватності.

Оцінка таких характеристик здійснюється за такими формулами:

1. Математичне сподівання:

$$m_x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad (1.2)$$

де  $x_i$  – значення вимірюваних величин;  $p_i$  – імовірність випадкової величини.

2. Дисперсія (міра розсіювання), яка характеризує однорідність вимірювання:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \text{ або } \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (1.3)$$

де  $x_i$  – поточне значення вимірюваної величини ( $i=1,2,..n$ );  
 $\bar{x}$  – середнє значення вимірюваної величини;  $n$  – кількість вимірювань.

3. Середнє значення вимірюваної величини:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1.4)$$

4. Розмах, який характеризує різницю значень (max/min) вимірюваної величини у вибірці:

$$R = x_{\max} - x_{\min}. \quad (1.5)$$

5. Коефіцієнт варіації, який характеризує відносне розсіювання випадкової величини:

$$K_B = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \cdot 100\%, \quad (1.6)$$

де  $\sigma_x$  – середнє квадратичне відхилення ( $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$ ).

За величиною коефіцієнта варіації оцінюють однорідність результатів та рівень варіації. Вважається, що при  $K_B < 30$  результати однорідні, при  $K_B > 60$  - неоднорідні.

6. Відтворюваність (однорідність), яка визначається критерієм Кохрена:

$$G_{розр} = \frac{\sigma_{\max}^2}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}, \quad (1.7)$$

де  $\sigma_{\max}^2$  – максимальне значення дисперсії із числа розглянутих паралельно серій  $n$ ;  $\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$  – сума всіх дисперсій  $n$  серій.

Однорідність вважається за умови:

$$G_{розр} = G_{табл.} \quad (1.8)$$

Необхідними умовами є статистичний аналіз результатів з метою перевірки нормальності розподілу даних експериментів за критеріями Пірсона, асиметрії й ексцесу, побудова кривої нормального розподілу [3, 5].

У більшості випадків вихідні параметри являють собою випадкові величини, які і визначають статистичний розподіл, тобто залежність частоти появи від значення випадкової величини. Цей розподіл є різним і залежить від природи випадкових величин: наприклад рівномірний, біноміальний, експоненціальний, нормальний тощо. Під час дослідження об'єктів, які являють собою електротехнічні системи, комплекси, електрифіковані технології та виробництва більшість результатів підпорядковуються закону нормального розподілу.

Нормальний розподіл характеризується щільністю, яка описується функцією:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.9)$$

де  $\sigma$  – середнє квадратичне відхилення;  $\sigma^2$  – дисперсія;  $y_i$ ,  $\bar{y}$  – відповідно середнє значення в інтервалі і середнє значення вибірки.

Основні властивості кривої нормального розподілу:

- при всіх значеннях аргументу функція розподілу має додатнє значення;
- вісь абсцис є горизонтальною асимптотою кривої нормального розподілу;
- функція має максимум при  $y = \bar{y}$ , при цьому графік функції симетричний відносно прямої  $y = \bar{y}$ ;
- у межах поля розсіювання  $\Delta = 6\sigma$  знаходяться 99,73 % всіх можливих значень  $y$ ;
- площу під кривою приймають за 1 або 100 %.

Крива нормального розподілу залежить від статистичних показників вибірки. Для її побудови розраховують координати на осях абсцис та ординат за відповідними формулами:

$$y = \bar{y} \pm Z\sigma, \quad (1.10)$$

$$f(y) = y_0 \frac{\Delta y}{\sigma} N, \quad (1.11)$$

де  $Z$  – координати в долях від  $\sigma$ ,  $Z = 0 \dots 3$  (крок 0,1 або 0,2);  $y_0$  – табличне значення функції, яке залежить від  $Z$ ;  $\Delta y$  – величина інтервалу:  $\Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{K}$ ;  $K$  – кількість інтервалів у вибірці ( $K = 1 + 3,2 \lg N$ );  $N$  – обсяг вибірки (кількість вимірювань, спостережень).

Гіпотезу про нормальний розподіл перевіряють різними способами: застосуванням критеріїв асиметрії  $A$ , ексцесу  $E$  і Пірсона  $\chi^2$ .

Показники  $A$  і  $E$  розраховують за формулами:

$$A = \frac{1}{N\sigma^3} \sum_{i=1}^K (y_i - \bar{y})^3 \cdot m_i, \quad (1.12)$$

$$E = \frac{1}{N\sigma^4} \sum_{i=1}^K (y_i - \bar{y})^4 \cdot m_i - 3,$$

де  $m_i$  – кількість значень із вибірки обсягом  $N$ , які потрапили у відповідний інтервал.

Асиметрія характеризує несиметричність розподілу відносно середнього значення вибірки, ексцес – пологість розподілу (рис. 1.2).

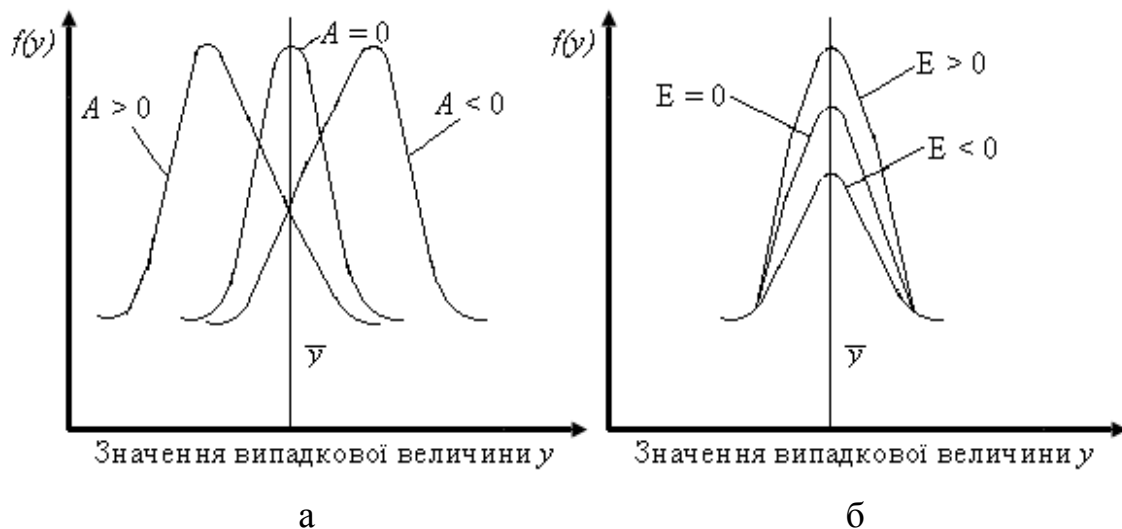


Рис. 1.2. Розподіл з різними значеннями асиметрії (а) та ексцесу (б)

Останньою процедурою в цих діях є розрахунок середньоквадратичних відхилень  $\sigma_A$ ,  $\sigma_E$ :

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(N-1)}{(N+1)(N+3)}}; \quad (1.13)$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24N(N-2)(N-3)}{(N-1)^2(N+3)(N+5)}}. \quad (1.14)$$

Гіпотеза про нормальний розподіл вихідної величини приймається у випадку, коли відношення  $A/\sigma_A$  чи  $A/\sigma_E < 3$ .

Розрахункове значення критерію Пірсона визначають за формулою:

$$\chi_{\text{розр}}^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(m_i - p_i N)^2}{p_i N}, \quad (1.15)$$

де  $p_i$  – ймовірність потрапляння випадкової величини у кожний інтервал.

Гіпотеза про нормальність розподілу вихідної величини приймається за умову виконання співвідношення:  $\chi_{\text{розр}}^2 \leq \chi_{\text{табл}}^2$  (табличне значення критерію Пірсона).

Приклад щодо застосування статистичного аналізу наведено нижче.

Наступною процедурою є статистичний аналіз рівняння регресії (математичної моделі), який вирішує два основних завдання: оцінку значущості коефіцієнтів регресії і перевірку адекватності математичної моделі.

Оцінка значущості коефіцієнтів регресії (моделі) здійснюється, в першу чергу, з метою того, що обчислені за результатами експериментів коефіцієнти значною мірою є випадковими величинами.

Значущість коефіцієнтів визначають за критерієм Стьюдента:

$$t_{\text{розр}} = |r| \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}, \quad (1.16)$$

де  $r$  – коефіцієнт кореляції, який завжди знаходиться в межах  $-1 < r < +1$ , прийнято вважати, що при  $|r| \leq 0,25$  кореляція слабка,



при  $|r| \leq 0,75$  кореляція середня, при  $|r| \geq 0,75$  кореляція сильна;  
 $n$  – кількість дослідів.

Умова  $t_{розр} > t_{табл}$  обумовлює існування статистичного зв'язку між параметрами.

Коефіцієнт регресії вважають статистично значущим при виконанні умови:  $|b_i| \geq \sigma_x t_{табл}$ , що і обумовлює необхідність включення його до математичної моделі (рівняння регресії).

Міра близькості поверхні відгуку до реальної поверхні визначається за допомогою критерію Фішера, тобто шляхом перевірки адекватності рівняння регресії. В основі цієї процедури лежить перевірка гіпотези, що характеризує розбіжність між результатами експерименту і величинами обчисленими за рівнянням регресії і виявляє спільність походження похибок. Ця процедура здійснюється так.

1. Визначають дисперсію адекватності:

$$\sigma_{ад}^2 = \frac{n}{N-l} \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2, \quad (1.17)$$

де  $n$  – кількість дубльованих дослідів;  $N$  – кількість дослідів;  $l$  – кількість значущих коефіцієнтів регресії;  $\bar{y}_i$ ,  $\hat{y}_i$  – відповідно експериментальне і розрахункове (аналітичне) значення функції відгуку в  $i$ -досліді.

2. Визначають дисперсію відтворюваності:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad (1.18)$$

де  $\sigma_i^2$  – дисперсія функції відгуку.

3. Визначають критерій Фішера:

$$F_{розр} = \frac{\sigma_{ад}^2}{\sigma_y^2}. \quad (1.19)$$

4. Перевіряють гіпотезу про адекватність, яка повинна задовольняти таку умову:

$$F_{розр} < F_{табл}. \quad (1.20)$$

### 1.3 Основні види та методи розв'язання математичних моделей

Важливою складовою частиною наукового дослідження є побудова математичної моделі об'єкта, яка може будуватися за результати теоретичних або експериментальних досліджень, і фактично являти собою теоретичне відтворення або реконструкцію об'єкта-оригінала в інший об'єкт (модель, схожу на оригінал) у формі математичної моделі. При цьому головною умовою є зберігання конкретних та достатніх співвідношень між оригіналом та моделлю [5, 10, 14].

У загальному плані моделлю можна вважати матеріальний або абстрактний об'єкт, який перебуває в деякій відповідності з визначеним об'єктом або здатний змінити його і нести про нього найбільш суттєву нову інформацію.

Модель вибирають залежно від мети, завдань досліджень і вона повинна відображати лише найважливіші риси об'єкта дослідження, який в загальному розумінні являє собою матеріальну чи ідеальну систему, наприклад процеси та режими систем енергопостачання, енергозберігаючих заходів, обмінні процеси у багатофазних системах електропостачання, процеси, пов'язані з електротехнічними технологіями в агропромислового комплексу, видобутку, виробництва і використання паливно-енергетичних ресурсів, виробництвом сучасного енергетичного та енерготехнічного обладнання тощо.

Таким чином, модель як умовний образ дослідження є важливим інструментом наукового пізнання. Вона повинна відтворювати за можливістю реальний процес і спрощувати його, не засмічувати його несуттєвими рисами. Разом з тим, складність і різноманіття функціонування процесів реальних складних систем (об'єктів) не дозволяє будувати абсолютно адекватні математичні моделі. При цьому потрібно пам'ятати, що відповідність моделі оригіналу полягає у схожості, а не в тотожності їх поведінки.

Моделі умовно поділяються на предметні, знакові та імовірнісна (рис. 1.3).



Рис. 1.3. Основні типи моделей

До предметних моделей, в першу чергу, належать фізичні та аналогові моделі. Предметні моделі в цілому описують структуру та зовнішні характеристики об'єкта дослідження та являють собою, в першу чергу, статичні моделі (макет, схема, план та ін.). Фізичні та аналогові моделі використовують подібність певних фізичних явищ, процесів в оригіналі або моделі. Такі моделі відтворюють досліджуваний процес із максимальною можливістю збереження його фізичної природи. Переваги таких моделей в тому, що умови реалізації їх значно відрізняються від умов, які властиві оригіналу і вибираються, виходячи із зручності та простоти дослідження. Разом з тим, умови побудови таких моделей повинні враховувати та зберігати деякі співвідношення подібності, які впливають із фізичної природи явищ та процесів, що на жаль, обмежує коло їх застосування.

До знакових моделей, в першу чергу, належать математичні (символьні) моделі, які описують властивості об'єкта досліджень символами математичних або логічних залежностей у вигляді рівнянь, нерівностей, тобто вивчаючи різні явища, процеси та ін., які мають різний фізичний зміст, описують їх математичними співвідношеннями.

Імовірнісна модель – модель, яка крім врахування впливу випадкових факторів на об'єкт, може оцінювати його майбутнє лише з позицій імовірності тих чи інших подій.

Схематично модель найчастіше подають у вигляді "чорного ящика" (рис. 1.4), під яким розуміється об'єкт, який має входи і виходи. Назва "чорний ящик" підкреслює повну або часткову відсутність інформації про внутрішню структуру об'єкта дослідження, про суть явищ, які відбуваються в ньому і приховані від дослідника [2, 5].

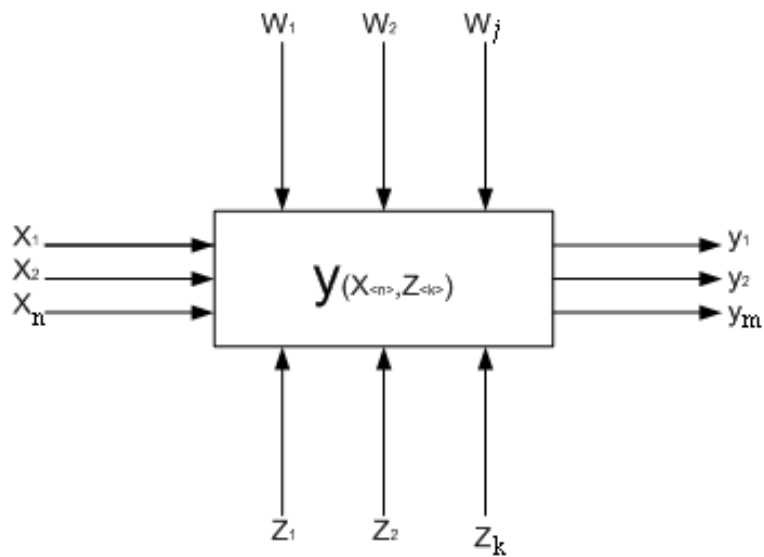


Рис. 1.4. Принципова схема "чорного ящика"

Дослідник може тільки спостерігати входні параметри ( $x_1 \dots x_n$ ,  $z_1 \dots z_k$ ,  $w_1 \dots w_j$ ), частина яких є керованими, а частина – некерованими, і вихідні ( $y_1 \dots y_m$ ), які показують реакцію об'єкта на дію. Значення останніх обумовлюється сукупною дією всіх входних факторів: керованих ( $x_1 \dots x_n$ ); некерованих контрольованих ( $z_1 \dots z_k$ ), та некерованих збурюваних ( $w_1 \dots w_j$ ).

Загальний вигляд математичної моделі "чорного ящика" або математичної форми функції відгуку:

$$y_{<out>} = f(x_{<in>}, z_{<in>}), \quad (1.21)$$

де  $y_{<out>} = \langle y_1 \dots y_m \rangle$ ;  $x_{<in>} = \langle x_1 \dots x_n \rangle$ ;  $z_{<in>} = \langle z_1 \dots z_k \rangle$ .

Для побудови математичної моделі може використовуватися математичний апарат різної складності. Все залежить від об'єкта досліджень та запланованої вихідної інформації.

Під математичною моделлю прийнято розуміти сукупність співвідношень (рівняння, нерівності, логічні умови тощо), які визначають характеристики стану об'єкта дослідження (явище, процес, система та ін.), а через них і вихідні (шукані) значення залежно від параметрів об'єкта-оригінала, визначення яких і є метою дослідження.

Побудова математичної моделі передуює вивченню структури складових конкретного об'єкта дослідження, тобто побудови формалізованої схеми, яка б втілювала дані про фізичну природу об'єкта, кількісні та якісні характеристики, взаємодію і взаємозв'язок між окремими його елементами.

Відомо, що математична модель повинна мати експериментальне підтвердження. У випадку, коли модель побудована на основі використання теоретичних методів, вона повинна бути перевірена на адекватність моделі, наприклад на окремому елементі по математичній моделі цього ж елемента.

Потрібно пам'ятати, що будь-яка математична модель у своєму початковому вигляді не може бути використана для аналітичного дослідження об'єкта, який в загальному розумінні являє собою матеріальну чи ідеальну систему. Це вимагає перетворення її в таку систему співвідношень, яка б описувала її функціонування і дозволила отримати необхідний результат аналітичним методом.

Використання математичної моделі для дослідження різних процесів повинно враховувати необхідність визначення шуканих величин, які і є метою дослідження.

Значне місце при цьому займає пошук способів використання математичної моделі, серед яких основними є:

- аналітичні дослідження процесів;
- дослідження процесів шляхом застосування апаратного моделювання та за допомогою багато чисельних методів, в т.ч. спеціальних аналогових та моделюючих установок.

Математична модель в змозі охопити основні закономірності процесу, який досліджується, залишає несуттєві другорядні фактори на стороні. Вона має бути пристосована до розв'язання конкретних задач, обумовити результат, під яким треба розуміти побудову реальних формул для визначення шуканих величин або рівнянь, розв'язання яких відомі або можуть мати рішення.

При розробці математичної моделі важливим є питання встановлення мінімальної, але і достатньої кількості параметрів, які необхідні для відповідних досліджень, розрахунків та ін.. Виявлення таких параметрів іноді потребує проведення спеціальних додаткових теоретично-експериментальних досліджень об'єкту. Таким чином, особливу значущість при моделюванні набуває сукупність параметрів, які і обумовлюють досягнення мети моделювання та досліджень в цілому.

Математична модель, як правило, повинна вдосконалювати тільки ті властивості об'єкта-оригінала, які визначають і являють інтерес з точки зору мети і задач конкретного дослідження. Це означає, що математична модель залежно від вимог дослідження може

мати різні математичні описи і подаватися різними математичними моделями.

Необхідно відрізнити математичні моделі, які призначені тільки для опису, від моделей, які призначені для оптимізації його стану.

У свою чергу, математичні моделі залежно від вимог, мети, характеру інформації (однозначна, певна, випадкова та ін.) поділяються на моделі, які наведено на рис. 1.5.

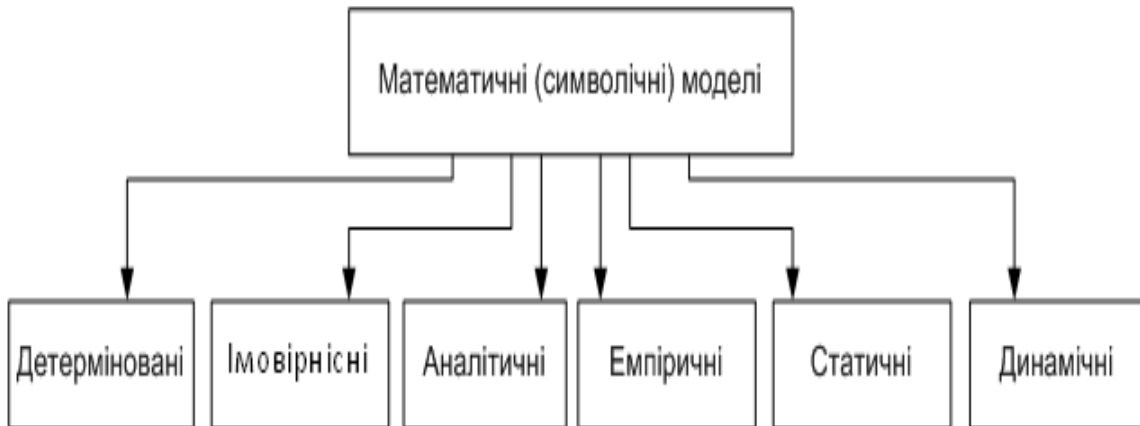


Рис. 1.5. Основні види математичних моделей

До основних методів розв'язання математичних моделей згідно з рис. 1.5, в першу чергу, належать: *детерміновані, імовірнісні, аналітичні, емпіричні, статистичні та динамічні.*

Детерміновані моделі описують поведінку об'єкта з певною визначеністю, закономірністю, передбачають зв'язок між вхідними та вихідними величинами, можливість визначення закономірного функціонального зв'язку. До таких моделей належать формули різних фізичних законів, програм розподілу та обробки продукції, руху тіл та ін. Прикладом детермінованої інформації може бути інформація про витрати енергії на об'єкті, споживання електроенергії на виробництві та ін.

Імовірнісні моделі враховують вплив випадкових факторів на поведінку досліджуваного об'єкту і можуть оцінювати його в подальшому лише з позицій імовірності тих чи інших подій. Прикладом такої недетермінованої, випадкової інформації можуть бути ці ж самі втрати енергії, але при проектуванні об'єкта, опис випуску понадпланової продукції, в т. ч. електроенергії, тривалості монтажу та ремонту обладнання, різних виробів.

Аналітичні методи займають значне місце серед методів пошуку оптимальних (найкращих) розв'язків. До аналітичних методів, в першу чергу, належать диференціальне числення, метод множників

Лагранжа, варіаційне числення, а також математичне програмування (лінійне, нелінійне, динамічне, стохастичне).

Диференціальне числення як складова частина математичного аналізу найбільш знайоме інженерам-енергетикам. Взнявши частинні похідні цільової функції по кожній змінній і прирівнявши їх до нуля, одержимо систему, як правило, нелінійних рівнянь, яку можна розв'язувати відомими аналітичними або числовими методами. Аналізуючи результати розв'язання, вибирають той, який забезпечує найкраще значення критерія, який прийнятий у конкретному випадку для досягнення мети.

Метод множників Лагранжа застосовують для самих задач, але за наявності обмежень типу рівнянь. У цьому випадку найкращий результат цільової функції лежить на обмеженні, тобто його можна вважати умовним.

Варіаційне числення використовують для розв'язання динамічних задач, а також для отримання найкращого (оптимального) результату статичних об'єктів з розподіленими параметрами. При цьому невідомі функції, які обумовлюють екстремум (optim) функції одержують шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь Ейлера, число рівнянь яких у системі дорівнює числу невідомих функцій.

Приклади застосування аналітичних методів при розв'язанні оптимізаційних задач наведено нижче.

Математичні моделі поділяють також на статичні та динамічні.

Статичні моделі відображають статичні, стаціонарні або сталі режими роботи об'єктів моделювання, тобто об'єктів, в яких параметри їх не залежать від часу. Статичні моделі будуються в залежності функції від аргументу, тобто виходу об'єкта від його входу. Такі моделі можуть бути отримані аналітичним, розрахунковим та експериментальним шляхом. Статичні моделі найчастіше застосовують при розрахунках різних технологічних та фізико-хімічних процесах, при розробках систем та впровадженні систем керування, різних енергетичних балансів, розподілу електричної енергії тощо.

Динамічні моделі описують несталі, перехідні або динамічні режими, в яких визначальні параметри змінюються у часі. В ряді випадків розробка динамічних моделей вказує на необхідність врахування не тільки значень змін у часі, але й порядку, послідовності і виконання різних методів, процесів, операцій та ін., вимагає визначення коефіцієнтів диференціального рівняння з врахуванням мінімальних відхилень результатів розрахунків від фактичних

(експериментальних) даних. Для отримання динамічних моделей застосовують аналітичні моделі, перевагою яких є відображення взаємозв'язків між внутрішніми параметрами об'єкта в цієї моделі, а недоліком – низька точність та значна складність визначення часткових значень багатьох змінних та констант. Основним методом отримання динамічних моделей є експериментальні та експериментально-аналітичні методи, перевагою яких в порівнянні з чисто аналітичними є більша точність і менша громіздкість, можливість отримання структури моделей, яка найбільш відповідає реальності.

#### **1.4 Цільова функція, обмеження та граничні умови при побудові моделі (опису) об'єкта**

Математична модель, тобто формалізований математичний опис об'єкта, включає в себе цільову функцію, обмеження та граничні умови.

Вигляд цільової функції, яка в принципі являє собою функцію мети, визначається в основному типом критерію оптимальності – певним показником, який кількісно виражає результат прийнятого розв'язку і дає однозначну оцінку об'єкта дослідження, в першу чергу, в сенсі оптимізації. В цьому випадку на кожну змінну встановлюють певні обмеження і визначають область допустимих (граничних умов). В загальному вигляді запис цільової функції має такий вигляд:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr} \quad \text{або} \quad \rightarrow \text{max/min}, \quad (1.22)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – шукані змінні, що діють на об'єкт і значення яких визначаються в процесі вирішення задачі.

Шукані змінні за своїм характером поділяють на безперервні, дискретні та цілочисельні. У випадку, коли змінна приймає нові значення, вона буде безперервною, приймаючи тільки значення цілих чисел, буде цілочисельною змінною, а у випадку, коли вона (змінна) може приймати тільки певні значення, буде називатися *дискретною*. Прикладами таких змінних відповідно можуть бути: потужність, яка передається по лінії електропередачі; кількість підстанцій для електропостачання об'єкта; потужність компенсуючого пристрою або переріз проводів електричної мережі, значення яких регламентуються відповідними стандартами, енерговитрати при використанні різних електротехнологічних процесів.



Залежності між змінними в цільовій функції можуть бути лінійні або нелінійні. Прикладом лінійної залежності в загальному вигляді при  $n$  невідомих змінних може бути:

$$F = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \quad (1.23)$$

тобто залежність, в якій змінні входять тільки в першій степені. В усіх інших випадках залежність буде нелінійною.

Обмеження, які включає математична модель, являють собою різні технічні, технологічні, організаційні, екологічні та інші умови, які необхідно враховувати при розв'язанні оптимізаційних задач.

Ці обмеження являють собою залежності між змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , які можуть бути лінійними або нелінійними і створюватись у вигляді рівностей або нерівностей:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq b_m. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Кількість обмежень дорівнює  $m$ , а постійні коефіцієнти  $b_j$  (права частина обмежень) називаються вільними членами.

Граничні умови встановлюють діапазон зміни шуканих змінних:

$$d_i \leq x_i \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.25)$$

де  $d_i, D_i$  — відповідно нижня та верхня межа діапазону зміни  $x_i$ .

Враховуючи те, що в більшості чисто технічних прикладних задач всі шукані змінні, як правило, невід'ємні, граничні умови можуть мати такий вигляд:

$$x_i \geq 0, \quad \text{де } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

У цьому випадку, наявність обмежень і граничних умов відшукується як відносний екстремум цільової функції і може мати такий вигляд (рис. 1.6).

Наприклад, при розв'язанні задачі з мінімізації втрат активної потужності в електричній мережі за рахунок зміни завантаження джерел реактивної потужності і коефіцієнтів трансформації трансформаторів з регулюванням під навантаженням [4], цільова функція може мати такий вигляд:

$$F(x) = \sum_{i=1}^n I_i^2(x) R_i + \sum_{j=1}^k U_j^2 Y_j \rightarrow \min, \quad (1.27)$$

де  $n, k$  – відповідно кількість віток та вузлів у схемі заміщення;  $I_i(x), R_i, U_j, Y_j$  – відповідно величини струму та активний опір в  $i^{\text{й}}$  вітці, напруга в  $j$ -му вузлі, активна провідність шунта в  $j$ -му вузлі.

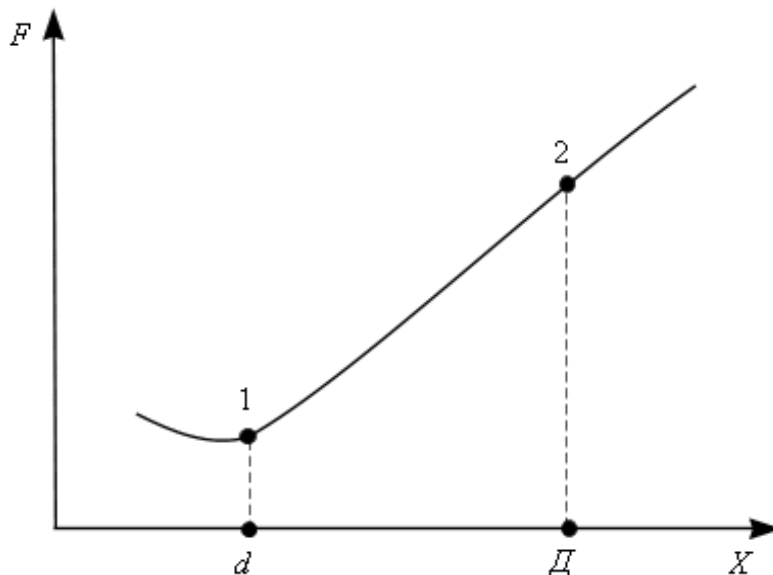


Рис.1.6. Діапазон зміни одного змінного  $F(x)$ , де ділянка 1 - 2 – діапазон зміни (граничні умови).

Відповідні обмеження для подібної задачі, це – рівняння балансів активних і реактивних потужностей у вузлах схеми заміщення:

$$P_{\text{вуз}}(x) = P_{\text{зад}}; \quad Q_{\text{вуз}}(x) = Q_{\text{зад}}. \quad (1.28)$$

Практичне розв'язання оптимізаційних задач висуває ряд вимог до цільових функцій і, в першу чергу, однозначність, керованість, відповідність і зручність розв'язання.

Однозначність стверджує те, що оптимальність об'єкта повністю характеризується однією цільовою функцією. Вимога керованості забезпечує залежність цільової функції від змінних керування, а відповідність цільової функції означає, що знайдені оптимальні величини змінних факторів забезпечують найкраще керування об'єктом.

Враховуючи різні відношення до цільових функцій, критеріїв, задачі можуть поділятися на типи (класи) залежно від конкретних умов, призначення, покладених функцій та мети.

## ТЕМА 2 ЗАГАЛЬНІ ПРИНЦИПИ, ЗАВДАННЯ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

### ПЛАН

- 2.1 Завдання та об'єкти оптимізації
- 2.2 Критерій оптимальності
- 2.3 Основні об'єкти і методи оптимізації
- 2.4 Математичне програмування

#### 2.1 Завдання та об'єкти оптимізації

Процеси оптимізації є основою практичної діяльності багатьох галузей науки і техніки, в т.ч. енергетиці сільського господарства. Вони базуються на теорії оптимізації, яка в принципі являє собою сукупність математичних методів і, в першу чергу, фундаментального та прикладного характеру. Ці методи, в т.ч. значна кількість чисельних спрямовані на пошук та ідентифікацію експериментальних варіантів розв'язання найрізноманітніших задач, функціональних залежностей тощо.

Звідси витікає, що основним завданням оптимізації є знаходження таких керуючих факторів і визначення їх величин, при яких показники ефективності досліджуваного об'єкта досягнуть екстремального (максимального або мінімального) значення.

Об'єктами оптимізації можуть бути: плани та розподіл електропостачання, структура виробництва електроенергії, режими роботи та параметри електрообладнання, електричних станцій, підстанцій, електричних мереж, електрифікованих технологій в агропромисловому комплексі тощо.

Безумовно, вирішення таких задач вимагає застосування методів наукового підходу, тобто створення наукових методів оптимізації процесів, систем, обладнання на базі проведення дослідження операцій.

Всі ці об'єкти умовно можна поділити на декілька груп: об'єкти розробки, проектування, об'єкти планування, об'єкти керування.

Класифікація об'єктів оптимізації в основному здійснюється за ознаками (табл. 2.1). При цьому важливе значення має встановлення класу об'єкта.

## 2.1. Класифікація об'єктів оптимізації

№ п/п	Ознака класифікації	Клас об'єкта
1	Характер поведінки в часі	а)детермінований б)імовірнісний в)ігровий
2	Зміна факторів і стану об'єкту	а)безперервна б)дискретна в)дискретно-безперервна
3	Характер параметрів	а)зосереджені б) розподілені
4	Збурюючі фактори	а)детерміновані б) стохастичні
5	Математичний опис	а)детермінований: лінійний або нелінійний б) імовірнісний в) ігровий

Формулювання задачі оптимізації обумовлює спочатку лише загальне уявлення про мету її розв'язання та про множину тих розв'язків, серед яких необхідно вибрати оптимальний. Таким чином, для розв'язання завдань оптимізації і правильної послідовності етапів формалізація задачі оптимізації включає такі питання:

- постановка завдання;
- вибір критеріїв оптимізації;
- вибір керуючих (змінних) факторів;
- запис функції мети;
- виділення множини допустимих значень змінних;
- попередній аналіз змінних.

Важливим етапом при цьому є оптимізаційна модель, дослідження якої дають можливість вивчити основні закономірності функціонування реального об'єкта, найкращі способи керування та його використання. В таких випадках отримані рішення повинні бути такими, які б мали або забезпечували суттєві переваги над іншими.

Оптимізаційні моделі, які нині вирішують багато різних технічно-економічних проблем в енергетиці, базуються на вирішенні, задач, пов'язаних із знаходженням максимуму або мінімуму деякої функції. Постановка оптимізаційної задачі в принципі являє собою переклад на мову математики природних вимог найкращого функціонування системи (об'єкта) [1, 2, 6]. У більшості випадків постановка оптимізаційної задачі включає два математичні об'єкти:

множину допустимих розв'язків та цільову функцію, яка в принципі і є математичною моделлю досліджуваного об'єкту.

У цьому випадку перед дослідником виникають задачі вибору показників функціонування об'єкта (критерії оптимальності, параметр оптимізації), а також формулювання задачі на знаходження максимуму або мінімуму цього критерію із врахуванням певних (необхідних) обмежень.

Треба пам'ятати, що такі етапи як: формування задач оптимізації, збір і підготовка інформації, розробка та побудова математичної моделі, аналіз рішення не можна здійснювати на комп'ютері, це завжди є прерогатива дослідника – розробника.

## 2.2 Критерій оптимальності

Ефективність процесів, систем, операцій визначають критеріями оптимальності, тобто певними показниками, які кількісно виражають результат прийнятого розв'язку. Такими критеріями, наприклад в енергетиці, можуть бути собівартість та рентабельність виробництва та розподілу електричної енергії, економічна ефективність сучасних технологічних процесів, надійність роботи електричних систем та якість електроенергії.

Критерій оптимальності повинен задовольняти такі вимоги:

- вимірювати (визначати) ефективність об'єкта (системи);
- бути простим за фізичним змістом;
- бути якісним і поданим одним числом;
- забезпечувати мінімальну дисперсію ( $\sigma^2 \rightarrow \min$ ), високу точність при мінімальних витратах;
- забезпечувати повний опис об'єкта.

Залежно від поставленої мети критерії оптимальності можуть бути технічні, технологічні, економічні, техніко-економічні та ін.

Вирішення оптимізаційної задачі вимагає виконання наступних етапів:

- збір вихідних даних;
- складання математичної моделі, тобто формалізація математичного опису задачі, що вирішується;
- вибір методу рішення, який визначається видом математичної моделі;
- виконання відповідних обчислень та аналіз рішення.

При оптимізації треба враховувати, що кожен об'єкт характеризується визначеною множиною різних параметрів ( $\sigma$ ), які

поділяються на первинні, вторинні та проміжні. До первинних параметрів відносять конструктивні та комплектуючі елементи, які не надають можливості безпосередньо визначати стан об'єкту. До вторинних, в першу чергу, відносять параметри якості та вихідні параметри об'єкту, які сприяють визначенню основних характеристик та властивостей його. Вторинні параметри мають найвищу ступінь узагальнення інформації і обумовлюють можливість робити висновки, щодо стану об'єкту оптимізації. Проміжні параметри мають проміжний характер (між первинними та вторинними параметрами). Ці параметри не дають можливості охарактеризувати в повному обсязі технічний стан об'єкта оптимізації.

З точки зору інформативності для розробки математичної моделі об'єкта треба визначити визначальні параметри по відношенню до інших параметрів, тобто мова повинна йти про виділене із сукупності всіх параметрів ( $\sigma$ ) під множники ( $\sigma_{вих}$ ), яка мінімально необхідна для однозначного визначення правильності виконання об'єктом своїх функцій.

Для математичного моделювання об'єктів головне – встановлення мінімально достатньої кількості параметрів, за якими необхідно проводити відповідні дослідження (спостереження, вимірювання розрахунки тощо).

Рішення оптимізаційної задачі завжди вимагає аналізу її результатів у вигляді аналізу математичної моделі. При цьому аналіз задачі залежно від цільової функції може бути параметричним, структурним або багатокритеріальним.

Параметричним аналізом є аналіз, при якому задача вирішується багаторазово при різних значеннях прийнятого вихідного параметра.

Структурний аналіз базується на багаторазовому рішенні задачі з врахуванням різної структури обмежень та граничних умов.

Багатокритеріальний аналіз передбачає рішення задач за різними критеріями та з різними цільовими функціями.

### **2.3 Основні об'єкти і методи оптимізації**

Різноманітність задач, які стоять нині перед енергетичною галуззю вимагають для їх оптимізації застосування різних математичних методів і підходів. Вибір того чи іншого методу оптимізації обумовлюється, в першу чергу, видом математичної моделі об'єкта. Згідно з табл. 2.1 залежно від класу об'єкта

оптимізації розрізняють детерміновані, імовірнісні та ігрові об'єкти та їх моделі.

Детермінованим вважається такий об'єкт оптимізації, який сам у цілому і його складові частини взаємодіють між собою та з навколишнім середовищем точно передбаченим способом, а поведінка їх наперед визначена.

Звідси можна констатувати, що детермінована модель – це модель, яка описує поведінку об'єкта з повною визначеністю, наприклад формули фізичних явищ, законів, закономірності руху тощо.

Імовірнісним вважають такий об'єкт, можлива поведінка якого описується методами теорії ймовірності, а майбутній стан його можна лише передбачити з певною ймовірністю, наприклад підвищення ймовірності безвідмовної роботи електрообладнання, трансформаторних підстанцій, зміни питомих витрат електроенергії протягом певного часу, обсяги випуску та розподілу електроенергії тощо.

Ігровим об'єктом вважається такий об'єкт, який здійснює розумний вибір своєї поведінки в майбутньому. В основі вибору лежать оцінки ситуацій і передбачуваних способів дій за прийнятими критеріями, а також неформальні міркування, керуватись якими здатна лише людина. Наприклад, керівництво енергопідприємства, що укладає угоду про збут електроенергії вступає у своєрідну гру із споживачем, прагнучи досягнути певного результату при різних способах коливання попиту на електроенергію.

Ігрова модель дає можливість вивести конфліктні ситуації, в яких кожна конфліктуюча сторона має свої погляди, прагне отримати інформацію про наміри протилежної сторони і діє залежно від конкретних обставин, що склалися.

Важливу роль у дослідженнях об'єктів з метою оптимізації відіграють евристичні способи розв'язання завдань, які являють собою сукупність знань, досвіду, інтелекту та інтуїції, що використовується для розв'язання певних завдань за допомогою неформальних правил. Так, евристика є корисною для розв'язання оптимізаційних задач, які мають нечислову природу або мають невиражені певні параметри.

Застосування та розробка евристичних методів вимагає пошуку взаємозв'язаних компонентів майбутнього розвитку, збирання належної інформації та багаторазового корегування отриманих результатів. Спостереження показують, що в більшості випадків застосування евристичних способів дослідження початковий етап

розв'язування вибраного завдання полягає у створенні образу об'єкту дослідження із врахуванням його структурних, функціональних та логічних ознак. Наступним кроком є обробка накопиченої інформації і як результат – обґрунтування, пропозиції щодо алгоритму розв'язання, варіанти використання та орієнтовні оцінки. Головна відмінність евристичного способу – ступінь визначеності пропонованих шляхів дослідження, а також різноманітність форм діяльності, що проявляється в так званих ділових іграх.

Розробка ділових ігор включає ряд стандартних етапів, які базуються на загальній схемі підготовки ігор різного призначення. Методологія побудови евристичних моделей різних об'єктів базується на власному досвіді та ерудиції фахівців. Тут треба констатувати, що кількість і характер таких моделей як і алгоритмів безперервно збільшується і це знаходить своє відображення у спеціальній літературі.

Безумовно при пошуку оптимальних розв'язків у більшості випадків використовують математичну модель об'єкта. В цих випадках використовують аналітичні методи:

- диференціальне числення, метод множників Лагранжа і варіаційне числення;
- математичне програмування (лінійне, нелінійне, динамічне, стохастичне та ін.).

Крім цього, використовують методи пошуку оптимального розв'язку безпосередньо на об'єкті шляхом екстремального керування і статистичної оптимізації.

Диференціальне числення являє собою складову частину математичного аналізу і його можуть вважати як найбільш знайому інженерам. Якщо взяти частинні похідні цільової функції по кожній змінній і прирівняти їх до нуля, то одержимо систему, як правило, нелінійних рівнянь, яка може бути розв'язана відомими аналітичними або числовими методами, шляхом вибору екстремального значення критерію оптимізації.

Диференціальне числення доцільно застосовувати при вирішенні оптимізаційних задач проектування енергетичних систем, електрообладнання та ін.

Метод множників Лагранжа доцільно застосовувати для оптимізаційних задач об'єктів з розподіленими параметрами, наприклад електричних мереж, а також для розв'язання деяких динамічних задач керування електричними системами.

Варіаційне числення найчастіше застосовують для розв'язання динамічних задач. В цьому випадку невідомі функції, які



забезпечують екстремальні значення функціонала, отримують шляхом інтегрування системи диференціальних рівнянь Ейлера, число яких дорівнює числу невідомих функцій.

Поряд з цими методами, нині набувають значного використання методи теорії масового обслуговування, імітаційного моделювання, теорії гри.

Методи теорії масового обслуговування використовуються для побудови математичних моделей і оптимізації стохастичних об'єктів (технічні пристрої і електрообладнання, електричні мережі, транспортні системи, автоматичні лінії тощо), тобто об'єктів з врахуванням їх стохастичної природи, впливу на них імовірнісних факторів. Ці методи дають можливість аналізувати порівняно прості об'єкти.

Предмет теорії масового обслуговування – побудова математичних моделей, що зв'язують задачі умови роботи об'єктів аналізу з показниками якості їх існування (функціонування).

Більш складні моделі за своєю структурою, зв'язками, різноманітністю природи аналізують за допомогою імітаційного моделювання. Для реалізації методу імітаційного моделювання необхідно, в першу чергу, використовувати обчислювальну техніку і знати закономірності функціонування складових елементів об'єкта та їх взаємодії. Багаторазова імітація поведінки елементів, їх взаємодія обумовлюють можливість вивчення процесу функціонування об'єкта шляхом набору статистичних даних.

У випадках, коли існують невизначеності, які не враховуються певними законами розподілу ймовірностей, використовують теорію гри, тобто математичну теорію конфліктних ситуацій, метою якої є вироблення рекомендації для раціональної поведінки учасників конфлікту. При цьому невизначеними параметрами можуть бути як зовнішні "об'єктивні" умови процесу, так і "суб'єктивні" – свідомі дії учасників.

## **2.4 Математичне програмування**

Математичне програмування застосовують при розв'язанні великого класу задач, головною метою яких є пошук екстремуму функції за наявності обмежень. Термін програмування тут використовують у сенсі "пошуку" екстремального (найкращого) плану.

Математичне програмування, крім наведених вище, використовують як один із засобів дослідження, що займаються оптимізацією структури і функціонування різних складних об'єктів, систем тощо.

Математичне програмування передусім являє собою математичну дисципліну і тому критеріями класифікації задач мають бути, в першу чергу, математичні властивості задач і методи їх розв'язання.

Тут треба усвідомлювати, що кожна конкретна задача з погляду математичних критеріїв, може належати до кількох класів, тому що кожний критерій у принципі підкреслює одну властивість задачі на противагу деякій іншій, тобто поділяє всі задачі на ряд класів, до яких у першу чергу належать два основних класи – лінійні і нелінійні задачі, методами розв'язання яких є лінійне і нелінійне програмування.

Можна стверджувати, що лінійне програмування являє собою найбільш опрацьований розділ математичного програмування і застосовується для розв'язання задач з лінійними функціями і обмеженнями, тобто критерієм лінійності задачі є лінійність функції мети та всіх обмежень. Основною властивістю цих задач є те, що критерій оптимальності лінійно залежить від всіх елементів розв'язку, а цільову функцію та обмеження записують у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей.

Задачі на базі лінійного програмування складають великий клас оптимізаційних задач, переважна більшість яких належать до задач з планування, розташування, розподілу енергетичних систем та електричних мереж, матеріально-технічного постачання, розподілу ресурсів та ін. Універсальним методом розв'язання таких задач є симплексний метод, який полягає у знаходженні опорного розв'язку і в наступному переборі опорних точок аж до досягнення оптимального результату.

Нелінійне програмування застосовують при розв'язанні задач, в яких мають місце нелінійні цільові функції або обмеження. Тип задачі визначається типом функцій, які входять до цільових функцій і обмежень. Нелінійне програмування об'єднує цілу різноманітність методів, до яких належать градієнтні методи, випадкового пошуку, квадратичне програмування, сканування, геометричне програмування та ін. Частина з них розглядається детально нижче при розв'язанні конкретних завдань, що виникають при проектуванні енергетичних систем, електрообладнання, розподілу електромонтажних робіт, управління виробництвом, технологічними процесами тощо.

Стохастичне програмування – це розділ математичного програмування, що займається розв'язанням так званих детермінованих і стохастичних задач, які містять випадкові функції і величини, об'єкти, поведінка яких описується методами теорії імовірності і базується на лінійному та нелінійному програмуванні.

Стохастичне програмування займається вивченням структури і розв'язанням задач, які на відміну від детермінованих, розв'язуються в умовах певної невизначеності, тобто коли частина або всі параметри цільової функції та обмежень містять невизначені або випадкові величини. Ці величини можуть приймати те чи інше раніше невідоме значення, вони можуть бути неперервні або дискретні. Прикладом неперервної випадкової величини можуть бути втрати активної потужності або величина напруги в деякому вузлі системи електропостачання, електротехнологічного комплексу та ін. Прикладом дискретної випадкової величини може бути кількість одночасно працюючих джерел електроенергії або трансформаторних підстанцій (трансформаторів), компенсуючих пристроїв в енергосистемі тощо.

Стохастичне програмування базується на методах випадкового пошуку і передбачає обчислення значень цільової функції на деякій множині випадково вибраних значень аргументу, проведення відповідного аналізу результатів та відбір області значень аргументів з позицій наявності шуканого результату. Таке програмування отримало достатньо широке застосування особливо при розв'язанні прикладних задач.

Перевага стохастичного програмування із використанням статистичних (стохастичних випадкових) методів проявляються особливо при розв'язанні задач великої розмірності, серед яких основними є: простота реалізації, надійність можливостей прогнозування оптимального розв'язку.

На відміну від попередніх однокрокових методів оптимізації динамічне програмування належать до багатокрокових методів, тобто застосовується при розв'язанні задач, які вимагають визначення параметрів процесів поетапного та послідовного знаходження оптимальних значень множини змінних із врахуванням фактору часу.

Розв'язання таких задач на кожній стадії здійснюють порівняно простими методами, а сам розв'язок одержують у числовій формі.

## ТЕМА 3. МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

### ПЛАН

- 3.1 Постановка та особливості задач лінійного програмування
- 3.2 Графічне розв'язання задач лінійного програмування
- 3.3 Алгебраїчні методи перетворення системи рівнянь для вирішення задач лінійного програмування
- 3.4 Симплекс-метод

### 3.1 Постановка та особливості задач лінійного програмування

Задачі на базі лінійного програмування, тобто задачі, в яких цільова функція і всі обмеження лінійні, складають великий клас оптимізаційних задач щодо оптимального завантаження електрообладнання, розподілу електроенергії.

Вирішення таких задач здійснюється з використанням основних властивостей лінійного програмування, основою яких є лінійна залежність критерію від елементів розв'язку. Тобто цільова функція і всі обмеження лінійні. У загальному вигляді за наявності  $n$  невідомих змінних  $x_1, x_2 \dots x_n$ , необхідно знайти значення цільової функції, яка досягає екстремального значення. При цьому змінні  $x_1, x_2 \dots x_n$  повинні задовольняти певним вимогам обмежень.

Функціонування об'єкта дослідження записують у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей відносно параметрів керування (змінних).

Задачі лінійного програмування формують так: знайти екстремальне значення (max/min) лінійної цільової функції, наприклад  $Z$ , при обмеженнях, які мають форму лінійних рівностей або нерівностей, і граничних умовах, які показують діапазон варіювання змінних.

У загальному випадку лінійна математична модель має такий вигляд:

$$Z = Z_1x_1 + Z_2x_2 + \dots + Z_nx_n \rightarrow \text{ext}(\text{max/min});$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m;$$

$$x_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n,$$

(3.1)

де  $Z_i, b_j, a_{ij}$  – постійні задані величини,  $i = 1, 2 \dots n$ ;  
 $j = 1, 2 \dots m$ .

Треба підкреслити, що методи лінійного програмування працюють однаково, як при пошуку мінімуму, так і при пошуку максимуму цільової функції.

Припустимо, що в моделі (3.1) шукаємо мінімум цільової функції:

$$Z = Z_1x_1 + Z_2x_2 + \dots + Z_nx_n \rightarrow \min. \quad (3.2)$$

У випадку, коли треба знати максимум цільової функції  $Z$ , то у коефіцієнтів функції змінюємо знаки на протилежні і знову шукаємо мінімум функції:

$$Z = -Z_1x_1 - Z_2x_2 - \dots - Z_nx_n \rightarrow \min.$$

Таким чином:  $\min (-Z_1x_1 - Z_2x_2 - \dots - Z_nx_n) = \max (Z_1x_1 + Z_2x_2 + \dots + Z_nx_n)$ .

### 3.2 Графічне розв'язання задач лінійного програмування

Цей метод, незважаючи на його достатню простоту і наочність, дозволяє розв'язувати в багатьох випадках задачі лінійного програмування, які мають обмеження відносно невеликої розмірності.

Розглянемо математичну модель, яка має вигляд:

$$Z = Z_1x_1 + Z_2x_2 \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

при відповідних обмеженнях:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

та граничних умовах невід'ємності змінних:

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, 2.$$

Першим кроком буде внесення додаткових змінних  $x_3, x_4, x_5$ , які обумовляють можливість переходу від обмежень – нерівностей до рівностей:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 &= b_1; \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 &= b_2; \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 &= b_3.
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Зауважимо, що граничні умови невід'ємності змінних розповсюджуються і на додаткові змінні, тобто:

$$x_i \geq 0; i = 3, 4, 5.$$

Після цих змін відкладаємо по осі абсцис значення змінної  $x_1$ , а по осі ординат – значення  $x_2$  (рис 3.1).

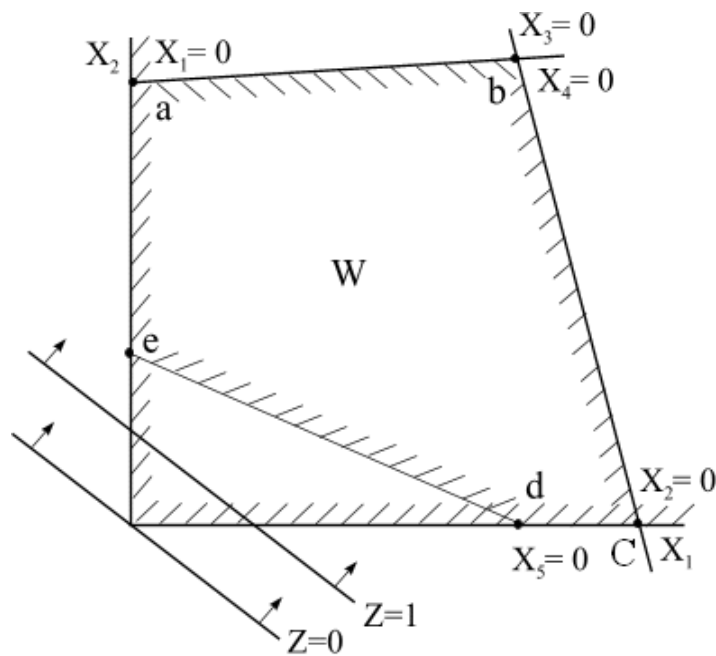


Рис. 3.1. Геометрична інтерпретація розв'язання задачі

Тепер із врахуванням граничних умов:  $x_1 \geq 0$ ;  $x_2 \geq 0$ , виконаємо штрихування півплощини допустимих значень змінних  $x_1$  та  $x_2$ .

Розглянемо обмеження – рівності (3.5) і перепишемо їх у вигляді:

$$\begin{aligned}
 x_3 &= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1; \\
 x_4 &= -a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2; \\
 x_5 &= -a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + b_3.
 \end{aligned}$$

Після цього, кожне з них прирівнюємо до нуля:

$$x_3 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 = 0;$$

$$x_4 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - b_2 = 0;$$

$$x_5 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 - b_3 = 0.$$

Розглянувши, наприклад, перше співвідношення бачимо, що воно, як і всі інші, являє собою рівняння прямої лінії в площині  $x_1, x_2$ . Звідси бачимо, що на цих прямих значення  $x_3, x_4, x_5$  відповідно будуть  $x_3=0, x_4=0, x_5=0$ .

Таким чином, для кожної з прямих значення в один бік будуть відповідно  $x_3 > 0, x_4 > 0, x_5 > 0$ , а по другий:  $x_3 < 0, x_4 < 0, x_5 < 0$ . Враховуючи граничні умови  $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ , заштрихуємо півплощину, в якій виконується ця умова, тобто отримуємо опуклий багатогранник  $abcde$ , що і є областю допустимих значень  $W$  або областю оптимального рішення.

Повертаючись до цільової функції і прирівнюючи її до нуля, маємо:

$$Z = Z_1x_1 + Z_2x_2 = 0. \quad (3.6)$$

У площині  $x_1 x_2$  (рис 3.1) – це є пряма лінія, яка проходить через початок координат.

Надаючи цільовій функції будь-яке значення, яке із врахуванням граничних умов буде більше нуля, наприклад одиницю отримуємо:  $Z = Z_1x_1 + Z_2x_2 = 1$ , і будемо в площині  $x_1 x_2$  (рис 3.1) відповідну пряму  $Z = 1$ , яка показує зростання цільової функції (напрямок вказано стрілкою). Зростання і паралельне зміщення функції  $Z$  обумовить визначення найближчої точки, яка належить області  $W$ , тобто із врахуванням графічних побудов такою точкою буде вершина  $e$ , багатогранника  $W$ . Ця точка і буде відповідати мінімуму цільової функції, тобто оптимальному розв'язанню задачі.

Мінімальне значення функції  $Z$  досягається при відповідних значеннях змінних:  $x_2 > 0, x_3 > 0, x_4 > 0, x_1 = 0, x_5 = 0$ .

Таким чином, маємо три змінні ( $x_2, x_3, x_4$ ), які відрізняються від нуля і дві змінні ( $x_1, x_5$ ), які дорівнюють нулю. Це дає підстави стверджувати, що кількість змінних, які не дорівнюють нулю дорівнює кількості обмежень (3), а всі інші дорівнюють нулю. Тут необхідно додати, що ідеологія розв'язання задачі максимізації цільової функції аналогічна наведеному.

На основі наведеного прикладу можна сформулювати загальні висновки щодо розв'язання лінійної оптимізаційної задачі:

– оптимальне рішення задачі завжди знаходиться в одній із вершин багатогранника;

– для відшукування оптимального рішення необхідно розглянути тільки ті рішення, в яких міститься  $m$  змінних, нерівних нулю та  $(n-m)$  змінних рівних нулю;

– у кожному рішенні, якому відповідає одна з вершин багатогранника, кількість позитивних ( $\neq 0$ ) змінних дорівнює кількості обмежень  $m$ , решта  $(n-m)$  змінні дорівнюють нулю.

Позитивні змінні, які відрізняються від нуля прийнято називати базисними, а нульові змінні – вільними. При цьому в кожному розв'язанні кількість базисних змінних дорівнює кількості обмежень  $m$ , а кількість вільних змінних –  $(n-m)$ .

Таким чином, при переході від одного рішення до другого (від однієї вершини багатогранника до другої) одна базисна змінна стає вільною, а одна із вільних змінних, навпаки – базисною.

### 3.3 Алгебраїчні методи перетворення систем рівнянь для вирішення задач лінійного програмування

Процес перетворення системи обмежень – рівностей у моделі (3.2) при переході від одного до іншого розв'язання необхідно здійснювати у такій послідовності.

Проаналізуємо систему (3.5) і зробимо припущення, що в якості базисних змінних зручно прийняти змінні  $x_3, x_4, x_5$ , а в якості вільних –  $x_1, x_2$ , тобто:

$$x_1=0, x_2=0.(\text{вільні змінні});$$

$$x_3=b_1, x_4=b_2, x_5=b_3.(\text{базисні змінні}).$$

Вихідну систему (3.5) запишемо більш докладніше, тобто базисні змінні і коефіцієнти при них подамо жирним шрифтом:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{1} \times x_3 + \mathbf{0} \times x_4 + \mathbf{0} \times x_5 &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{0} \times x_3 + \mathbf{1} \times x_4 + \mathbf{0} \times x_5 &= b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \mathbf{0} \times x_3 + \mathbf{0} \times x_4 + \mathbf{1} \times x_5 &= b_3. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Далі проводимо процедуру, якою часто користуються в шкільному курсі алгебри при розв'язанні систем лінійних рівнянь, а



саме: вільну змінну  $x_1$  переводимо в розряд базисних, а базисну змінну  $x_3$  навпаки – в розряд вільних.

Суть цієї процедури: з першого рівняння системи визначається змінна  $x_1$ , яка потім підставляється в друге та третє рівняння системи. Таке перетворення обумовлює перехід вільної змінної  $x_1$  в базисну, а базисної  $x_3$  у вільну.

Стовпчик (перший системи рівнянь (3.7)), в якому присутня вільна змінна  $x_1$ , що переводиться в розряд базисних, буде мати назву "розв'язний стовпчик", а рядок, в якому присутня базисна змінна  $x_3$ , що переводиться в розряд вільних (перший рядок) буде мати назву "розв'язний рядок". Коефіцієнт, який знаходиться на перетині розв'язного стовпчика та розв'язного рядка буде мати назву "розв'язний коефіцієнт".

Наступним кроком буде ділення першого рівняння на розв'язний коефіцієнт (в нашому випадку  $a_{11}$ ):

$$1 \cdot x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{1}{a_{11}} x_3 + \frac{0}{a_{11}} x_4 + \frac{0}{a_{11}} x_5 = \frac{b_1}{a_{11}}. \quad (3.8)$$

$$\text{Звідси: } 1 \cdot x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}} x_3 - \frac{0}{a_{11}} x_4 - \frac{0}{a_{11}} x_5 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2.$$

Далі, підставляючи значення  $x_1$  в друге та третє рівняння системи (3.7) і виконавши нескладні перетворення разом з (3.8), отримуємо нову систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & \boxed{1 \cdot x_1} + \frac{a_{12} x_2}{a_{11}} + \frac{\boxed{1 \cdot x_3}}{a_{11}} + \frac{\boxed{0 x_4}}{a_{11}} - \frac{\boxed{0 x_5}}{a_{11}} = \frac{b_1}{a_{11}}; \\ & \boxed{0 x_1} + \left( a_{22} - \frac{a_{21} a_{12}}{a_{11}} \right) x_2 + \left( 0 - \frac{1 \cdot a_{21}}{a_{11}} \right) x_3 + \left( 1 - \frac{0 a_{12}}{a_{11}} \right) x_4 + \left( 0 - \frac{0 a_{12}}{a_{11}} \right) x_5 = b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}}; \quad (3.9) \\ & \boxed{0 x_1} + \left( a_{32} - \frac{a_{21} a_{31}}{a_{11}} \right) x_2 + \left( 0 - \frac{1 \cdot a_{31}}{a_{11}} \right) x_3 + \left( 0 - \frac{0 a_{31}}{a_{11}} \right) x_4 + \left( 1 - \frac{0 a_{31}}{a_{11}} \right) x_5 = b_3 - \frac{b_1 a_{31}}{a_{11}}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти перетворення системи запишемо в більш спрощеному вигляді: (коефіцієнти помічені штрихом):

$$\begin{aligned} & 1 x_1 + \boxed{a'_{12} x_2} + \boxed{a'_{13} x_3} + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = \boxed{b'_1}; \\ & 0 x_1 + \boxed{a'_{22} x_2} + \boxed{a'_{23} x_3} + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = \boxed{b'_2}; \quad (3.10) \\ & 0 x_1 + \boxed{a'_{32} x_2} + \boxed{a'_{33} x_3} + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_5 = \boxed{b'_3}. \end{aligned}$$

У системі (3.10) вільними будуть змінні  $x_2$  і  $x_3$ , а базисними – змінні  $x_1, x_4, x_5$ , тобто нове рішення:  $x_2 = 0, x_3 = 0; x_1 = b'_1, x_4 = b'_2, x_5 = b'_3$ , в якому змінна  $x_1$  стала базисною, а  $x_3$  – вільною.

Аналізуючи вирази (3.9), (3.10) можна сформулювати три правила перерахунку коефіцієнтів при переведенні однієї з базисних змінних у розряд вільних, а однієї із вільних змінних у розряд базисних.

1. Всі коефіцієнти, які не належать розв'язному рядку і розв'язному стовпчику, перераховують за виразом:

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{jr}a_{ri}/a_{rr}, \quad (3.11)$$

де  $a_{ij}$  – коефіцієнт, який знаходиться на перетині  $i$ -го рядка та  $j$ -го стовпчика;  $a'_{ij}$  – нове перераховане значення коефіцієнта  $a_{ij}$ ;  $a_{rr}$  – розв'язний коефіцієнт;  $a_{jr}$  – коефіцієнт, який знаходиться на перетині  $i$ -го рядка та розв'язного стовпчика;  $a_{ri}$  – коефіцієнт, який знаходиться на перетині розв'язного рядка та  $j$ -го стовпчика.

2. Всі коефіцієнти розв'язного рядка ділять на розв'язний коефіцієнт  $a_{rr}$ , який при цьому стає рівним одиниці ( $a_{rr}=1$ ).

3. Всі коефіцієнти розв'язного стовпчика, крім розв'язного коефіцієнта, замінюють нулями.

Таким чином, перехід від одного рішення до іншого складається в перерахунку коефіцієнтів системи рівнянь за вищенаведеними правилами.

При розв'язанні конкретних реальних оптимізаційних задач зручно користуватися записом систем рівнянь у вигляді таблиці (табл. 3.1), в якій виділимо розв'язні рядок і стовпчик.

### 3.1. Розв'язні рядки і стовпчики системи рівнянь (3.10)

$x_1$	$x_2$	<b><math>x_3</math></b>	<b><math>x_4</math></b>	<b><math>x_5</math></b>	$b$
$a_{11}$	$a_{12}$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	$b_2$
$a_{31}$	$a_{32}$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	$b_3$

Користуючись трьома правилами, наведеними вище, перерахуємо коефіцієнти табл. 3.1 і отримаємо нові дані (табл. 3.2), які відповідають системі (3.10).

### 3.2. Значення коефіцієнтів після перерахунку

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
<b>1</b>	$a'_{12}=a_{12}/a_{11}$	$a'_{13}=1/a_{11}$	<b>0</b>	<b>0</b>	$b'_1=b_1/a_{11}$
<b>0</b>	$a'_{22}=a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11}$	$a'_{23}=0-a_{21}1/a_{11}$	<b>1</b>	<b>0</b>	$b'_2=b_2-a_{21}b_1/a_{11}$
<b>0</b>	$a'_{32}=a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11}$	$a'_{33}=0-a_{31}1/a_{11}$	<b>0</b>	<b>1</b>	$b'_3=b_3-a_{31}b_1/a_{11}$

У наведених таблицях 3.1 і 3.2 базисні змінні та коефіцієнти при них з метою виділення їх подають або жирним шрифтом або розміщенням з позначенням **1** або **0**.

### 3.4 Симплекс-метод

Симплекс-метод є універсальним аналітичним методом розв'язання задач експериментальної оптимізації, який достатньо широко використовують при лінійному програмуванні [5, 10]. Метод називають симплексним тому, що рух до екстремуму в цьому разі здійснюється за допомогою побудови в факторному просторі геометричних фігур, які називаються симплексними. Так, у  $n$ -вимірному просторі симплексом називають регулярний багатогранник (тобто такий, який має рівні ребра). Для двовимірного простору симплекс є рівнобічним трикутником, у випадку тривимірного – тетраедром.

#### 3.4.1 Графічна інтерпретація симплекс-методу

Ідея алгоритму симплекс-методу полягає в такому: спочатку проводиться початкова серія дослідів у точках початкового симплекса, тобто у вершинах рівнобічного трикутника – 1, 2, 3 (рис. 3.2), центр ваги якого знаходиться в точці  $x_0$ . Порівнюючи ці точки, визначаємо "найгіршу" вершину. З цієї вершини через центр ваги трикутника ( $x_0$ ) проводимо пряму, на якій знаходиться вершина нового симплекса, тобто відбиток "найгіршої" вершини трикутника. В цій новій вершині ставлять наступний дослід і так далі рухаємося до досягнення області оптимуму. Особливістю є те, що при побудові першого початкового симплекса проводять три досліді (точки 1, 2, 3), а потім на кожному новому етапі ставлять тільки один дослід

(вершина 5 на рис 3.2) тощо. Головне при цьому те, що досліди не потрібно дублювати, оскільки при похибці в одному досліді симплекс тільки тимчасово відхиляється в бік, але надалі займе правильне положення при русі до екстремуму.

У спрощеному вигляді алгоритм симплекс-методу – це:

- вибір початкової точки  $x_0$  та інтервалів варіювання;
- вибір плану початкової серії дослідів у вигляді правильного симплекса;
- обчислення фізичних (натуральних) значень факторів;
- пошук екстремуму відгуку;
- обчислення умов проведення наступного дослідів та його реалізація;
- пошук ”поганого” дослідів серед нової серії та перехід до п. 5 і так далі.

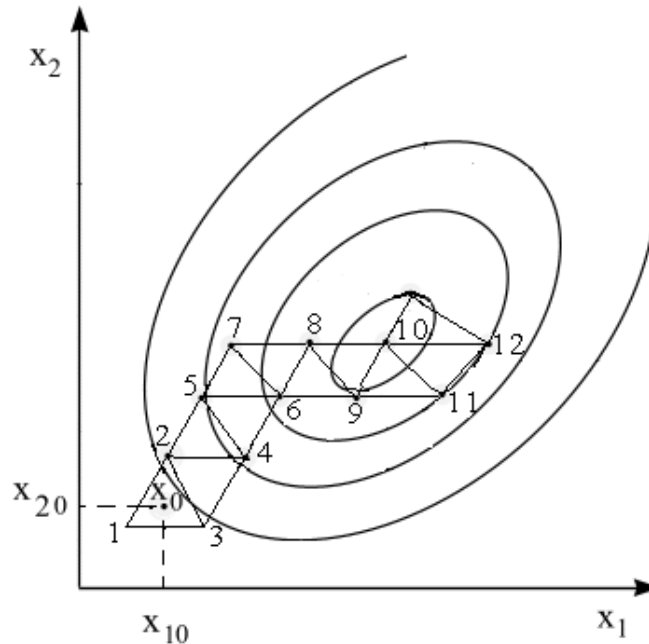


Рис. 3.2. Схема пошуку оптимальності функції симплексним методом

Така графічна процедура припиняється, коли область оптимуму вважається досягнутою.

Наведена вище процедура пошуку екстремуму функції поширюється на довільне число факторів, тобто в загальному випадку  $n$  факторів початкова серія послідовного симплекс-методу складається з  $n + 1$  дослідів.

Вище була наведена так звана графічна (геометрична) інтерпретація симплекс-методу.



$$a_{11} = -b_{11}, a_{12} = -b_{12}, a_{mn} = -b_{mn}. \quad (3.13)$$

З врахуванням (3.13) система (3.12) приймає так звану стандартну форму:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= b_1 - (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n) \\ y_2 &= b_2 - (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n) \\ y_m &= b_m - (a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n) \end{aligned} \right\}. \quad (3.14)$$

На базі 3.14 складаємо стандартну таблицю коефіцієнтів (табл. 3.3).

Розв'язання задачі лінійного програмування із застосуванням симплекс-методу здійснюється шляхом багаторазового перерозв'язання системи (3.14) відносно до нових базисних змінних.

У цілому схема вирішення таких задач повинна передбачати здійснення трьох етапів: заміну змінних, послідовне знаходження опорного та оптимального розв'язку.

### 3.3. Стандартна таблиця коефіцієнтів системи

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні					
		$x_1$	$x_2$	...	$x_j$	...	$x_n$
1	2	3	4	5	6	7	8
$y_1$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$
$y_2$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2j}$	...	$a_{2n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_i$	$b_i$	$a_{i1}$	$a_{i2}$	...	$a_{ij}$	...	$a_{in}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$y_m$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$

Процедура перерозв'язання системи передбачає виведення яких-небудь змінних  $x_j \left( j = \overline{1, n} \right)$  з числа вільних і переведення їх в базисні змінні, замість того в число вільних ввести будь-яку базисну змінну

$y_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Така змінна має такий запис:  $x_j \leftrightarrow y_i$ , і обумовлює можливість переходу до нової опорної точки.

Цей перехід (заміна змінних) полягає у наступному перетворенні (табл. 3.3).

1. У табл. 3.3 виділяють елемент  $a_{ij}$ , який носить назву розв'язний, його обводять в таблиці та обчислюють його обернену величину  $\lambda \left( \lambda = 1/a_{ij} \right)$ , яку записують в нижній частині тієї ж самої клітинки, де і знаходиться розв'язний елемент.

2. Всі елементи розв'язного рядка, окрім самого  $a_{ij}$ , помножують на обернену величину ( $\lambda$ ), а результати записують у нижній частині відповідних клітинок.

3. Всі елементи розв'язного стовпчика, крім самого  $a_{ij}$ , помножують на від'ємну обернену величину ( $-\lambda$ ), а результати записують у нижній частині відповідних клітинок.

4. Попередні елементи (верхні числа) в розв'язному рядку підкреслюють, а в розв'язному стовпчику – всі нижні (нові) елементи, за винятком  $\lambda$ .

5. Для всіх інших елементів (які не належать розв'язному стовпчику та розв'язному рядку) у нижній частині відповідних клітинок записують добутки підкреслених чисел, які стоять у тому ж стовпчику і рядку, що і даний елемент.

6. Переписують в табл. 3.3, здійснивши заміну  $x_j$  на  $y_i$  і навпаки ( $x_j \leftrightarrow y_i$ ) елементів розв'язного стовпчика та розв'язного рядка на числа, які стоять в нижніх частинах відповідних клітинок, а далі – кожний з решти елементів замінюють на суму чисел, які стоять у верхній та нижній частинах тієї ж клітинки.

Подальше рішення задачі із застосуванням симплекс-методу полягає у знаходженні опорного рішення, яке здійснюється відповідно до наступного алгоритму за умову, що обмеження задачі подано у стандартній формі (3.14), а коефіцієнти цієї системи і цільової функції ( $W$ ) зведені в стандартну таблицю (табл. 3.4).

Цільова функція  $W$  (перший рядок формули (3.12)) зводиться до стандартної формули (3.15).

$$W = c_0 - (\gamma_1 \cdot x_1 + \gamma_2 \cdot x_2 + \dots + \gamma_n \cdot x_n), \quad (3.15)$$

де  $\gamma_1 = -c_1$ ;  $\gamma_2 = -c_2$ ;  $\gamma_n = -c_n$ .

Числа  $c_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_n$  записуються як елементи в додатковий рядок стандартної табл. 3.4 (рядок  $W$ ).

### 3.4. Значення коефіцієнтів після перетворення

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
1	2	3	4	5
$y_1$	$b_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{1n}$
$y_2$	$b_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{2n}$
... ..	... ..	... ..	... ..	... ..
$y_m$	$b_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	$a_{mn}$
$W$	$c_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_n$

Потрібно пам'ятати, що в рядку  $W$  розв'язний елемент ніколи не вибирається.

Алгоритм опорного розв'язку полягає у такому:

1. У випадку, коли всі вільні члени системи (3.14) невід'ємні ( $b_{ij} \geq 0$ ), опорний зв'язок вже отримано і має вигляд:  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ;  $y_1 = b_1$ ;  $y_2 = b_2$ ; ...  $y_m = b_m$ , тобто: для знаходження опорного рішення за умову  $b_{ij} \geq 0$  необхідно у системі (3.14) прийняти всі вільні змінні рівними нулю ( $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ; ...  $x_n = 0$ ); обчислити базисні змінні ( $y_1, y_2, \dots, y_m$ ), які стануть рівними відповідним вільним членам ( $b_1, b_2, \dots, b_m$ ).

2. У випадку, коли вільний член в одному з рівнянь системи (3.14) від'ємний ( $b_i \leq 0$ ), а всі елементи  $a_{ij}$  відповідного рядка невід'ємні, система несумісна з умовами невід'ємності змінних і не має розв'язку.

3. У випадку рівняння з від'ємним вільним членом ( $b_i \leq 0$ ) і наявністю від'ємного елемента ( $a_{ij} \leq 0$ ) стовпчик таблиці, в якому він розташований вибирається як розв'язний. За наявності декількох таких елементів можна вибирати будь-який з них.

4. Зробимо аналіз всіх елементів цього стовпчика, які мають однаковий знак із своїм вільним членом. Розгляд елементів



здійснюється за винятком рядка цільової функції ( $W$ ). Розв'язним елементом при цьому є умова, коли відношення вільного члена до свого елемента має мінімальне значення  $\left( \frac{b_i}{a_{ij}} = \min \right)$ . Після цього звертаємося знову до алгоритму заміни змінних.

5. Відповідно до правил здійснюється обмін змінними, яким відповідає обраний розв'язний елемент.

6. Отримавши рішення, знову продовжуємо дослідження відповідно до вимог п.1 і 2. У випадку, коли рішення не являє собою опорний розв'язок і при цьому не доведена несумісність системи обмежень, процедура обміну змінних повторюється до знаходження опорного рішення або до прийняття рішення про несумісність системи.

Після знаходження опорного рішення наступним етапом є пошук оптимального розв'язку. Цей пошук здійснюється за наступним алгоритмом:

1. Аналізується стандартна таблиця (симплексна), яка відповідає знайденому розв'язку (табл. 3.4). У випадку, коли всі вільні члени невід'ємні ( $b_i \geq 0$ ), а також не враховуючи рядка  $W$ , в якому немає жодного додатного елемента ( $\gamma_1 < 0$ ), не враховуючи вільного члена в цьому рядку, оптимальний розв'язок можна вважати досягнутим. Він буде мати такий вигляд:

$$x_1 = x_2 \dots = x_n = 0; y_1 = b_1; y_2 = b_2; \dots y_m = b_m.$$

2. У випадку, коли не враховуючи вільного члена, в рядку  $W$  є один або декілька додатних елементів і в кожному з відповідних цим елементам стовпчиків немає жодного додатного елемента, оптимальний розв'язок відсутній, а функція мети в цьому випадку не має обмеження знизу.

3. У випадку, коли хоча б в одному з таких стовпчиків існує додатний елемент, здійснюється обмін вільними та базисними змінними. Розв'язним елементом при цьому приймають той додатний елемент, для якого відношення до нього відповідного вільного члена має мінімальне значення. При цьому у рядку цільової функції ( $W$ ) можуть бути два або декілька додатних коефіцієнтів, відповідні стовпчики яких мають додатні елементи, що для вибору розв'язного елемента обумовлює можливість взяти будь-який стовпчик.

4. Знову звертаємося до п. 1 і за необхідності вся процедура повторюється.

### 3.4.3 Приклади розв'язання задач лінійного програмування

Задача 3.1. Наприклад, дана система рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 1 \\ y_2 &= x_1 - x_2 - 2x_3 \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 + 4 \end{aligned} \right\}. \quad (3.16)$$

Необхідно провести заміну змінних  $x_3 \leftrightarrow y_2$ , тобто вивести змінну  $x_3$  з числа вільних змінних і перевести її в базисні, а натомість ввести в число вільних змінну  $y_2$ . Перепишемо систему у стандартній формі і складемо стандартну табл. 3.5.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 - (-2x_1 - x_2 - x_3) \\ y_2 &= 0 - (-x_1 + x_2 + 2x_3) \\ y_3 &= 4 - (-x_1 - 3x_2) \end{aligned} \right\}. \quad (3.17)$$

Згідно з таблицею, розв'язний елемент знаходиться на перетині рядка  $y_2$  і стовпчика  $x_3$ . Це число 2, а обернена до нього величина  $\lambda = 1/2$ . Складемо табл. 3.6 і запишемо у верхніх частинах її клітинок елементи табл. 3.5. У тій самій таблиці запишемо результати проміжних обчислень. Число  $\lambda$  запишемо в нижній частині клітинки розв'язного елемента.

3.5. Матриця системи рівнянь 3.17

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	1	-2	+1	+1
$y_2$	0	-1	1	2
$y_3$	4	-1	-3	0

Нижні частини решти клітинок табл. 3.6 заповнюємо згідно з п.п. 2 – 5 наведеного вище алгоритму. Перепишемо ще раз табл. 3.6 до табл. 3.7, замінивши  $x_3$  та  $y_2$  і навпаки, обчисливши її елементи у відповідності з п. 6.

### 3.5 Дані проміжних обчислень

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	+1	-2	-1	-1
	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$y_2$	0	-1	+1	+2
	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$y_3$	+4	-1	-3	0
	0	0	0	0

### 3.6 Дані після трансформації табл. 3.6

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$y_1$	+1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$y_2$	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$
$y_3$	+4	-1	-3	0

Так початкова система рівнянь була розв'язана відносно змінних  $y_1$ ,  $x_3$ ,  $y_3$  і прийняла такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 1 - \left( -\frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 \right) = 1 + \frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_3 &= 0 - \left( -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 \right) = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}y_2 \\ y_3 &= 4 - (-x_1 - 3x_2) = 4 + x_1 + 3x_2 \end{aligned} \right\}. \quad (3.18)$$

*Задача 3.2.* Як приклад розглянемо геометричну інтерпретацію задачі лінійного програмування:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \quad (3.19)$$

$$\text{При обмеженнях:} \quad x_1 + x_2 \leq 3; \quad (3.20)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 12; \quad (3.21)$$

$$x_1 \leq 0; x_2 \geq 0. \quad (3.22)$$

На площині (рис. 3.3) виділимо зону з координатними осями  $x_1$  і  $x_2$ , в якій повинні знаходитися допустимі розв'язки нашої задачі. Враховуючи умови (3.22), а також лінію  $KM$  за умовою (3.20) та лінією  $LN$  за умовою (3.21), шукана зона знаходиться в першому квадраті. Таким чином, всі точки лежать або на границях або у випуклому чотирикутнику  $OLSM$  і задовольняють всі обмеження (3.20), (3.21), (3.22). Звідси можна констатувати, що  $OLSM$  і є областю допустимих розв'язків задачі лінійного програмування.

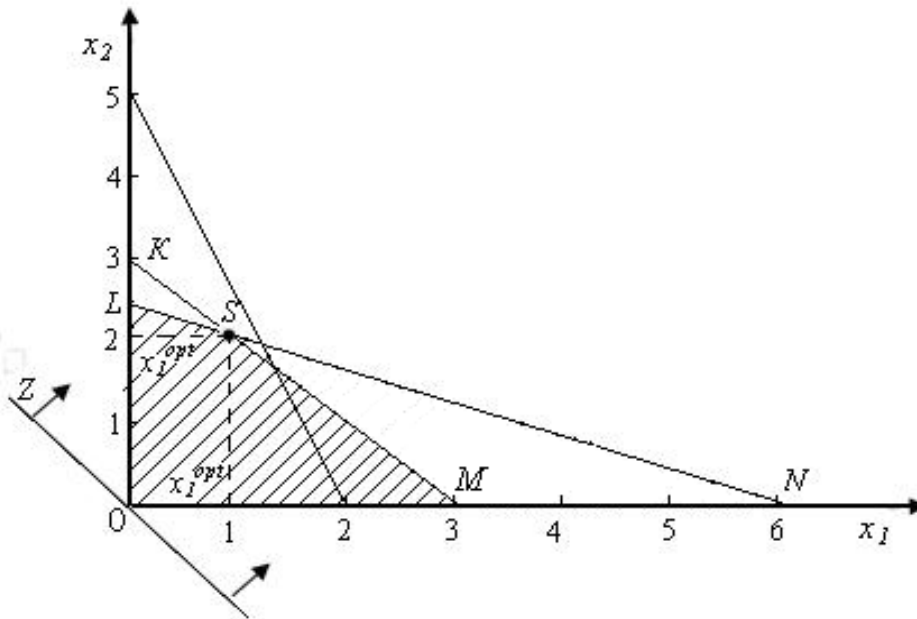


Рис. 3.3. Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

Для знаходження оптимального розв'язку спочатку цільову функцію  $Z$  прирівнюємо до нуля:  $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ . При цьому ми маємо рівняння прямої лінії  $Z$  (рис. 3.3), яка має лише одну точку ( $x_1 = 0; x_2 = 0$ ), що належить області допустимих значень. Збільшуючи поступово значення цільової функції, уважно відслідковуємо переміщення лінії  $Z$ . Безумовно, що така процедура обумовлює можливість отримання на множині допустимих розв'язків ( $OLSM$ ) максимальне значення цільової функції, тобто у випадку коли пряма  $Z$  проходить хоча б через одну точку області допустимих розв'язків. Ця точка має координати:  $x_1 = 1; x_2 = 2$ , а значення цільової функції  $Z = 3x_1 + 4x_2 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$ , тобто задача має єдиний оптимальний розв'язок.

**Задача 3.3.** Визначити мінімальне та максимальне значення функції:

$$W = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \min/\max, \quad (3.23)$$

при обмеженнях:

$$\left. \begin{aligned} -6x_1 + 13x_2 &\geq 8 \\ 3x_1 - x_2 &\leq 40 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 89 \\ -x_1 + 13x_2 &\leq 260 \\ 6x_1 + x_2 &\geq 20 \end{aligned} \right\}, \quad (3.24)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad (3.25)$$

На базі умови побудуємо табл. 3.8.

Знайдені розв'язки треба проілюструвати геометрично шляхом побудови області допустимих розв'язків, яка складається з перетину півплощини, заданих обмеженнями (3.24 – 3.25).

3.8 Таблиця даних

№ п/п	Обмеження	Коефіцієнт	Коефіцієнт	Права частина обмежень	Знак	Ліва частина обмежень
		$x_1$	$x_2$			
	A	B	C	D	L	E
1	1,0	-6,0	13,0	8,0	$\geq$	0
2	2,0	3,0	-1,0	40,0	$\leq$	0
3	3,0	2,0	3,0	89,0	$\leq$	0
4	4,0	-1,0	13,0	260,0	$\leq$	0
5	5,0	6,0	1,0	20,0	$\geq$	0
6	Цільова функція $W$	Результати				

За таблицею будуємо графік функцій. Побудовані прямі (пряма 1 – пряма 5) утворюють неправильний п'ятикутник (рис. 3.4), який геометрично інтерпретує прийняті обмеження задачі. Аналогічно можна побудувати прямі:  $W_{\min} = 2x_1 + 7x_2$  та  $W_{\max} = 2x_1 + 7x_2$ , попередньо знайшовши залежність  $x_2$  від  $x_1$  на відповідному проміжку. Остаточні результати заносимо в табл. 3.10.

### 3.9 Таблиця результатів

1	A/	B/	C/	D/	E/	F/
	$x_I$	1 <sup>a</sup> пряма	2 <sup>a</sup> пряма	3 <sup>a</sup> пряма	4 <sup>a</sup> пряма	5 <sup>a</sup> пряма
2	-2,000	-0,307692	-46,000000	31,000000	19,846154	32,000000
3	-1,000	0,153846	-43,000000	30,333333	19,923077	26,000000
4	0,000	0,615385	-40,000000	29,666667	20,000000	20,000000
5	1,000	1,076923	-37,000000	29,000000	20,076923	14,000000
6	2,000	1,538462	-34,000000	28,333333	20,153846	8,000000
7	3,000	2,000000	-31,000000	27,666667	20,230769	2,000000
8	4,000	2,461538	-28,000000	27,000000	20,307692	-4,000000
9	5,000	2,923077	-25,000000	26,333333	20,384615	-10,000000
10	6,000	3,384615	-22,000000	25,666667	20,461538	-16,000000
11	7,000	3,846154	-19,000000	25,000000	20,538462	-22,000000
12	8,000	4,307692	-16,000000	24,333333	20,615385	-28,000000
13	9,000	4,769231	-13,000000	23,666667	20,692308	-34,000000
14	10,000	5,230769	-10,000000	23,000000	20,769231	-40,000000
15	11,000	5,692308	-7,000000	22,333333	20,846154	-46,000000
16	12,000	6,153846	-4,000000	21,666667	20,923077	-52,000000
17	13,000	6,615385	-1,000000	21,000000	21,000000	-58,000000
18	14,000	7,076923	2,000000	20,333333	21,076923	-64,000000
19	15,000	7,538462	5,000000	19,666667	21,153846	-70,000000
20	16,000	8,000000	8,000000	19,000000	21,230769	-76,000000
21	17,000	8,461538	11,000000	18,333333	21,307692	-82,000000
22	18,000	8,923077	14,000000	17,666667	21,384615	-88,000000
23	19,000	9,384615	17,000000	17,000000	21,461538	-94,000000
24	20,000	9,846154	20,000000	16,333333	21,538462	100,000000

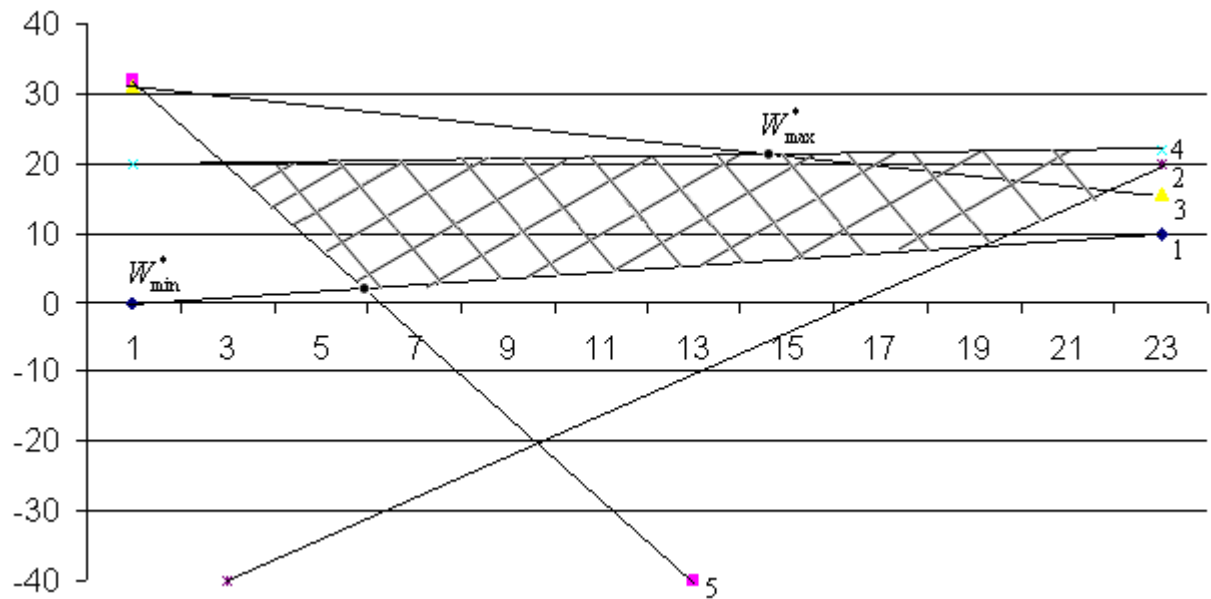


Рис. 3.4. Геометрична інтерпретація розв'язку задачі

### 3.10 Таблиця розрахунків

№ п/п	Назва	Продукт 1	Продукт 2	Цільова функція min/max
1	Змінна	$x_1$	$x_2$	
2	Значення			
3	Нижня границя	0	0	
4	Коеф. змінних	2,0	7,0	

Як приклад лінійного програмування, на який покладаються умови цілочисельності змінних, розглянемо таку задачу

Задача 3.4. Маємо цільову функцію:

$$W = x_1 + x_2 \rightarrow \max; \quad (3.26)$$

$$\text{при обмеженнях: } 4x_1 + 3x_2 \leq 12; \quad (3.27)$$

$$x_2 \leq 1,8; \quad (3.28)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0, \text{ а також } x_1, x_2 - \text{цілі числа.} \quad (3.29)$$

На першому етапі зробимо геометричну інтерпретацію цієї задачі із врахуванням обмежень (рис. 3.5). В цьому випадку областю допустимих рішень задачі може бути чотирикутник OABC.

Рівняння (3.26) є прямою, яка описується:  $x_1 + x_2 = c$ , де  $c$  – деяка константа. Для всіх точок цієї прямої значення цільової функції постійне і дорівнює  $c$ . При паралельному переміщенні прямої (в напрямку стрілок) значення цільової функції буде зростати (рис. 3.5, пряма  $W$ ). Очевидно, що оптимальному рішення буде відповідати точка  $B$ , яка являє собою точку перетину  $AB$  і  $CD$ .

Ця умова обумовлює можливість знаходження її (точки) координат:

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 = 12 \\ x_2 = 1,8 \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

Звідси отримуємо оптимальне рішення задачі лінійного програмування:  $x_1^* = 1,65$ ;  $x_2^* = 1,8$ , яке на жаль, не задовольняє умові цілочисельності.

Спроба округлити рішення дає відповідь:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 2$ , але ця точка ( $E$ ) та її координати не задовольняють навіть обмеженням (3.27), (3.28). Крім того, точка  $E$  знаходиться за межами області допустимих значень  $OABC$ .

Оптимальне рішення задачі треба відшукувати серед точок, які належать області допустимих рішень  $OABC$  (рис. 3.5). Аналізуючи рис. 3.5, можна стверджувати, що оптимальним рішенням (умова цілочисельності змінних  $x_1, x_2$ ) є точка  $x^*$  з координатами  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ , а цільова функція дорівнює 3 ( $W = 2 + 1 = 3$ ).

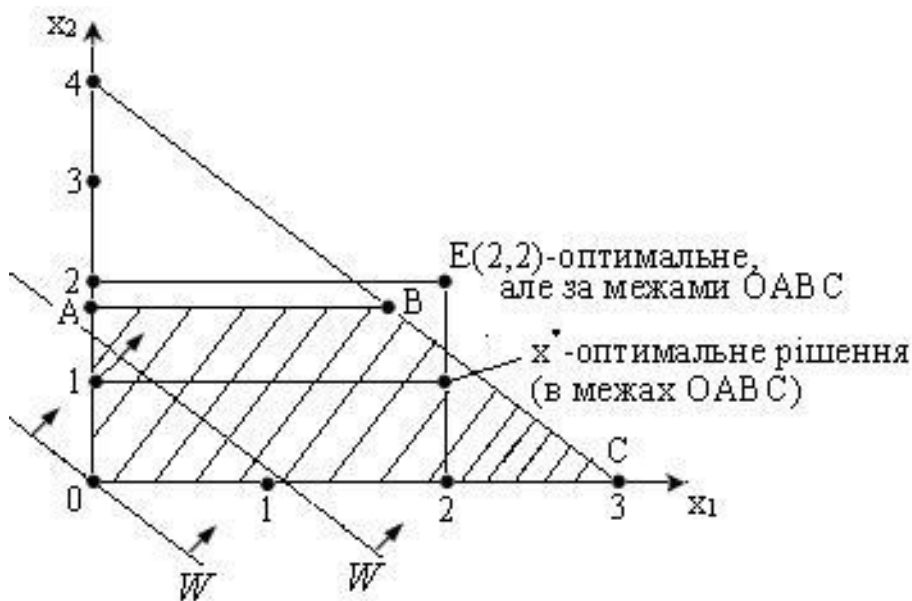


Рис. 3.5. Геометрична інтерпретація задачі цілочисельного програмування



На прикладах задач 3.5 – 3.7 показані можливості розв’язання задач лінійного програмування із застосуванням симплекс-методу.

*Задача 3.5*

$$W' = -2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \rightarrow \max, \quad (3.31)$$

при обмеженнях:

$$\begin{aligned} 6 - x_1 - 3x_2 - 4x_3 &\geq 0; \\ -4 + 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &\geq 0; \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0.$$

Переходимо до мінімізації цільової функції  $W$ , змінивши знаки коефіцієнтів початкової цільової функції  $W'$  на протилежні, а до обмежень у вигляді нерівностей (3.31) вводимо додаткові змінні:

$$W = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \rightarrow \min ;$$

$$y_1 = 6 - x_1 - 3x_2 - 4x_3 ;$$

$$y_2 = -4 + 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 ;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; y_1 \geq 0; y_2 \geq 0.$$

У результаті маємо початкову задачу, яка зведена до основної задачі лінійного програмування. Це обумовить можливість записати її в стандартній формі: цільова функція у вигляді:

$$W = 0 - (-2x_1 - 3x_2 - 7x_3); \quad (3.33)$$

а обмеження у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 6 - (x_1 + 3x_2 + 4x_3) \\ y_2 &= -4 - (-2x_1 - 5x_2 - 8x_3) \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Користуючись стандартною таблицею з коефіцієнтів цільової функції і системи обмежень, побудуємо табл. 3.11.

### 3.11. Вихідні дані цільової функції

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
$y_1$	6	1	3	4
$y_2$	-4	-2	-5	-8
$W$	0	-2	-3	-7

Пошук опорного розв'язку здійснюємо відповідно до розглянутого вище алгоритму.

1. Аналіз системи рівнянь (3.34) дає підстави стверджувати, що у зв'язку з наявністю від'ємного вільного члена ( $b_2 = -4$ ) опорний розв'язок ще не отримано.

2. Аналізуючи табл. 3.11 робимо висновок про існування опорного розв'язку, що підтверджується наявністю в рядку з від'ємним вільним членом ( $b_2 = -4$ ) від'ємних коефіцієнтів  $a_{ij}$  (-2, -5, -8).

3. У рядку  $y_2$  серед від'ємних коефіцієнтів вибираємо елемент  $a_{21} = -2$ , а відповідний йому рядок  $x_1$  приймаємо як розв'язний.

4. Аналізуємо всі елементи цього рядка ( $x_1$ ), крім рядка  $W$ . Елементи рядка (1 та -2) мають однакові знаки із вільним членом ( $1 \rightarrow 6; -2 \rightarrow -4$ ).

У зв'язку з тим, що відношення вільного члена до свого елемента мінімальне для коефіцієнта  $-2: -4/-2 = 2 < 6/1$ , приймаємо як розв'язний елемент -2 в рядку  $y_2$ .

5. Здійснюємо обмін змінними  $x_1$  та  $y_2$  ( $x_1 \leftrightarrow y_2$ ) використовуючи дані табл. 3.12.

### 3.12. Обмін змінних значень

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
$y_1$	6	1	3	4
	-2	$\boxed{1/2}$	-5/2	-4
$y_2$	$\boxed{-4}$	-2	$\boxed{-5}$	$\boxed{-8}$
	2	-1/2	5/2	4
$W$	0	-2	-3	-7
	4	$\boxed{-1}$	5	8

У верхній частині її клітинок наведено коефіцієнти з табл. 3.11, у нижній – результати розрахунків відповідно до алгоритму обміну

змінних. Обернене значення розв'язного елемента  $\lambda = -1/2$  (рядок  $x_1$ ). Тоді добуток підкреслених значень на  $\lambda$  буде для розв'язного рядка ( $y_2$ ) відповідно:  $-4(\text{вільний член}) \cdot -1/2 = 2$ ;  $-5 \cdot -1/2 = 5/2$ ;  $-8 \cdot -1/2 = 4$ , а для розв'язного стовпчика ( $x_1$ ) добуток підкреслених значень на  $-\lambda$  буде:  $1 \cdot -(-1/2) = 1/2$ ;  $-2 \cdot -(-1/2) = -1$

Для рядка  $W$  відповідно буде:  $-1$  (розв'язний стовпчик  $x_1$  – підкреслене значення).  $-4$  (підкреслене значення в рядку  $y_2$ ) = 4;  $-1 \cdot (-5) = 5$ ;  $-1 \cdot (-8) = 8$ .

Для рядка  $y_1$  відповідно:  $\boxed{-4} \cdot 1/2 = -2$ ;  $\boxed{-5} \cdot 1/2 = -5/2$ ;  $\boxed{-8} \cdot 1/2 = 4$ .

Після процедури обміну змінних в табл. 3.13 наведено кінцевий результат.

### 3.13. Обмін змінних значень

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
$y_1$	4	1/2	1/2	0
$x_1$	2	-1/2	$\textcircled{5/2}$	4
$W$	4	-1	2	1

На базі табл. 3.13 переходимо до пошуку оптимального рішення задачі.

1. Згідно з п. 1 алгоритму оптимальне рішення ще не отримано. Це можна пояснити наявністю в рядку ( $W$ ) додатних елементів, не враховуючи вільного члена.

2. В стовпчиках  $x_2$  та  $x_3$ , відповідних додатним елементам рядка  $W$ , присутні додатні елементи, що підтверджує існування оптимального рішення.

3. Здійснюємо обмін вільної та базисної змінної (табл. 3.14). Розв'язним елементом серед стовпчиків  $x_2$  та  $x_3$  приймаємо  $x_2$  ( $5/2$ ). Це обумовлено тим, що відношення вільного члена до цього елемента мінімальне ( $2 / \frac{5}{2} = \frac{4}{5} \leq 4 / \frac{1}{2} = 8$ ). Враховуючи, що стовпчик  $x_2$  обрано розв'язним, здійснюємо обмін змінних  $x_1$  та  $x_2$  ( $x_1 \leftrightarrow y_2$ ).

### 3.14. Обмін вільної та базисної змінної

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
$y_1$	4 -2/5	1/2 1/10	1/2 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1/5</span>	0 -4/5
$x_1$	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2</span> 4/5	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-1/2</span> -1/5	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">5/2</span> <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">2/5</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">4</span> 8/5
$W$	4 -8/5	-1 2/5	2 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">-4/5</span>	1 -16/5

У табл. 3.15 наведено остаточний результат, який можна визнати оптимальним рішенням. Результати отримано шляхом підсумування значень, які знаходяться у верхній та нижній частині кожної клітинки. Висновок базується на відповідності розрахунків умовам пошуку оптимального рішення:

а) обидва вільних члена невід'ємні, що відповідає прийнятним обмеженням;

б) в рядку цільової функції ( $W$ ) всі елементи від'ємні, крім вільного члена.

### 3.15. Оптимальні значення цільової функції

Базисна змінна (БЗ)	Вільний член (ВЧ)	Вільні змінні		
		$x_1$	$x_2$	$x_n$
$y_1$	18/5	3/5	-1/5	-4/5
$x_1$	4/5	-1/5	2/5	8/5
$W$	12/5	-3/5	-4/5	-11/5

Таким чином оптимальне рішення досягнуто і має вигляд:  $y_2^* = x_1^* = x_3^* = 0$ ;  $y_1^* = 18/5$ ;  $x_2^* = 4/5$ . Значення цільової функції ( $W$ ) для цього рішення 12/5 (табл. 3.15), а значення початкової ( $max$ ) цільової функції ( $W'$ ) дорівнює -12/5.

**Задача 3.6.** Електромеханічна майстерня виконує ремонт електродвигунів, які умовно можна поділити на малі та великі. Кожен електродвигун проходить дві стадії – ремонт та складання. На ремонт малого електродвигуна витрачається 2, а великого 4 год. На складання витрачається однаковий час – 3 год. Ремонтний цех майстерні працює 100 год на тиждень, а складальний 90 год. Прибуток від малого та

великого електродвигуна відповідно становить 5 та 7 грн. Скільки електродвигунів кожного виду потрібно ремонтувати, щоб отримати максимальний прибуток. За критерій оптимальності приймаємо максимальний прибуток.

Позначимо через  $x_1, x_2$  відповідно кількість малих та великих електродвигунів.

$$\text{Тоді цільова функція матиме вигляд: } W = 5x_1 + 7x_2 \rightarrow \max; \quad (3.36)$$

$$\text{при обмеженнях: } 2x_1 + 4x_2 \leq 100; \quad (3.37)$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 90; \quad (3.38)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (3.39)$$

Розв'язання задачі починається із знаходження  $x_1$  та  $x_2$  згідно з умовою та прийняття обмежень.

Виконаємо процедуру введення змінних  $\beta_1, \beta_2 \geq 0$ , після чого задача приймає стандартний вигляд.

$$W = 5x_1 + 7x_2 + 0\beta_1 + 0\beta_2 \rightarrow \max; \quad (3.40)$$

$$2x_1 + 4x_2 + 1\beta_1 + 0\beta_2 = 100; \quad (3.41)$$

$$3x_1 + 3x_2 + 0\beta_1 + 1\beta_2 = 90; \quad (3.42)$$

$$x_1, x_2, \beta_1, \beta_2 \geq 0. \quad (3.43)$$

Розв'язання задачі здійснюється із використанням симплекс-таблиці (табл. 3.16). Таке рішення задовольняє всі обмеження за умову, коли права частина рівнянь (3.41), (3.42) невід'ємна (90), (100).

Розв'язання виконуємо в послідовності згідно з наведеним вище алгоритмом.

1. У рядку  $C_j$  виписуємо коефіцієнти цільової функції при змінних  $x_1, x_2, \beta_1, \beta_2$  тобто відповідно 5, 7, 0, 0. У рядках 1 – 2 виписуємо коефіцієнти при відповідних змінних з рівнянь (3.41), (3.42), тобто для рядка 1 – 2, 4, 1, 0; для рядка 2 – 3, 3, 0, 1. Праву сторону нерівностей (3.41), (3.42) записуємо в стовпчику  $b_i$ , тобто в рядках 1, 2 відповідно 100 і 90. Змінні  $\beta_1, \beta_2$ , які утворюють одиничну матрицю будемо називати базисними.

### 3.16. Симплекс-таблиця

Рядок	СВ	Коефіцієнт при змінних $C_j$				$b_i$
		5	7	0	0	
		Вільні та базисні змінні				
		$x_1$	$x_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	
1	0	2	④	1	0	100
2	0	3	3	0	1	90
3	$Z$	0	0	0	0	0
4	$C_j - Z_j$	5	⑦	0	0	
5	7	0,5	1	0,25	0	25
6	0	1,5	0	-0,75	1	15
7	$Z_j$	3,5	7	1,75	0	175
8	$C_j - Z_j$	①,5	0	-1,75	0	
9	7	0	1	0,5	-0,33	20
10	5	1	0	-0,5	0,66	10
11	$Z_j$	5	7	1	1	190
12	$C_j - Z_j$	0	0	-1	-1	

2. Заповнимо стовпчик СВ рядка 1, 2 коефіцієнтами цільової функції при базисних змінних, тобто 0 при  $\beta_1$  в рядку 1 (перетин рядку 1 і стовпчика  $\beta_1$ ) і 0 при  $\beta_2$  в рядку 2.

3. Заповнимо рядок 3 ( $Z_j$ ) шляхом перемноження кожного елемента стовпчика СВ на відповідні елементи рядків 1, 2 та їх додавання. Так, перший елемент рядка  $Z_j$  отримуємо так:  $0 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 0$ ;  $0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 = 0$ ;  $0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ ;  $0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ . У даному випадку всі елементи рядка дорівнюють 0. Аналогічно отримаємо 0 в рядку  $b_i$ :  $0 \cdot 100 + 0 \cdot 90 = 0$ .

4. Рядок 4 ( $C_j - Z_j$ ) отримуємо почленним відніманням елементів рядка 3 ( $Z_j$ ) від елементів рядка  $C_j$  (завжди із верхнього рядка на усіх кроках):  $5 - 0 = 5$ ;  $7 - 0 = 7$ ;  $0 - 0 = 0$ ;  $0 - 0 = 0$ .

5. Визначаємо в рядку 4 елемент, який має максимальне позитивне значення, тобто розв'язний стовпчик. У нашому випадку, в рядку 4 вибираємо елемент 7. Це означає, що відповідно розв'язним буде стовпчик  $x_2$  (рядки 1, 2).

6. У розв'язному стовпчику визначаємо число, яке має мінімальне позитивне значення за формулою:  $\left( \frac{b_i}{\text{розв'язний стовпчик}} \right) : \frac{b_i}{x_2}$ . У нашому випадку:  $100 : 4 = 25$ ;  $90 : 3 = 30$ ,  $25 < 30$ , вибираємо 25.

Застосувавши число, визначаємо розв'язний рядок (у нашому випадку рядок 1). Перетин розв'язного стовпчика і розв'язного рядка дає розв'язний (базисний) елемент (у нашому випадку 4).

7. Формуємо рядки 5, 6 шляхом ділення розв'язного (базисного) рядка на розв'язний (базисний) елемент і формуємо одиничний стовпчик на місці розв'язного. Не забуваємо і про стовпчик  $b_i$ .

Тоді у рядку 5 будемо мати:  $2 : 4 = 0,5$ ,  $4 : 4 = 1$ ;  $1 : 4 = 0,25$ ;  $0 : 4 = 0$ ;  $100 : 4 = 25$ ; а у рядку 6 відповідно:  $1,5$ ;  $0$ ;  $-0,75$ ;  $2,0$ ;  $15$ .

8. На цьому кроці послідовно отримуємо значення для 7 і 8 рядків відповідно: 7 рядок.  $7 \cdot 0,5 + 0 \cdot 1,5 = 3,5$ ;  $7 \cdot 1,0 + 0 \cdot 0 = 7$ ;  $7 \cdot 0,25 + 0 \cdot (-0,75) = 1,75$ ;  $7 \cdot 0 + 0 \cdot 1,0 = 0$ ;  $7 \cdot 25 + 0 \cdot 15 = 175$ .

8 рядок.  $5 - 3,5 = 1,5$ ;  $7 - 7 = 0$ ;  $0 - 1,75 = -1,75$ ;  $0 - 0 = 0$ .

9. Шукаємо в рядку 8 ( $C_j - Z_j$ ) елемент, який має максимальне позитивне значення. Цьому елементу буде відповідати розв'язний стовпчик (стовпчик  $x_l$  – рядки 5, 6).

Визначаємо у розв'язному стовпчику елемент, який має мінімальне позитивне значення за формулою:  $b_i : x_l$ , тобто в нашому випадку, вибираємо між:  $25 : 0,5 = 50$  та  $15 : 1,5 = 10$ ,  $50 > 10$ , приймаємо 10.

Знайшовши таке число, визначаємо розв'язний рядок. У нас – це рядок 6. Перетин розв'язного стовпчика і розв'язного рядка дає нам розв'язний елемент, тобто в нашому випадку 1,5.

Ітерації продовжуємо доти, поки в рядку ( $C_j - Z_j$ ) не залишиться позитивних елементів (умова оптимального рішення).

Аналізуючи результати в рядку 11 в стовпчику  $b_i$  отримуємо значення цільової функції в оптимальній точці  $(x, x_2) = (10, 20)$ . Значення 10 та 20 отримуємо із  $b_i$  (рядки 9, 10). Оптимальність рішення підтверджується і рядком 12, в якому відсутні позитивні значення елементів.

Таким чином, електромеханічна майстерня отримує максимальний прибуток при загальній кількості часу 190 год на тиждень за умову ремонту 10 малих і 20 великих електродвигунів.

**Задача 3.7.** Підприємство виробляє електротехнічну продукцію  $3^x$  видів ( $i = 1, 2, 3$ ) що вимагає витрати трьох видів ресурсів: енергетичних, фінансових та сировинних ( $j = 1, 2, 3$ ).

Визначити максимальний прибуток підприємства із застосуванням симплекс-методу, маючи наступні вихідні дані:

– прибуток від реалізації одного виробу 1, 2, 3 видів:  $z_1 = 8$ ;  $z_2 = 11$ ;  $z_3 = 12$  у.о/виріб;

– норми витрат електроенергії на один виріб:  $a_{11} = 2$ ;  $a_{12} = 2$ ;  $a_{13} = 3$  кВт·год/виріб;

– норми витрат фінансів на один виріб:  $a_{21} = 6$ ;  $a_{22} = 5,5$ ;  
 $a_{23} = 4$  у.о/виріб;

– норми витрат матеріалів на один виріб:  $a_{31} = 4$ ;  $a_{32} = 6$ ;  
 $a_{33} = 8$  кг/виріб

– наявність на підприємстві енергетичних, фінансових та сировинних ресурсів:  $v_1 = 50$  одиниць енергії;  $v_2 = 100$  у.о.;  
 $v_3 = 150$  одиниць сировини;

– мінімальна кількість всіх видів виробів  $v_4 = 15$ .

Рішення. У відповідності з вихідними даними цільова функція буде мати наступний вигляд:

$$z = 8x_1 + 11x_2 + 12x_3 \rightarrow \max. \quad (3.44)$$

При цьому система обмежень буде мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 50 \\ 6x_1 + 5,5x_2 + 4x_3 &\leq 100 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &\leq 150 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 150 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Вводячи додаткові змінні  $x_4, x_5, x_6$  та  $x_7$  перейдемо від обмежень-нерівностей до рівностей:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 50 \\ 6x_1 + 5,5x_2 + 4x_3 + x_5 &\leq 100 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_6 &\leq 150 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_7 &\geq 150 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Граничні умови невід'ємності змінних мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad x_6 \geq 0, \quad x_7 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

З метою отримання відповідного приймаємо в якості базисних  $x_4, x_5, x_6, x_7$ , а змінні  $x_1, x_2, x_3$  приймаємо за вільні.

Тоді на базі системи обмежень та цільової функції складаємо табл. 3.17.



Таблиця 3.17

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b, z$
2	2	3	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	50
6	5,5	4	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	100
4	6	8	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	150
-1	-1	<b>(-1)</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	-15
8	11	12	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$-z = 0$

Вихідні рішення:

- вільні змінні:  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ;
- базисні змінні:  $x_4 = 50$ ;  $x_5 = 100$ ;  $x_6 = 150$ ;  $x_7 = -15$ ;
- значення цільової функції:  $z = 0$ .

В цьому рішенні маємо від'ємну змінну  $x_7 = -15$ , що не відповідає граничним умовам і таким чином рішення не являє собою допустимо.

У зв'язку з цим рядок з від'ємним вільним членом  $b_4 = -15$  приймаємо в якості розв'язувального рядку переводимо в розряд вільних. Аналізуючи цей рядок бачимо в ньому присутність  $3^x$  від'ємних коефіцієнтів (-1). Далі обираємо своєвільно коефіцієнт -1 при змінній  $x_3$ , третій стовпчик табл. 3.17 приймаємо в якості розв'язувального, а вільну змінну  $x_3$  переводимо в базис.

Тоді згідно з табл. 3.17 розв'язувальний коефіцієнт буде знаходитися на перехресті розв'язувальних рядка та стовпчика. перерахунок всіх коефіцієнтів табл. 3.17 виконуємо відповідно правилам 1, 2, 3 п. 3.4 і отримуємо табл. 3.18, яка відповідає новому рішенню.

Таблиця 3.18. Дані розрахунків

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b, z$
-1	-1	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	3	5
2	1,5	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	4	40
-4	-2	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	8	30
1	1	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	-1	15
-4	-1	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	12	$-z = -180$

В новому рішенні маємо:

- вільні змінні:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_7 = 0$ ;
- базисні змінні:  $x_3 = 15$ ;  $x_4 = 5$ ;  $x_5 = 40$ ;  $x_6 = 30$ ;
- значення цільової функції:  $z = 180$ .

Аналізуючи ці дані бачимо, що в рішенні всі змінні не невід'ємні, тобто є допустимим, так як граничні умови виконуються.

Виконуючи перевірку на оптимальність переглядаємо всі коефіцієнти рядку функції і встановлюємо, що в ньому є один позитивний коефіцієнт, який дорівнює 12. Згідно з умовою задачі бачимо, що є можливість збільшення цільової функції. при цьому в якості розв'язувального приймаємо 7<sup>ий</sup> стовпчик, а вільну змінну  $x_7$  переводимо в базис.

Розраховуємо позитивні співвідношення вільних членів до коефіцієнтів розв'язувального стовпчика:  $5/3=1,67$ ;  $40/4=10$ ;  $30/8=3,75$  і приймаємо в якості розв'язувальної перший стовпчик., так як він має мінімальне значення (1,67).

В цьому випадку базисну змінну  $x_4$ , яка відповідає розв'язувальному рядку переводимо у розряд вільних (див. табл. 3.17) і здійснюємо перерахування усіх коефіцієнтів табл. 3.18 і отримуємо табл. 3.19, яка відповідає новому допустимому рішенню.

Таблиця 3.19. Результати розрахунків

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b, z$
-0,33	-0,33	<b>0</b>	0,33	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	1,67
3,33	(2,83)	<b>0</b>	-1,33	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	33,33
-1,33	0,67	<b>0</b>	-2,67	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	16,67
0,67	0,67	<b>1</b>	0,33	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	16,67
0	3	<b>0</b>	-4	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	-z = -200

Згідно з допустимим рішенням (табл. 3.19) маємо:

- вільні змінні:  $x_1 = x_2 = x_4 = 0$ ;
- базисні змінні  $x_3 = 16,67$ ;  $x_5 = 33,33$ ;  $x_6 = 16,67$ ;  $x_7 = 1,67$ ;
- значення цільової функції;  $z = 200$ .

У рядку цільової функції є позитивний коефіцієнт (3), що демонструє отримане рішення як не оптимальне. Із врахуванням цього, в якості розв'язувального стовпчика приймаємо другий, а вільну змінну  $x_2$  переводимо в базис.

Знову виконуємо розрахунок позитивних співвідношень вільних членів до коефіцієнтів розв'язувального стовпчика:  $33,33/2,83=11,78$ ;  $16,67/0,67=25$ ;  $16,67/0,67=25$ ;  $16,67/0,67=25$  і приймаємо в якості розв'язувального другий рядок, який має мінімальне значення (11,78).

В цьому випадку базисну змінну  $x_5$  переводимо у розряд вільних, здійснюємо перерахування усіх коефіцієнтів в табл. 3.19 і отримуємо табл. 3.20, яка відповідає новому допустимому рішенню.

Таблиця 3.20. Результати розрахунків

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$b, z$
0,06	<b>0</b>	<b>0</b>	0,17	0,12	<b>0</b>	<b>1</b>	5,59
1,18	<b>1</b>	<b>0</b>	-0,47	0,35	<b>0</b>	<b>0</b>	11,76
2,12	<b>0</b>	<b>0</b>	-2,36	0	<b>1</b>	<b>0</b>	8,82
-0,12	<b>0</b>	<b>1</b>	0,64	-0,24	<b>0</b>	<b>0</b>	8,82
-3,53	<b>0</b>	<b>0</b>	-2,59	-1,06	<b>0</b>	<b>0</b>	$-z = -235,29$

Згідно з даними табл. 3.20 допустимим рішенням є:

- вільні змінні:  $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ ;
- базисні змінні  $x_2 = 11,76$ ;  $x_3 = 8,82$ ;  $x_6 = 8,82$ ;  $x_7 = 5,59$ ;
- значення цільової функції;  $z = 235,29$ .

Враховуючи, що у рядку цільової функції всі коефіцієнти не позитивні, приймаємо рішення про припинення збільшення її, а максимальний прибуток тоді становить:  $z = 235,29$  у.о.

Враховуючи, що кількість виробів повинна бути цілочисельною результати округляємо до найближчих цілих. В цьому випадку (отримання максимального прибутку) можна зробити висновок про необхідність випуску підприємством тільки виробів 2<sup>го</sup> та 3<sup>го</sup> видів (відповідно  $x_2 = 12$ ;  $x_3 = 9$ ) і недоцільність випуску виробів 1<sup>го</sup> виду.

Такий висновок підтверджується і тим, що всі прийняті в задачі обмеження та граничні умови виконуються. Крім цього, значення додаткової змінної ( $x_7 = 5,59 \approx 6$ ) свідчить, що кількість виробів в цілому ( $12 + 9 = 21$ ) може бути збільшено на 6 виробів, що також підкреслює позитивність розрахунків.

Наведені в табл. 3.20 значення додаткових змінних ( $x_4 = 0$ ;  $x_5 = 0$ ) свідчать про повне при цьому використання відповідних фінансових та енергетичних ресурсів, а сировинний становить ( $x_6 = 8,82 \approx 9$  кг/виріб).

## ТЕМА 4. МЕТОДИ ЛІНІЙНОГО ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

### ПЛАН

4.1 Основні положення і вимоги

4.2 Застосування та приклади розв'язання задач різними методами

#### 4.1 Основні положення і вимоги

Методи лінійного цілочисельного програмування відрізняються від задач лінійного програмування, в першу чергу тим, що при побудові математичних моделей, вони в принципі аналогічні лінійним та нелінійним моделям [5, 10]. Різниця в тому, що при побудові моделей на змінні або частину їх накладається умова отримання дискретного або цілочисельного результату.

Введення додаткових обмежень щодо цілочисельності змінних у ряді випадків суттєво збільшують обсяги обчислень і ускладнюють цю процедуру при пошуку оптимального рішення. Система обчислень доповнюється при цьому обмеженнями типу:  $x_k$  – ціле,  $k = 1, 2, \dots, l$ , де  $l$  – кількість цілочисельних змінних,  $n$  – загальна кількість змінних, а  $l \leq n$ .

Так, при вирішенні задач формування виробничої програми з випуску продукції, режимів роботи із стандартними значеннями необхідно, щоб значення змінних  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , які отримуються в результаті розв'язання задачі, були цілими числами тому, що вони визначають конкретну кількість виробів, кількість обладнання та ін.

Розрізняють дві різновидності моделей: задачі з неподільністю і задачі з булевими змінними.

До перших належать моделі задач, в яких шукані величини є фізичними неподільними об'єктами (кількість трансформаторів, компенсуючих пристроїв, технологічних процесів, обладнання тощо). Моделі з булевими змінними (змінні приймають лише два значення "0" або "1") охоплюють різноманітні оптимізаційні задачі, як, наприклад комбінаторні задачі, за допомогою введених булевих змінних приводяться до лінійних моделей.

Існують різні методи розв'язання цілочисельних оптимізаційних задач: графічний, метод відтинання, комбінаторні методи, серед яких найвідоміший – метод віток і границь, який і базується на переборі допустимих рішень, що обумовлює скорочення обсягів обчислень.

Нижче наводяться приклади розв'язання задач із використанням методу відтинання (метод Гоморі).

## 4.2 Застосування та приклади розв'язання задач різними методами лінійного цілочисельного програмування

### 4.2.1 Комбінаторні методи. Метод віток і границь

Серед комбінаторних найвідомішим є метод віток і границь. Він належить до вирішення задач лінійного програмування, на які теж накладаються умови цілочисельності, тобто в яких шукані величини являють собою неподільні фізичні об'єкти.

Цей метод базується на розв'язанні двох підзадач із використанням розбивання множини допустимих розв'язків та відкидання відповідей (рішень), які не мають цілочисельних розв'язків.

Застосування методу розглянемо, скориставшись такою умовою: необхідно визначити  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , для яких цільова функція має вигляд:

$$y = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$\text{при обмеженнях: } \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.2)$$

$$0 \leq X_j \leq a_j, \quad j = \overline{1, n}; \quad (4.3)$$

$$X_j - \text{цілі числа.} \quad (4.4)$$

Рішення подібних задач здійснюється за таким алгоритмом:

1. Розв'язання починаємо без урахування умови цілочисельності. Число  $y^*$  (4.1) називається *рекордом* і приймається:  $y^* = -\infty$ . За умову:  $X = (X_1, \dots, X_n)$  і відповідному значенні цільової функції  $y = y(X)$  може бути досягнуто оптимальний розв'язок. За умову:  $X_j$  і  $j \in I$  цілочисельні, задача вважається розв'язаною. У випадку, коли ця умова не виконується, тобто маємо нецілочисельний розв'язок, задача оголошується кандидатом, а  $y$  – максимальною (верхньою) границею. Така задача (кандидат) позначається  $A_j$  і розглядається на етапі 2.

2. Нехай  $A_j$   $i = \overline{1, m}$  – задачі-кандидати,  $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, \dots, X_n^{(i)})$  – відповідні оптимальні розв'язки (без умови цілочисельності), а  $y_i = y(X^{(i)})$  – відповідні верхні границі для шуканого максимуму.

Після аналізу розв'язків залишаємо тільки ті, які задовольняють умові  $y_i \geq y^*$ .

Здійснюємо вибір задачі  $A_i$  з максимальним  $y$  і розбиваємо її на дві підзадачі максимізації функції  $y$  із врахуванням прийнятих обмежень і відповідних додаткових умов:

$$X_{io} \leq \lfloor X_{jo}^{(i_0)} \rfloor \text{ або } X_{io} \geq \lfloor X_{jo}^{(i_0)} \rfloor + 1, \quad (4.5)$$

де  $j \in I$  – номер компоненти  $X^{(i_0)} = (X_1^{(i_0)}, \dots, X_n^{(i_0)})$ , значення якої не є цілочисельним.

Після цього маємо дві задачі – кандидати  $A_{io}^1$  і  $A_{io}^2$ .

3. Розв'язуємо задачу  $A_{io}^1$ . За умову відсутності допустимого розв'язку вона в подальшому не розглядається. Допустимо, що задача має оптимальний розв'язок  $x'$  і  $y^1 = y(x')$ , тобто значення цільової функції максимальне. В цьому випадку  $y^1$  порівнюється з результатом і при  $y^1 \leq y^*$  задача в подальшому не розглядається. Допустимо, що  $y^1 \geq y^*$ . В цьому випадку, якщо  $x'$  задовольняє умові цілочисельності, рекордуві присвоюється значення  $y^1$ , тобто тепер  $y^* = y^1$ . Цей розв'язок запам'ятовується. Якщо  $x'$  не задовольняє умові цілочисельності, задача  $A_{io}^1$  із значенням  $y^1$  оголошується кандидатом.

4. На цьому етапі розв'язується задача  $A_{io}^2$  із виконанням дій за п. 3.

5. Здійснюється перехід до п. 2, який і повинен обумовити оптимальний розв'язок задачі згідно з умовою (4.1), тобто отримання максимального цілочисельного значення цільової функції  $y$ .

Прикладом застосування методу віток і границь є задача 4.1.

*Задача 4.1.* У майстерні з ремонту сільгосптехніки мийка та очистка вузлів двигунів від масла та бруду здійснюється в ультразвуковій ванні ємністю  $560 \text{ дм}^3$ , яка працює на магнітострикційних перетворювачах типу ПМС-6М. Для прискорення процесу у ванну одночасно занурюють 2 типа вузлів, які відповідно мають 50 і 30 кг та об'єм 70 і  $100 \text{ дм}^3$ . Допустиме навантаження на ванну становить 300 кг. Прибуток від обробки кожного з вузлів становить відповідно 2 та 3 у.о. Необхідно завантажувати ванну 2 типами вузлів таким чином, щоб мати від обробки максимальний прибуток.

Позначимо через  $x_1$  і  $x_2$  кількість вузлів першого та другого типу, які необхідно завантажувати в ультразвукову ванну.

Тоді рішення задачі полягає у максимізації цільової функції через загальний прибуток від обробки вузлів:

$$y = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad (4.6)$$

при обмеженнях значень на вагу та об'єм цих вузлів:

$$50x_1 + 30x_2 \leq 300;$$

$$70x_1 + 100x_2 < 560, \quad (4.7)$$

$$\text{де } x_1, x_2 = \overline{1, n}; x_j - \text{цілі числа.} \quad (4.8)$$

Розв'язання задачі здійснюємо згідно з наведеним вище алгоритмом:

1. Розв'язуємо задачу без умови цілочисельності шляхом визначення оптимального рішення: в другому рівнянні системи (4.7) приймаємо  $x_1 = 0$ , тоді  $x_2 = 5\frac{3}{5}$ , а  $y = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 5\frac{3}{5} = 16\frac{4}{5}$ . Отриманий результат не є цілочисельний, що вимагає оголосити цю задачу кандидатом (позначення  $AI$ , рис. 4.1).

Подальше розв'язання також здійснюється згідно з наведеним алгоритмом і складається з послідовних кроків, на кожному з яких аналізують задачі – кандидати, для однієї з яких здійснюється розподіл на дві підзадачі (вітки, границі).

2. Здійснюємо розподіл задачі  $AI$  на дві підзадачі  $AI^I$ ,  $AI^{II}$  з обмеженнями по  $x_2$  ( $x_2 \leq 5$ ;  $x_2 \geq 6$ , рис. 4.1). У результаті рішення другого рівняння системи (3.34) відповідно при  $x_2 = 5$  та  $x_2 = 6$  маємо оптимальний розв'язок для задачі  $AI^I - x^I(6\frac{6}{7}; 5)$ , а  $y^I = 16\frac{5}{7}$ . Підзадача  $AI^{II}$  при  $x_2 = 6$  не задовольняє умові:  $y^I = 18 > 16\frac{5}{7}$  і далі виключається з подальшого розгляду.

3. Задачею-кандидатом буде  $AI^I$  з максимальним значенням цільової функції  $y^I = 16\frac{5}{7}$ .

4. Здійснюємо розподіл задачі  $AI^I$  на дві підзадачі  $AI^{Ia}$ ,  $AI^{IIa}$  з обмеженнями по  $x_1$  ( $x_1 \geq 1$ ,  $x_1 \leq 0$ , рис. 4.1). У результаті аналогічних рішень (за п. 2) маємо оптимальний розв'язок для підзадачі  $AI^{IIa} - x^{IIa}(0; 5)$ , а  $y_{11}^* = 15$ . Підзадача  $AI^{Ia}$  має оптимальний розв'язок –  $x^{Ia}(1; 4\frac{9}{10})$ , а  $y^{Ia} = 16\frac{7}{10}$ . Враховуючи, що  $y^{Ia} > y_{11}^*$  і розв'язок нецілочисельний, підзадача  $AI^{Ia}$  оголошується задачею-кандидатом.

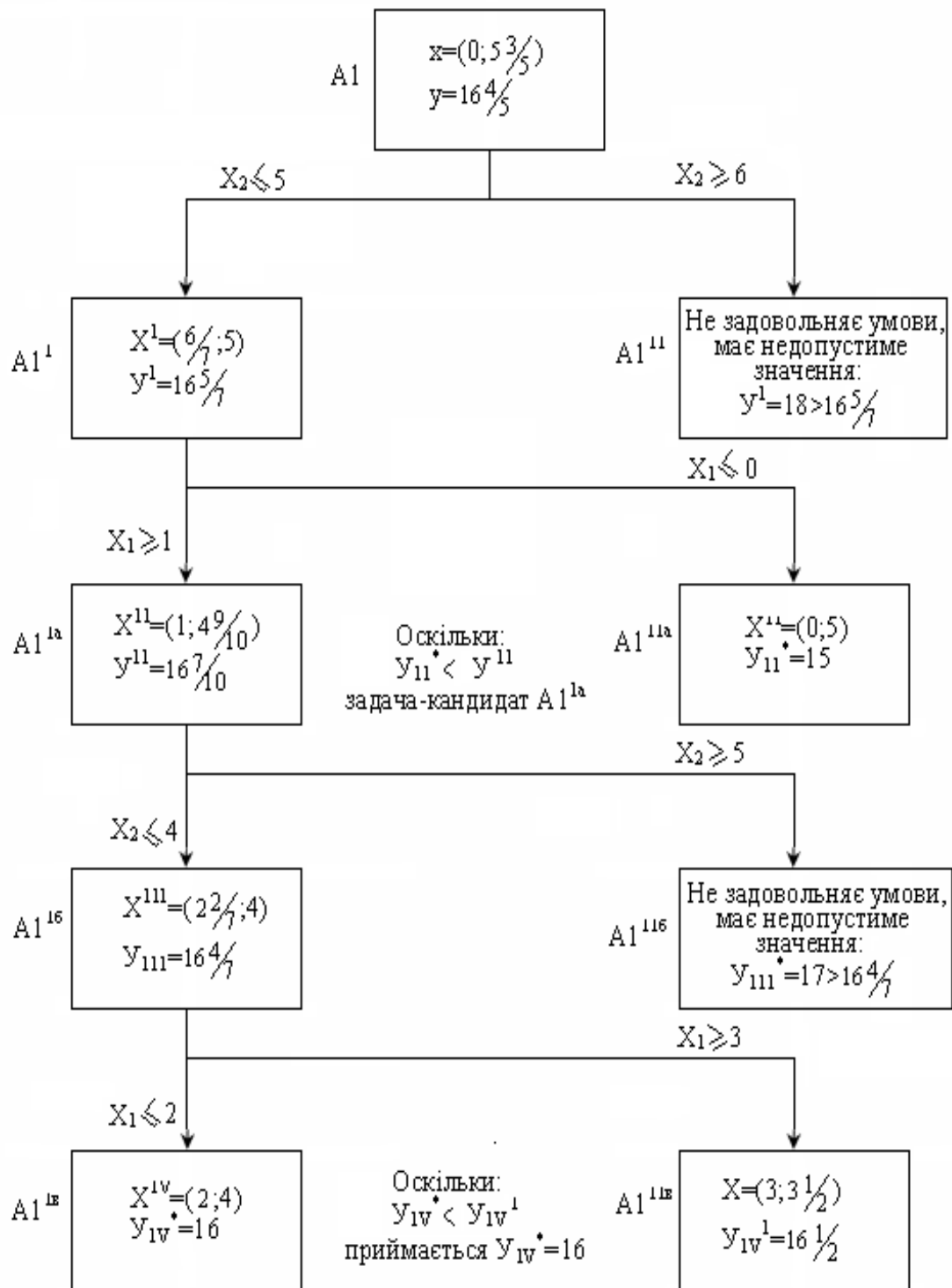


Рис. 4.1. Рішення задачі на базі використання дерева підзадач для методу віток і границь

5. Здійснюємо розподіл  $A1^{Ia}$  на дві підзадачі  $A1^{Ib}$ ,  $A1^{IIIa}$  з обмеженнями:  $A1^{Ib} - x_1 \geq 1, x_2 \leq 4$  та  $A1^{IIIa} - x_1 \geq 1, x_2 \geq 5$ . Підзадача  $A1^{Ib}$  має оптимальний розв'язок -  $x^{Ib} (2 \frac{2}{7}, 4)$ , а  $y^{Ib} = 16 \frac{4}{7}$  і хоча має



нецілочисельний розв'язок, але  $y''' \geq y''(16 \frac{4}{7} \geq 15)$ , тому надалі розглядається як задача-кандидат. Підзадача  $AI^{116}$  виключається з подальшого розгляду тому, що вона не розв'язана на множині цілочисельних змінних.

б. Здійснюємо розподіл  $AI^{16}$  на дві підзадачі  $AI^{16}$ ,  $AI^{116}$  з обмеженнями по  $x_1 \geq 1$ ,  $x_2 \leq 4$  і додатковими умовами  $x_1 \geq 3$ ,  $x_1 \leq 2$ . Підзадача  $AI^{16}$  має оптимальний розв'язок –  $x^{IV} = (2; 4)$ , а  $y_{IV}^* = 16$ . Крім цього ознакою оптимальності рішення є не тільки цілочисельність, а і умова:  $y_{IV}^* \geq y''(16 \geq 15)$ . Підзадача  $AI^{116}$  цим умовам не відповідає, тому що  $y'_{IV}$  не може перевищувати  $y_{IV}^*$ .

Таким чином, значення  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 4$  є оптимальними, а  $y = 16$ , що вимагає завантаження ванни 2 вузлами першого типу і 4 другого та обумовлює максимальний прибуток – 16 у.о.

#### **4.2.2 Метод відтинання та приклади розв'язання задач**

Значне місце серед методів лінійного цілочисельного програмування займає метод відтинання, назва якого пов'язана з тим, що додаткові обмеження, які вводять, відтинають деяку частину множини допустимих рішень, в яких відсутні точки з цілочисельними координатами.

Спочатку задача вирішується без умови цілочисельності. У випадку, коли розв'язок не є цілочисельним, тоді від розв'язання задачі лінійного програмування переходить до нової допоміжної задачі шляхом приєднання лінійного обмеження, яке б задовольняло ці цілочисельні розв'язки, але не задовольняє нецілочисельний розв'язок початкової задачі, якій було отримано.

Це додаткове лінійне обмеження визначає деяку відтинаючу площину і носить назву "правильний відтин". Приєднання нових правильних відтинів до початкової допоміжної задачі лінійного програмування здійснюється доти, поки на деякому кроці не буде отримано цілочисельний розв'язок допоміжної задачі, що і буде являти оптимальний розв'язок.

Таким чином, метод відтинання складається з декількох етапів, на кожному з яких використовується процедура симплексного методу. На кожному етапі розв'язується задача лінійного програмування, що одержується з попередньої шляхом її поширювання за рахунок введення в систему обмежень додаткової нерівності, яка має назву її автора – нерівність Р. Гоморі, який і запропонував алгоритм розв'язання такої задачі.

У загальному вигляді задача цілочисельного програмування має вигляд:

$$W = \sum_{j=1}^n C_j \cdot X_j \rightarrow \text{extr}(\text{max}/\text{min}); \quad (4.9)$$

при обмеженнях: 
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot X_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad (4.10)$$

$$X_j \geq 0; \quad j = \overline{1, n}; \quad (4.11)$$

$$X_j - \text{цілі числа}. \quad (4.12)$$

Нерівність Гоморі, складена до рівняння (4.17), має вигляд:

$$\sum_{j=1}^n \{a_j\} X_j \geq \{b_k\}. \quad (4.13)$$

Для вирішення (4.13) для всіх коефіцієнтів  $a_{ij}$  та вільного члена  $b$  необхідно обчислити дробові частини, а рівність поміняти на нерівність.

Позначення  $\{a_j\}$  в (4.13) означає дробову частину цілого числа  $a$ , тобто різницю між числом  $a$  та найбільшим числом, що не перевищує  $a$ . Наприклад,  $\{5,3\} = 5,3 - 5 = 0,3$ ;  $\{-3,4\} = -3,4 - (-3) = 0,6$ ;  $\{-2,25\} = -3 + 0,75 = 0,75$ . Треба пам'ятати, що дробова частина числа завжди являє невід'ємну дроб.

Алгоритм розв'язку задачі цілочисельного лінійного програмування має такі етапи:

1. Із застосуванням симплекс-методу вирішується задача лінійного програмування (4.9 – 4.11). у випадку, коли рішення задовольняє умову цілочисельності, воно є оптимальним для початкової задачі (4.9 – 4.11). У випадку відсутності рішень (4.9 – 4.11) початкова задача вважається нерозв'язаною. У випадку, коли задача не задовольняє умовам цілочисельності переходимо до наступного етапу.

2. Серед нецілих компонент оптимального рішення задачі лінійного програмування необхідно вибрати компоненту з найбільшою дробовою частиною і по відповідному рядку стандартної симплексної таблиці (табл. 3.3) з оптимальним рішенням задачі лінійного програмування побудувати обмеження (4.13) – нерівність Гоморі.

3. На цьому етапі нерівність (4.13) перетворюємо в рівність шляхом введення додаткової невід'ємної змінної та наступного додаткового введення її в стандартну симплексну таблицю з оптимальним нецілочисельним рішенням задачі.

4. Знову продовжуємо рішення задачі лінійного програмування із застосуванням симплекс-методу. У випадку рішення, яке задовольняє умову цілочисельності, вважаємо задачу розв'язаною. В протилежному випадку повертаємося до п. 2, і продовжуємо процедуру до отримання розв'язку в цілих числах.

Нижче наводяться приклади розв'язання задач із використанням методу відтинання (метод Гоморі).

#### Задача 4.2.

$$L(x) = -2x_1 + x_2 \rightarrow \min. \quad (4.14)$$

при обмеженнях:

$$-x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 8,$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6,$$

$$x_j \geq 0, \quad x_j - \text{ціле} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

Розв'язання. Зводимо задачу лінійного програмування до цілочисельної. При цьому вводимо додаткові змінні  $x_3, x_4, x_5 \geq 0$  і розв'язуємо задачу із застосуванням симплекс-методом (табл. 4.1).

Таблиця 4.1. Результати розв'язання задачі

$x_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$b$
$x_3$	-1	1	1	0	0	3
$x_4$	6	7	0	1	0	8
$x_5$	2	-3	0	0	1	6
$\Delta$	-2	1	0	0	0	0
$x_3$	0	13/6=2,17	1	1/6=0,17	0	26/6=4,33
$x_1$	1	7/6=1,17	0	1/6=0,17	0	8/6=1,33
$x_5$	0	-32/6=-5,33	0	-2/6=-0,33	1	20/6=3,33
$\Delta$	0	20/6=3,33	0	2/6=0,33	0	16/6=2,67

Згідно з даних табл. 4.1 її оптимальний розв'язок:  $x = 8/6, 26/6, 20/6$  (стовпчик  $b$ ) не є цілочисельним. Тому згідно алгоритму за

другим напрямом обмеження допоміжної задачі лінійного програмування будемо мати:

$$x_1 + 1,17x_2 + 0,17x_4 = 1,33. \quad (4.15)$$

Вводимо додаткову змінну  $x_6$  і будуємо наступний відтин, що визначається співвідношеннями по алгоритму Гоморі:

$$-0,17x_2 - 1,17x_2 + 0,17x_4 = 1,33, \quad x_6 \geq 0 \quad (4.16)$$

Перетворюємо табл. 4.1 в повну (табл. 4.2), поширюючи її на один рядок і стовпчик, що відповідає додатковому обмеженню і розв'язуємо її двоїстим симплекс-методом.

Таблиця 4.2. Повна таблиця рішення

$x_{\text{баз}}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$b$
$x_3$	1	13/6=2,17	1	1/6=0,17	0	0	26/6=4,33
$x_1$	0	7/6=1,17	0	1/6=0,17	0	0	8/6=1,33
$x_5$	0	-32/6=-5,33	0	-2/6=-0,33	1	0	20/6=3,33
$x_6$	0	-1/6=-0,17	0	-1/6=-0,17	0	1	-2/6=-0,33
$\Delta$	0	20/6=3,33	0	2/6=0,33	0	0	16/6=2,67
$x_3$	1	2	1	0	0	1	4
$x_1$		1	0	0	0	1	1
$x_5$		-5	0	0	1	-2	4
$x_4$		1	0	1	0	-6	2
$\Delta$		3	0	0	0	2	2

Аналіз табл. 4.2 демонструє тим, що одержимо оптимальний цілочисельний розвиток, де  $x^* \geq (1,0)$ ,  $L(x)$ .

*Задача 4.3.* Для лабораторних робіт прийнято рішення використати залишки мідного проводу ПВ2, які утворилися після електромонтажних робіт. 3 кусків проводу довжиною 200 см необхідно виготовити певну кількість (44 шт.) з'єднувальних провідників (кінців): 25 шт довжиною 60 см та 19 шт довжиною 90 см шляхом застосування трьох способів нарізки (табл. 4.3) так, щоб витратити мінімальну кількість кусків проводу ПВ2.

4.3. Зміна кількості кусків проводу від довжини і способу нарізки

Необхідна довжина, см	Спосіб нарізки проводу			Необхідна кількість, шт
	1	2	3	
60	3	1	0	25
90	0	1	2	19
$\sum 180\text{см}$ $\sum 150\text{см}$ $\sum 180\text{см}$				$\sum 44\text{шт}$

Задача вирішується з використанням методу відтинання.

$$W = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min; \quad (4.17)$$

при обмеженнях:  $3x_1 + x_2 \geq 25$ ;

$$x_2 + 2x_3 \geq 19; \quad (4.18)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0;$$

$x_1; x_2; x_3$  – цілі числа.

Розв'язання здійснюємо симплексним методом, але на першому етапі без умови цілочисельності. У зв'язку з цим, у систему обмежень вводимо цілочисельні невід'ємні балансові змінні.

Спростивши рівняння (4.18), шляхом ділення першого на 3, а другого на 2, переходимо (згідно з наведеним вище алгоритмом) від задачі на мінімум до задачі на максимум цільової функції ( $-W$ ) і складаємо на базі цього стандартну симплексну таблицю (табл. 4.4.)

4.4. Стандартна симплексна таблиця

$C_j$	Базисні змінні	-1	-1	-1	0	0	$b_i$
		Вільні змінні					
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
-1	$x_1$	1	1/3	0	-1/3	0	$8\frac{1}{3}$
-1	$x_3$	0	1/2	1	0	-1/2	$9\frac{1}{2}$
	$W$	0	1/6	0	1/3	1/2	$-17\frac{5}{6}$

Оптимальний розв'язок буде:  $x_1 = 8\frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 9\frac{1}{2}$ . Отримані результати не є цілочисельні, тому з табл. 4.4 складаємо систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 &= 8\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}x_2 + x_3 - \frac{1}{2}x_5 &= 9\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

Згідно з алгоритмом до рівняння з максимальною дробовою частиною (друге рівняння) утворюємо нерівність Гоморі:  $\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 \geq \frac{1}{2}$ , яке за допомогою балансової змінної  $x_6$  перетворюємо на рівність:  $\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_5 - x_6 = \frac{1}{2}$  і додаємо до системи обмежень.

Задачу, яку ми отримали, розв'язуємо знову із використанням симплекс-методу і табл. 4.5.

#### 4.5. Симплекс-таблиця

$C_j$	Базисні змінні	-1	-1	-1	0	0	0	$b_i$
		Вільні змінні						
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	
-1	$x_1$	1	1/3	0	-1/3	0	0	$8\frac{1}{3}$
-1	$x_3$	0	1/2	1	0	-1/2	0	$9\frac{1}{2}$
-	$U$	0	1/2	0	0	1/2	-1	1/2
	$W$	0	-1/2	0	0	-1/2	1	
-1	$x_1$	1	0	0	-1/3	-1/3	2/3	8
-1	$x_3$	0	0	1	0	-1	1	9
-1	$x_2$	0	1	0	0	1	-2	1
	$W$	0	0	0	1/3	1/3	1/3	-18

Оптимальний розв'язок буде:  $x_1 = 8$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 9$ , тому, що всі необхідні (згідно із алгоритмом методу відтинання) компоненти цілочисельні.

Таким чином, відповідь така: найменша кількість кусків проводу  $W = 18$  шт, 8 кусків треба нарізати першим, 1 – другим і 9 кусків третім способом.

#### 4.2.3 Методи календарного планування та приклади розв'язання задач

Значне місце в енергетиці аграрного виробництва займають задачі щодо визначення оптимального порядку та послідовності виконання різних операцій з електромонтажних робіт, виготовлення

деталей та електрообладнання, визначення мінімального часу простоювання обладнання, зменшення енерговитрат, відхилення від графіка випуску продукції тощо [5].

Розв'язання таких задач здійснюється із застосуванням методу календарного планування.

Математична інтерпретація задач календарного планування, наприклад для визначення оптимального (мінімального) часу виготовлення та порядку запуску в обробку (технологічний маршрут) множини деталей, вузлів ( $m$ ) на деякій кількості верстатів ( $n$ ) різного призначення повинна враховувати такі обмеження.

1. Для кожної деталі (вузла) обробка на другому верстаті ( $j$ ) повинна починатися не раніше, ніж закінчиться обробка на першому верстаті ( $j-1$ ):

$$t_{ij} \geq \overline{t_{ij-1}} \quad (4.20)$$

2. На кожному верстаті одночасно може оброблятися тільки одна деталь (вузол).

3. Початок обробки деталі (вузла) не переривається до повного її завершення:

$$\overline{t_{ij}} = \underline{t_{ij}} + \underline{t_{ij}}, \quad (4.21)$$

де  $\overline{t_{ij}}$  – час закінчення обробки  $i^i$  деталі (вузла) на  $j^{\text{му}}$  верстаті;  $\underline{t_{ij}}$  – час обробки  $i^i$  деталі (вузла) на  $j^{\text{му}}$  верстаті;  $\underline{t_{ij}}$  – час початку обробки  $i^i$  деталі (вузла) на  $j^{\text{му}}$  верстаті.

Крім цього, обробка повинна враховувати і такі правила:

– у першу чергу, необхідно обробляти деталі, тривалість обробки яких на першому верстаті мінімальна;

– обробляти раніше деталі, тривалість обробки яких на останньому верстаті максимальна;

– раніше обробляти деталі, для яких вузьким місцем вважається найдовша обробка на верстаті і воно знаходиться якомога далі від початку обробки.

Найвідомішою задачею календарного планування є задача С. Джонсона, яку він розв'язав в 1953 році, наприклад для двох верстатів, розв'язання якої здійснюється згідно з таким алгоритмом.

1. Вибирають мінімальну тривалість обробки ( $t_{ij}$ ) відповідно для першого і другого верстатів ( $t_{j1}$   $t_{j2}$ ).

2. У випадку, коли тривалість обробки деталі належить до першого верстата ( $t_{i1}$ ), її обробляти необхідно першою. Коли мінімальна тривалість виявляється на другому верстаті ( $t_{i2}$ ), то відповідну деталь треба обробляти останньою.

3. Виключають вибрану деталь та відповідні величини ( $t_{ij}$ ) з подальшого розгляду і починають дії за п.п. 1 – 2 до деталей, які залишилися.

4. У випадку, коли тривалість обробки деталі ( $t_{i1}$ ), деталь розташовується після попередньої групи, якщо  $t_{j2}$ , то перед кінцевою.

5. За наявності декількох мінімальних значень послідовність обробки деталей відбувається згідно з меншим порядковим номером.

Впорядкування деталей у випадку  $t_{i1} = t_{j2}$  здійснюється за величиною  $t_{il}$ .

*Задача 4.4.* У майстерні по ремонту електрообладнання сільськогосподарського призначення на двох токарно-гвинторізних верстатах моделі 16K20 обробляються 5 видів деталей. Визначити оптимальний порядок запуску в обробку цих деталей, коли час обробки їх становить відповідно доданих (табл. 4.6).

#### 4.6. Час обробки на різних верстатах

Верстат	Час обробки деталі, хв. ( $t_{i,j}$ )				
	1	2	3	4	5
№ 1	7	2	1	3	7
№ 2	3	1	2	6	4

Розв'язання полягає в оптимізації порядку запуску в обробку  $m$  деталей ( $m = 5$ ), що обробляються послідовно на двох верстатах за критерієм мінімального сумарного часу на обробку ( $\sum_{i=1}^m t_i \rightarrow \min$ ) та найменших витрат електроенергії. В цьому випадку всі деталі умовно поділяємо на дві групи.

До першої групи належать деталі, час обробки яких  $t_{i,j}$  на першому верстаті не перевищує часу обробки на другому:  $t_{i1} \leq t_{i2}$ , і



$\in \overline{1, m}$ . Тоді для першої групи маємо деталі 3, 4. До другої групи належать всі інші, тобто 1, 2, 5.

У такій послідовності і починають обробку деталей, враховуючи умову в порядку збільшення тривалості на верстаті № 1, а потім умову зменшення часу їх обробки на верстаті № 2, тобто:

$$t_{i_1}^1 \leq t_{i_1}^2 \leq t_{i_1}^3 \leq \dots; t_{i_2}^{m-2} \geq t_{i_2}^{m-1} \geq t_{i_2}^m, i \in \overline{1, m}. \quad (4.22)$$

Тоді згідно із наведеними умовами (4.22) та результатами оптимальною послідовністю буде такий порядок: 3, 4, 5, 1, 2 із загальним часом обробки на першому верстаті 20 хв, відповідно на другому верстаті – 22 хв.

Загальний час простою другого верстата 6 хв, відповідно по 1 хв перед обробкою 3<sup>i</sup>, 4<sup>i</sup>, 5<sup>i</sup> деталі і 3 хв перед обробкою 1<sup>i</sup> деталі. Це підтверджує відповідний графік календарного планування (рис. 4.2), який побудовано згідно з наведеними вище правилами та обмеженнями.

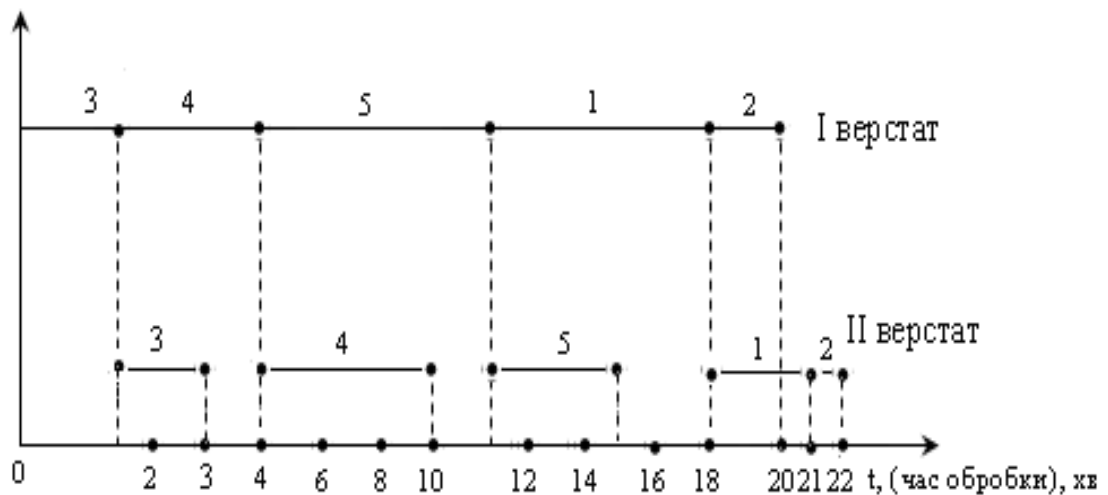


Рис. 4.2. Графік календарного планування роботи двох верстатів (згідно прикладу)

#### 4.2.4 Методи цілочисельного програмування та приклади розв'язання задач із застосування двоїчних та дискретних змінних

При вирішенні цілочисельних задач в окремих випадках шукані змінні можуть приймати не будь-які цілі значення, а тільки одне з двох: або 0, або 1. Такі змінні мають назву *двоїчні* або *булеві* і знаходять застосування в задачах при виборі оптимального рішення (варіанта) з деякого числа заданих рішень. У випадку, коли варіант

входить в оптимальне рішення, то двоїчна змінна відповідає йому і дорівнює 1, а коли не входить – дорівнює нулю.

Так, лінія електропередачі входить або не входить у склад оптимальної електричної мережі. Тоді двоїчні змінні відповідно будуть дорівнювати 1 та 0. Наведений приклад показує, що застосування двоїчних (бульових) змінних дозволяє покласти на відповідні задачі цілу низку логічних умов, які наводяться нижче.

В умовах, коли в оптимальне рішення входить один з двох ( $i$  або  $j$ ) варіантів, то сума змінних на відміну від традиційних  $x_i$  записується:

$$\delta_i + \delta_j = 1 \quad (4.23)$$

де  $\delta_i, \delta_j$  – двоїчні змінні,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

За умову входження в оптимальне рішення двох варіантів ( $i^{\text{й}}$  та  $j^{\text{й}}$ ) сума змінних буде:

$$\delta_i + \delta_j = 2. \quad (4.24)$$

За умову входження або невходження кожного з двох варіантів ( $i$  та  $j$ ) сума змінних буде:

$$\delta_i + \delta_j \geq 0. \quad (4.25)$$

За умову входження (невходження) в оптимальне рішення  $i^{\text{го}}$  варіанта в це рішення повинен ввійти або ні і  $j^{\text{й}}$  варіант. Така умова має такий вигляд:

$$\delta_i = \delta_j. \quad (4.26)$$

Треба зауважити, що така ідеологія розповсюджується і на  $n$  можливих варіантів на випадок входження в оптимальне рішення тільки  $m$  варіантів ( $m < n$ ) і має такий вигляд:

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = m. \quad (4.27)$$

Аналізуючи (4.27) можна стверджувати, що застосування двоїчних змінних має не обмежену кількість логічних умов типу "коли..., то".

Приклад розв'язання оптимізаційної задачі із застосуванням двоїчних змінних наведено нижче.

До задач, які вимагають вибору варіантів з числа заданих застосовують і методи дискретного програмування, тобто методи в



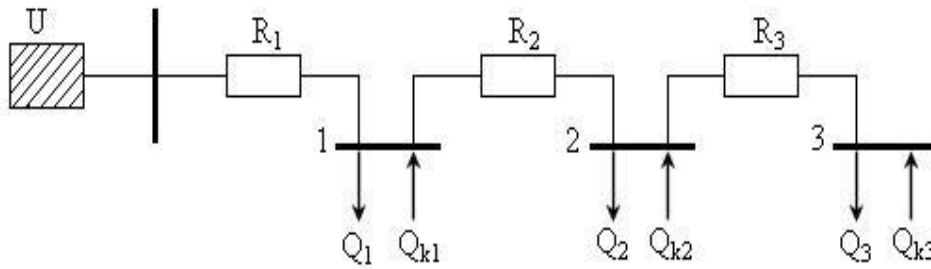


Рис. 4.3. Схема електропостачання

Для розв'язання задачі використовуємо метод двоїчних змінних.

У схемі, яка розглядається, є три вузли 1, 2, 3, у кожному з яких можна встановити компенсуючий пристрій. Позначимо змінними  $Q_{k1}$ ,  $Q_{k2}$ ,  $Q_{k3}$  потужності компенсуючих пристроїв, які розміщені відповідно в вузлах 1, 2 і 3. Це дискретні змінні, кожна з яких може приймати два значення 0 або 750 кВар.

Кожній змінній  $Q_{k1}$ ,  $Q_{k2}$ ,  $Q_{k3}$  поставимо відповідно двоїчну змінну  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ .

Цільова функція, яка являє собою втрати потужності в схемі, буде мати такий вигляд:

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k_1} \cdot \delta_1 - Q_{k_2} \cdot \delta_2 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 + a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{k_2} \cdot \delta_2 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 + a_3(Q_3 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 \rightarrow \min,$$

$$\text{де } a_i = R_i/U^2, (i = 1, 2, 3).$$

Підставивши значення  $R$ ,  $U$ , отримаємо:

$$a_1 = R_1/U^2 = 2 \cdot 10^{-9}; a_2 = R_2/U^2 = 3 \cdot 10^{-9}, a_3 = R_3/U^2 = 4 \cdot 10^{-9}.$$

$$\Delta P = 2 \cdot 10^{-9}(400000 + 300000 + 200000 - Q_{k_1} \cdot \delta_1 - Q_{k_2} \cdot \delta_2 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 + 3 \cdot 10^{-9}(300000 + 200000 - Q_{k_2} \cdot \delta_2 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 + 4 \cdot 10^{-9}(200000 - Q_{k_3} \cdot \delta_3)^2 = 2530 \text{ Вт.}$$

Вираз для втрат потужності передбачає можливість встановлення компенсуючого пристрою в одному з трьох вузлів. Однак залежно від двоїчної змінної компенсуючий пристрій у вузлі  $i$  повинен бути встановлений при  $\delta_i = 1$  або не повинен бути встановлений при  $\delta_i = 0$ .

Перейдемо до системи обмежень. Оскільки компенсуючий пристрій може бути встановлений лише в одному вузлі, сума двоїчних змінних повинна бути рівна 1.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1.$$

$\delta_1, \delta_2, \delta_3$  – двоїчні змінні.

Відповідно до виразу цільової функції мінімальні втрати активної потужності в схемі електропостачання при обмеженні сумарної потужності компенсуючих пристроїв величиною 750 кВар будуть у вузлі 1.

$$\begin{aligned} \Delta P = & 2 \cdot 10^{-9}(400000 + 300000 + 200000 - 750000 - 0 - 0)^2 + \\ & + 3 \cdot 10^{-9}(300000 + 200000 - 0 - 0)^2 + 4 \cdot 10^{-9}(200000 - 0)^2 = 955 \text{ Вт} \end{aligned}$$

Величина дискретної змінної  $Q_{kl}$  буде залежати від значення відповідної змінної  $\delta_i$ . Змінна  $Q_{ki} = Q_k$  при  $\delta_i = 1$  і  $Q_{kl} = 0$  при  $\delta_i = 0$ . Запишемо ці умови:

$$Q_{k1} = Q_k \delta_1; \quad Q_{k2} = Q_k \delta_2; \quad Q_{k3} = Q_k \delta_3.$$

Граничні умови не записуємо, оскільки маємо лише двоїчні і дискретні змінні.

Висновок: Таким чином, для забезпечення мінімальних втрат потужності в цій схемі електропостачання компенсуючий пристрій потужністю 750 квар потрібно встановити у вузлі 1.

Ця та ряд інших задач, які наведені нижче можна вирішувати із застосуванням програмного забезпечення *Excel 7.0* [9]. У цьому випадку послідовність операцій буде такою:

1. Розміщення коментарів і вихідної інформації в клітинки робочого поля.

2. Виклик з головного меню МЛ команди "Сервіс", зі змісту цієї команди викликати МЛ команду "Пошук рішення", на екрані з'являється діалогове вікно "Пошук рішення", в яке і вводять вихідну інформацію (адреса клітинки цільової функції, вид екстремуму цільової функції, адреса клітинок шуканих змінних, обмеження).

3. Активується МЛ команда "Параметри", автоматично розкривається діалогове вікно "Параметри пошуку рішення", в яке вводиться інформація алгоритму пошуку рішення та активується МЛ клавіша "ОК", автоматично здійснюється повернення до діалогового вікна "Пошук рішення".

4. Отримання рішення. У вікні "Пошук рішення" активується МЛ клавіша "Виконати", комп'ютер виконує розрахунки, у клітинках робочого поля з'являються результати розв'язання, відкривається діалогове вікно "Результати пошуку рішення".

*Задача 4.6.* Умова: скласти математичну модель для визначення оптимальної потужності компенсуючого пристрою в вузлі 2 схеми електропостачання (рис. 4.3). Критерій оптимальності – мінімум втрат активної потужності.

Вихідні дані:

$$U = 10 \text{ кВ};$$

$$R_1 = 0,4 \text{ Ом}; R_2 = 0,2 \text{ Ом}; R_3 = 0,6 \text{ Ом};$$

$$Q_1 = 600 \text{ кВар}; Q_2 = 500 \text{ кВар}; Q_3 = 400 \text{ кВ.}$$

Потужність компенсуючого пристрою може приймати такі дискретні значення: 1100 кВар; 1200 кВар; 1300 кВар.

Розв'язок. Аналізуючи умову, робимо висновок, що задача має одну дискретну змінну – потужність компенсуючого пристрою у другому вузлі. Згідно з умовою вона може приймати 3 дискретних значення:  $Q_{k1} = 1100$ ;  $Q_{k2} = 1200$ ;  $Q_{k3} = 1300$  кВар, що згідно з методами дискретного програмування може для кожного значення мати відповідно двоїчні значення  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ .

На базі таких умов, цільова функція (математична модель), яка являє собою втрати активної потужності в схемі (4.3) буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \Delta P = & a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k1} \cdot \delta_1 - Q_{k2} \cdot \delta_2 - Q_{k3} \cdot \delta_3)^2 \\ & + a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{k1} \cdot \delta_1 - Q_{k2} \cdot \delta_2 - Q_{k3} \cdot \delta_3)^2 + a_3 \cdot Q_3^2 \rightarrow \min, \end{aligned}$$

$$\text{де } a_i = R_i / U^2, i=1, 2, 3 \text{ або } a_1 = 4 \cdot 10^{-9}; a_2 = 5 \cdot 10^{-9}; a_3 = 6 \cdot 10^{-9}.$$

Підставивши відповідно значення у вираз  $\Delta P$ , а також враховуючи, що  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1$  і відповідно  $\delta_1 = 0$ ;  $\delta_2 = 0$ ;  $\delta_3 = 0$  отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta P = & 4 \cdot 10^{-9}(600000 + 500000 + 400000 - Q_{k1} \cdot \delta_1 - Q_{k2} \cdot \delta_2 - Q_{k3} \cdot \delta_3)^2 + \\ & + 5 \cdot 10^{-9}(500000 + 400000 - Q_{k1} \cdot \delta_1 - Q_{k2} \cdot \delta_2 - Q_{k3} \cdot \delta_3)^2 + \\ & + 6 \cdot 10^{-9}(400000 - Q_{k3} \cdot \delta_3)^2 = 1770 \text{ Вт.} \end{aligned}$$

Таким чином, для забезпечення мінімальних втрат потужності в схемі електропостачання величину компенсуючого пристрою приймаємо 1200 квар і розміщуємо його у вузлі 2, тобто  $Q_{k1} = 0$ ;  $Q_{k2} = 1200$  квар;  $Q_{k3} = 0$ .

## ТЕМА 5. МЕТОДИ НЕЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

### ПЛАН

- 5.1 Особливості задач нелінійного програмування
- 5.2 Активні стратегії пошуку екстремуму
- 5.3 Графічне розв'язання задач нелінійного програмування
- 5.4 Градієнтні методи розв'язання нелінійних задач

#### 5.1 Особливості задач нелінійного програмування

На практиці наявність лінійної залежності між параметрами, які характеризують об'єкт, не завжди справджується, і в першу чергу, завдяки тому, що складні об'єкти оптимізації описують значно складнішими залежностями. Це вперш усього проявляється в тому, що математична модель або цільова функція (її обмеження, граничні умови) стають нелінійними.

Таким чином, до задач математичного програмування, в яких обмеження, граничні умови, цільова функція або те й інше нелінійні, називають задачами нелінійного програмування [5, 10]. В загальному вигляді вона може бути сформульована, наприклад, так:

$$Z(x) = Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max, \quad (5.1)$$

при умовах 
$$(x) \geq 0; \quad i = \overline{1, m}; \quad x \geq 0, \quad (5.2)$$

де  $Z(x)$  або  $Z_i(x_i)$  – нелінійні функції змінних.

Вираз (5.2) можна записати так:

$$\max \left\{ Z(x) / Z_i(x_i) \geq 0; i = \overline{1, m}; x \geq 0 \right\}; \quad (5.3)$$

$$\text{або} \quad \max \left\{ Z(x) / x(W) \right\}, \quad (5.4)$$

де  $W$  – область, що обмежує варіювання змінних  $x$ .

Основними особливостями нелінійного програмування є:

– у випадку нелінійності обмежень область допустимих розв'язків може бути невиконною, і мати безмежно велике число крайніх точок (в задачах лінійного програмування ця область завжди виконана і має кінцеве число крайніх точок).

– екстремум нелінійної функції може досягатися як на границі, так і в середині області допустимих розв'язків, тобто на екстремум слід перевіряти і внутрішні точки, що ускладнює розв'язання.

Найпростішими задачами нелінійного програмування є задачі безумовної оптимізації, в яких пошук абсолютного екстремуму цільової функції здійснюється без будь-яких умов [1].

У цьому випадку, користуючись положенням вищої математики стосовно того, що в точці екстремуму нелінійної функції всі її частинні похідні дорівнюють нулю, для знаходження екстремуму нелінійної функції  $n$  змінних розв'яжемо отриману систему  $n$  рівнянь з  $n$  невідомими, що і обумовить отримання значень змінних, при яких досягається екстремум. Треба зауважити, що таке розв'язання системи рівнянь є достатньо складною задачею, яка має обмежене застосування.

На практиці для пошуку екстремуму нелінійної функції найчастіше використовують інші методи, наприклад градієнтні (методи градієнта, релаксації, найвищого підйому та ін.), суть і принципи деяких з них наводяться нижче.

До більш складних задач належать задачі умовної оптимізації, в яких шукають умовний екстремум цільової функції за наявності обмежень і граничних умов, що відповідає умовам багатьох практичних задач. В цьому випадку шукані змінні завжди приймають тільки позитивні або нульові значення і знаходження їх можна здійснити застосуванням методу невизначених множників Лагранжа.

При вирішенні багатьох задач нелінійного програмування виникає необхідність пошуку екстремуму цільової функції, яка має один відгук, тобто монокритеріальної задачі. В конкретних практичних ситуаціях, особливо при дослідженнях, коли цільова функція не має аналітичного виразу, тобто модель об'єкта дослідження відсутня або побудова її викликає значні труднощі, відшукання оптимальної умови функціонування об'єкта доцільно здійснювати шляхом залучення і використання прямого експерименту.

Для вирішення таких задач в принципі може бути запропонована значна кількість методів експериментальної оптимізації, які практично аналогічні градієнтним методам пошуку екстремуму цільової функції, наприклад методу Д. Бокса та К. Уілсона [1, 5].

До методів планування оптимізаційних експериментів при наявності єдиного варійованого фактора  $x_1$ , в першу чергу, належать так звані активні – метод дихотомії (половинного поділу), метод золотого перерізу та інші. До методів експериментальної оптимізації, які найбільше застосовуються нині належать: метод крутого



сходження, симплексний метод, метод покоординатного пошуку екстремуму (метод Гауса-Зайделя) та ін.

## 5.2. Активні стратегії пошуку екстремуму

### 5.2.1. Метод дихотомії

Метод дихотомії (половинного поділу) належать до найпростіших методів пошуку екстремуму за наявності залежності відгуку ( $y$ ) від єдиного варійованого фактора  $x_1 - y = f(x_1)$ . Такі функції називаються унімодальними.

При реалізації цього методу на першому кроці ставляться два досліди, які виконуються якомога ближче до середини діапазону варіювання ( $x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}$ ). Позначимо через  $\varepsilon$  різницю між значеннями факторів (рис 5.1) у цих точках  $\varepsilon = x_{12} - x_{11}$ . Тоді значення  $x_1$  в першому та другому досліді відповідно буде:

$$x_{11} = x_1^0 - \varepsilon/2, \text{ де } x_{12} = x_1^0 + \varepsilon/2;$$

$$\text{де } x_1^0 = \frac{x_{1\min} + x_{1\max}}{2}.$$

Треба підкреслити, що величина  $\varepsilon$  вибирається якомога малою та достатньою для фіксації різниці в результатах дослідів.

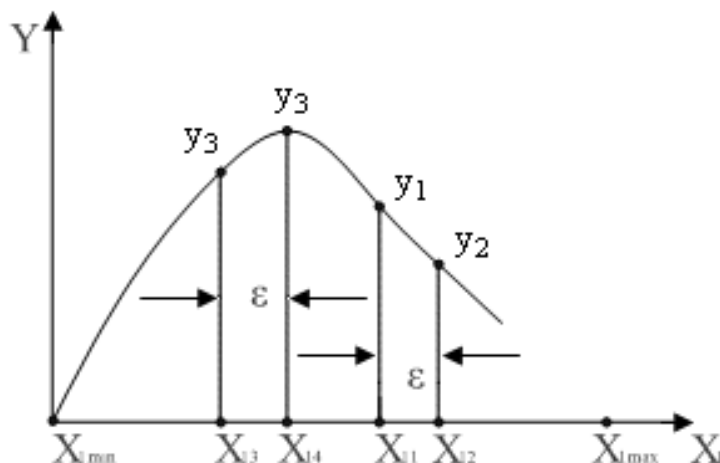


Рис 5.1. Метод дихотомії

Будемо враховувати, що треба знайти максимум функції відгуку тобто значення  $x_1 = x_{1opt}$ , при якому відгук буде максимальний

( $y \rightarrow \max$ ). Із рис. 5.1 витікає, що  $y_1 > y_2$ . Враховуючи точку  $x_{1opt}$  можна шукати тільки в діапазоні:  $(x_{1min} \leq x_{1opt} \leq x_{1max})$ .

Наступний крок враховує проведення 2-х дослідів поблизу центра нового діапазону. Умова цих дослідів:

$$x_{13} = x_1^{(1)} - \varepsilon/2, \quad x_{14} = x_1^{(1)} + \varepsilon/2,$$

$$\text{де } x_1^{(1)} = \frac{x_{1min} + x_{12}}{2}.$$

Із рис. 5.1 витікає, що тепер  $y_3 < y_4$ . Таким чином, можна виключити інтервал від  $x_{min}$  до  $x_{13}$ . Наступні два дослідів ставлять в інтервалі  $(x_{12}, x_{13})$ , далі вибирається нова пара точок тощо.

За результатами кожної пари дослідів інтервал, в якому знаходиться  $x_{1opt}$ , зменшується вдвічі. Цей інтервал називається інтервалом невизначеності.

Ефективність цього методу можна підтвердити шляхом порівняння з так званою "пасивною" процедурою, коли умови проведення всіх дослідів відомі заздалегідь, наприклад, запланована кількість дослідів  $N = 8$ . Згідно з методом дихотомії, у цьому випадку буде проведено 4 серії по два дослідів в кожній. При цьому інтервал невизначеності зменшиться в 16 раз ( $2^4 = 16$ ).

Враховуючи, що при пасивному пошуку точки можуть розташовуватися рівномірно вихідний діапазон може бути поділено на  $N - 1$  інтервалів (рис. 5.2).

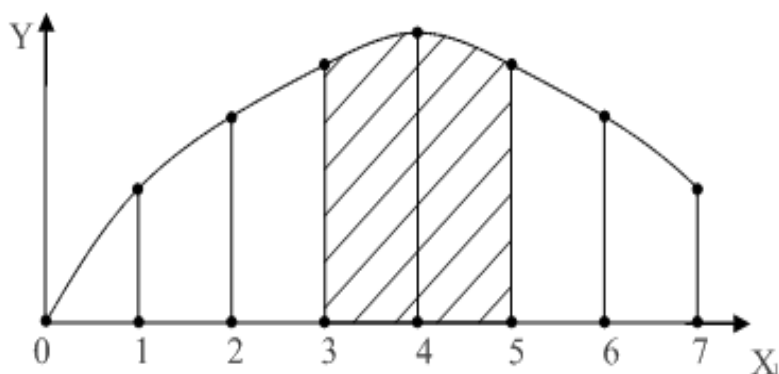


Рис.5.2. Метод пасивного пошуку

За результатами всього експерименту інтервал невизначеності буде дорівнювати  $2^M$  інтервалам (інтервал між точками 4 та 6 на рис. 5.2), тобто зменшиться в порівнянні з вихідним в  $(N - 1) / 2$  раз або для восьми точок в 3,5 раза.

Таким чином, при використанні методу дихотомії величина інтервалу невизначеності спадає із зростанням  $N$  за експонентою, а при пасивному пошуку – обернено пропорційна  $N$ . Звідси можна зробити висновок – чим більше, тим ефективніше метод дихотомії. Практикою встановлено, що кількість дослідів при застосуванні методу дихотомії повинна бути 10 ... 12.

### 5.2.2. Метод золотого перерізу

Метод золотого перерізу більш ефективний, ніж метод дихотомії. Практично встановлено, що цей метод має обмежену кількість можливих дослідів [1, 5].

На першій ітерації так само, як при методі дихотомії ставляться два дослідів. Різниця в тому, що кожний наступний етап вже потребує тільки один дослід. Для спрощення припустимо, що фактор  $x_1$  варіюється на одиничному відрізку:  $0 \leq x_1 \leq 1$ , а функція відгуку також унімодальна.

Згідно з методом золотого перерізу (поділ відрізка в середньому і крайньому відношенні) значення фактора  $x_1$  в перших двох дослідів відповідно дорівнюють:  $x_{11} \approx 0.382$ ;  $x_{12} \approx 0.618$  (рис. 5.3).

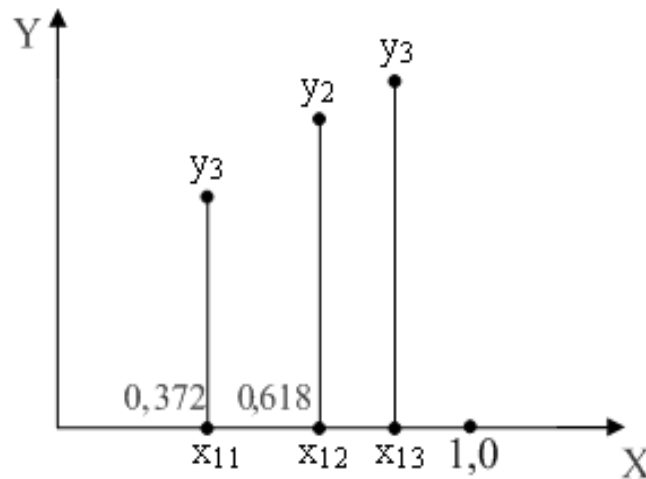


Рис. 5.3. Метод золотого перерізу

Відповідні точки  $(y_1, y_2, y_3)$  знаходяться на відрізку  $(0,1)$  симетрично:  $1 - 0,618 = 0,382$ . Число  $0,618$  являє собою наближене значення величини  $r = 0.5(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$ . Квадрат цього числа дає другу точку ділення одиничного відрізка в цьому методі:  $r^2 \approx 0.382$ . Інтервал невизначеності після кожної ітерації зменшується при цьому в  $\frac{1}{r}$  раз.

За результатами перших двох дослідів можливі такі варіанти:

1)  $y_1 < y_2$  В цьому випадку вилучається відрізок  $(x_{12}, 1)$ , коли  $y_1 \rightarrow \max$ ;

2)  $y_1 < y_2$  – вилучається відрізок  $(0, x_{11})$ ;

3)  $y_1 < y_2$  – вилучаються відрізки  $(0, x_{11})$  та  $(x_{12}, 0)$ .

Відрізок, який залишається в усіх випадках, знову ділиться двома точками на три відрізки у відношенні 0,382 та 0,618.

Особливість цього методу розглянемо на прикладі рис. 5.3 (умова  $y_1 < y_2$ )

При діленні відрізка  $(x_{11}, 1)$  отримуємо "стару" точку  $x_{12}$  і "нову" точку  $x_{13}$ . Тоді при другій ітерації треба ставити вже тільки один дослід (у точці  $x_{13}$ ). При наступній ітерації аналогічно ставиться по одному досліді.

Використання методу золотого перерізу розглянемо на прикладі алгоритму, який було запропоновано Вагнером при відшукуванні максимуму функції  $y = f(x_1)$ , де варіювання фактора  $x_1$  здійснюється в діапазоні:

$$(x_{1\min} \leq x_1 \leq x_{1\max}).$$

Перший крок.  $A_1 = x_{1\min}$ ;  $A_2 = x_{1\max}$ ;  $H = A_2 - A_1$ ;  $x_{лив} = A_1 + r^2 H$ ;  $x_{нр} = A_1 + r \cdot H$ . Досліди ставлять у точках  $x_{лив}$  та  $x_{нр}$ . Їх результати:  $y(x_{лив})$  та  $y(x_{нр})$ .

Другий крок. Здійснюється порівняння результатів. При  $y(x_{лив}) \geq y(x_{нр})$

переходимо до кроку 3, при  $y(x_{лив}) < y(x_{нр})$  – до кроку 4.

Третій крок. Приймаємо  $A_2 = x_{нр}$ , а  $H = x_{нр} - A_1$ . За умову  $H \rightarrow \min$  експеримент закінчуємо. В іншому випадку як новий  $x_{нр}$  беремо попереднє  $x_{лив}$ , а як новий  $x_{лив}$  точку  $A_1 + r^2 H$  і повертаємося до виконання другого кроку.

Четвертий крок. Приймаємо  $A_1 = x_{лив}$ , а  $H = A_2 - x_{лив}$ . За умову  $H \rightarrow \min$  експеримент закінчуємо. В іншому випадку як новий  $x_{лив}$  беремо попереднє  $x_{нр}$ , а як новий  $x_{нр}$  точку  $A_1 + r \cdot H$ . Проводимо дослід у точці  $x_{нр}$  і повертаємося до виконання другого кроку.

Підставою для припинення експериментів є скорочення інтервалу невизначеності до мінімального значення  $H \rightarrow \min$ .

### 5.3 Графічне розв'язання задач нелінійного програмування

Розв'язок таких задач розглянемо на прикладі нелінійної цільової функції:  $Z(x_1, x_2)$ , яка графічно проілюстрована на рис. 5.4.

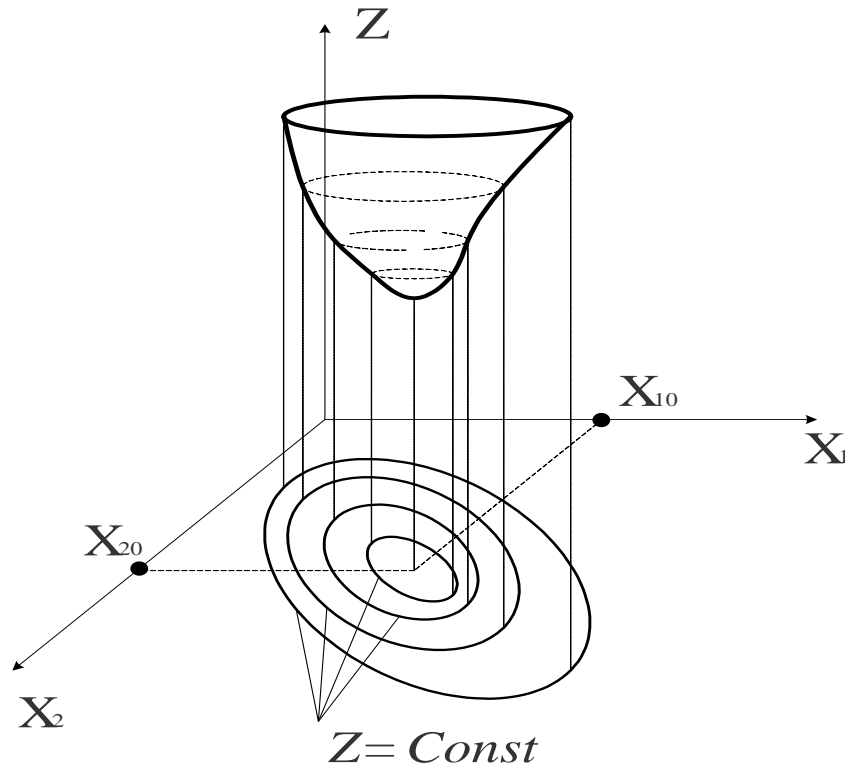


Рис.5.4. Графічна ілюстрація нелінійної функції  $Z(x_1, x_2)$  та її уявлення лініями рівного рівня ( $Z=\text{const}$ )

Далі здійснюємо перетинання функції ( $Z$ ) площинами, паралельними горизонтальній площині  $x_1, x_2$  і точки перетину спроектуємо на цю площину. При цьому на площині  $x_1, x_2$  отримаємо замкнуті концентричні криві, на кожній із яких значення цільової функції незмінне  $Z=\text{const}$ . Ці замкнуті криві називаються лініями рівного рівня і для лінійних задач являють прямі лінії.

Таким чином, нелінійна функція  $Z(x_1, x_2)$  подана в двомірній площині  $x_1, x_2$  лініями рівного рівня у вигляді концентричних ліній, які стягуються в точку з координатами  $x_{10}, x_{20}$ , що і є мінімумом цільової функції.

На рис. 5.5 наведено приклад, коли два обмеження – це нелінійні нерівності, а обмеження 2 – лінійне. Згідно з вимог і визначень лінійного та нелінійного програмування нелінійні

обмеження 1, 3 являють криві лінії, а лінійне обмеження 2 являє собою пряму лінію. Штрихування на рис. 5.5 у кожного обмеження направлена в бік допустимих значень змінних і являє собою область допустимих значень  $W$  у вигляді замкнутого багатогранника  $a b c$  з криволінійними та прямолінійними межами (гранями). Безумовно, що як і у випадку лінійною задачею оптимальне рішення обов'язково повинно належати області  $W$  (лежати на грані або у середині). В нашому випадку (рис. 5.5) мінімумом функції  $Z$  є точка з координатами  $x_{10}$  та  $x_{20}$ .

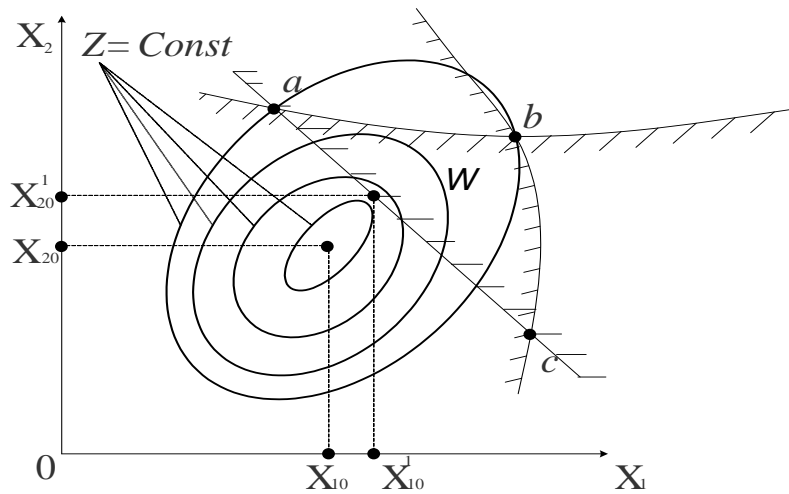


Рис. 5.5. Ілюстрація області  $W$  допустимих значень змінних і відносного мінімуму функції  $Z$

#### 5.4 Градієнтні методи розв'язання нелінійних задач

Градієнтні методи являють собою достатньо поширені при пошуку екстремуму функції за наявності декількох змінних [1, 3, 5].

Ідея градієнтних методів полягає в тому, щоб в процесі пошуку екстремуму рух здійснювався тільки в напрямку зростання цільової функції для пошуку максимуму або в зворотному – для пошуку мінімуму.

В градієнтних методах передбачається обчислення на кожному етапі перших похідних цільової функції за її аргументами. При цьому розв'язання задачі починається з вибору початкової точки  $x^0$ . Потім, на кожному кроці розв'язок покращується при русі в напрямку до оптимуму цільової функції  $Z(x)$ . Найкращим вважається той напрямок, який дає найбільшу зміну (приріст – зменшення) цільової

функції. Такий напрямок називається *градієнтом функції*. Фізичний зміст градієнта функції полягає в тому, що він (градієнт) показує напрямок і швидкість найбільшої зміни функції.

Основним недоліком градієнтних методів є великий обсяг обчислень на кожному кроці.

Градiєнтом функції  $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$  є вектор (показує напрямок):

$$\text{grad}Z = \frac{\partial Z}{\partial x_1} i + \frac{\partial Z}{\partial x_2} j + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n} k, \quad (5.5)$$

де  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – одиничні вектори (орти).

Величина цього вектора (показує швидкість зміни):

$$|\text{grad}Z| = \sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial Z}{\partial x_n}\right)^2}. \quad (5.6)$$

У випадку, коли  $|\text{grad}Z| = 0$  функція не змінюється, що відповідає екстремуму функції.

До градієнтних методів, в першу чергу, належать: метод градієнта з постійним кроком, метод покоординатного сходження або спуску, покоординатного пошуку (метод Гауса-Зейделя).

Так, на рис. 5.6 наведена графічна ілюстрація градієнтного методу з постійним кроком.

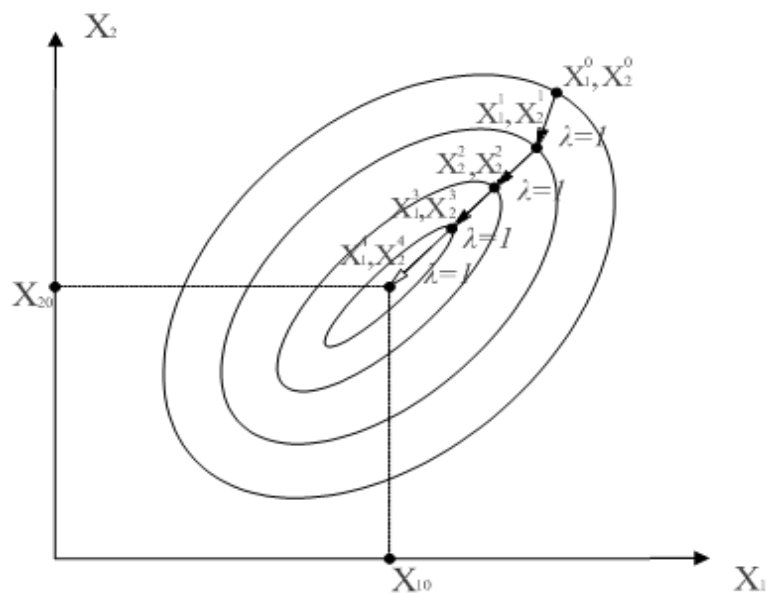


Рис. 5.6. Ілюстрація градієнтного методу з постійним кроком:  $(\lambda = 1)$

Обчислювальна процедура при заданому кроці одиничної довжини ( $\lambda = 1$ ) на рис.5.6 здійснюється в напрямку зменшення функції  $Z$ , тобто шляхом послідовного отримання точок з координатами  $x_1^1, x_2^1$ ;  $x_1^2, x_2^2$ ;  $x_1^3, x_2^3$  впритул до точки з координатами  $x_{10}$  та  $x_{20}$ .

#### 5.4.1 Метод Гауса-Зайделя (покоординатного пошуку)

В основу методу покладена ідея покоординатного пошуку екстремуму. Цей метод належить до найпростіших хоча і не самих ефективних. Згідно з цим методом фактори варіюються в експерименті по черзі, тобто ставиться декілька серій однофакторних експериментів.

Спочатку задається вихідна точка  $\{x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}\}$ , в якій ставиться перший дослід. Потім послідовно змінюються значення тільки одного фактора, наприклад  $x_1$ , а решта факторів ( $x_2, x_3, \dots, x_k^{(0)}$ ) фіксуються на своїх початкових рівнях  $\{x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_k^{(0)}\}$ .

У варіанті, коли варіюються, наприклад два фактори, на факторній площині (рис. 5.7) цьому будуть відповідати точки 1 ... 5.

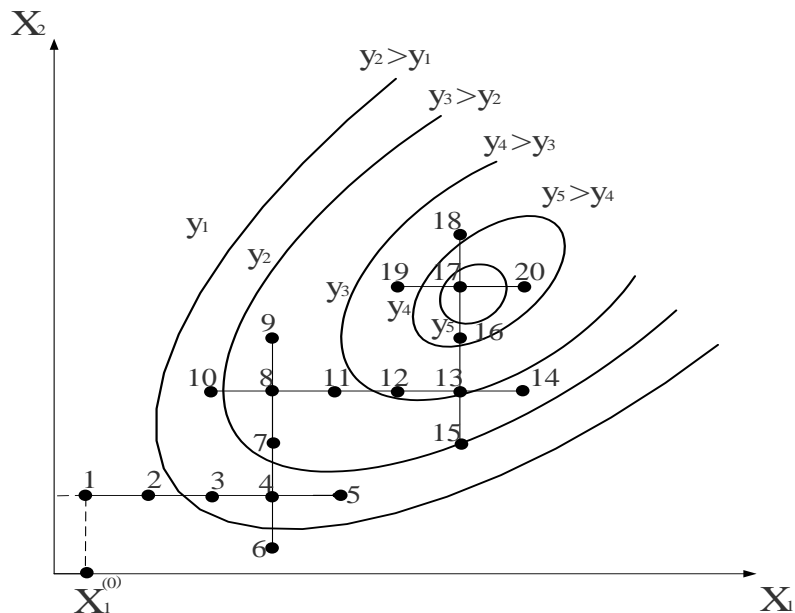


Рис.5.7. Метод покоординатного пошуку (Метод Гауса-Зайделя)

На 5.7 нанесено також лінії рівня або лінії рівного виходу. Для всіх точок, які лежать на  $i$ -ій лінії рівня, значення відгуку однакове і дорівнює деякому значенню  $y_i$ .



Серед поставлених дослідів знаходимо найкращий, в якому значення  $y$ , залежно від умови дослідів, максимальне або мінімальне. В нашому випадку відшукується максимум, якому на рис. 5.7 відповідає дослід 4. Відповідне значення  $x_1$  фіксується.

Тепер переходимо до фактора  $x_2$ , який будемо послідовно змінювати (досліди 6 ... 9, рис. 5.7). Для цієї серії дослідів також знаходимо найкраще значення фактора  $x_2$ , яке і фіксується (точка 8 на рис. 5.7).

Потім цикл почергового варіювання факторів проводиться наново, починаючи з  $x_1$ . Ця процедура повторюється доти, поки не буде знайдена точка, відхилення від якої може призвести до погіршення результату. Ця точка і приймається за точку оптимуму. На рис. 5.7 для її пошуку (точка 17) знадобиться 5 серій однофакторних експериментів.

Ідея покоординатного пошуку використовується не тільки як самостійний метод, але і у складі інших методів, наприклад дихотомії, золотого перерізу, методах найшвидшого підймання, спуску та ін.

Останні два за процедурою практично не відрізняються від покоординатного пошуку. Ці методи забезпечують рух по кожному кроці в найвигіднішому напрямку. При мінімізації цільової функції цей метод називають методом найшвидшого спуску, при максимізації – найшвидшого підймання.

При вирішенні задач нелінійного програмування найбільше застосовують градієнтні методи, серед яких значне місце займають методи покоординатного пошуку та метод множників Лагранжа.

#### **5.4.2 Метод множників Лагранжа.**

Цей класичний метод дає можливість знайти умовний екстремум за наявності обмежень – рівностей. Суть його полягає в тому, що оптимізаційна задача на умовний екстремум зводиться до задачі на безумовний екстремум, тобто на такий, який не має обмежень, шляхом введення додаткової функції. Таким чином, необхідно спочатку знайти умовний екстремум нелінійної функції:

$$Z(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \text{extr}, \quad (5.12)$$

$n$  змінних при  $m$  обмеженнях:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_1; \\ f_2 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2; \\ f_3 &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Обмеження – нерівності переносяться в рівності, а вільні члени ( $b_1, b_2, b_m$ ) перетворюються в ліву частину обмежень, після чого система (5.13) набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1, x_2, \dots, x_n b_1) = 0; \\ f_2 &= (x_1, x_2, \dots, x_n b_2) = 0; \\ f_3 &= (x_1, x_2, \dots, x_n b_m) = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Відповідно до методу Лагранжа замість відносного екстремуму функції (5.12) при обмеженнях (5.14) шукаємо абсолютний екстремум функції Лагранжа, яка буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} L &= Z(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n b_1) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n b_2) + \dots \\ &+ \lambda_m f_m(x_1, x_2, \dots, x_n b_m) \rightarrow \text{extr} \end{aligned} \quad (5.15)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – невизначені множники Лагранжа, які являють собою разом із змінними  $x_1, x_2, \dots, x_n$  шукані змінні.

Треба зазначити, що в функцію Лагранжа входить цільова функція плюс кожне обмеження, яке помножене на множники Лагранжа.

Таким чином, можна вважати доведеним, що відносний екстремум цільової функції (5.12) при обмеженнях (5.13) збігається з абсолютним екстремумом функції Лагранжа (5.14).

Пошук абсолютного екстремуму функції (5.14) здійснюється відомими методами, наприклад, шляхом визначення і прирівнювання до нуля частинних похідних функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial Z}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial Z}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_2} = 0$$

..... (5.16)

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial Z}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_n} + \dots + \lambda_m \frac{\partial f_m}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, b_1) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, b_2) = 0$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n, b_m) = 0$$

Останні  $m$  рівнянь ( $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$ ) являють собою обмеження (5.13) оптимізаційної задачі. Система (5.13) налічує  $(m+n)$  рівнянь і таку ж саму кількість невідомих.

Рішення системи (5.15) дає координати абсолютного мінімуму (5.14) або відносного мінімуму цільової функції Лагранжа (5.12) при обмеженнях (5.13). Розв'язання такої системи здійснюється відомими методами обчислювальної математики – методом Гауса (система лінійна) або методом Ньютона (система нелінійна).

Метод Лагранжа часто застосовують при вирішенні оптимізаційних задач в енергетиці, наприклад при розподілі сумарної активної потужності споживачів енергосистеми між електричними станціями її з метою мінімізації витрат на виробництво електроенергії [1, 4].

Розв'язання таких задач розглянемо на такому узагальненому прикладі. Так, енергосистема має  $n$  електростанцій, які працюють на одному паливі і для кожного з агрегатів електростанцій відомі витрати палива  $B$  від активної потужності станції. Ці витрати мають нелінійний характер і такий вигляд:

$$B_i(P_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.17)$$



Таким чином, оптимальний розподіл активної потужності між електростанціями має місце при рівності між собою похідних від витратних характеристик кожної станції.

Більшість споживачів, крім активної потужності, споживають і реактивну потужність, яку на відміну від активної можна отримувати безпосередньо у споживачів від спеціальних джерел реактивної потужності, наприклад компенсуючими пристроями.

Для системи електропостачання величина сумарної потужності компенсуючих пристроїв  $Q_k$  може бути заданою конкретними технічними умовами. В цьому випадку умовою задачі є оптимальний розподіл потужності  $Q_k$  усередині системи електропостачання, яку можна також вирішити методом Лагранжа.

Розглянемо задачу для радіальної схеми (рис. 5.10) з джерелом живлення напругою  $U$ , від якого живляться  $n$  споживачів з реактивними потужностями  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Активними опорами ліній між джерелом і споживачами є  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , а біля кожного споживача можна встановлювати компенсуючий пристрій потужністю  $Q_{k_i}$ .

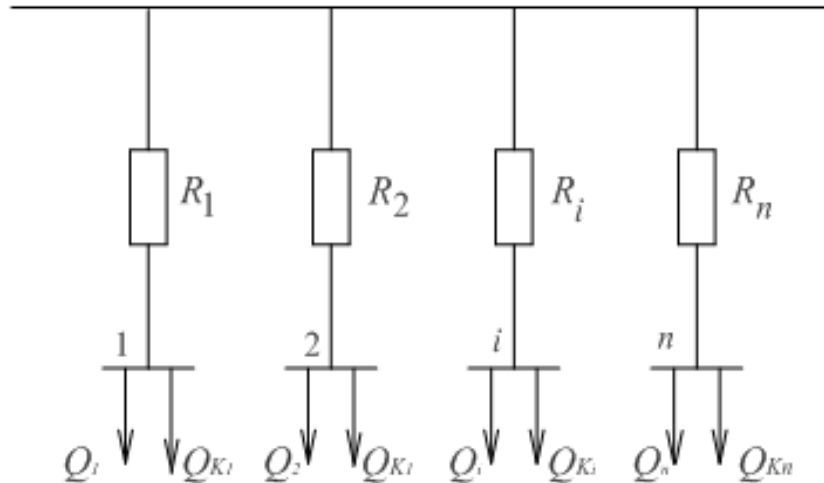


Рис. 5.10. Схема електропостачання

Необхідно знайти оптимальний розподіл між споживачами (1,2 ... n) заданої сумарної потужності компенсуючих пристроїв  $Q_k$ .

Критерій оптимальності – мінімум витрат активної потужності. В цьому випадку цільова функція за мінімізацією витрат активної потужності згідно зі схемою (рис 5.10) має вигляд:

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{k_i})^2 \frac{R_i}{U^2} \rightarrow \min . \quad (5.24)$$

Відносний мінімум функції визначається при обмеженні:

$$\sum_{i=1}^n Q_{k_i} = Q_k \quad \text{або} \quad \sum_{i=1}^n Q_{k_i} - Q_k = 0 . \quad (5.25)$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{k_i})^2 \frac{R_i}{U^2} + \lambda \left( \sum_{i=1}^n Q_{k_i} - Q_k \right) \rightarrow \min . \quad (5.26)$$

Для відшукування мінімуму функції  $L$  визначаємо її частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля:

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{k_1}} = -2R_1(Q_1 - Q_{k_1})U^2 + \lambda = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{k_2}} = -2R_2(Q_2 - Q_{k_2})U^2 + \lambda = 0 ,$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{k_i}} = -2R_i(Q_i - Q_{k_i})U^2 + \lambda = 0 , \quad (5.27)$$

.....

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{k_n}} = -2R_n(Q_n - Q_{k_n})U^2 + \lambda = 0 ,$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{k_i}} = \sum_{i=1}^n Q_{k_i} - Q_k = 0 .$$

Аналіз системи (5.26) показує, що оптимальний розподіл заданої сумарної величини компенсуючих пристроїв  $Q_k$  в наведеній схемі електропостачання (рис. 5.10) буде мати таку рівність:

$$R_1(Q_1 - Q_{k_1}) = R_2(Q_2 - Q_{k_2}) = \dots = R_i(Q_i - Q_{k_i}) = \dots = R_n(Q_n - Q_{k_n}) . \quad (5.28)$$

Нижче наводяться задачі 5.1, 5.2 присвячені застосуванню методу множників Лагранжа.

*Задача 5.1.* Визначити потужності компенсуючих пристроїв  $Q_{k1}$  і  $Q_{k2}$  у вузлах 1 та 2 (рис. 5.11) із врахуванням умов мінімуму сумарних втрат на їх установку та покриття втрат активної потужності. Питомі витрати відповідно становлять: на установку компенсуючих пристроїв  $z_0 = 0.5$  у.о./кВар, на покриття втрат активної потужності  $c_0 = 10$  у.о./квар. Параметри схеми наведені на рис. 5.11.

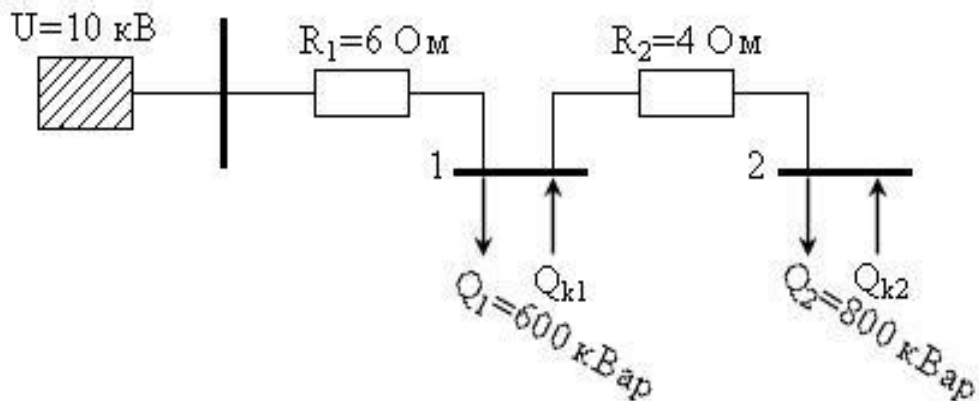


Рис. 5.11. Схема електропостачання

Задача вирішується із застосуванням методу покоординатного пошуку екстремуму (покоординатного "спуску").

Розв'язання. Цільова функція являє собою суму усіх витрат згідно зі схемою (рис. 8.6) і має такий вигляд:

$$Z = Z_0(Q_{k1} - Q_{k2}) + a_1(Q_1 + Q_2 + Q_{k1} + Q_{k2})^2 + a_2(Q_2 - Q_{k2})^2 \rightarrow \min, \quad (5.29)$$

$$\text{де } a_1 = 10^{-3} \cdot R_1 c_0 / U^2 = 0,0006; \quad a_2 = 10^{-3} \cdot R_2 c_0 / U^2 = 0,0004.$$

Запровадження коефіцієнта  $10^{-3}$  необхідно для зведення усіх складових цільової функції до однієї розмірності.

Розв'язання здійснюємо із застосуванням методу "покоординатного спуску". Для цього визначимо частинні похідні функції (5.29) за змінними  $Q_{k1}$  і  $Q_{k2}$ :

$$\frac{dz}{dQ_1} = z_0 - 2a_1(Q_1 + Q_2 - Q_{k1} - Q_{k2});$$

$$\frac{dz}{dQ_2} = z_0 - 2a_1(Q_1 + Q_2 - Q_{k1} - Q_{k2}) - 2Q_2(Q_2 - Q_{k2}).$$

Визначимо значення цільової функції і частинних похідних за умову:  $Q_{\kappa 1}^0 = 0$ ;  $Q_{\kappa 2}^0 = 0$ :

$$Z^0 = 0,5 (0+0) + 0,0006 (600+800-0-0)^2 + 0,0004 (800-0)^2 = 1432 \text{ у.о.};$$

$$dz/dQ_{\kappa 1} = 0,5 - 2 \cdot 0,0006 (600+800-0-0) = -1,18;$$

$$dz/dQ_{\kappa 2} = 0,5 - 2 \cdot 0,0006 (600+800-0-0) - 2 \cdot 0,0004 (800-0) = -1,8.$$

Аналізуючи наведені рішення бачимо, що  $\left| dz/dQ_{\kappa 2} \right| > \left| dz/dQ_{\kappa 1} \right|$ , тобто в напрямку  $Q_{\kappa 2}$  цільова функція спадає більше, ніж у напрямку  $Q_{\kappa 1}$ . Це дає підстави починати спуск у напрямку  $Q_{\kappa 2}$ .

1-й крок. Приймаємо величину кроку  $\lambda = 400$  кВар, тоді перше наближення буде:  $Q_{\kappa 1}^1 = 0$ ;  $Q_{\kappa 2}^1 = 400$  квар, а цільова функція відповідно:

$$z^1 = 0,5 (0+400) + 0,0006 (600+800-0-400)^2 + 0,0004 (800-400)^2 = 864 \text{ у.о.}$$

2-й крок. Приймаємо величину кроку  $\lambda = 800$  квар, тоді будемо мати:  $Q_{\kappa 1}^2 = 0$ ;  $Q_{\kappa 2}^2 = 800$  квар, а цільова функція відповідно:

$$z^2 = 0,5 (0+800) + 0,0006 (600+800-0-800)^2 + 0,0004 (800-800)^2 = 616 \text{ у.о.}$$

3-й крок. При величині кроку  $\lambda = 1200$  кВар, тоді будемо мати:  $Q_{\kappa 1}^3 = 0$ ;  $Q_{\kappa 2}^3 = 1200$  квар, а цільова функція відповідно:

$$z^3 = 0,5 (0+1200) + 0,0006 (600+800-0-1200)^2 + 0,0004 (800-1200)^2 = 688 \text{ у.о.}$$

Аналізуючи результати, бачимо, що  $z^2 > z^3$ , тобто найменше значення отримано на другому кроці, що дає підстави повернутися до значень змінних  $Q_{\kappa 1}^2 = 0$ ;  $Q_{\kappa 2}^2 = 800$  кВар.

У зв'язку з цим зробимо новий третій крок у напрямку  $Q_{\kappa 1}$ , прийнявши величину кроку  $\lambda = 400$  квар. Тоді  $Q_{\kappa 1}^3 = 400$  квар;  $Q_{\kappa 2}^3 = 800$  квар. Значення цільової функції при таких умовах буде:

$$z^3 = 0,5 (400+800) + 0,0006 (600+800-400-800)^2 + 0,0004 (800-800)^2 = 624 \text{ у.о.}$$

Отримане значення показує, що  $z^3 > z^2$  ( $624 > 616$ ), тобто подальший рух у напрямку  $Q_{\kappa 1}$  недоцільний. Таким чином, можна зробити висновок, що точка з координатами  $Q_{\kappa 1} = 0$ ;  $Q_{\kappa 2} = 800$  кВар



знаходиться в межах мінімуму цільової функції, близької до оптимальної величини.

Вирішуючи задачу шляхом звичайного перебору або із застосуванням програмного забезпечення, наприклад *Excel 7,0*, невиключне отримання більш точного результату.

**Задача 5.2.** В існуючій схемі електропостачання (рис. 5.12) необхідно розподілити між вузлами 1, 2 і 3 загальну потужність компенсуючих пристроїв, яка дорівнює 1000 кВар. Критерій оптимальності – мінімум втрат активної потужності. Вихідні дані наведено на схемі електропостачання (рис. 5.12).

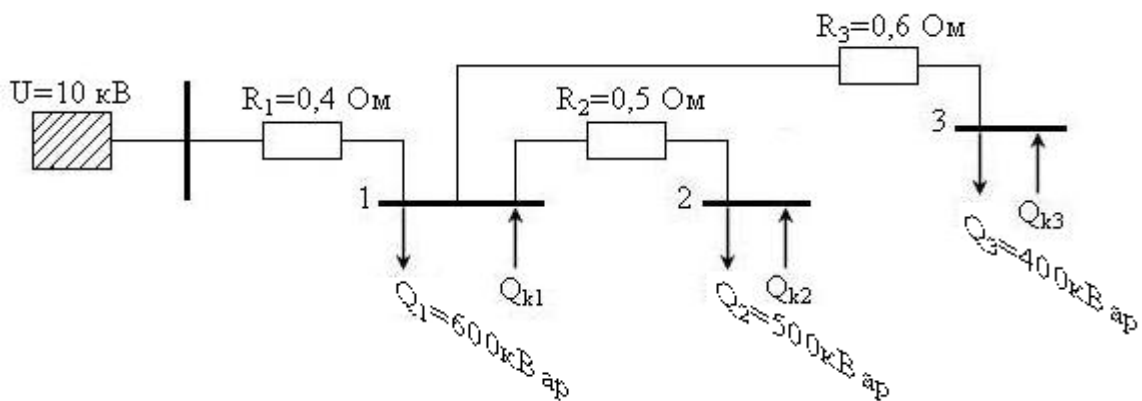


Рис. 5.12. Схема електропостачання

**Розв'язання.** Цільова функція, критерієм оптимальності якої є мінімум втрат активної потужності має такий вигляд:

$$\Delta P = \sum^n (Q_i - Q_{k_i})^2 \frac{R_i}{U^2} \rightarrow \min. \quad (5.30)$$

В нашому випадку вираз (5.30) можна записати у вигляді:

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3})^2 + a_2(Q_2 - Q_{k_2})^2 + a_3(Q_3 - Q_{k_3})^2. \quad (5.31)$$

Враховуючи, що  $a_1, a_2, a_3$  відповідно дорівнюють:  $a_1 = R_1/U^2 = 0,4/100=0,004$ ;  $a_2 = R_2/U^2 = 0,5/100 = 0,005$ ;  $a_3 = R_3/U^2 = 0,6/100 = 0,006$  і підставивши у вираз відповідні значення реактивного навантаження вузлів  $Q_1, Q_2, Q_3$  отримуємо такий запис:

$$\Delta P = 0,004(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3})^2 + 0,005(500 - Q_{k_2})^2 + 0,006(400 - Q_{k_3})^2 \rightarrow \min. \quad (5.32)$$

Треба пам'ятати, що згідно з умовою існує обмеження:

$$Q_{k1} + Q_{k2} + Q_{k3} - 1000 = 0.$$

Відповідно до виразу (5.32) функція Лагранжа буде мати вигляд:

$$L = 0,004(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3})^2 + 0,005(500 - Q_{k_2})^2 + 0,006(400 - Q_{k_3})^2 + \lambda(Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3} - 1000)^2 \rightarrow \min.$$

Для визначення мінімуму функції Лагранжа розраховуємо частки її похідних за всіма змінними і прирівнюємо ці похідні до нуля:

$$\frac{dL}{dQ_{k_1}} = -0,008(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3}) + \lambda;$$

$$\frac{dL}{dQ_{k_2}} = -0,008(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3}) - 0,01(500 - Q_{k_2}) + \lambda;$$

$$\frac{dL}{dQ_{k_3}} = -0,008(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3}) - 0,012(400 - Q_{k_3}) + \lambda;$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = Q_{k_1} + Q_{k_2} + Q_{k_3} - 1000 = 0;$$

Визначаємо величину множника Лагранжа з 1<sup>го</sup> рівняння наведеної системи:

$$\lambda = 0,008(1500 - Q_{k_1} - Q_{k_2} - Q_{k_3})$$

Підставляючи  $\lambda$  відповідно в 2<sup>ге</sup>, 3<sup>ге</sup> та 4<sup>ге</sup> рівняння системи отримуємо:

$$0,01(500 - Q_{k_2}) = 0, \text{ звідки } Q_{k_2} = 500 \text{ кВар};$$

$$(400 - Q_{k_3}) = 0, \text{ звідки } Q_{k_3} = 400 \text{ кВар};$$

$$Q_{k_1} = 1000 - 500 - 400 = 100 \text{ кВар}.$$

Далі з 1<sup>го</sup> рівняння системи знаходимо величину множника Лагранжа:

$$\lambda = 0,008(1500 - 100 - 500 - 400) = 4.$$

Таким чином, відповідно до виразу цільової функції мінімальні витрати активної потужності в розглянутій схемі при обмеженні потужності компенсуючих пристроїв ( $Q_k = 1000$  кВар) будуть:

$$\Delta P = 0,004(1500 - 1000)^2 + 0,005(500 - 500)^2 + 0,006(400 - 400)^2 = 1 \text{ кВт}.$$

### 5.4.3 Метод динамічного програмування.

Динамічне програмування являє собою метод розв'язання багатоетапних задач математичного програмування шляхом розкладання їх на декілька більш простих підзадач. У динамічному програмуванні для будь-якого керованого процесу серед множини елементів розв'язку шукають оптимальне рішення у сенсі заданого критерію, тобто таке, яке призводить до отримання оптимального значення цільової функції.

Динамічне програмування використовується для вирішення багатьох технічних задач, наприклад при розподілу та застосуванні енергетично-паливних ресурсів, різних технологічних та електричних схем, заміні електрообладнання, при проектуванні електромереж та ін.

Ефективність вирішення таких задач характеризується критерієм оптимальності  $W_i$  на деякому  $i$ -му етапі. Оптимум цього критерію обумовлюється знаходженням змінних величин (елементів розв'язку). В загальному випадку критерій оптимальності  $W_i$ , який ще називають адитивним, являє собою суму частинних критеріїв на кожному з етапів будь-якого процесу:

$$W = \sum_{i=1}^n W_i, \quad (5.33)$$

де  $n$  – число етапів.

У процесі використання динамічного програмування для вирішення задач застосовують багатокроковий процес, який здійснюється двічі: спочатку від кінця до початку, а потім навпаки; в результаті чого знаходять не тільки оптимальні рішення для кожного кроку, але і загальне рішення.

Застосування динамічного програмування розглянуто нижче.

*Задача 5.3.* Від підстанції  $A_1$  до споживача  $A_5$  потрібно побудувати електромережу 0,38 кВ проводом А-70.

При цьому потрібно її провести так, щоб вона проходила по трасі обов'язково через один із елементів кожної із II, III та IV груп. Відстані між всіма елементами і групами наведено на рис. 5.13. Визначити оптимальну (найкоротшу) довжину електромережі від  $A_1$  до  $A_5$ , яка б обумовлювала мінімальні витрати праці, матеріалів та втрати напруги.

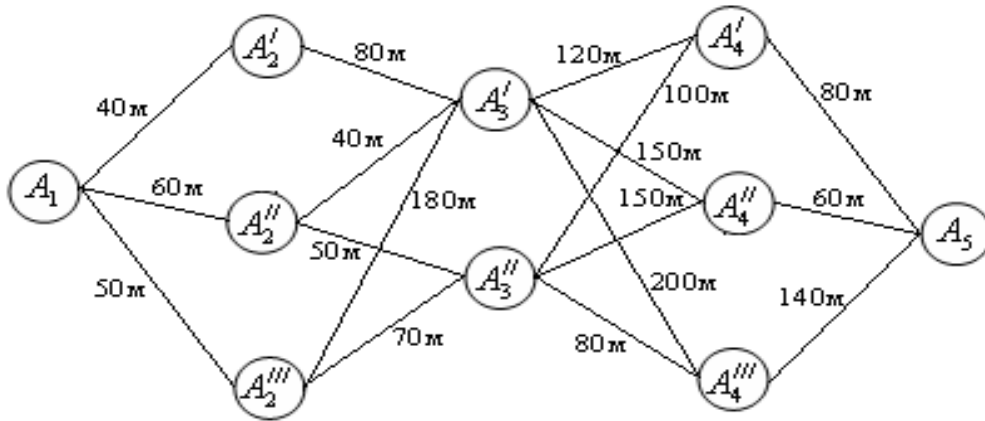


Рис. 5.13. Можливі варіанти побудови електромережі 0,4кВ від підстанції  $A_1$  до споживача  $A_5$

Розрахунок електромережі від трансформаторної підстанції до кінцевого споживача (шлях  $A_1 - A_5$ ) починається з того, що всі місця можливого проходження електромережі поділено на декілька груп (рис. 5.11) – I група  $A_1$ ; II група –  $A_2', A_2'', A_2'''$ ; III група –  $A_3', A_3''$ ; IV група –  $A_4', A_4'', A_4'''$ ; V група –  $A_5$ . Кожну із п'яти груп позначимо відповідно  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$ , тобто, виходячи із того, що, в групу II, наприклад, можна провести безпосередньо електромережу через  $A_2', A_2'', A_2'''$ .

Для вирішення задачі приймаємо поетапний (багатокроковий) варіант.

Найкоротшу відстань від варіантів кожної групи ( $A_i \in I_k$ ) до кінцевого споживача позначимо  $L_k(i)$ .

$$\text{Тоді } L_k(i) = 0. \quad (5.34)$$

Для нашого прикладу  $L_k(5) = 0$ . Найкоротша (оптимальна) довжина електромережі від підстанції до споживача визначається шляхом додавання відстані  $l_{ij}$  між  $A_i$  і всіма можливими варіантами  $A_j$  наступної  $(k + 1)^{\text{ї}}$  групи з найкоротшою відстанню від варіантів групи  $A_j$  до споживача  $A_m$ .

У загальному вигляді це має такий вигляд:

$$L_k(i) = \min\{l_{ij} = L_{k-1}(j)\}; \quad (5.35)$$

$$A_i \in I_{k+1}, k = 1, n - 1.$$

Обчислення розпочинаємо з останньої групи (етапу). За формулою (5.34) маємо  $Lk(5) = 0$ . Потім використовуємо співвідношення (5.35) при  $\kappa = 4, 3, 2, 1$ . Оскільки для всіх  $A_i \in I_4$ :

$$L_4(i) = \min\{l_{ij} + L_5(j)\} = l_{i,5} + L_5\{5\} = l_i, A_5, A_j \in I_5,$$

$$\text{то } L_4(A_4') = l_{A_4', A_5} = 80\text{м}, L_4(A_4'') = l_{A_4'', A_5} = 60\text{м}, L_4(A_4''') = l_{A_4''', A_5} = 140\text{м}.$$

Позначимо через  $x\kappa(i)$  номер  $j^{\text{го}}$  варіанта наступної групи  $A_i \in I_{\kappa+1}$ , для якого досягається оптимальна відстань (мінімальна в нашому випадку) в формулі (5.35). Згідно з цими значеннями визначаємо оптимальний відрізок. Для групи I4 таким пунктом є A5, тому:  $x_4(A_4') = A_5$ ;  $x_4(A_4'') = A_5$ ,  $x_4(A_4''') = A_5$ .

Продовжуючи обчислення при  $\kappa = 3$  для всіх варіантів  $A_i \in I_3$  будемо мати:

$$L_3(i) = \min\{l_{ii} + L_4(j)\}, A_i \in I_4.$$

Звідси:

$$L_3(A_3') = \min\{l_{A_3'} + L_4(j), l_{A_3', A_4'} + L_4(A_4'), l_{A_3', A_4''} + L_4(A_4'')\} = \min\{120+80; 150+60; 200+140\} = 200 \text{ м}.$$

$$L_3(A_3'') = \min\{l_{A_3''} + L_4(j), l_{A_3'', A_4'} + L_4(A_4'), l_{A_3'', A_4''} + L_4(A_4'')\} = \min\{100+80; 150+60; 80+140\} = 180 \text{ м}.$$

Мінімум у даному випадку досягається при  $x_3(A_3') = A_4'$ ;  $x_3(A_3'') = A_4'$ ,  
При  $\kappa = 2$  відповідно будемо мати:

$$L_2(A_2') = 80 + 200 = 280\text{м}, x_2(A_2') = A_3';$$

$$L_2(A_2'') = \min\{40 + 200; 50 + 180\} = 230, x_2(A_2'') = A_3'';$$

$$L_2(A_2''') = \min\{180 + 200; 70 + 180\} = 250, x_2(A_2''') = A_3'''.$$

При  $\kappa = 1$  відповідно будемо мати:

$L_1(A_1) = \min\{40 + 280; 60 + 230; 50 + 250\} = 290$  м. Мінімум у даному випадку досягається при  $x_1(A_1) = A_2''$

Згідно із результатами найкоротша довжина електромережі 0,4 кВ від  $A_1$  до  $A_5$  дорівнює 290 м.

## ТЕМА 6. ТРАНСПОРТНІ ЗАДАЧІ В ЕНЕРГЕТИЦІ

### ПЛАН

6.1 Особливості і загальні принципи розв'язання транспортних задач

6.2 Алгоритм транспортної задачі

6.3 Приклади розв'язання транспортних задач із застосуванням різних методів

#### 6.1 Особливості і загальні принципи розв'язання транспортних задач

Як уже зазначалось, симплексний метод є універсальним методом розв'язування задач лінійного програмування з неперервними аргументами. Проте існують групи задач лінійного програмування, які мають такі особливості структури, що дають змогу побудувати значно простіші методи розв'язування, ніж симплексний метод.

Найважливішим типом згаданих задач є так звані транспортні задачі, в яких цільовою функцією є, наприклад відшукання шляхів мінімізації довжини розподільчих електричних мереж, зменшення загальної вартості транспортування електричної енергії від джерел живлення до споживачів, оптимізація витрат на схему електричної мережі, яка складається з лінії електропередачі, які зв'язують вузли джерел живлення з вузлами споживачів та ін.

Прикладом застосування транспортної задачі може бути проєктована система електропостачання, в якій маємо кількість вузлів джерел живлення  $i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) та кількість вузлів споживання  $j$  ( $j = 1, 2 \dots m$ ). Потужність кожного джерела становить  $A_i$ , а потужність кожного споживача –  $B_j$  одиниць потужності (о.п.). Відома схема та взаємне розміщення джерел живлення, споживачів, вартість передачі одиниці потужності від джерел живлення  $i$  до споживача  $j$ , яка становить  $c_{ij}$ , у.о/о.п. Загальна кількість можливих варіантів будівництва електричних мереж (джерело-споживач) –  $nm$ .

Потужності, які передають по цих мережах являють собою шукані змінні  $X_{ij}$ , тобто кількість їх становить  $nm$ .

Загальні витрати на електричні мережі в цьому випадку повинні дорівнювати сумі добутку питомих вартостей на величину потужностей, які передають від джерел живлення ( $i$ ) до споживачів ( $j$ ). При таких умовах цільова функція може мати такий вигляд:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min. \quad (6.1)$$

Базуючись на законах теоретичних основ електротехніки і, в першу чергу, на першому законі Кірхгофа, робимо висновок, що для кожного  $i^{\text{го}}$  джерела живлення сума потужностей, що надходять по лініях до всіх споживачів ( $j = 1 \dots m$ ) дорівнює потужності  $A_i$  цього джерела:

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = A_i. \quad (6.2)$$

Для кожного  $j^{\text{го}}$  споживача сума потужностей, які надходять по лініям від всіх джерел живлення ( $i = 1, 2 \dots n$ ), дорівнює  $B_j$  цього споживача:

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = B_j. \quad (6.3)$$

Наведені вирази (6.2) та (6.3) являють собою баланси потужності в кожному з вузлів і разом з тим обмеження при вирішенні транспортної задачі, кількість останніх в цьому випадку дорівнює кількості вузлів джерел живлення та споживачів, тобто  $n + m$ .

Аналізуючи умови наведеної задачі, граничні умови мають вигляд:

$$X_{ij} \geq 0; \quad i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m. \quad (6.4)$$

Вирази (6.1), (6.2), (6.3) та (6.4) являють собою математичну модель цієї транспортної задачі, в якій (цільова функція) і обмеження є лінійними. Таким чином, ця задача як лінійна може бути вирішена симплекс-методом. Але вирішення її цим методом є недоцільним завдяки складній розрахунковій процедурі.

Нижче наводиться приклад більш простого рішення із застосуванням спеціальних методів, які базуються на особливостях транспортних задач, а саме:

- всі обмеження мають форму рівностей;
- всі коефіцієнти при змінних у системі обмежень дорівнюють плюс одиниці (+1);
- кожна змінна двічі входить у систему обмежень; перший раз у баланси вузлів джерел живлення (6.2), другий раз у баланси вузлів споживачів (6.3).

Вирішення транспортної задачі в загальному вигляді розглянемо на прикладі.

Приклад. Проектується система електропостачання, яка має два вузли джерел живлення та три вузли споживачів. Відповідно потужності джерел живлення складають  $A_1$  та  $A_2$ , а потужності споживачів –  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  одиниць потужності. Схема системи, що проектується, і можливі варіанти побудови електричних мереж подано на рис 6.1. Питомі витрати на передачу потужності по електричних мережах між вузлами джерел живлення і споживачів становлять  $c_{11}$ ,  $c_{12}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{21}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$  у.о/о.п.

Скласти математичну модель для розв'язання транспортної задачі.

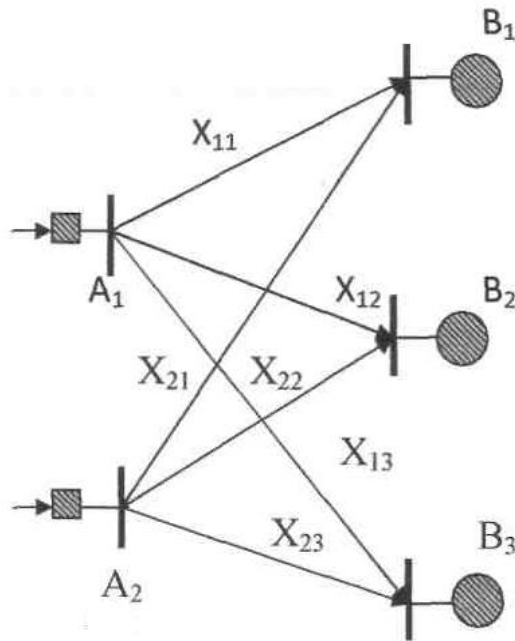


Рис.6.1. Розміщення вузлів та можливі варіанти проектування електричних мереж

Розв'язання. Цільова функція при цьому буде мати вигляд сумарних грошових витрат на електричні мережі відповідно до виразу (6.1):

$$C = c_{11}X_{11} + c_{12}X_{12} + c_{13}X_{13} + c_{21}X_{21} + c_{22}X_{22} + c_{23}X_{23} \rightarrow \min.$$

Обмеження відповідно до виразів (6.2) та (6.3), а також до граничних умов (6.4) будуть мати такий вигляд:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = A_1;$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = A_2;$$



$$X_{11} + X_{21} = B_1;$$

$$X_{12} + X_{22} = B_2;$$

$$X_{13} + X_{23} = B_3;$$

$$X_{11} \geq 0; X_{12} \geq 0; X_{13} \geq 0; X_{21} \geq 0; X_{22} \geq 0; X_{23} \geq 0.$$

Наведені вирази практично являють собою математичну модель транспортної задачі для схеми (рис. 6.1), а також умови задачі.

При розв'язанні транспортних задач доцільно користуватися табличною формою запису. В цьому випадку обмеження записують у вигляді транспортної матриці (табл. 6.1) розмірністю  $nm$  ( $n$  – кількість вузлів джерел живлення,  $m$  – вузлів споживачів).

### 6.1. Транспортна матриця

$X_{11}$ $c_{11}$	$X_{12}$ $c_{12}$	$X_{13}$ $c_{13}$	$A_1$
$X_{21}$ $c_{21}$	$X_{22}$ $c_{22}$	$X_{23}$ $c_{23}$	$A_2$
$B_1$	$B_2$	$B_3$	$C$

Кожний  $i^{\text{й}}$  рядок матриці відповідає рівнянню балансу потужності  $i^{\text{го}}$  джерела живлення, а кожний  $j^{\text{й}}$  стовпчик – рівнянню балансу потужностей  $j^{\text{го}}$  споживача.

Допустиме рішення може бути отримано за алгоритмом мінімальної питомої вартості.

1. У транспортній матриці вибираємо клітинку з мінімальним значенням  $C_{ij}$ . У випадку декількох – вибирається будь-яка з них.

2. У цю клітинку як базисну змінну заносимо найменшу з двох величин  $A_i$  чи  $B_j$ , тобто  $X_{ij} = \min(A_i, B_j)$ . При цьому виконуємо баланс потужності по рядку  $i$  та стовпчику  $j$ , в які входить змінна  $X_{ij}$ .

3. В інші клітинки рядка  $i$  та стовпчика  $j$ , для яких баланс потужностей вже виконано, заносимо нулі, які відповідають вільним змінним. Більшу величину (з  $A_i$  та  $B_j$ ) умовно заміняємо різницею цих величин.

4. З клітинок транспортної матриці, які залишилися незаповненими знову вибирають клітинку з мінімальним значенням  $C_{ij}$ . Після цього п.2 і 3 повторюють до повного заповнення всіх клітинок транспортної матриці.

Тут треба нагадати, що кількість змінних становить  $nm$ , кількість базисних змінних, які відрізняються від нуля –  $(n + m - 1)$ , а кількість вільних змінних, які дорівнюють нулю –  $(nm - (n + m - 1))$ , що відповідає першому закону Кірхгофа (для кожної електричної мережі кількість незалежних рівнянь на одиницю менша кількості вузлів).

## 6.2. Алгоритм транспортної задачі

1. Складаємо транспортну матрицю (табл. 6.1) розмірністю  $nm$ , де  $n$  – кількість джерел енергії,  $m$  – кількість споживачів.

2. Знаходимо допустиме рішення із застосуванням методу найменшої питомої вартості.

3. Для допустимого рішення  $i^{\text{му}}$  рядку  $i$  кожному  $j^{\text{му}}$  стовпчику транспортної матриці надаємо значення потенціалу  $V_i$  та  $U_j$  ( $i = 1, 2 \dots n; j = 1, 2 \dots m$ ). Для кожної базисної змінної сума потенціалів дорівнює питомій вартості  $V_i + U_j = C_{ij}$ .

4. Довільно задаючись значенням одного з потенціалів за рівнянням  $V_i + U_j = C_{ij}$ , слухним для базисних змінних, розраховуємо значення решти потенціалів.

5. Для всіх вільних змінних перевіряємо співвідношення суми потенціалів з питомою вартістю. У випадку, коли всі вільні змінні  $V_i + U_j < C_{ij}$  рішення є оптимальним.

6. Для випадку, коли серед вільних змінних, для яких  $V_i + U_j > C_{ij}$ , обираємо кожну з вільних змінних і переводимо її в базис. Для цього будуємо цикл перерахунку, початкова вершина якого знаходиться в клітинці обраної вільної змінної. Всі інші вершини циклу розміщуються в клітинках, які відповідають базисним змінним. Початковій вершині циклу надається знак "+", що відповідає збільшенню змінної. В подальшому знаки вершин циклу змінюються по черзі. Знаки "-" відповідають збільшенню, а знаки "+" зменшенню базисних змінних.

7. З від'ємних вершин циклу вибирають вершину з найменшим значенням базисної змінної і на цю величину змінюють всі змінні, які знаходяться у вершинах циклу. У позитивних вершинах змінні збільшуються, у від'ємних – зменшуються.

При цьому обрана вільна змінна стає базисною, а найменша за величиною базисна змінна у від'ємній вершині циклу стає вільною, тобто дорівнює нулю.

8. Для заново отриманого рішення розрахункова процедура повторюється, починаючи з п. 3. наведеного алгоритму.

Розв'язання транспортних задач можна здійснювати шляхом визначення допустимого (опорного) рішення, яке, в свою чергу, може бути покращено із застосуванням розподільного методу.

Так, для покращення допустимого (опорного) рішення в деяких випадках застосовують розподільний метод, суть якого полягає в тому, що кількість вільних і базисних змінних не змінюється, а саме покращення результату здійснюється за рахунок переведення однієї із вільних змінних у розряд базисних. Розв'язання задачі із застосуванням розподільного методу наведено нижче.

Разом з тим, треба зазначити, що в даному методі для кожної вільної змінної необхідно будувати окремі цикли і визначати послідовні зміни цільової функції, що являє собою достатньо трудомісткий процес. Враховуючи це, для покращення допустимого (опорного) рішення в багатьох випадках використовують метод потенціалів, який в принципі являє модифікацію розподільного методу. Реалізація цього методу розглянута як подальше покращення рішення задачі на базі транспортної матриці, наведеної в таблиці.

### **6.3 Приклади розв'язання транспортних із застосуванням різних методів**

Застосування допустимого рішення розглянуто в задачі 6.1.

*Задача 6.1.* Застосування допустимого рішення розглянемо на прикладі мінімізації питомих витрат на передачу електричної потужності по лініях між вузлами джерел і споживачів при таких вихідних даних:

– потужність джерел електричної енергії  $A_1$  та  $A_2$  становлять відповідно 50 та 30 умовних одиниць потужності (у. о. п.);

– потужність споживачів електричної енергії відповідно:  $B_1 = 20$ ;  $B_2 = 25$ ;  $B_3 = 35$  у. о. п.;

– питомі витрати на передачу потужності по електричних мережах між вузлами джерел енергії та споживачами становлять відповідно:

–  $C_{11} = 1,2$ ;  $C_{12} = 1,8$ ;  $C_{13} = 1,5$ ;  $c_{21} = 1,6$ ;  $C_{22} = 2,3$ ;  $C_{23} = 2,1$  умовних одиниць вартості на умовну одиницю потужності  $\left( \frac{y.o.}{y.o.n.} \right)$ .

Первинна схема електричної мережі наведена на рис. 6.1.

Розв'язання. Відповідно до алгоритму мінімальної питомої вартості (п. 6.2) складаємо транспортну матрицю розмірністю  $2 \times 3$  ( $n=2, m=3$ ), яка наведена в табл. 6.2.

### 6.2. Транспортна матриця

20 ( $c_{11}$ )	( $x_{11}$ ) 1,2	0 ( $c_{12}$ )	( $x_{12}$ ) 1,8	30 ( $c_{13}$ )	( $x_{13}$ ) 1,5	$A_1 = 50$
0 ( $c_{21}$ )	( $x_{21}$ ) 1,6	25 ( $c_{22}$ )	( $x_{22}$ ) 2,3	5 ( $c_{23}$ )	( $x_{23}$ ) 2,1	$A_2 = 30$
$B_1 = 20$		$B_2 = 25$		$B_3 = 35$		$C = 137$

У матриці вибираємо клітинку з мінімальним значенням  $C_{ij}$ . Це буде клітинка зі змінною  $x_{11}$  та питомою вартістю  $c_{11} = 1,3$ .

У цю клітинку як базисну змінну записуємо найменше з двох значень потужностей, тобто  $x_{11} = \min(A_1 = 50, B_1 = 20) = 20$ . Баланс для першого стовпчика (перший споживач) виконано ( $20 = 20$ ). У клітинки, які залишилися в цьому стовпчику, записуємо нулі (вільна змінна  $x_{21} = 0$ ).

Враховуючи, що від джерела  $A_1$  відібрано 20 у.о.п, які надходять до споживача  $B_1$ , потужність цього джерела умовно можна замінити величиною 30 у.о.п ( $50 - 20 = 30$ ).

Серед незаповнених клітинок, що залишилися, транспортної матриці (табл. 6.2) вибираємо клітинку з найменшим значенням питомої вартості, тобто зі значенням  $c_{13} = 1,5$ . Як базисну змінну в цю клітинку записуємо найменше з двох значень потужностей, тобто  $x_{13} = \min(A_1 = 30, B_3 = 35) = 30$ . Таким чином баланс для першого рядка (першого джерела енергії) виконано.

У клітинки, які залишилися в цьому рядку, записуємо нулі (вільна змінна  $x_{12} = 0$ ).

Розглядаючи в подальшому транспортну матрицю, бачимо, що споживачу  $B_3$  надходить 30 у.о.п. В цьому випадку потужність цього споживача можна умовно замінити величиною 5 у.о.п. ( $35 - 30 = 5$ ). Серед незаповнених клітинок транспортної матриці (табл. 8.11) вибираємо клітинку з найменшим значенням питомої вартості, тобто зі значенням  $c_{23} = 2,1$ . Як базисну змінну в цю клітинку записуємо найменше з двох значень потужностей, тобто  $x_{23} = \min(A_2 = 30, B_3 = 5) = 5$ . Таким чином, і в цьому випадку баланс для третього стовпчика (третього споживача) виконано.

Аналогічно до попередніх дій бачимо, що від джерела  $A_2$  до споживача  $B_3$  надходить 5 у.о.п. Таким чином, потужність цього джерела ( $A_2$ ) умовно можна замінити величиною  $30 - 5 = 25$  у.о.п.

Останнє значення записуємо в клітинку транспортної матриці, що залишилася як базисну змінну  $x_{22} = 25$ .

Аналізуючи транспортну матрицю (табл. 6.2), яку ми отримали, можна стверджувати, що баланси потужності як по вузлах джерел (рядки), так і по вузлах споживачів (стовпчики) використовуються, а всі змінні невід'ємні. Таке рішення можна вважати допустимим і значення цільової функції буде:

$$C = c_{11} \cdot x_{11} + c_{12} \cdot x_{12} + c_{13} \cdot x_{13} + c_{21} \cdot x_{21} + c_{22} \cdot x_{22} + c_{23} \cdot x_{23},$$

$C = 1,2 \cdot 20 + 1,8 \cdot 0 + 1,5 \cdot 30 + 1,6 \cdot 0 + 2,3 \cdot 25 + 2,1 \cdot 5 = 137$  у.о, яке записуємо в транспортну матрицю.

У цьому випадку схема електричної мережі (рис. 6.2) значно відрізняється від первинної схеми.

Застосування розподільного методу розглянуто у задачі 6.2.

Задача 6.2. Покращення отриманого рішення здійснюємо із застосуванням розподільного методу, тобто шляхом переведення однієї з базисних змінних у розряд вільних і однієї з вільних у розряд базисних. При цьому кількість вільних і базисних змінних не змінюється.

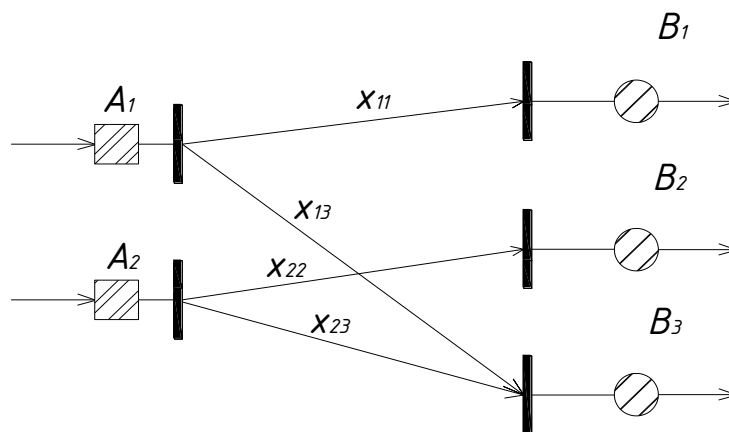


Рис. 6.2. Схема електричної мережі, яка відповідає допустимому рішенняю

Розглянемо попередньо табл. 6.2 та отримане допустиме рішення, в якому є дві вільні змінні  $x_{12}$  та  $x_{21}$ . Довільно приймаємо змінну  $x_{21}$  і збільшуємо її значення від нуля до одиниці ( $x_{21} = 1$ ).

Після цього будемо табл. 6.3, в якій бачимо, що така змінна порушує баланс потужності по 1<sup>му</sup> стовпчику та 2<sup>му</sup> рядку.

### 6.3. Трансформація транспортної матриці при розподільному методі

-19 ( $c_{11}$ )	( $x_{11}$ ) 1,2	0 ( $c_{12}$ )	( $x_{12}$ ) 1,8	+31 ( $c_{13}$ )	( $x_{13}$ ) 1,5	$A_1 = 50$
+1 ( $c_{21}$ )	( $x_{21}$ ) 1,6	25 ( $c_{22}$ )	( $x_{22}$ ) 2,3	-4 ( $c_{23}$ )	( $x_{23}$ ) 2,1	$A_2 = 30$
$B_1 = 20$		$B_2 = 25$		$B_3 = 35$		$C = 136,8$

Для відновлення балансів зменшимо на одиницю значення базисних змінних, які входять в 1<sup>й</sup> стовпчик та 2<sup>й</sup> рядок і отримаємо  $x_{12} = 19, x_{23} = 4$ . При цьому бачимо порушення балансу по 1<sup>му</sup> рядку і 3<sup>му</sup> стовпчику. Для відновлення балансів потужності по всіх рядках і стовпчиках, базисну змінну  $x_{13}$ , яка знаходиться на перетині 1<sup>го</sup> рядка і 3<sup>го</sup> стовпчика, збільшуємо на одиницю ( $x_{13} = 31$ ).

У результаті наведених вище дій в транспортній матриці отримуємо замкнутий цикл, величини якого помічені знаками „+” та „-”. Початкова вершина циклу розміщена в клітинці вільної змінної ( $x_{21}$ ), яка переводиться в базис. Всі інші вершини знаходяться в клітинках базисних змінних –  $x_{11}, x_{13}, x_{23}$ . При цьому знак „+” у вершині циклу відповідає збільшенню змінної, а знак „-” зменшенню її.

Зміна цільової функції в цьому випадку визначається як алгебраїчна сума питомих вартостей, які знаходяться у вершинах циклу. Таким чином, зміна цільової функції при збільшенні на одиницю вільної змінної  $x_{21}$  становить:

$$\Delta C = C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{23} = 1,6 - 1,2 + 1,5 - 2,1 = -0,2 < 0 \quad (6.5)$$

З (6.5) бачимо, що при збільшенні  $x_{21}$  (вільна змінна) значення цільової функції зменшується, що дає підстави перевести її ( $x_{21}$ ) у базис.

Аналогічні дії можна виконати і з  $x_{12}$ . Цільова функція буде:

$$\Delta C = C_{12} - C_{13} + C_{23} - C_{22} = 1,8 - 1,5 + 2,1 - 2,3 = 0,1 > 0. \quad (6.6)$$

З (6.6) бачимо, що значення цільової функції збільшується, що дає всі підстави  $x_{12}$  переводити в базис.

Виходячи з результатів (6.5) і (6.6) робимо висновок, що в базис необхідно перевести  $x_{21}$ .

Відповідно до знаку вершин циклу (табл. 6.3) при збільшенні змінної в позитивний бік базисні змінні  $x_{11}$  і  $x_{23}$  будуть зменшуватися, а  $x_{13}$  – збільшуватися.

Природно, що першою досягне нульового значення і стане вільною змінною  $x_{23}$ , менша з базисних змінних у від'ємних вершинах циклу. Вільна змінна  $x_{21}$  прийме значення змінної  $x_{23}$  і стане базисною, а базисні змінні  $x_{11}$ ,  $x_{13}$  зміняться на величину змінної  $x_{23}$  відповідно до знаків у вершинах циклу.

Це обумовить можливість отримання нового допустимого рішення (табл. 6.4), а значення цільової функції буде:

$$\begin{aligned} C &= C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + C_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23} = \\ &= 1,2 \cdot 15 + 1,8 \cdot 0 + 1,5 \cdot 35 + 1,6 \cdot 5 + 2,3 \cdot 25 + 2,1 \cdot 0 = 136 \text{ у.о} \end{aligned}$$

#### 6.4. Нові значення цільової функції

15 1,2	0 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
5 1,6	25 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$C = 136,8$

Значення цільової функції покращилось у порівнянні з попереднім рішенням ( $136 < 137$ ).

Схема електричної мережі в цьому випадку буде (рис. 6.3).

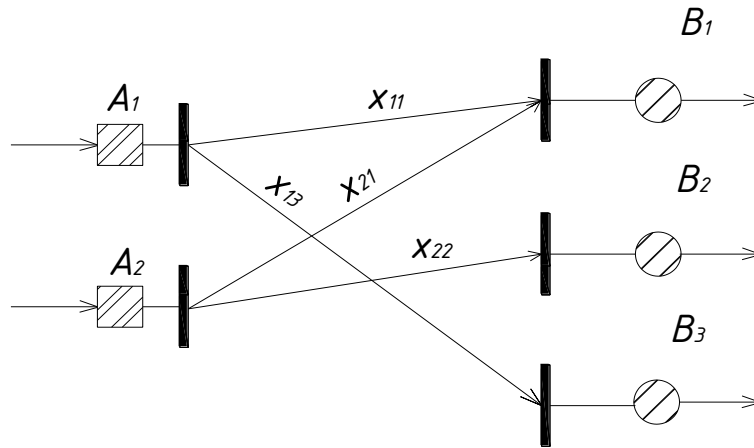


Рис. 6.3. Схема електричної мережі

Застосування методу потенціалів розглянуто в задачі 6.3.

*Задача 6.3.* Отримане вище рішення спробуємо покращити із застосуванням методу потенціалів, який в принципі являє собою модифікацію розподільного методу.

Відповідно до методу потенціалів надаємо кожному рядку і кожному стовпчику табл. 6.5 відповідні потенціали  $V_i (i=1,2..n)$  та  $U_j (j=1,2...m)$ , які вписуємо в табл. 6.5.

#### 6.5. Модифікація розподільного методу

	$U_1 = 1,0$	$U_2 = 1,7$	$U_3 = 1,3$	—
$V_1=0,2$	15 ( $c_{11}$ )	0 ( $c_{12}$ )	35 ( $c_{13}$ )	$A_1 = 50$
$V_2=0,6$	5 ( $c_{21}$ )	25 ( $c_{22}$ )	0 ( $c_{23}$ )	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$C = 136$

Ці потенціали такі, що для кожної базисної змінної їх сума дорівнює питомій вартості :

$$V_i + U_j = C_{ij}. \quad (6.7)$$

Базуючись на співвідношенні (6.7), по якому було розраховано змінну цільової функції при збільшенні вільної змінної  $x_{21}$  на одиницю і замінюючи в цьому співвідношенні питомі вартості базисних змінних потенціалами, маємо:



$$\Delta C = C_{21} - C_{11} + C_{13} - C_{23} = C_{21} - V_1 - U_1 + V_1 + U_3 - V_2 - U_3 = C_{21} - V_2 - U_1 < 0. \quad (6.8)$$

Аналізуючи (6.8), видно, що за умову  $V_2 + U_1 > C_{21}$  переведення вільної змінної  $x_{21}$  в базис буде зменшувати цільову функцію  $S$ . Аналогічно в співвідношенні (6.8) таку ж саму процедуру зробимо із вільною змінною  $x_{12}$  і будемо мати :

$$\Delta C = C_{12} - C_{13} + C_{23} - C_{22} = C_{12} - V_1 - U_3 + V_2 + U_3 - V_2 - U_2 = C_{12} - V_1 - U_2 > 0. \quad (6.9)$$

Аналізуючи (6.9), видно, що при умові  $V_1 + U_1 < C_{21}$  переведення вільної змінної  $x_{12}$  в базис буде збільшувати цільову функцію  $S$ .

У загальному вигляді за умову:

$$V_i + U_j > C_{ij}, \quad (6.10)$$

та за умову:

$$V_i + U_j < C_{ij}, \quad (6.11)$$

відповідно переведення вільної змінної  $x_{ij}$  в першому випадку зменшує, а в другому збільшує цільову функцію  $C_{ij}$ .

Кількість невідомих потенціалів становить  $(n + m)$ , а кількість базисних змінних  $(n + m - 1)$ .

У системі рівнянь кількість невідомих потенціалів на одиницю більше числа рівнянь. Таким чином, система (6.7) є невизначеною і має нескінченну кількість рішень.

У зв'язку з цим для отримання рішення системи (6.7) довільно приймаємо величину одного із потенціалів:  $U_1 = 1$ , що обумовлює можливість визначення всіх інших потенціалів згідно з рівнянням (6.7).

У першому випадку (див. табл. 6.5) маємо:

$$U_1 = 1;$$

$$V_1 = C_{11} - U_1 = 1,2 - 1,0 = 0,2;$$

$$V_2 = C_{21} - U_1 = 1,6 - 1,0 = 0,6;$$

$$U_2 = C_{22} - V_2 = 2,3 - 1,6 = 1,7;$$

$$U_3 = C_{13} - V_1 = 1,5 - 0,2 = 1,3.$$

Перевіряючи умови (6.10) і (6.11) для вільних змінних у транспортній матриці (див. табл. 6.5), наприклад для вільної змінної  $x_{23}$  маємо:  $V_2 + U_3 = 0,6 + 1,3 = 1,9 < C_{23} = 2,1$ , що свідчить про недоцільність переведення її в базис, тому що це обумовить збільшення цільової функції  $C$ .

Для вільної змінної  $x_{12}$  маємо:  $V_1 + U_2 = 0,2 + 1,7 = 1,9 > C_{12} = 1,8$ , що свідчить про доцільність переведення її в базис, тому що це обумовлює зменшення цільової функції  $C$ .

Для вільної змінної  $x_{12}$  будемо цикл перерахунку (табл. 6.6) і з від'ємних вершин циклу вибираємо меншу базисну змінну  $x_{11} = 15$ . Ця змінна перейде в розряд вільних  $x_{11} = 0$ , а змінна  $x_{12}$  стане базисною  $x_{12} = 15$ .

Відповідно до знаків у вершинах циклу базисна змінна  $x_{21}$  збільшується на 15 одиниць і буде дорівнювати:  $x_{21} = 5 + 15 = 20$ , а базисна змінна  $x_{22}$  повинна зменшитись на 15 одиниць і буде дорівнювати:  $x_{22} = 25 - 15 = 10$ .

#### 6.6. Перерахунок для вільної змінної $x_{12}$

	$U_1 = 1,0$	$U_2 = 1,7$	$U_3 = 1,3$	–
$V_1 = 0,2$	-15 ( $c_{11}$ ) 1,2 $(x_{11})$	+0 ( $c_{12}$ ) 1,8 $(x_{12})$	35 ( $c_{13}$ ) 1,5 $(x_{13})$	$A_1 = 50$
$V_1 = 0,6$	+5 ( $c_{21}$ ) 1,6 $(x_{21})$	-25 ( $c_{22}$ ) 2,3 $(x_{22})$	0 ( $c_{23}$ ) 2,1 $(x_{23})$	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$C = 136$

Із врахуванням наведених вище роз'яснень новому рішенню буде відповідати така транспортна матриця (табл. 6.7)

#### 6.7. Транспортна матриця

	$U_1 = 1,0$	$U_2 = 1,7$	$U_3 = 1,3$	–
$V_1 = 0,1$	0 1,2	15 1,8	35 1,5	$A_1 = 50$
$V_1 = 0,6$	20 1,6	25 2,3	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B_3 = 35$	$C = 134,5$

У цьому рішенні вільні змінні  $x_{11}=0$ ;  $x_{23}=0$ ; базисні змінні  $x_{12}=15$ ;  $x_{13}=35$ ;  $x_{21}=20$ ;  $x_{22}=10$  у.о.п., а значення цільової функції буде:

$$C = C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + C_{13} \cdot X_{13} + C_{21} \cdot X_{21} + C_{22} \cdot X_{22} + C_{23} \cdot X_{23} = \\ = 1,2 \cdot 0 + 1,8 \cdot 15 + 1,5 \cdot 35 + 1,6 \cdot 20 + 2,3 \cdot 10 + 2,1 \cdot 0 = 134 \text{ у.о.}$$

Перевіримо це рішення на оптимальність. Довільно задаючись значенням одного з потенціалів  $U_1=1$ , всі інші потенціали згідно з рівнянням будуть дорівнювати:

$$V_2 = C_{22} - U_1 = 1,6 - 1,0 = 0,6;$$

$$U_3 = C_{22} - V_2 = 2,3 - 0,6 = 1,7;$$

$$V_1 = C_{12} - U_2 = 1,8 - 1,7 = 0,1;$$

$$U_3 = C_{13} - V_1 = 1,5 - 0,1 = 1,4.$$

Для вільних змінних  $x_{11}$  і  $x_{23}$  суму потенціалів порівнюємо з питомою вартістю:

$$V_1 + U_1 = 0,1 + 1,0 = 1,1 < C_{11} = 1,2;$$

$$V_2 + U_3 = 0,6 + 1,4 = 2,0 < C_{12} = 2,1.$$

Відповідно до умови (6.11) переведення кожної із змінних у базис призведе до збільшення цільової функції  $C$ . Таким чином, отримане рішення є оптимальним і схема електричної мережі буде (рис. 6.4).

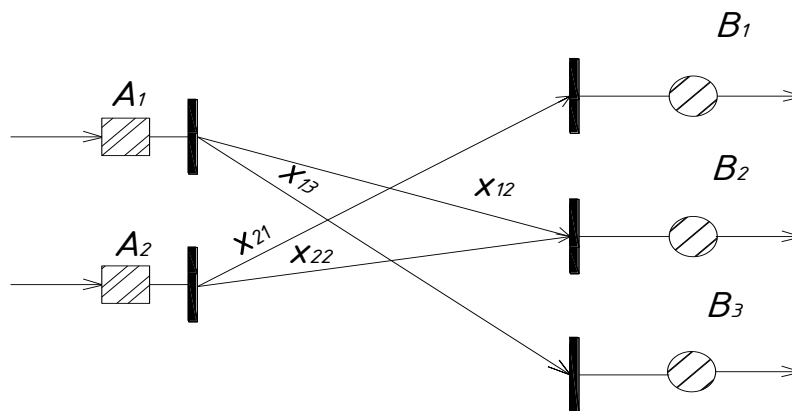


Рис. 6.4. Оптимальна схема електричної мережі згідно з умовами (задача № 6.1)

У реальних умовах при проектуванні або модернізації систем електропостачання дуже часто виникають проблеми обмеження пропускної здатності по існуючій мережі, що обумовлюється нагрівом її проводів.

Таке обмеження при вирішенні транспортних задач вираховують так:

1. Стовпчик  $j$  транспортної матриці, який відповідає споживачеві з потужністю  $B_j$  розбивають на два стовпчики:  $B'_j = B_j - S; B''_j = 5$ .

2. Для змінної між джерелами та споживачем  $B'_j$  здійснюється балансування передачі потужності, наприклад прийняттям дуже великого значення показника питомої потужності.

Нижче наведено розв'язання задачі із врахуванням обмеження пропускної здатності електричних мереж.

*Задача 6.4.* Умова аналогічна задачі 6.3, тільки вона розглядається з умовою, коли потужність, яка передається по лінії  $x_{13}$ , обмежена величиною 20 у.о.п. ( $x_{13} \leq 20$ ).

Розв'язання цієї задачі починаємо з розбивання третього стовпчика (див. табл. 6.2) ( $B'_3 = 35 - 20 = 15; B''_3 = 20 \text{ у.о.п.}$ ). Питому вартість передачі потужності від джерела  $A_1$  до умовного споживача  $B'_3$  приймаємо дуже великою, наприклад 200 у.о./у.о.п. Всі інші питомі вартості такі ж самі як і в табл. 6.2.

Допустиме рішення отримаємо із застосуванням методу найменшої питомої вартості, яка наведена в табл. 6.8.

6.8. Транспортна матриця із застосуванням методу найменшої питомої вартості

	$U_1 = 1,0$	$U_2 = 1,6$	$U'_3 = 1,4$	$U''_3 = 1,3$	–
$V_1=0,2$	-20 ( $c_{11}$ )	+10 ( $c_{12}$ )	0 ( $c'_{13}$ )	20 ( $c''_{13}$ )	$A_1 = 50$
$V_2=0,7$	( $c_{21}$ )	1,2 ( $c_{22}$ )	1,8 ( $c'_{23}$ )	200 ( $c''_{23}$ )	1,5 $A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B'_3 = 15$	$B''_3 = 20$	$C = 138$

У цьому рішенні вільні змінні  $x'_{13}, x_{21}, x''_{23}$  дорівнюють нулю ( $x'_{13} = x_{21} = x''_{23} = 0$ ); базисні змінні  $x_{11} = 20, x_{12} = 10, x_{13} = 20, x_{22} = 15, x_{23} = 15 \text{ у.о.п.}$

Значення цільової функції буде :

$$\begin{aligned}
 C &= C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + C'_{13} \cdot X'_{13} + C''_{13} \cdot X''_{13} + C_{21} \cdot X_{21} + C_{22} \cdot X_{22} + C'_{23} \cdot X'_{23} + C''_{23} \cdot X''_{23} = \\
 &= 1,2 \cdot 20 + 1,8 \cdot 10 + 200 \cdot 0 + 1,5 \cdot 20 + 1,6 \cdot 0 + 2,3 \cdot 15 + \\
 &\quad + 2,1 \cdot 15 + 2,1 \cdot 0 = 138 \text{ у.о}
 \end{aligned}$$

Для наступного кроку використовуємо метод потенціалів. Приймаємо довільне значення одного з потенціалів:  $U_1 = 1$ , а інші величини потенціалів, що залишилися, згідно з виразом  $V_i + U_j = Z_{ij}$ , який справедливий для базисних змінних (табл. 6.8).

У зв'язку з тим, що для вільної змінної  $x_{21}$ :  $V_2 + U_1 = 1,7 > c_{21} = 16$ , переводимо цю змінну в базис. Цикл перерахунку змінних наведено в табл. 6.8 знаками „+” та „-”. У ряду вільних перейде базисна змінна  $x_{22}$ . Нове доступне рішення подано в табл. 6.9.

6.9. Нове значення цільової функції

$V_1=0,2$	$U_1 = 1,0$ 5 1,2	$U_2 = 1,6$ 25 1,8	$U'_3 = 1,5$ 0 200	$U''_3 = 1,3$ 20 1,5	- $A_1 = 50$
$V_2=0,6$	15 1,6	0 2,3	15 2,1	0 2,1	$A_2 = 30$
	$B_1 = 20$	$B_2 = 25$	$B'_3 = 15$	$B''_3 = 20$	$C = 136,5$

Значення цільової функції згідно з даними табл.6.9 буде:

$$\begin{aligned}
 C &= C_{11} \cdot X_{11} + C_{12} \cdot X_{12} + C'_{13} \cdot X'_{13} + C''_{13} \cdot X''_{13} + C_{21} \cdot X_{21} + C_{22} \cdot X_{22} + C_{23} \cdot X'_{23} + C_{23} \cdot X''_{23} = \\
 &= 1,2 \cdot 5 + 1,8 \cdot 25 + 200 \cdot 0 + 1,5 \cdot 20 + 1,6 \cdot 15 + 2,3 \cdot 0 + \\
 &\quad + 2,1 \cdot 1,5 + 2,1 \cdot 0 = 136,5 \text{ у.о.}
 \end{aligned}$$

Таким чином, отримано результат, який менше ( $136,5 < 138 \text{ у.о.}$ ), ніж у попередньому розрахунку. Враховуючи те, що для всіх вільних змінних виконується умова (6.11), можна стверджувати про отримання оптимального результату. Так, ( $V_i + U_j < Z_{ij}$ ,) для клітинки  $x_{22}$  буде:  $0,6 + 1,6 < 2,3$ ; для клітинки  $x''_{23}$ :  $0,6 + 1,3 < 2,3$  тощо.

Схема, яка буде відповідати останньому (оптимальному) рішенню, наведена на рис. 6.5.

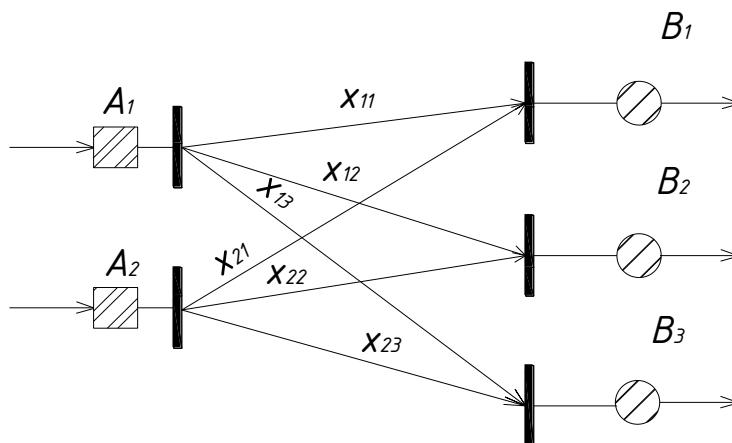


Рис. 6.5. Оптимальна схема електричної мережі

*Задача 6.5.* В електромеханічній майстерні на трьох типах верстатів виробляють чотири типи деталей. Продуктивність кожного верстату та собівартість матеріалів наведено в табл. 6.10.

Таблиця 6.10. Початкові умови

Тип верстата	Продуктивність верстата, дет/год при різних типах деталей				Собівартість (у.о.) при виготовленні дет/год			
	№1	№2	№3	№4	I	II	III	IV
I	24	30	18	42	2	1	3	1
II	12	15	9	21	3	2	4	1
III	8	10	6	14	6	3	5	2

Фонд робочого часу верстатів відповідно складає 30, 210 та 180 верстато-годин.

Треба розробити план їх завантаження, при якому собівартість при випуску деталей в кількості: №1 – 1200 шт, №2 – 900 шт, №3 – 1800 шт, №4 – 840 шт була б мінімальна.

Розв'язання. складаємо математичну модель із врахуванням того, що змінні  $x_{ij}$  повинні задовольняти наступним рівнянням:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 220 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 180 \end{cases}, \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} 24x_{11} + 12x_{21} + 8x_{31} = 1200 \\ 30x_{12} + 15x_{22} + 10x_{32} = 900 \\ 18x_{13} + 9x_{23} + 6x_{33} = 1800 \\ 42x_{14} + 21x_{24} + 14x_{34} = 840 \end{cases} \quad (6.13)$$

Змінні  $x_{ij}$ , повинні відповідати умові не невід'ємності:

$$x_{ij} \geq 0; \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Враховуючи умову задачі цільова функція буде:

$$\begin{aligned} F = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + \\ + x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 5x_{33} + 2x_{34} \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Наступним кроком зводимо математичну модель до моделі транспортної задачі шляхом переведення вихідних даних та невідомих величин до одної одиниці (приймаємо 1 верстатогодинну роботу верстатів I типу). Тоді продуктивність II та III типу верстатів буде відповідно складати  $\frac{1}{2}$  та  $\frac{1}{3}$  продуктивності верстатів I типу (табл. 6.10), фактичний фонд робочого часу в наведених верстатогодиннах буде: для II типу – 105, для III типу – 60 і складатиме:  $90 + 105 + 60 = 255$ .

Далі визначаємо який час потрібен для виготовлення відповідної кількості кожного типу деталей:

$$\begin{aligned} 1200/24 = 50; \quad 900/30 = 30; \quad 1800/18 = 100; \quad 840/42 = \\ = 20 \text{ верстатогодини.} \end{aligned}$$

Позначивши  $x'_{ij}$  кількість верстатогодин  $i^{\text{го}}$  типу, які використовують для виготовлення  $j^{\text{го}}$  вида деталей, систему рівнянь (6.12) та (6.13) можна переписати таким чином:

$$\begin{cases} x'_{11} + x'_{12} + x'_{13} + x'_{14} = 90 \\ x'_{21} + x'_{22} + x'_{23} + x'_{24} = 105 \\ x'_{31} + x'_{32} + x'_{33} + x'_{34} = 60 \end{cases}, \quad (6.15)$$

$$\begin{cases} x'_{11} + x'_{21} + x'_{31} = 50 \\ x'_{12} + x'_{22} + x'_{32} = 30 \\ x'_{13} + x'_{23} + x'_{33} = 100. \\ x'_{14} + x'_{24} + x'_{34} = 20 \end{cases} \quad (6.16)$$

де  $x'_{11} = x_{11}$ ;  $x'_{12} = x_{12}$ ;  $x'_{13} = x_{13}$ ,  $x'_{14} = x_{14}$ ;

$$x'_{21} = \frac{1}{2} x_{21}; \quad x'_{22} = \frac{1}{2} x_{22}; \quad x'_{23} = \frac{1}{2} x_{23}, \quad x'_{24} = \frac{1}{2} x_{24}; \quad (6.17)$$

$$x'_{31} = \frac{1}{3} x_{31}; \quad x'_{32} = \frac{1}{3} x_{32}; \quad x'_{33} = \frac{1}{3} x_{33}, \quad x'_{34} = \frac{1}{3} x_{34};$$

Цільова функція в цьому випадку буде мати вигляд:

$$F = 2x'_{11} + x'_{12} + 3x'_{13} + x'_{14} + 6x'_{21} + 4x'_{22} + 8x'_{23} + \\ + 2x'_{24} + 18x'_{31} + 9x'_{32} + 15x'_{33} + 6x'_{34} \rightarrow \min. \quad (6.18)$$

Враховуючи, що  $90 + 105 + 60 = 225 > 50 + 30 + 100 + 20 = 200$ . треба знайти рішення, яке обумовить так звану "фіктивну" потребу в деталях. тобто  $255 - 200 = 55$  верстатогодин.

Таблиця 6.11. Матриця

Тип верстату	Деталі					Залишок (деякі)	Виробнича потужність
	№1	№2	№3	№4			
I	2	1	3	1	0	90	
II	6	4	8	2	0	105	
	50	30	10	15			
III	18	9	15	6/5	0	60	
					55		
Потреби в деталях	50	30	100	20		255	
					55		

Аналізуючи табл. 6.11 маємо фактично оптимальний план задачі 6.5, який визначається матрицею:



$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 50 & 30 & 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.19)$$

Використовуючи співвідношення (6.17) отримуємо нову матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 & 0 & 0 \\ 100 & 60 & 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 165 \end{pmatrix}. \quad (6.20)$$

Таким чином, відповідно плану, передбачається використати 90 верстатогодини I типу верстатів для виготовлення деталей типу №3, відповідно 100, 60, 20 та 30 верстатогодини II типу верстатів для виготовлення усіх чотирьох типів деталей (№1 – №4) та 15 верстатогодин III типу верстатів для виготовлення деталей типу №4. Не важко перекопатися, що 155 верстатогодин III типу верстатів залишаються вільними.

Таким чином, згідно з планом на верстатах I типу виготовляють 1620 деталей типу №3, на верстатах II типу 1200 деталей типу №1, 900 типу №2, 180 типу №3 та 630 34, на верстатах III типу 210 деталей типу №4. При цьому 165 верстатогодин верстатів III типу можна використати для виготовлення понадпланової кількості деталей.

Собівартість при цьому буде мінімальною і складатиме:

$$F = 3 \cdot 1620 + 3 \cdot 1200 + 2 \cdot 900 + 4 \cdot 180 + 1 \cdot 630 + 2 \cdot 210 = 12030 \text{ у.о}$$

*Задача 6.6.* Механізована електромонтажна колона має  $n$  ( $n = 6$ ) видів робіт. При цьому сформовано  $n$  бригад ( $n = 6$ ) для їх виконання. Оскільки продуктивність окремої бригади на різних видах робіт таким чином, щоб всі види робіт кожною бригадою було виконано з максимальною продуктивністю.

Позначимо через  $C_{ij}$  оцінку продуктивності, яка може бути оцінена по різному (грошима, десятибальною (експертною) оцінкою та ін.). Тоді, позначивши оцінку продуктивності  $j^{\text{oi}}$  бригади при виконанні  $i^{\text{oi}}$  роботи, а через  $x_{ij}$  факт закріплення  $i^{\text{oi}}$  роботи бригадою будемо мати:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо роботу закріплено} \\ 0, & \text{якщо роботу не надано} \end{cases}, \quad (6.21)$$

Математична модель у вигляді цільової функції  $W$  може мати наступний вигляд:

$$W = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (6.22)$$

при відповідних обмеженнях:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1, \quad (i=1, \dots, n); \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1, \quad (j=1, \dots, n). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Обмеження (6.23) показує, що кожна робота "знайде" свого виконавця (бригаду) та кожен виконавець буде мати роботу.

Ця задача, у якій невідомі мають 2 індекси ( $a_i = 1, (i = 1, \dots, n); b_j = 1, (j = 1, \dots, n)$ ) є математичною моделлю, яка може бути розв'язана за допомогою стандартного алгоритму для задач лінійного програмування, наприклад з використанням програмного забезпечення Excel. Враховуючи, що  $a_i$  – вид роботи (кількість їх 6), а  $b_j$  – бригада (кількість їх 6) можна сформулювати наступну табл. 6.12 на основі попереднього розподілу із конкретною продуктивністю.

Таблиця 6.12. Нові дані на основі попереднього розподілу

Виконавці Робота	Оцінка продуктивності / Факт закріплення робіт					
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
$a_1$	21 / 1	48 / 0	23 / 0	11 / 0	19 / 0	65 / 0
$a_2$	13 / 0	63 / 1	37 / 0	18 / 0	97 / 0	59 / 0
$a_3$	37 / 0	100 / 0	75 / 1	87 / 0	79 / 0	97 / 0
$a_4$	62 / 0	84 / 0	51 / 0	75 / 1	28 / 0	76 / 0
$a_5$	26 / 0	70 / 0	10 / 0	57 / 1	83 / 1	11 / 0
$a_6$	37 / 0	16 / 0	28 / 0	85 / 0	99	61 / 1

Розв'язання здійснимо за допомогою програмного забезпечення Excel і отримуємо наступний результат (табл. 6.13), що і є розв'язком.

Таблиця 6.13. Матриця для розв'язання

Виконавці Робота	Факт закріплення робіт					
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$
$a_1$	0	0	0	0	0	1
$a_2$	0	0	0	0	1	0
$a_3$	0	0	1	0	0	0
$a_4$	1	0	0	0	0	0
$a_5$	0	1	0	0	0	0
$a_6$	0	0	0	1	0	0

Аналізуючи табл. 6.13 можна вважати, що максимальна продуктивність буде у випадку, коли: бригада  $b_1$  буде виконувати роботу  $a_4$  (оцінка продуктивності – 62),  $b_2 - a_5$ ,  $b_3 - a_3$  (75),  $b_4 - a_6$  (85),  $b_5 - a_2$  (87),  $b_6 - a_1$  (65).

# ТЕМА 7. ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА ТЕОРІЇ ІГОР

## ПЛАН

- 7.1 Шляхи розв'язання задач стохастичного програмування
- 7.2 Вибір рішень в умовах невизначеності із застосуванням теорії ігор
- 7.3 Основні методи розв'язання багатокритеріальних задач

### **7.1 Шляхи розв'язання задач стохастичного програмування**

Для вирішення таких задач використовують стохастичне програмування. При цьому, враховуючи те, що універсальних методів розв'язання задач стохастичного програмування практично не існує, в ряді випадків використовують підхід [1, 3, 7], який в принципі зводиться до усереднення випадкових величин, тобто в зведенні задачі до детермінованої. Такий підхід обумовлює можливість спрощення задачі та отримання плану, який з достатньою імовірністю можна вважати оптимальним.

У таких випадках задачі найдоцільніше поділити на декілька груп за такими умовами:

- задачі із стохастичними коефіцієнтами цільової функції та детермінованими умовами і змінними;
- задачі з детермінованою цільовою функцією і стохастичними коефіцієнтами системи обмежень;
- задачі з випадковими вільними членами функції обмежень.

Крім наведеного поділу, стохастичні задачі можна розглядати з позицій однокроковості чи багатокроковості їх розв'язання. Однокроковими є задачі, в яких розв'язок вибирається один раз і не змінюється при надходженні інформації про реалізацію випадкових параметрів. У таких задачах цільова функція та обмеження можуть вибиратися по-різному.

Як цільова функція можуть бути:

- математичне сподівання деякої функції від розв'язку;
- комбінація математичного сподівання і середнього квадратичного відхилення;
- імовірність потрапляння функції від розв'язку в деяку область.

Багатокрокові задачі, хоча і більше відповідають реальним умовам, являють собою значно складніші для розв'язання, і в першу чергу, завдяки постійному (на кожному кроці) корегуванню попередніх розв'язків. Крім цього, такі задачі мають стохастичні параметри і у цільовій функції, і в системі умов, що надзвичайно підвищує важкість їх розв'язання.

Як правило, задачі із випадковою інформацією зводять до їх детермінованого еквівалента. В цьому випадку випадкові величини змінюються їх характеристиками (математичне сподівання –  $m_x$ , середнє квадратичне відхилення –  $\sigma_x$ , ймовірність появи величини в конкретному інтервалі значень  $\rho$ ) і вважають, що випадкова величина має нормальний закон розподілу (розд. 1), який на практиці отримав найбільше розповсюдження. Нагадаємо, що згідно з цим законом випадкова величина знаходиться в інтервалі "трьох сигм", тобто:

$$m_x - 3\sigma_x \leq x_i \leq m_x + 3\sigma_x. \quad (7.1)$$

При розв'язанні практичних задач часто застосовують нормальний стандартний закон розподілу, який (рис. 7.1) описує імовірність появи стандартної випадкової величини  $\varepsilon$  в межах:  $-3 \leq \varepsilon \leq +3$ .

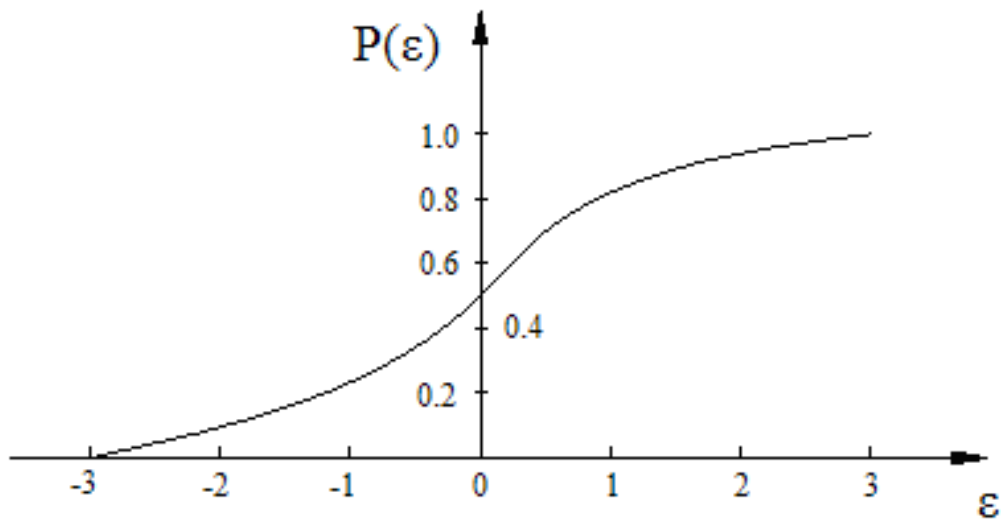


Рис.7.1. Функція розподілу нормального стандартного закону

Згідно з функцією розподілу, наприклад при імовірності  $P_{зад} = 0,4; 0,5; 0,6$  стандартна випадкова величина  $\varepsilon$  буде:  $-0,25; 0; +0,25$  (рис. 7.1), а при  $P_{зад} = 0,7$  стандартна випадкова величина  $\varepsilon \leq 0,5$ .

Зв'язок між випадковою величиною і стандартною випадковою величиною має таку залежність:

$$x_i = m_x + \varepsilon \sigma_x. \quad (7.2)$$

Математичні моделі, які належать до стохастичних задач лінійного програмування включають у себе цільову функцію, обмеження, граничні умови і мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_1x_1 + Z_2x_2 + \dots + Z_nx_n \rightarrow \text{extr} \\
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\
 \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m, \\
 d_i \leq x_i \leq D_i; i &= 1, 2 \dots n.
 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Нагадаємо, що в детермінованій постановці оптимізаційної задачі коефіцієнти  $Z_i, b_j, a_{ij}$  – постійні ( $i = 1, 2 \dots n; j = 1, 2 \dots n$ ) та межі змінних  $d_i, D_i$  однозначно визначені.

Так, за умову, при якій  $Z_i$  (коефіцієнти цільової функції) – випадкові величини, відшукують екстремальне значення математичного сподівання, тобто детермінований еквівалент цільової функції:

$$m_x(Z) = m_x(Z_1)x_1 + m_x(Z_2)x_2 + \dots + m_x(Z_n)x_n \rightarrow \text{extr} \quad (7.4)$$

У математичній моделі (7.3) для кожного  $j$ -го обмеження приймають так звану задану імовірність  $P_{\text{зад}j}$ , після чого визначають значення стандартної випадкової величини  $\varepsilon$  і в подальшому здійснюють згідно з (7.2) перехід від стандартної величини  $\varepsilon$  до випадкових величин наведеної вище задачі (7.3)  $a_{ij}$  та  $b_j$ .

За умову, що  $b_j$  – випадкові величини, детермінований еквівалент  $j$ -го обмеження буде:

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n \leq m_x(b_j) + \varepsilon\sigma_x(b_j), \quad (7.5)$$

де  $i = 1, 2 \dots m$ .

За умову, що  $a_{ij}$  – випадкові величини, детермінований еквівалент  $j^{\text{го}}$  обмеження буде:

$$m_x[a_{j1}]x_1 + m_x[a_{j2}]x_2 + \dots + m_x[a_{jn}]x_n + \varepsilon(\sigma_x[a_{j1}]x_1 + \sigma_x[a_{j2}]x_2 + \dots + \sigma_x[a_{jn}]x_n) \leq b_j \quad (7.6)$$

де  $i = 1, 2 \dots m$ .

Граничні умови залишаються без змін і мають такий вигляд:  
 $d_i \leq x_i \leq D_i, i = 1, 2 \dots n$ .

Таким чином, математична модель стохастичної задачі може бути зведена до детермінованого еквівалента (7.4), (7.5), (7.6).

Треба підкреслити, що в значній кількості стохастичних задач не всі коефіцієнти ( $Z_i, a_{ij}, b_j$ ) можуть бути випадковими величинами, а тільки один або декілька коефіцієнтів.

Як приклад розв'яжемо задачу із випадковою інформацією шляхом зведення математичної моделі до детермінованого еквівалента.

Умова. Для виготовлення продукції  $3^x$  видів ( $i = 1, 2, 3$ ) потрібно 3 види ресурсів – енергетичні, фінансові, сировинні ( $j = 1, 2, 3$ ). Норма витрат  $j^{\text{го}}$  ресурсу становить  $a_{ji}$ , наявність на

підприємстві кожного  $j^{\text{го}}$  ресурсу –  $b_j$ , прибуток від реалізації одного  $i^{\text{го}}$  виробу –  $Z_i$ , а мінімальна кількість всіх видів виробів, які виготовляються підприємством становить  $b_1$ .

Необхідно визначити максимальний прибуток, який може отримати підприємство при виробництві продукції 3-х видів

Серед критеріїв вибираємо економічний, тобто максимальний прибуток від реалізації всіх видів продукції  $\left( Z = \sum_{i=1}^n Z_i x_i \right)$ . Цільова функція буде мати вигляд:

$$Z = Z_1 x_1 + Z_2 x_2 + Z_3 x_3 \rightarrow \max. \quad (7.7)$$

При цьому система обмежень буде мати такий вигляд:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1, \quad (\text{за енергетичними ресурсами})$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2, \quad (\text{за фінансовими ресурсами}), \quad (7.8)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3, \quad (\text{за сировинними ресурсами}),$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq b_4 \quad (\text{сумарна мінімальна кількість}$$

продукції).

Граничні умови, враховуючи те, що вони не можуть бути негативними (кількість виробів завжди позитивна) мають вигляд:

$$x_i \geq 0; i = 1, 2, 3. \quad (7.9)$$

Вирази (7.7), (7.8) та (7.9) являють собою математичну модель оптимізаційної задачі.

Розглянемо випадок, коли кількість сировини надходить на підприємство нерівномірно, тобто величина  $b_3$  (третє обмеження у виразі 7.8) є випадковою (нерівномірність поставки).

Оскільки у виразі (7.8)  $b_3$  є випадковою величиною, цей вираз можна записати згідно з виразом (7.5):

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq m_x(b_3) + \varepsilon\sigma(b_3), \quad (7.10)$$

де  $\varepsilon$  – значення стандартної випадкової величини, яка базується на нормальному стандартному законі розподілу.



Для наочності розглянемо чисельний приклад (табл. 7.1) де наведена поставка сировини за деякий час підприємству, наприклад протягом дня, місяця та ін. в умовних одиницях.

Згідно з даними табл. 7.1 вираз (7.10) можна записати у вигляді:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq 50 + \sigma 10. \quad (7.11)$$

Аналізуючи вираз (7.11), можна стверджувати, що в обмеженні з'являється додатковий сировинний ресурс, значення та знак якого залежить від заданої імовірності.

### 7.1. Поставка сировини підприємству за деякий час

День/ тиждень/ місяць	1	2	3	4	5	6	7	Мате- матичне сподівання $m_x(b_3)$	Стандартне відхилення $\sigma(b_3)$
Поставка сировини ум.од.	60	65	45	40	55	45	40	50	10

Наприклад, при заданій імовірності ( $P_{зад} = 0,4; 0,5; 0,6$ ) стандартне значення згідно з кривою розподілу нормального стандартного закону буде:  $\pm \varepsilon \cdot 0,25$ . При заданій імовірності ( $P_{зад} = 0,8$ ) стандартне значення буде:  $\varepsilon \leq 0,84$ .

Запис (7.11) у цих випадках відповідно буде:

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq 50 + 0,25 \cdot 10;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq 50 + 0,84 \cdot 10.$$

Безумовно являє собою значний інтерес розв'язання задач, які забезпечують результати близькі до оптимальних. Такі задачі можна вирішувати з достатньо позитивним результатом за допомогою теорії імовірності. нижче наводиться ряд прикладів по розв'язанню задач із використанням теорії імовірності.

### 7.2. Вибір рішень в умовах невизначеності із застосуванням теорії ігор

Оптимізація енергетичної системи, енергетичного обладнання та ін. в напрямі енергозберігаючих заходів повинна базуватися на

пошуку можливостей модернізації структури та відповідних параметрів з метою мінімізації енерговитраті з врахуванням існуючих обмежень та вимог до питань виробництва, трансформації та використання електричної енергії.

У цілому ряді оптимізаційних задач часто розв'язання треба шукати в умовах невизначеності. Так, стосовно прийняття рішення щодо розміщення в енергосистемі нових електростанцій, генераторів, компенсуючих пристроїв, трансформаторних підстанцій, будівництва нових електричних мереж та ін. Прикладами невизначеної інформації можуть бути: перспективне зростання потужностей в енергетичній системі, визначення розумних (мінімальних) витрат тощо. В таких випадках методи математичного програмування непридатні і на зміну їм використовують апарат теорії ігор.

Теорія ігор – це математична теорія конфліктних ситуацій, метою якої є розробка рекомендацій щодо раціональної поведінки учасників конфлікту. Термін "теорія ігор" базується на тому, що побудова математичної моделі із врахуванням конфліктної ситуації, а сторонами конфлікту умовно називають гравців. Однією із головних задач теорії ігор є виявлення розумних коаліцій і вибір правил обліку інформацією між учасниками (гравцями), а також оптимальних стратегій гравців. Оптимальною стратегією називають стратегію гравця, яка обумовлює йому найкраще положення в даній грі і безумовно оптимальний результат. До конфліктних ситуацій, в першу чергу, належать ситуації з декількома критеріями: кожний з яких має свої величини до керування і, як правило, ці величини суперечні. Як приклад можна навести таке: при проектуванні або будівництві електротехнічного комплексу або нових джерел електроенергії в енергосистемі стратегія одного гравця (людини-проектанта) – мінімізація витрат або мінімальний програш. У другого гравця (енергосистема) стратегія випадкова, тому що, наприклад, які будуть потужності споживачів, місце їх розміщення та ін. однозначно невідомо.

Близька за ідеями і методами до теорії ігор теорія статистичних розв'язків, яка від попередньої відрізняється тим, що невизначена ситуація, немає характеру конфлікту. В даному випадку невідомі умови залежать не від свідомих дій супротивника, а від об'єктивної дійсності.

Пошук оптимальних енергозберігаючих заходів треба почати з визначення ефективності їх реалізації в промислових умовах. Так, наприклад для оптимізації режимів систем енергопостачання, особливо в умовах невизначеності використовують різні критерії

оптимальності: критерій Лапласа, який базується на визначенні мінімуму середніх витрат; критерій Вальда, який базується на визначенні максимінних витрат; критерій Севіджа, який базується на визначенні мінімакських збитків; критерій Гурвіца, який базується на врахуванні сприятливості / несприятливості ситуації та ін. треба пам'ятати, що вихідна інформація задачі оптимізації може вважатися повною тільки тоді, коли точно відомі цільова функція та обмежуючі умови.

У таких ситуаціях необхідно використовувати одну з основних стратегій за критерієм вибору розв'язку, і в першу чергу, максимінний критерій Вальда, мінімакський ризик Севіджа, або критерій песимізму-оптимізму Гурвіца.

Згідно з критерієм Вальда гра ведеться, як гра з агресивним супротивником, який всіляко перешкоджає одержанню успіху. Оптимальною стратегією є стратегія, яка гарантує виграш в будь-якому випадку:

$$Z = \max_{i=1} \times \min_{j=1} Z_{ij}. \quad (7.12)$$

Треба підкреслити, що такий критерій виражає вкрай песимістичний підхід, який є не єдиноможливим.

Мінімаксна стратегія, або мінімакський ризик Севіджа теж вкрай песимістичний, але в цьому випадку вибирається стратегія, при якій ризик мінімальний:

$$Z = \min_{i=1} \times \max_{j=1} Z_{ij}. \quad (7.13)$$

Критерій песимізму-оптимізму Гурвіца рекомендує при виборі розв'язку обрати стратегію, яка б враховувала сприятливу, так і несприятливу ситуацію. В цьому випадку, розв'язання відповідає умові:

$$Z = \min_{i=1}^n \left( h \max_{j=1}^m Z_{ij} + (1-h) \min_{j=1}^m Z_{ij} \right), \quad (7.14)$$

де  $h$  – коефіцієнт ”песимізму”, що вибирається між нулем і одиницею на підставі оцінки ситуації ( $h = 0$  – відповідає крайньому оптимізму,  $h = 1$  – відповідає мінімакській стратегії і перетворюється в критерій Вальда),  $Z_{ij}$  – мінімальні витрати.

Враховуючи те, що формально наведені вище стратегії рівноправні, остаточне рішення повинно вибиратися на базі аналізу рішень, отриманих по кожній стратегії; досвіду проєктанта, його кваліфікаційного рівня; особливостей конкретної задачі.

Можливості застосування наведених стратегій розглянуто у задачі 7.2, де розв'язання оптимізаційної задачі здійснюється на базі складання платіжної матриці, в якій рядки матриці відповідають діям (рівнянням) одного гравця, а стовпчики – діям другого гравця.

У кожному випадку вибору оптимального параметра (наприклад, потужності трансформатора) різні вихідні величини мають свою область невизначеності, що характеризується мінімальним і максимальним значеннями цієї величини.

У той же час у кожному випадку проєктування, кількість вихідних величин, що носять характер невизначеності, може бути різним, що ускладнює рішення оптимізаційної задачі.

У зв'язку з цим являють інтерес узагальнені методи вибору оптимальної потужності, наприклад силових трансформаторів, які дають можливість у кожному конкретному випадку враховувати необхідну сукупність невизначених факторів [4, 8].

Так, для узагальнення вибору оптимальної потужності силових трансформаторів в умовах невизначеності вихідної інформації може бути використаний підхід, суть якого полягає в побудові математичного виразу, що дає можливість виділити одним із співмножників сукупність всіх вихідних величин, що носять характер невизначеності. Використання виразу приведених витрат (у відомій формі) необхідних результатів не дає.

З використанням виразу приведених витрат за деякий період  $T$  на трансформаторній підстанції можна одержати відоме рівняння граничної потужності переходу з однієї номінальної потужності до іншої, більшої з урахуванням зростання навантаження й приведення різночасних витрат до одного року.

$$S_r = \sqrt{\frac{E_H(K_{i+1} - K_i) + P_a(K_{i+1} - K_i) \left[ E_{H\Pi} \sum_{t=1}^T (1 + E_{H\Pi})^{-t} + (1 + E_{H\Pi})^T \right] +}{\tau C_k \left[ \sum_{t=1}^T \frac{E_{H\Pi} (1 + \alpha)^{2t}}{(1 + E_{H\Pi})^t} + \frac{(1 + \alpha)^{2T}}{(1 + E_{H\Pi})^T} \right]}} \times$$

$$\times \frac{+ 8760_{x,x} (\Delta P_{x,x_{i+1}} - \Delta P_{x_i}) \left[ E_{H\Pi} \sum_{t=1}^T (1 + E_{H\Pi})^{-t} + (1 + E_{H\Pi})^{-\tau} \right]}{\left( \frac{\Delta P_{k_i}}{S_{H_i}^2} - \frac{\Delta P_{k_{i+1}}}{S_{H_{i+1}}^2} \right)}, \quad (7.15)$$

де  $T$  – розрахунковий період, роки;  $\Delta P_{x,x}$ ,  $\Delta P_{кз}$  – відповідно номінальні витрати в стані трансформаторів (витрати холостого ходу) та номінальні витрати в обмотках трансформаторів (витрати короткого замикання), кВт;  $E_H$ ,  $E_{H,\Pi}$ ,  $P_a$  – відповідно нормативний коефіцієнт ефективності капіталовкладень ( $E = 0,14$ ), нормативний коефіцієнт приведення різночасних витрат до одного року ( $E_{H,\Pi} = 0,8$ ) та нормативний коефіцієнт амортизаційних відрахувань;  $\tau$  – число годин максимальних витрат, год/рік;  $\alpha$  – темп зростання навантаження, в.о/рік;  $C_k$ ,  $C_{xx}$  – відповідно питомі вартості витрат електроенергії в обмотках і сталі трансформаторів, грн./кВт·год.

Для перетворення виразу (7.15) представимо вартість і витрати холостого ходу рівняннями лінійної регресії:

$$K = q_T + b_T \cdot S_H. \quad (7.16)$$

$$\Delta P_{xx} = q_{xx} + b_{xx} \cdot S_H. \quad (7.17)$$

Підставимо вирази (7.16) і (7.17) в (7.15) і перетворимо отримане рівняння в такий вигляд:

$$S_r = \sqrt{\frac{E_H b_T + P_a b_T \left[ E_{H\Pi} \sum_{t=1}^T (1 + E_{H\Pi})^{-t} + (1 + E_{H\Pi}) \right] + 8760 C_{xx} b_{xx} \left[ E_{H\Pi} \sum_{t=1}^T (1 + E_{H\Pi})^{-t} + (1 + E_{H\Pi}) \right]}{\tau C_k \left[ \sum_{t=1}^T \frac{E_{H\Pi} (1 + \alpha)^{2t}}{(1 + E_{H\Pi})^t} + \frac{(1 + \alpha)^{2T}}{(1 + E_{H\Pi})^T} \right]}} \times \sqrt{\frac{S_{H_{i+1}}^2 - S_{H_i}}{\frac{\Delta P_{k_i}}{S_{H_i}^2} - \frac{\Delta P_{k_{i+1}}}{S_{H_{i+1}}^2}}}. \quad (7.18)$$

Аналіз рівняння (7.18) показує, що величина першого кореня визначається сукупністю вихідних даних:  $\alpha$ ,  $\tau$ ,  $C_{x,x}$ ,  $C_k$  та інших, які носять характер невизначеності. Позначимо його символом  $\Psi$ . У

цьому випадку  $\psi$  можна вважати узагальненим невизначеним фактором:

$$S_r = \psi \sqrt{\frac{S_{H_{i+1}}^2 - S_{H_i}}{\frac{\Delta P_{k_i}}{S_{H_i}^2} - \frac{\Delta P_{k_{i+1}}}{S_{H_{i+1}}^2}}}. \quad (7.19)$$

При виборі оптимальних параметрів електричних мереж в умовах невизначеності вихідної інформації найбільш загальним є підхід, заснований на районуванні множини векторів стану природи. Для реалізації цього підходу відносно вибору оптимальної потужності силових трансформаторів, представимо (7.19) у наступному вигляді:

$$\psi = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{S_{H_{i+1}}^2 - S_{H_i}}{\frac{\Delta P_{k_i}}{S_{H_i}^2} - \frac{\Delta P_{k_{i+1}}}{S_{H_{i+1}}^2}}}, \quad (7.20)$$

$$\text{де } - \psi^* = 1/\psi.$$

Рівняння (7.20) дає можливість побудувати узагальнену номограму районування невизначеного фактора  $\psi^*$  за номінальними потужностями трансформаторів і навантаження, що відповідає початку експлуатації підстанції (рис. 7.2).

Для вибору номінальної потужності силових трансформаторів необхідно знати область невизначеності  $\psi^*$ :

$$\psi^* \min \leq \psi^* \leq \psi^* \max. \quad (7.21)$$

Вона може бути визначена з використанням виразу першого кореня рівняння (7.20) з урахуванням прийнятих діапазонів невизначеності вихідних даних.

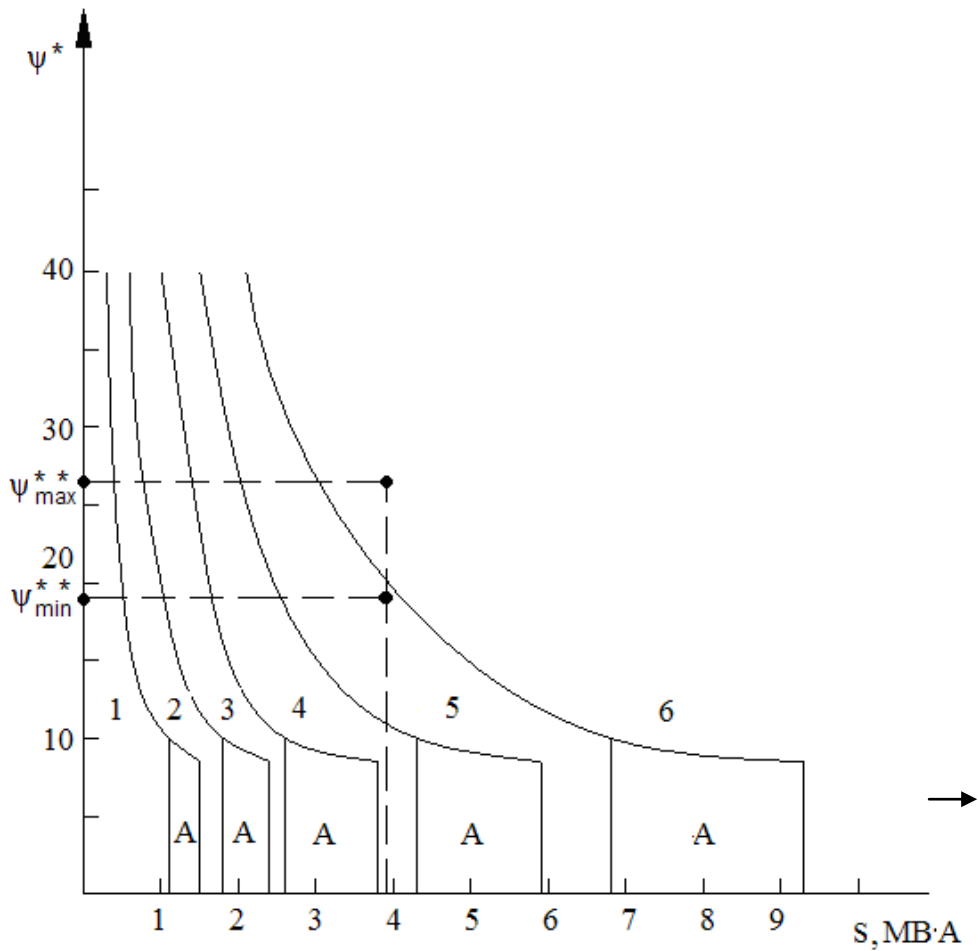


Рис. 7.2. Номограма районування невизначеного фактора:  
 1 –  $S_H = 1000$  кВТ; 2 –  $S_H = 1600$  кВТ; 3 –  $S_H = 2500$  кВТ;  
 4 –  $S_H = 4000$  кВТ; 5 –  $S_H = 6300$  кВТ; 6 –  $S_H = 10000$  кВТ; А – зона  
 перевантажувальної здатності

За наявності точної інформації про деякі вихідні дані останні можуть прийматися в розрахунку детермінованими величинами:

$$\psi_{\max}^* = \sqrt{\frac{f(\tau, \alpha, C_k \dots)_{\max}}{\varphi(C_{xx}, b_T, \dots)_{\min}}}; \quad (7.22)$$

$$\psi_{\max}^* = \sqrt{\frac{f(\tau, \alpha, C_k \dots)_{\min}}{\varphi(C_{xx}, b_T, \dots)_{\max}}}.$$

Область невизначеності  $\psi^*$  може перетинати зони двох або трьох суміжних за стандартною шкалою номінальних потужностей трансформаторів (рис. 7.2). У цьому випадку для однозначного вибору оптимальної потужності трансформатора можна одержати додаткову

інформацію про складові невизначеного фактора й звузити його границі до тої величини, при якій вибір потужності буде однозначним. Якщо виконати звуження границь  $\psi^* \min \leq \psi^* \leq \psi^* \max$  неможливо, то у цьому випадку можна використати принцип мінімакса теорії ігор.

Запропонований підхід до вибору оптимальної потужності силових трансформаторів дає можливість також враховувати невизначеність початкового навантаження підстанції. Для цього рівняння (7.30) перетворимо в наступний вид:

$$\psi^{**} = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{S_{H_{i+1}} - S_{H_i}}{\frac{\Delta P_{k_i}}{S_{H_i}^2} - \frac{\Delta P_{k_{i+1}}}{S_{H_{i+1}}^2}}}, \quad (7.23)$$

де  $\psi^{**} = \psi^* \cdot S$ .

Залежність (7.23) представлена на рис. 7.3, де точки  $a, b, c, d$  і  $e$  на прямій  $oe$  відповідають границям економічних інтервалів номінальних потужностей трансформаторів. Вибір номінальної потужності у цьому випадку аналогічний вищевикладеному, але додатково в  $\psi^{**}$  ураховується невизначеність початкового навантаження, що може бути задана областю в межах:

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max}. \quad (7.24)$$



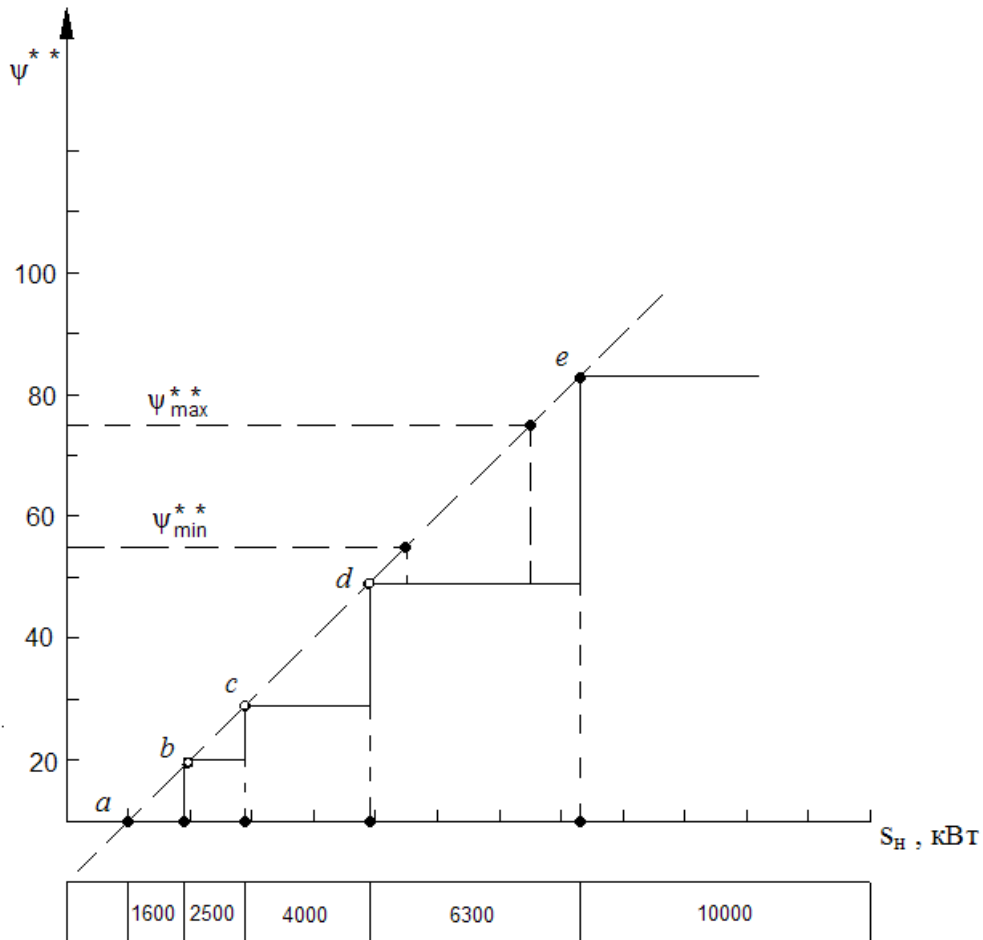


Рис.7.3. Номограма для вибору номінальної потужності силових трансформаторів з урахуванням невизначеності початкового навантаження

### 7.3 Основні методи розв'язання багатокритеріальних задач

У реальних практичних умовах дуже часто необхідно здійснювати розв'язання оптимізаційних задач за декількома критеріями. Такі задачі належать до задач багатокритеріальної оптимізації. Це – оптимізація щодо зменшення витрат електричної енергії разом з підвищенням надійності електропостачання, розподіл фінансових, енергетичних та сировинних ресурсів проектуванні електротехнічних комплексів, при виробництві різної продукції з визначенням максимального прибутку тощо. Розв'язання задач при цьому являє собою пошук компромісу між прийнятими критеріями, зведення їх до одного узагальненого критерію і може здійснюватися шляхом застосування різних методів.

До таких методів, в першу чергу, належать: визначення і призначення коефіцієнтів ваги кожного з критеріїв; застосування узагальненого критерію цільової функції, який враховував би всі критерії з відповідними ваговими коефіцієнтами; застосування методу експертних оцінок (метод Дельфи) та методів, які полягають у визначенні ступеня узгодженості між експертами впливу різних факторів на критерії, встановленні їх значущості, наприклад через коефіцієнт конкордації в порівнянні її з критерієм Пірсона та ін. [1, 5, 9]

Серед методів визначальних параметрів найбільше застосування на практиці знаходить принцип Парето та методи експериментального дослідження.

Принцип Парето базується на принципі оптимізації будь-якої діяльності, полягає в правильному виборі мінімальної кількості найважливіших дій і поділяється на дві групи.

Основні положення принципу Парето при виборі визначальних параметрів об'єкту базується на:

- параметрах, найбільшу інформацію про стан об'єкту і яких завжди не багато;
- вихідних параметрах об'єкту, які можуть в окремих випадках нести меншу інформацію про його стан ніж вихідні параметри окремих його складових систем.

Крім цього в процесах дослідження об'єкту нерідко виникає необхідність корегування рішень, що приймається на підставі дослідження його віртуальної моделі, тобто впливу факторів, які не враховані в моделі об'єкту.

Основні положення принципу Парето при виборі визначальних параметрів об'єкту базується на факторах, які об'єднують найбільшу інформацію про об'єкт і вплив їх є значним, це – мало чисельні суттєво важливі фактори, а також на багато чисельній групі несуттєвих факторів, вплив яких, порівняно з першими, незначний на об'єкт.

Наприклад необхідно визначити мету досліджень. Так наприклад, у випадку управління та контролю якістю електроенергії метою може бути: контроль і регулювання параметрами процесу електропостачання, електроспоживання; аналіз відхилень від існуючих вимог та стандартів; контроль, наприклад, якості електроенергії (cos  $\phi$ , відхилення  $U$  від  $U_{ном}$ , коливання напруги, відхилення частоти, несінусоїдальність кривої напруги та ін.).

Значну інформативність обумовлює, наприклад побудова діаграми Парето, в яких враховують контрольні ознаки (параметри) за

кількістю спостережень, накопиченої суми спостережень, відсотку спостережень за кожним з параметрів, а також накопичений відсоток. Контрольовані ознаки розташовують згідно значущості, що може бути подано у вигляді: співвідношення елемента  $X$  з елементом  $Y$  як:

- ”краще”, якщо для всіх  $i$  з інтервалу  $[1, n]$  існує таке  $K$  з інтервалу  $[1, n]$ , що з умови  $X_i > Y_i$  випливає пріоритетність  $X_k > Y_k$ ;
- ”гірше”, якщо умови навпаки, тобто  $Y_k$  має пріоритетність перед  $X_k$ .

Це співвідношення дозволяє сформулювати основне правило принципу Парето: якщо  $X$  – є множини всіх параметрів. факторів, варіантів  $x$ , то  $x^*$  ( $x^* \in X$ ) називають оптимізаційним за Парето, якщо не існує такого  $x \in X$ , який був би краще  $x^*$ .

Треба підкреслити, що розв'язання задачі по виборі визначальних параметрів (факторів) розробляємих (досліджуваних) об'єктів полягає у розв'язанні багатокритеріальної задачі максимізації інформації про стан об'єкту при мінімізації ризику не врахування (пропуску) значущих. Розв'язання такої оптимізаційної задачі з визначеною сукупністю параметрів (критеріїв) є множина Парето.

В останній час широке застосування отримують методи експертного дослідження, які полягають у реалізації процедури отримання результату на основі групової думки експертів-фахівців.

Процес експертного оцінювання складається з наступних етапів:

- отримання цілей та вибір форми опитування;
- підготовки відповідних інформаційних матеріалів та підбір експертів;
- проведення експертизи, обробка та аналіз результатів.

Експертний метод має ряд суттєвих переваг щодо розв'язання задач, які не піддаються розв'язанню звичайними аналітично-чисельними методами. Використання цього методу повинно дотримуватися відповідних умов:

- думка експертів повинні бути незалежними, а питання, які ставлять перед ними не повинні мати різне тлумачення;
- кількість експертів має бути достатньою, а їх компетенція у відповідній галузі не викликати сумнів.

Узгодженість думок експертів визначається коефіцієнтом конкордації, який може приймати значення від 0 (відсутність узгодженості) до 1 (повна однотійність).

Розв'язання таких задач наведено у прикладі (задача  $N$  18, ряд 8), де ступінь узгодженості визначається через коефіцієнт конкордації:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m \sum_{v=1}^e T_n}, \quad (7.25)$$

$$S = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^m a_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right]^2$$

де  $m, n$  – відповідно кількість експертних оцінок (експертів) та факторів;  $a_{ij}$  – ранг (оцінка), яка дана  $j$ -експертом  $i^{\text{му}}$  фактору:

$$T_n = \sum_{v=1}^r (t_v^3 - t_v)$$

де  $t_v$  – кількість повторів оцінки різних факторів одним експертом;  $r$  – кількість типів зв'язаних рангів (оцінок) в  $n^{\text{му}}$  ряду;  $V$  – кількість рядків, які мають зв'язані ранги (оцінки).

При відсутності можливостей попередньої підготовки експертів використовують метод Дельфі, основними рисами якого є: анонімність експертів; багатоетапність опитування з метою можливості перегляду своєї точки зору експертами; контроль з метою перевірки узгодженості думок після кожного опитування (кількість турів опитування 4 – 5).

Треба підкреслити, що метод Дельфі не переслідує досягнення повної однастайності думок експертів, що не виключає наявності деякої розбіжності в їх оцінках.

При застосуванні експертних методів позитивні результати досягаються шляхом оцінювання так званих вагомих коефіцієнтів, сума яких має дорівнювати одиниці. Значення цих коефіцієнтів визначають за формулою:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n G_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m G_{ij}}$$

де  $n$  – кількість експертів;  $m$  – кількість позників, відносно яких визначають вагові коефіцієнти;  $G_{ij}$  – коефіцієнт вагомості  $j^{\text{го}}$  показники в балах, згідно з оцінкою  $i^{\text{го}}$  експерта.

Вирішення оптимізаційних задач у напрямі оптимального енерговикористання повинно здійснюватися шляхом визначення сукупності критеріїв оптимальності та системами обмежень.

При цьому критерії оптимальності можуть в основному визначатися:

- цільовою функцією енергозбереження;
- системами енергопостачання та енергоспоживання;
- типами паливно-енергетичних ресурсів
- рівнем технологічних процесів та станом електрообладнання.

Треба підкреслити, що головною особливістю таких оптимізаційних задач є різноманітність енергетичних характеристик, а це, в свою чергу, не дозволяє використовувати стандартні процедури. Так наприклад, критеріями оптимального енергопостачання можуть бути: рівномірність споживання енергії ( $p(t)=P, t \in [0, T]$ ), мінімізація втрат ( $U^2/p = const$ ), мінімізація миттєвих значень струму [ $i(t)_{max}, t \in [0, T] \rightarrow min$ ], усунення зворотніх потоків енергії ( $p = W/T = const$ ) тощо.

Безумовно, вибір критерію в значній мірі залежить від вимог, які пред'являються до видів перетворення електроенергії та питань енергозбереження.

В якості критерію оптимальності дуже часто використовують критерій, який враховує мінімум фінансових, енергетичних та сировинних втрат – так званий економічний критерій.

Для аналізу енерговикористання, вибору оптимальних рішень доцільно застосовувати апроксимаційні методи, зокрема метод багатомірної регресії, при використанні якого енергоспоживання об'єкта  $W_k$  для  $n$  факторів  $X$  визначається із наступного виразу:

$$W_k = W_0 + \sum_{i=1}^n c_i \Delta X_i, \quad (7.26)$$

де  $W_0$  – базовий рівень енергоспоживання об'єкта,  $c_i$  – постійний коефіцієнт,  $\Delta X_i$  – зміни  $i^{20}$  фактору впливу.

При розгляданні проблем щодо якості електричної енергії, в першу чергу, необхідна розробка методів розрахунку її на стадіях проектування та прогнозування. В цьому випадку необхідно враховувати, в першу чергу, функціональні перетворення, за якими будуються показники якості електроенергії. Вони являють собою

функціонали і виконуються операторами перетворення. Так наприклад, при дискретному перетворенні для повного опису сигналу модель може мати наступний вигляд:

$$x(t) \approx x^*(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad n \in N, \quad t \in T. \quad (7.27)$$

Вихідна математична модель електроенергетичної системи, яка описує оптимальну роботу системи на інтервалі часу  $t$  може мати наступний вигляд:

$$\min F_B(X, Y), \quad (7.28)$$

при обмеженнях:

$$W(X, Y) = 0; \quad X_{min} \leq X \leq X_{max}; \quad Y_{min} \leq Y \leq Y_{max}.$$

де  $X$  – вектор внутрішніх параметрів режиму;  $Y$  – вектор параметрів режиму, який характеризує зовнішній вплив на систему;  $F_B$  – функція витрат на виробництво та розподіл всіх видів енергій, в першу чергу електричної та теплової, на інтервалі часу  $t$ .

Наведені вектори обмежень визначають *min* та *max* допустимі значення параметрів режиму за умови надійності та якості енергопостачання.

Для визначення оптимальної взаємодії постачальників та споживачів якість електропостачання може бути забезпечена на основі адитивної моделі, яка має наступний вигляд:

$$\psi = \sum_{S=1}^S \sum_{i=1}^n \gamma_i^{(S)} \alpha_i^{(S)} (\Delta U_{ij}^{(S,j)}) \varphi_i^{(S)}(\Pi_i) + \sum_{f=1}^F \sum_{j=1}^m \gamma_j^{(f)} \alpha_j^{(f)} (\Delta U_{ij}^{(f,S)}) \varphi_j^{(f)}(\Pi_j), \quad (7.29)$$

де  $S, f$  – індекси підсистем відповідно для електропостачальників та споживачів електроенергії;  $i, j$  – індекси критеріальних показників:  $j_i^S, j_j^F$  – питомі вартості показників якості електропостачання (галузеві та загальносистемні);  $\alpha_i^S, \alpha_j^F$  – інформаційно-енергетичні характеристики якості електропостачання;  $\varphi_i^S, \varphi_j^F$  – функціонально-параметричні характеристики якості електропостачання;  $\Delta U_{ij}^{(S,f)}, \Delta U_{ij}^{(f,S)}$  – перемешувані

інформаційно-енергетичні показники якості електропостачання;  
 $\Pi_i, \Pi_j$  – критеріальні параметри оптимізації.

Вважаємо за необхідне навести ряд моделей, які з достатньо високою вартістю можна застосовувати при розробці різних електротехнологій в аграрному виробництві. Так наприклад, модель динаміки росту рослинної речовини від енергетичної дії має вигляд:

$$\frac{dE}{dt} = F(E, t) = \lambda E, \quad (7.30)$$

або в загальному вигляді може являти статичну модель виду:

$$E = E_0 + \alpha t, \quad (7.31)$$

де  $E_0$  – початкова (природна) енергія рослини,  $\alpha$  – темп росту енергії  $\alpha = \frac{dE}{dt}$ ,  $\lambda$  – параметр, який визначається кількістю перетвореної в рослині енергії.

В загальному виді моделі росту рослин або їх продуктивність можуть являти наступний вигляд:

$$\frac{dM}{dt} = g(M, E_n, E_{en}, C), \quad (7.32)$$

де  $M$  – маса;  $t$  – час дії;  $E_n$  – природна енергія;  $E_{en}$  – енергія енергетичної дії,  $C$  – множина фізико-технологічних та біологічних параметрів, які характеризують рослину.

Розв'язання оптимізаційних задач із застосуванням способів визначення вагових коефіцієнтів розглянемо на прикладі.

Задача 7.1. Припустимо, що шляхи розв'язання задачі визначаються 4<sup>ма</sup> критеріями –  $a, b, c, d$ . Для розв'язання її запрошена спеціальна група фахівців-експертів в кількості 5<sup>ти</sup> осіб –  $A, B, C, D, E$ . Кожному з експертів пропонується оцінити вплив кожного критерію в балах від 0 до 1 за умову, що загальна сума балів кожного експерта за всіма критеріями повинна дорівнювати 1. Оцінки експертів наведено в табл. 7.2.

Аналізуючи табл. 7.2, можна зробити висновок, що вага критерію  $a$  приблизно в 2 рази більша, ніж вага інших.

## 7.2. Значення критеріїв оцінки різними експертами

Експерти	Критерії				
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	$\Sigma$
<i>A</i>	0,4	0,3	0,2	0,1	1,0
<i>B</i>	0,3	0,3	0,2	0,2	1,0
<i>C</i>	0,35	0,1	0,35	0,2	1,0
<i>D</i>	0,5	0,2	0,1	0,2	1,0
<i>E</i>	0,6	0,2	0,1	0,1	1,0
Коефіцієнт ваги $\alpha_k$	0,43	0,22	0,19	0,16	1,0

Розв'язання багатокритеріальних задач можливе із застосуванням узагальненого критерію цільової функції, яка в цьому випадку має такий вигляд:

$$Z_{yz} = \sum_{k=1}^W \frac{\alpha_k Z_k}{Z_{k_{норм}}} \rightarrow \max, \quad (7.33)$$

де  $W$  – кількість критеріїв (цільових функцій);  $\alpha_k$  – коефіцієнт ваги  $k^i$  цільової функції;  $Z_k$ ,  $Z_{k_{норм}}$  – відповідно  $k$  цільова функція (визначає  $k^i$  критерій) та нормоване значення  $k^i$  цільової функції.

Так, базуючись на результатах експертних оцінок при розв'язанні двокритеріальної задачі, узагальнена цільова функція може мати вигляд:

$$Z_{yz} = \alpha_1 Z_1 / Z_{1_{норм}} + \alpha_2 Z_2 / Z_{2_{норм}} \rightarrow \max. \quad (7.34)$$

Інші варіанти застосування методів розв'язання багатокритеріальних задач наведено нижче у вигляді задач. Також там наведені і можливості використання нормального закону розподілу, розв'язання задач з використанням теорії ймовірностей.

**Задача 7.2.** В енергосистемі, яка модернізується, необхідно визначити оптимальний обсяг генеруючих потужностей електростанцій. Перспективне зростання енергоспоживання в системі визначено недостатньо. При цьому відомо, що сумарна потужність споживачів енергосистеми в майбутньому може мати відповідні значення 25, 30, 35,40 о.п.



На момент модернізації і прийняття рішення потужність електростанцій системи становить 20 о.п. Витрати на введення кожної нової одиниці потужності – становить 5 у.о./о.п.

У перспективі енергосистема може виявитися на самобалансі, тобто забезпечувати споживачів тільки за рахунок власних електростанцій або при дефіциті потужності отримувати її від сусідньої енергосистеми за ціною 7 у.о./о.п.

Розв’язання. Маємо 4 можливих варіанти (ходи) для енергосистеми ( $y_1 = 25, y_2 = 30, y_3 = 35, y_4 = 40$  о.п.) та 4 можливих рішення (ходи) розробника-проектанта ( $x_1 = 25, x_2 = 30, x_3 = 35, x_4 = 40$  о.п.). Користуючись такими умовами, складаємо платіжну матрицю (табл. 7.3).

### 7.3. Платіжна матриця

$x_n$	$y_1=25$	$y_2=30$	$y_3=35$	$y_4=40$
$x_1=25$	$z_{11}$ 25	$z_{12}$ 60	$z_{13}$ 95	$z_{14}$ 130
$x_2=30$	$z_{21}$ 50	$z_{22}$ 50	$z_{23}$ $10 \cdot 5 + 5 \cdot 7 = 85$	$z_{24}$ 120
$x_3=35$	$z_{31}$ 75	$z_{32}$ 75	$z_{33}$ 75	$z_{34}$ 110
$x_4=40$	$z_{41}$ 100	$z_{42}$ 100	$z_{43}$ 100	$z_{44}$ 100

Здійснюємо заповнення матриці (табл. 7.3) на такому прикладі. Розробник-проектант обрав варіант (хід)  $x_2 = 30$  о.п., а енергосистема – хід  $y_3 = 35$  о.п. Відповідно до обрання проектанта додатково вводять 10 о.п., витрати на їх введення будуть  $10 \cdot 5 = 50$  у.о. Відповідно до ходу енергосистеми дефіцит потужності (клітинка  $x_2 - y_2$ ) буде 5 о.п, тобто цю потужність треба придбати (купити) в сусідній енергосистемі. Витрати при цьому будуть:  $5 \cdot 7 = 35$  у.о, загальні відповідно  $50 + 35 = 85$  у.о. Всі інші клітинки платіжної матриці заповнюємо аналогічно.

Середні витрати для кожного рішення (ходу) проектанта:

$$Z_{cp.1} = (Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14}) / m = (25 + 60 + 95 + 130) / 4 = 77,5 \text{ у.о.};$$

$$Z_{cp.2} = (Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{24}) / m = (50 + 50 + 85 + 120) / 4 = 76,25 \text{ у.о.};$$

$$Z_{cp.3} = (Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} + Z_{34}) / m = (75 + 75 + 75 + 110) / 4 = 83,75 \text{ у.о.};$$

$$Z_{cp.4} = (Z_{41} + Z_{42} + Z_{43} + Z_{44}) / m = (100 + 100 + 100 + 100) / 4 = 100 \text{ у.о.}.$$

За стратегією середніх витрат треба прийняти рішення по  $x_2$ , яке відповідає введенню 10 одиниць потужності.

Мінімальні витрати для кожного рішення (ходу) проектанта складають:

$$Z_{min1} = \min(Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14}) = (25 + 60 + 95 + 130) = 25 \text{ у.о.};$$

$$Z_{min2} = \min(Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{24}) = (50 + 50 + 85 + 120) = 50 \text{ у.о.};$$

$$Z_{min3} = \min(Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} + Z_{34}) = (75 + 75 + 75 + 110) = 75 \text{ у.о.};$$

$$Z_{min4} = \min(Z_{41} + Z_{42} + Z_{43} + Z_{44}) = (100 + 100 + 100 + 100) = 100 \text{ у.о.}$$

За наведеною вище стратегією, тобто за мінімальною, треба прийняти рішення по  $x_1$ , яке відповідає введенню 5 одиниць потужності.

За мінімаксною стратегією, аналізуючи табл. 7.3, треба прийняти рішення по  $x_4$ , яке відповідає введенню 20 о.п. ( $x_4 = 40$ , а існуюча потужність становить 20 о.п.). За цією стратегією витрати для кожного рішення (ходу) проектанта будуть:

$$Z_{max1} = \max(Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14}) = (25 + 60 + 95 + 130) = 130 \text{ у.о.};$$

$$Z_{max2} = \max(Z_{21} + Z_{22} + Z_{23} + Z_{24}) = (50 + 50 + 85 + 120) = 120 \text{ у.о.};$$

$$Z_{max3} = \max(Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} + Z_{34}) = (75 + 75 + 75 + 110) = 110 \text{ у.о.};$$

$$Z_{max4} = \max(Z_{41} + Z_{42} + Z_{43} + Z_{44}) = (100 + 100 + 100 + 100) = 100 \text{ у.о.}.$$

Використовуючи стратегію Гурвіца і приймаючи коефіцієнт "песимізму"  $h = 0,5$ , витрати на кожне рішення (хід) проектанта будуть:

$$Z_1 = (h \cdot Z_{14} + h \cdot Z_{11}) = 77,5 \text{ у.о.};$$

$$Z_2 = (h \cdot Z_{24} + h \cdot Z_{21}) = 85 \text{ у.о.};$$

$$Z_3 = (h \cdot Z_{34} + h \cdot Z_{31}) = 92,5 \text{ у.о.};$$

$$Z_4 = (h \cdot Z_{44} + h \cdot Z_{41}) = 100 \text{ у.о.}.$$

Користуючись стратегією Гурвіца треба прийняти рішення  $x_1$ , яке відповідає введенню 5 о.п.

Аналізуючи всі наведені варіанти рішень, можна переконатися в тому, що за стратегією середніх витрат ( $x_2$  – введення 10 о.п.), за

мінімальною ( $x_1$  – введення 5 о.п.), за мінімаксною ( $x_4$  – увід 20 о.п.) та за Гурвіцом ( $x_1$  – введення 5 о.п.) вони мають різні рішення. Дві стратегії обумовлюють однакове рішення ( $x_1$ ), рішення ( $x_3$ ) – введення 15 о.п., не дала жодна стратегія, а рішення ( $x_4$ ) обумовило недостатньо сприятливі умови (100 у.о.) модернізації енергозбереження. У зв'язку з цим, будемо вважати рішення (хід) проектанта  $x_2$  (введення в енергосистему 10 о.п.) оптимальним.

Застосуванню теорії імовірності присвячені задачі 7.3, 7.4.

*Задача 7.3.* Робота електричної установки визначається двома блоками. Імовірність відмови установки при роботі двох блоків  $q_{1,2} = 0,01$ , при роботі першого  $q_1 = 0,1$ , другого  $q_2 = 0,2$ , при відмові двох  $q_0 = 0,6$ .

Імовірність безвідмовної роботи першого  $p_1 = 0,95$ ; другого  $p_2 = 0,9$ .

Всі елементи виходять із ладу незалежно один від одного. Знайти імовірність безвідмовної роботи установки ( $A$ ).

Розглянемо гіпотези:

$H_{1,2}$  – приймають два блоки,

$H_1$  – другий вийшов з ладу,

$H_2$  – навпаки – перший вийшов з ладу,

$H_0$  – обидва вийшли з ладу.

Імовірність гіпотез:

$$p(H_{1,2}) = p_1 \cdot p_2;$$

$$p(H_1) = p_1 \cdot (1 - p_2);$$

$$p(H_2) = p_2 \cdot (1 - p_1);$$

$$p(H_0) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2).$$

Умовні імовірності події  $A$  для прийняття гіпотез:

$$p(H_{1,2}) = 1 - p_{1,2}; p(H_1) = 1 - q_1;$$

$$p(H_2) = 1 - p_2; p(H_0) = 1 - q_0.$$

#### 7.4. Результиуючі дані

Імовірність			Умова імовірності $p(H_j)$ .	Повна імовірність
Відмови установки	Робота блоків	Гіпотеза		
$q_{1,2} = 0.01$	$p_1 = 0,95$	$H_{1,2} = 0,855$	0,99	0,846
$q_1 = 0.1$	$p_1 = 0,9$	$H_1 = 0,095$	0,9	0,085
$q_2 = 0.2$		$H_2 = 0,045$	0,8	0,036
$q_0 = 0.6$		$H_0 = 0,005$	0,4	0,002

Імовірність події  $A$  0,969.

**Задача 7.4.** Трансформаторна підстанція має 2 трансформатори з параметром потоку відмов  $\lambda = 0,05$  1/рік. Імовірність безвідмовної роботи кожного трансформатора протягом року згідно з законом Пуасона  $p(t) = e^{-0.05} = 0,951$ . Наскільки можна підвищити надійність підстанції при постійній паралельній роботі двох трансформаторів?

**Розв'язування.** Імовірність відмов обох трансформаторів протягом року:

$$Q(t) = q^2(t) = [1 - p(t)]^2 = (1 - 0,951)^2 = 0,0024.$$

Тоді імовірність того, що відмовить не більше ніж один трансформатор:

$$p(t) = 1 - 0,0024 = 0,9976.$$

Таким чином, надійність підвищується при прийнятому рішенні з 95,1 до 99,76 %.

**Задача 7.5.** Імовірність того, що питомі витрати електроенергії на одиницю продукції протягом доби не перевищують нормованого значення, становить:  $p = 0,8$ . Знайти імовірність того, що у найближчі 7 діб питомі втрати протягом 4 діб не перевищують норму.

**Розв'язання.** За умовою задачі:  $n = 7$ ;  $m = 4$ ;  $q = 1 - p = 0,2$ .

Імовірність за умовою задачі можна записати за допомогою формули Бернуллі:

$$P_{mn} = C_n^m \cdot (p^m) \cdot (q)^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot q^{n-m}.$$

$$P_{47} = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 0,8^4 \cdot 0,2^3 = 0,115.$$

Таким чином, імовірність такої події становить 11,5 % і її можна вважати достатньо малою.

Задача 7.6 вирішується на базі використання стратегій за критеріями Вальда і Севіджа.

*Задача 7.6.* Виконати вибір номінальної потужності силового трансформатора для підстанції напругою 35/10 кВ із початковим навантаженням  $S = 4,0$  МВА.

Вихідні дані:

Складова вартості силового трансформатора, що залежить від його потужності –  $b_m = 1,05$  грн/кВА;

– коефіцієнт амортизаційних відрахувань –  $P_a = 0,064$ ;

– розрахунковий період –  $T=10$  років;

–  $P_{x.x} = 1,09 \cdot 10^{-3}$  кВт;

– вартість втрат електроенергії в обмотках –  $C_k = 0,21 \dots 0,26$  грн/(кВт·год);

– кількість годин втрат електроенергії –  $\tau = 2500 \dots 3500$  год/рік;

– коефіцієнт зростання навантаження –  $\alpha = 0,04 \dots 0,07$  в.о./рік;

– вартість втрат електроенергії в сталі трансформаторів –  $C_{x.x} = 0,013$  грн/(кВт·год).

Використовуючи вираз  $\psi^*$  (див. рис. 7.12), одержимо:  $\psi^*_{\min} = 18,9$ ;  $\psi^*_{\max} = 27,3$ . Як видно з рис. 7.12, область невизначеності  $\psi^*$  перетинає зони двох економічних інтервалів ( $S_{n1} = 6300$  кВА й  $S_{n2} = 10000$  кВА). Якщо звуження границь  $\psi^*$  виконати неможливо, то в цьому випадку необхідно зробити розрахунок приведених затрат і скласти платіжну матрицю (табл. 7.5):

#### 7.5. Платіжна матриця

$S_n$ , кВА	Приведені витрати, грн/рік		$\max$ $\psi$
	$Z_{\min}$	$Z_{\max}$	
$S_{n1} = 6300$	4804	7094	7094
$S_{n2} = 10000$	5329	6401	6401

Для вибору оптимальної потужності трансформатора скористаємося критеріями Вальда й Севіджа. Випишемо в останній стовпчик матриці максимальне значення приведених витрат з кожного рядка. За критерієм Вальда оптимальною є стратегія, при якій максимум затрат є мінімальним:

$$W = \min_i \max_{\phi} Z = 6401, \text{ тобто це } - S_{n2} = 10000 \text{ кВА.}$$

Для визначення оптимального варіанта за критерієм Севіджа необхідно скласти табл. 7.6.

#### 7.6. Матриця мінімальних витрат

$S_n$ , кВА	Приведені витрати, грн/рік		max, $\psi$
	$Z_{min}$	$Z_{max}$	
$S_{n1} = 6300$	0	693	693
$S_{n2} = 10000$	525	0	525

Ця матриця отримана шляхом вирахування мінімального значення приведених витрат із затрат кожного варіанта в стовпчику. Отриману різницю  $\Delta Z$  для кожного варіанта називають "ризиком". В останній стовпець із кожного рядка виписується максимальне значення  $\Delta Z$  "ризик".

За критерієм Севіджа оптимальною є стратегія, що має мінімальний "ризик":

$$S = \min_i \max_{\phi} \Delta Z = 525, \text{ тобто це } - S_{n2} = 10000 \text{ кВА.}$$

Таким чином, при заданій області невизначеності вихідної інформації, оптимальною буде потужність трансформатора –  $S_n = 10000$  кВА.

Нижче наведено задача 7.7, де запропоновано розв'язання на базі застосування експертних методів.

*Задача 7.7.* Для виявлення найважливіших факторів, які визначають надійність роботи РТП 35/10 кВ, було проведено опитування 10 експертів. Їм було видано анкети, в яких перераховувалось 6 основних факторів, які впливають на надійність електропостачання. Фахівців експертів запросили за шести бальною системою оцінити вплив факторів на надійність роботи РТП з метою встановлення ступеня узгодженості (за критерієм Пірсона) експертів за даними, наведеними в табл. 7.7.

### 7.7. Результати опитування експертів

Експерти	Фактори					
	1 <sup>й</sup>	2 <sup>й</sup>	3 <sup>й</sup>	4 <sup>й</sup>	5 <sup>й</sup>	6 <sup>й</sup>
1	1	2	5	4	3	6
2	1	3	6	3	2	5
3	1	3	4	6	2	5
4	2	1	4	3	6	5
5	1	2	5	3	4	6
6	2	1	5	4	3	6
7	3	2	6	5	4	1
8	2	4	6	3	1	5
9	1	2	3	6	4	5
10	1	2	6	5	3	4

Розв'язання. Розрахунок виконуємо в такій послідовності. Ступінь узгодженості визначаємо через коефіцієнт конкордації:

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot (n^3 - n) - m \sum_{U=1}^e T_u};$$

$$S = \sum_{i=1}^n \cdot \left[ \sum_{j=1}^m a_{ij} - \frac{1}{2} m(n+1) \right]^2,$$

де  $m, n$  – відповідно кількість експертних оцінок (експертів) та факторів;  $a_{ij}$  – ранг (оцінка), яка дана  $j$ -експертом  $i^{\text{му}}$  фактору.

$$T_u = \sum_{V=1}^r (t_V - t_V),$$

де  $t_V$  – кількість повторень оцінки різних факторів одним експертом;  $r$  – кількість типів зв'язаних рангів (оцінок) в  $n^{\text{му}}$  рядку;  $l$  – кількість рядків, які мають зв'язані ранги (оцінки).

У нашому випадку (табл. 7.7) можна встановити, що тільки експерт 2 дає оцінку, яка повторюється два рази. ( $t_V = 2 \text{рази}$ ) Тоді:

$$W = \frac{12 \sum_{i=1}^n S_i}{10^2 \cdot (6^3 - 6) - 10 \cdot (2^3 - 2)} = 0,585.$$

Розрахункове значення критерію Пірсона  $\chi_{\text{роз}}^2 = m(n-1)W = 10 \cdot 5 \cdot 0,585 = 29,0$ . Табличне значення  $\chi_{\text{табл}}^2 = 11,1$  (при ступені вільності  $f = n-1 = 5$ ).

Таким чином  $\chi_{\text{роз}}^2 > \chi_{\text{табл}}^2$ , що підтверджує достатньо високу згоду між експертами щодо впливу різних факторів на надійність роботи РТП 35/10 кВ, тобто дозволяє прийняти гіпотезу про високу наявність згоди між експертами в оцінці впливу факторів на надійність.

Останній час при вирішенні оптимізаційних задач все активніше використовують для моделювання матеріальних об'єктів штучні нейронні мережі, які на методологічному рівні імітують структури та принципи роботи біологічної структури мозку і являють собою організаційні сукупності взаємопов'язаних нейронів. Штучні нейронні мережі, які являють собою "штучний інтелект" обумовили формування двох категорій, а саме до виділення "жорсткого" та "м'якого" інтелекту. Перша категорія обумовлює технологію побудови комп'ютерів, які можуть імітувати діяльність мозку людини із врахуванням його досвіду і інтуїції. Друга категорія обумовлює широкий діапазон технологій, які пов'язані з розробкою та експлуатацією відповідного програмного забезпечення, надаючи їх найрізноманітніші "розумні властивості".

Штучні нейронні мережі успішно реалізуються в різних галузях науки і технік, фінансово-економічній діяльності тощо. Кількість та характер математичних моделей, які базуються на власному досвіді та інтуїції фахівців безперервно збільшується, особливо на різних стадіях енергетичного обладнання та систем, при підвищенні технічної та економічної ефективності виробництва та експлуатації, шляхом додавання до відомих формалізованих методів та алгоритмів інтелектуальної складової.

Розв'язання різноманітних задач із застосуванням штучних нейронних мереж як інструментарію для специфічних фахових задач забезпечує ефективні результати за умови дотримання певних алгоритмів, які в загальному виді повинні включати: збір даних, які відображають істотний (реальний) стан об'єкту інтересу; перевірку адекватності та безпосередню реалізацію процесу; при необхідності корегування цих параметрів.

Треба підкреслити, що властивості штучних нейронних мереж докорінно відрізняються від звичайних математичних моделей; вони можуть розглядатися як універсальні математичні моделі, функціонування яких базується на різноманітних процесах та явищах.



## ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Оптимізаційні задачі в енергетиці сільського господарства: Навч. посібник / Г.Б. Іноземцев, В.В. Козирський; За ред. Г.Б. Іноземцева. – К.: Видавничий центр НУБіП України, 2014 – 172 с.
2. Хоменко О.В. Математичні задачі енергетики. Моделювання і аналіз усталених режимів роботи електричних систем [Електронне видання]: навч. посіб. / О.В. Хоменко. – К.: НТУУ «КПІ», 2016. – 109 с.
3. Козирський В. В. Електропостачання агропромислового комплексу / В. В. Козирський, В. В. Каплун, С. М. Волошин – К.: Аграрна освіта, 2011- 448 с.

Навчальне видання

# ОПТИМІЗАЦІЙНІ ЗАДАЧІ ЕНЕРГЕТИКИ

Конспект лекцій

**САВЧЕНКО** Олександр Анатолійович

Формат 60×84/16. Гарнітура Times New Roman  
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.  
Ум. друк. арк. 0,6. Наклад 100 пр.  
Державний біотехнологічний університет  
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44