Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра фізики та математики

Математичні моделі в агроінженерії та методи обробки даних

Конспект лекцій

з дисципліни «Математичні моделі в агроінженерії та методи обробки даних»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної (заочної) форми навчання зі спеціальності 208 «Агроінженерія»

Харків

2025

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра фізики та математики

Конспект лекцій з дисципліни

«Математичні моделі в агроінженерії та методи обробки даних»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти

денної (заочної) форми навчання зі спеціальності

208 «Агроінженерія»

Затверджено

Рішенням навчально-методичної комісії

факультету мехатроніки та інжинірингу

Протокол № 3

від 30.12.2024 р.

Харків

2025

УДК 631

Схвалено
на засіданні кафедри фізики та математики
Протокол № 5 від 18.12.2024 р.

Рецензенти:
Артьомов М. П., д-р техн. наук, проф., завідувач кафедри оптимізації технологічних систем Державного біотехнологічного університету;
Загорулько А. М., канд. техн. наук, доцент кафедри обладнання та інжинірингу переробних і харчових виробництв Державного біотехнологічного університету.

Математичні моделі в агроінженерії та методи обробки даних: конспект лекцій з дисципліни «Математичні моделі в агроінженерії та методи обробки даних» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти денної (заочної) форми навчання зі спеціальності 208 «Агроінженерія» / ДБТУ ; авт.-уклад.: А.О. Пак, В.О. Потапов, Д.О. Торяник, О.В. Сіняєва. – Харків : [б. в.], 2025. – 137 с.

Процеси виробничих технологій – це складні фізико-хімічні процеси, змінні в просторі і в часі, які мають двоїсту детерміновано-стохастичну природу. Потоки речовини, що беруть участь у них, як правило, багатофазні і багатокомпонентні. У ході протікання процесу в кожній точці фази і на границях розділу відбувається перенос імпульсу, енергії, маси. Крім того, весь процес протікає в апараті з конкретними геометричними характеристиками, що, у свою чергу, впливає на характер цього процесу.

Рішення проблеми опису таких складних систем дає метод математичного моделювання, що базується на стратегії системного аналізу, сутність якої полягає в представленні процесу як складної взаємодіючої ієрархічної системи з наступним якісним аналізом її структури, розробкою математичного опису й оцінкою невідомих параметрів.

УДК 631

Відповідальний за випуск: А. О. Пак., д-р техн..наук, проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Процеси харчових та переробних технологій – це складні фізико-хімічні процеси, змінні в просторі і в часі, які мають двоїсту детерміновано-стохастичну природу. Потоки речовини, що беруть участь у них, як правило, багатофазні і багатокомпонентні. У ході протікання процесу в кожній точці фази і на границях розділу відбувається перенос імпульсу, енергії, маси. Крім того, весь процес протікає в апараті з конкретними геометричними характеристиками, що, у свою чергу, впливає на характер цього процесу.

Рішення проблеми опису таких складних систем дає метод математичного моделювання, що базується на стратегії системного аналізу, сутність якої полягає в представленні процесу як складної взаємодіючої ієрархічної системи з наступним якісним аналізом її структури, розробкою математичного опису й оцінкою невідомих параметрів.

Під фізико-математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об'єкта на фізико-математичній моделі. Його метою є визначення оптимальних умов протікання процесу, керування їм на основі математичної моделі і перенос результатів на об'єкт.

Основним поняттям методу є поняття ***фізичної моделі***, під яким розуміється адекватний опис найбільш істотних властивостей процесу, побудований на основі елементарних фізичних уявлень. При цьому доречно привести одне класичне висловлення: «Фізичні моделі схожі на карикатури, вони відбивають одну але найбільш істотну рису досліджуваного явища».

Математичною моделлю називається наближений опис якого-небудь явища або процесу, виражений за допомогою математичної символіки і не обов'язково такий, що відбиває фізичну сутність явища.

Фізико-математична модель являє собою математичний опис елементарних фізичних явищ, що лежать в основі фізичної моделі.

Фізико-математичне моделювання включає наступні взаємозалежні етапи:

– вибір фізичної моделі,

– складання математичного опису досліджуваного об'єкта;

– вибір методу рішення системи рівнянь математичного опису і реалізація його у формі моделюючої програми;

– установлення відповідності (адекватності) моделі об’єктові.

РОЗДІЛ 1. ЕТАПИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розрізняють класичний і системний підхід до фізико-математичного моделювання. При класичному (індуктивному) підході до моделювання, тобто при переході від часткового до загального, модель синтезується шляхом злиття окремих складових. На відміну від цього, системний підхід припускає послідовний перехід від загального до часткового, коли в основі розгляду лежить єдина мета дослідження.

Основні вимоги системного підходу можна сформулювати так:

– правильна локалізація проблеми;

– визначення найбільш повних границь дослідження даної проблеми;

– оцінка можливих невизначеностей і методів їхнього зменшення;

– вибір критеріїв добору елементів, що входять у створювану модель;

– виявлення альтернативних моделей і рішень;

– адекватність моделі і ступень експериментальної перевірки зроблених висновків.

Побудову моделі починають з фізичного опису об’єкта моделювання. При цьому виділяють "елементарні" процеси, що протікають в об’єкті моделювання і які підлягають відображенню в моделі. Формулюють основні допущення, прийняті при їхньому описі. Під «елементарним» процесом розуміється фізико-хімічний процес, що відноситься до визначеного класу явищ, наприклад масообмін, теплопередача, хімічна реакція і т. д. Слід зазначити, що назва «елементарні» процеси не означає, що дані процеси є найпростішими й описуються нескладними рівняннями.

Взаємозв’язок «елементарних» процесів може бути надзвичайно складним. Тому на практиці часто роблять різні допущення щодо характеру зв’язків, що дозволяє уникнути необхідності введення в модель недостатньо вивчених залежностей і, отже, зайвого ускладнення опису.

Слід зазначити, що іноді фізичний опис об’єкта моделювання встановлюється в результаті математичного моделювання. Якщо математичний опис адекватний відомим фізичним моделям, то можна з визначеною мірою впевненості стверджувати, що знайдено найбільш близький до істинного механізм протікання процесу.

На етапі складання математичного опису попередньо виділяють основні явища й елементи в об'єкті і потім установлюють зв'язок між ними. Далі, для кожного виділеного елемента і явища записують рівняння (або систему рівнянь), що відбиває його функціонування. У залежності від процесу математичний опис може бути представлений у вигляді системи алгебраїчних, диференціальних, інтегральних і інтегро-диференціальних рівнянь.

Етап вибору методу рішення і розробки моделюючої програми полягає у виборі найбільш ефективного методу рішення з наявних (під ефективністю маються на увазі швидкість одержання і точність рішення) і реалізацію його спочатку у формі алгоритму рішення, а потім – у формі комп'ютерної програми.

Для перевірки адекватності математичної моделі реальному процесу потрібно порівняти результати вимірів на об'єкті в ході процесу з результатами прогнозування на основі моделі в ідентичних умовах. Для цього використовується апарат теорії імовірності та математичної статистики.

1.1. Принципи моделювання. Загальний порядок складання моделей

При складанні математичного опису загальним прийомом є блоковий принцип. Відповідно до цього принципу, складанню математичного опису передує аналіз окремих «елементарних» процесів, що протікають в об'єкті моделювання, наприклад гідродинамічних, механічних процесів, процесів масо- і теплопередачі, кінетики хімічних реакцій. При цьому експерименти по вивченню кожного такого процесу проводять в умовах, що максимально наближаються до умов експлуатації об'єкта моделювання.

Заключним етапом у даному випадку є об'єднання описів усіх досліджених «елементарних» процесів (блоків) у єдину систему рівнянь математичного опису об'єкта моделювання. Достоїнством блокового принципу побудови математичного опису є те, що його можна використовувати на стадії проектування об'єкта, коли остаточний варіант апаратурного оформлення ще невідомий.

Розрізняють аналітичний, експериментальний і експериментально-аналітичний методи моделювання.

Аналітичними методами зазвичай називають способи одержання математичних рівнянь статики, динаміки і кінетики на основі теоретичного аналізу фізичних і хімічних процесів, що відбуваються в досліджуваному об’єкті, а також на основі заданих конструктивних параметрів апаратури і характеристик речовин, що переробляються.

При одержанні цих рівнянь використовуються фундаментальні закони збереження речовини й енергії, а також кінетичні закономірності процесів переносу маси і теплоти, хімічних перетворень.

Для складання математичного опису за допомогою аналітичних методів не потрібно проведення яких-небудь експериментів на об’єкті, тому такі методи придатні для одержання характеристик нових об’єктів, фізико-хімічні процеси в яких відомі.

Параметри (коефіцієнти) складених рівнянь функціонально залежать від визначальних розмірів апарата (діаметра, довжини і т.д.), властивостей оброблюваних речовин і величин, що характеризують протікання фізико-хімічних процесів (коефіцієнтів переносу, констант швидкості реакцій і т.ін.). Деякі параметри рівнянь можуть бути визначені розрахунковими шляхом, інші знаходяться за допомогою принципу подібності за результатами раніше виконаних досліджень.

До недоліків аналітичних методів складання математичного опису можна віднести складність рішення системи рівнянь, яка збільшується при досить повному описі об’єкта.

Експериментальний метод складання математичного опису використовується для керування і дослідження об’єктів у вузькому, «робочому» діапазоні зміни вхідних і вихідних змінних (наприклад, при побудові системи автоматичної стабілізації окремих технологічних параметрів). Ці методи найчастіше ґрунтуються на припущенні про лінійність і зосередженість параметрів об’єкта. Прийняття цих допущень дозволяє порівняно просто описувати процеси, що спостерігаються, алгебраїчними або лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами. При експериментальному підході до складання математичного опису завжди потрібна постановка дослідів безпосередньо на досліджуваному об'єкті.

Достоїнством експериментальних методів є простота одержання математичної моделі при досить точному описі властивостей об'єкта у вузькому діапазоні зміни параметрів. Основний недолік експериментальних методів – неможливість встановлення функціонального зв'язку між вхідними параметрами і конструктивними характеристиками об'єкта, режимними параметрами процесу, фізико-хімічними властивостями речовин. Крім того, отримані експериментальним методом математичні описи не можна поширювати на інші однотипні об'єкти.

Наявність «сильних» і «слабких» сторін аналітичного й експериментального методів складання математичного опису привело до розробки комбінованого експериментально-аналітичного методу.

Сутність його полягає в аналітичному складанні рівнянь опису, проведенні експериментальних досліджень і отриманні по їхніх результатах параметрів рівнянь. При такому підході до одержання математичного опису зберігаються багато позитивних властивостей експериментальних і аналітичних методів.

1.2. Методи математичного опису об'єкту

Формально математичний опис являє собою сукупність залежностей, що зв'язують різні змінні процесу в єдину систему рівнянь.

Серед цих співвідношень можуть бути рівняння, що відбивають загальні фізичні закони (наприклад, закони збереження маси й енергії), рівняння, що описують "елементарні" процеси (наприклад, хімічні перетворення), обмеження на змінні процесу і т.д. Крім того, до складу математичного опису входять також різні емпіричні і напівемпіричні залежності між різними параметрами процесу, теоретична форма яких невідома або занадто складна.

Зокрема, при відсутності або досить обмеженому обсязі теоретичних знань про об'єкт моделювання, коли невідомий навіть орієнтовано вид співвідношень, що описують його властивості, рівняння математичного опису можуть являти собою систему емпіричних залежностей, отриманих у результаті статистичного обстеження діючого об’єкта (експериментальний метод складання математичного опису).

Ці моделі звичайно мають вигляд регресійних співвідношень між вхідними і вихідними змінними об’єкта і, зрозуміло, не відбивають фізичну сутність об’єкта моделювання, що ускладнює узагальнення результатів, одержуваних при їхньому застосуванні.

На відміну від моделей, заснованих на регресійних співвідношеннях, математичні моделі, побудовані на основі аналітичного методу, відбивають основні закономірності процесу і якісно правильно характеризують його навіть при наявності недостатньо точних параметрів моделі. Тому з їх допомогою можна вивчати загальні властивості об’єктів моделювання, що відносяться до визначеного класу.

У складі математичного опису, розробленого на основі фізичної природи об’єкта моделювання, можна виділити наступні групи рівнянь:

1.Рівняння збереження фізичної субстанції (маси, енергії, імпульсу), які мають вигляд:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Прихід}\\ \text{субстанції}\end{array}} - \boxed{\begin{array}{c}\text{Витрата}\\ \text{субстанції}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Накопичення}\\ \text{субстанції}\end{array}}$$

Різниця між приходом і витратою субстанції дорівнює зміні її кількості в розглянутому об’єкті. У стаціонарному режимі не може відбуватися ні збиток, ні накопичення. У цьому випадку це рівняння переходить у рівняння матеріального балансу:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Прихід}\\ \text{субстанції}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Витрата}\\ \text{субстанції}\end{array}}$$

2. Рівняння елементарних процесів для локальних потоків. До цієї групи відносяться описи процесів масо- і теплообміну, хімічних реакцій і ін.

3. Теоретичні, напівемпіричні або емпіричні співвідношення між різними параметрами процесу. Такими є, наприклад, залежність коефіцієнта масопередачі від швидкостей потоків фаз, залежність теплоємності суміші від складу і т.д.

4. Обмеження на параметри процесу. Наприклад, при моделюванні процесу дифузії в замкнутому об'ємі на будь-якому ступені процесу повинна виконуватися умова, що сума концентрацій усіх компонентів дорівнює 1. Крім того, відносна концентрація будь-якого компонента повинна знаходитися в діапазоні від 0 до 1.

Загальним для всіх математичних моделей є те, що число рівнянь, що включаються в математичний опис, повинно дорівнювати числу змінних, що знаходяться в результаті моделювання.

Математичні моделі можна класифікувати наступним способом:

– по просторовим ознакам – моделі з зосередженими параметрами; комірчасті моделі; моделі з розподіленими параметрами;

– по часовим ознакам – стаціонарні моделі; квазістаціонарні моделі; нестаціонарні моделі.

Основні класи рівнянь, що зустрічаються в математичних описах технологічних об'єктів промисловості наступні: алгебраїчні і трансцендентні рівняння, звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в часткових похідних і інтегральні рівняння.

До алгебраїчних рівнянь звичайно зводиться математичний опис стаціонарних режимів роботи об'єктів із зосередженими параметрами (наприклад, реактор – змішувач, розподіл температур, швидкостей потоку при стаціонарній течії рідини в апараті).

Звичайні диференціальні рівняння використовують для математичного опису нестаціонарних режимів об'єктів із зосередженими параметрами, наприклад, для опису кінетики зміни середньої температури при нагріванні (охолодженні) тіла, а також стаціонарних режимів об'єктів з розподіленими параметрами але по одній просторовій координаті. У першому випадку незалежною змінної є час, а в другому – просторова координата.

Складність рішення звичайних диференціальних рівнянь визначається низкою обставин. По-перше, вона зростає з ростом порядку рівняння (або, що практично еквівалентно цьому, з ростом числа диференціальних рівнянь у системі, оскільки рівняння *n*-го порядку завжди можна перетворити в систему, що складається з *n* рівнянь першого порядку). На складність рішення істотніше впливає лінійність або нелінійність рівнянь. Лінійні звичайні диференціальні рівняння вирішуються набагато простіше; для них розроблений ряд спеціальних методів, наприклад, операційне числення. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами мають просте аналітичне рішення. Нелінійність різко ускладнює рішення, і, як правило, у цьому випадку потрібне використання чисельних методів.

Важливою особливістю математичного опису, що містить звичайні диференціальні рівняння, є необхідність завдання початкових умов.

Диференціальні рівняння в частинних похідних використовують для математичного опису динаміки об’єктів з розподіленими параметрами або стаціонарних режимів для об’єктів з параметрами, розподіленими по декількох координатах. Для зазначених рівнянь при описі динаміки об’єкта поряд з початковими умовами потрібно також задавати граничні умови, які у загальному випадку є функціями часу.

Для стаціонарних об’єктів, які описуються рівняннями в часткових похідних, задають тільки граничні умови. Задачі з рівняннями в часткових похідних, як правило, відрізняються найбільшою складністю, і в більшості випадків рішення кожної конкретної задачі вимагає серйозної роботи.

Дослідження об’єктів, які описуються диференціальними рівняннями, іноді являє собою досить важку обчислювальну задачу. Тому в ряді випадків замість диференціальних рівнянь використовують системи різницевих рівнянь, для чого безперервний об’єкт із розподіленими параметрами розглядають як дискретний із зосередженими параметрами, але такий, що має комірчасту структуру. Формально математично заміна безперервного об’єкта дискретним еквівалентна заміні диференціальних рівнянь різницевими співвідношеннями. При подібних перетвореннях системи рівнянь, природно, виникає погрішність, яку необхідно враховувати при оцінці результатів моделювання.

1.3. Аналітичні методи моделювання

1.3.1. Термодинамічний метод опису систем

Під термодинамічною системою розуміють сукупність матеріальних тіл, зміна властивостей яких впливає на технологічний процес. Характеристиками системи є величини, що експериментально реєструються (об’єм, тиск, температура). Характеристичними функціями системи, (характеристиками, що обчислюються) і визначають її стан, вважають внутрішню енергію U, ентальпію H і енергію Гіббса G. Кожна з цих функцій виражається через незалежні змінні (параметри) системи. Для внутрішньої енергії незалежними параметрами є ентропія S і об’єм V, для ентальпії – ентропія S і тиск p, для енергії Гіббса – температура T і тиск p.

Часткові похідні характеристичних функцій по числу молів компонентів N_i при інших постійних параметрах стану називають хімічними потенціалами цих компонентів:

$$dU/dN_i=dH/dN_i=dG/dN_i=\mu_i,$$

де N_i – число молів i-го компонента.

Умови стійкої рівноваги визначаються мінімальними значеннями U, H и G в ізольованій системі. Число незалежних параметрів (число ступенів вільності) відповідно до правила фаз Гіббса дорівнює

$$G=n-\Phi,$$

де n, Φ – число компонентів і фаз системи.

У найбільш загальній формі умова рівноваги системи математично формулюється як рівність нулю повного диференціала параметрів стану, що визначають властивості речовини

$$dT=0,\ dp=0,\ dC_i=0,$$

де $dT=0$, $dp=0$, $dC_i=0$ – термічна, механічна і хімічна (концентраційна) рівновага системи.

Усі довільні процеси у відповідності з другим законом термодинаміки супроводжуються збільшенням ентропії системи. В ізольованій системі ентропія в стані рівноваги досягає максимального значення, а $dS=0$. Використовуючи характеристичні функції, умови рівноваги будь-якої фізичної системи математично визначаються системою трьох рівнянь:

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot dN = 0$$
$$dH = T \cdot dS - V \cdot dp + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot dN = 0$$
$$dG = S \cdot dT - p \cdot dV + \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot dN = 0$$

В основі термодинамічного методу одержання рівнянь нестаціонарного переносу маси, енергії, імпульсу лежить відоме вираження для вільної енергії і рівняння Гіббса для зміни ентропії багатокомпонентних систем:

$$dF = -S \cdot dT - \sum_k \mu_k \cdot dC_k + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij},$$
$$T \cdot dS = dU - \sum_k \mu_k \cdot dC_k + p \cdot dV,$$

де S – ентропія; μ_k – хімічний потенціал компонента k у суміші, що складається з k речовин; σ_{ij} – тензор напруження; ε_{ij} – тензор деформацій; U – внутрішня енергія.

Через величину вільної енергії визначаються термодинамічні параметри μ_k, σ_{ij}, ε_{ij}, які потім використовують для запису в явному вигляді рівняння Гіббса. Термодинаміка нерівноважних процесів, заснована на наступних постулатах:

1. Існує лінійна залежність узагальнених термодинамічних потоків від узагальнених потенціалів (рівняння Онзагера)

$$T\frac{dS_i}{d\tau} = \sum_i J_i \cdot X_i,$$

$$J_i = \sum_m L_{im} \cdot X_m,$$

де J_i – потоки; X_m – термодинамічні сили; L_{im} – феноменологічні коефіцієнти.

2. Феноменологічні коефіцієнти задовольняють співвідношенням взаємності Онзагера про рівність перехресних коефіцієнтів.

3. Справедливий принцип Пригожина про мінімум виробництва ентропії.

4. Поняття ентропії для локальної термодинамічної рівноваги діє і для систем, що віддалені від рівноваги.

Виходячи з цих постулатів, одержують рівняння переносу, а порівнюючи його з рівнянням Онзагера визначають термодинамічні рушійні сили, зокрема для переносу теплоти і маси відповідні сили мають вигляд:

$$X_T = -\nabla lnT,$$

$$X_\mu = -T\nabla\left(\frac{\mu_k}{T}\right).$$

Виникаюча при цьому проблема переходу до фізичних величин, що спостерігаються експериментально, вирішується при цьому приблизно. Це є основним недоліком термодинамічного методу для опису нерівноважних процесів

1.3.2. Феноменологічний метод опису систем

В основі феноменологічного методу одержання рівнянь переносу лежить інтегральне рівняння збереження і переносу фізичної субстанції

$$\int_V \frac{\partial\Psi}{\partial\tau}dV + \oint_S (\Psi \cdot v_\Psi + j_\Psi)dS = \int_V I_\Psi dV$$

або його диференціального аналога – рівняння Умова

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} + div(\Psi \cdot v_\Psi) = -div(j_\Psi) + I_\Psi,$$

де Ψ – об'ємна концентрація фізичної субстанції (маси, енергії, імпульсу і т.д.); j_Ψ – густина дифузійного (молекулярного) потоку субстанції; v_Ψ – швидкість конвекційного (молярного) потоку субстанції; I_Ψ – об'ємна потужність внутрішніх джерел, стоків субстанції.

Ці рівняння мають простий фізичний зміст – швидкість зміни концентрації субстанції в об'ємі V із площею поверхні S дорівнює сумарній дії дифузійних і конвекційних потоків, що входять і виходять через поверхню, яка обмежує цей об'єм і швидкості утворення (зникнення) субстанції внаслідок дії внутрішніх джерел I_Ψ. Використання цих рівнянь не накладає яких-небудь обмежень на задання рушійних сил, що забезпечують появу потоків субстанції, крім наявності експериментальної кореляції між ними.

У якості феноменологічних співвідношень між потоками і рушійними силами використовуються відомі експериментальні закони.

Для теплопровідності – закон Фур'є:

$$j_T=\lambda \cdot grad(T).$$

Для молекулярної дифузії – закон Фіка:

$$j_m=D \cdot grad(C).$$

Для фільтраційного переносу – закон Дарсі:

$$j_m = k_p \cdot grad(p).$$

Для кількості руху (внутрішнього тертя) – закон Ньютона

$$\sigma_\tau = \eta \cdot grad(v).$$

У цих рівняннях відповідно j_T, j_m, σ_τ потоки теплоти, маси, імпульсу; D, k_p, η – коефіцієнти теплопровідності, дифузії, фільтрації, в'язкості – є кінетичними коефіцієнтами; градієнти концентрації, температури, швидкості є потенціалами переносу.

Фізичний сенс феноменологічних законів переносу полягає в тому, що потік енергії, маси, імпульсу виникає внаслідок неоднорідності полів фізичної субстанції. Мірою просторової неоднорідності полів є градієнт фізичної величини (позначається *grad*), що вказує напрямок максимального зростання субстанції і чисельно рівний похідній від відповідної фізичної величина в цьому напрямку.

Покажемо, як використовується феноменологічний підхід для складання математичної моделі нестаціонарного переносу маси. Будемо вважати, що для нестаціонарного вологопереносу фізичною субстанцією є вологовміст, тому $\Psi = \rho_0 \cdot w$. Внутрішнє джерело маси відсутнє $I_m = 0$ (маса не утворюється завдяки хімічним реакціям), а дифузійний перенос здійснюється під дією градієнта вологовмісту і температури (явище термовологопровідності). Конвекційне перенесення вологи здійснюється під дією надлишкового тиску відповідно до закону Дарсі, тому

$$\Psi \cdot v = \rho_0 \cdot k_p \cdot grad(p),$$

де ρ_0 – середня концентрація сухої речовини в об'ємі тіла, p – тиск парогазової суміші усередині тіла.

На основі рівняння Умова одержуємо відоме рівняння О.В.Ликова для нестаціонарного переносу маси:

$$\frac{\partial(\rho_0 \cdot w)}{\partial\tau} = -div\left(-\rho_0 a_m \nabla w - \rho_0 a_{mT} \nabla \mathrm{T} - \rho_0 k_p \nabla \mathrm{p}\right)$$

або після перетворень

$$\frac{\partial(w)}{\partial\tau} = a_m \nabla^2 w + a_{mT} \nabla^2 \mathrm{T} + k_p \nabla^2 \mathrm{p},$$

де a_m – коефіцієнт дифузії вологи; a_{mT} – коефіцієнт термодифузії вологи; k_p – коефіцієнт фільтрації.

Для того, щоб одержати залежність вологовмісту в даній точці системи від часу, координати, фізичних властивостей, тобто вирішити це рівняння, треба задатися умовами однозначності або крайовими умовами, що задають значення фізичної величини на границях системи в будь-який момент часу.

Точне рішення крайових задач можливо тільки для обмеженого класу рівнянь і найпростішої геометрії системи. Для реальних систем подібні задачі вирішуються чисельно. Універсальним методом для чисельного рішення крайових задач є метод кінцевих різниць, що полягає в рішенні різницевого аналога диференціального рівняння на кінцевому числі вузлів сітки в розрахунковій області. Цей метод хоча і загальновизнаний, але має недоліки, а саме тривалість налагодження програм і розрахунку, відсутність універсальності при зміні геометрії об’єкта, низька ефективність при рішенні зворотних задач і задач оптимізації.

У відмінності від методу кінцевих різниць варіаційні і проекційні методи мають ті переваги, що наближене рішення шукається у вигляді ряду заданих аналітичних функцій, тобто є аналітичним за формою його представлення, тоді як різницеві методи дають лише числові таблиці даних у вузлах сітки. До найбільш розповсюджених варіаційних методів відносяться методи Ритца і Трефтца, сутність яких зводиться до заміни диференціального рівняння еквівалентним інтегральним функціоналом, екстремум якого відповідає кращій апроксимації точного рішення крайової задачі. Однак цей метод можна використовувати тільки для лінійних крайових задач.

В основі проекційних методів таких, як метод кінцевих елементів, спектральний метод, метод граничних елементів, лежить метод Б.Г.Гальоркіна, що на відміну від варіаційних методів є універсальним у змісті можливості одержання рівняння для нев’язання (помилки) наближеного рішення, у тому числі, для нелінійних рівнянь.

1.4. Експериментальні методи моделювання

Знання полів швидкостей, температур, концентрацій і т.д. у результаті використання аналітичного методу надає принципову можливість рішення ряду практичних задач технології і конструювання.

Однак найчастіше рішення настільки складне, що отриманою інформацією скористатися не вдається, оскільки ці поля є складними тривимірними структурами, а при описі нестаціонарних процесів додається четверта змінна – час. Тому для дослідження технологічних процесів і встановлення кількісних зв’язків між показниками якості процесів і визначальних факторів широко використовують математичні описи, отримані на основі експериментальних даних по різних планах.

Розглядаючи об’єкт дослідження як процес керування, можна його параметри класифікувати відповідно до принципів, прийнятими в теорії керування. Параметри стану, або керовані параметри y_1, y_2, ..., y_i залежать від протікання процесу, характеризують його режим і готовий продукт і використовуються як критерії якості або обмеження.

Параметри спостереження також залежать від протікання процесу, можуть бути контрольованими і неконтрольованими. Однак вони не використовуються для дослідження або керування. Керуючі (або змінні) параметри x_1, x_2, ..., x_i являють собою такі які впливають на процес і які можна цілеспрямовано змінювати. Збурюючі параметри – це такі параметри, що впливають на процес, але не залежать від стану об’єкта; ними неможливо керувати.

Параметри стану і спостереження називають вихідними тому, що вони характеризують процес або одержуваний продукт. У залежності від мети керування параметри стану і спостереження можуть мінятися місцями. Керуючі параметри є вхідними і змінюються в залежності від задачі дослідження.

При проведенні експериментальних досліджень звичайно встановлюють зв’язку між вхідними факторами, що впливають на протікання процесу, і вихідними параметрами процесу, що характеризують його властивості. Перші з них є незалежними і можуть приймати довільні значення x_i на технологічно можливих інтервалах; другі – залежними y_i, тому що їхні значення визначаються властивостями процесу і зміною незалежних перемінних.

Якщо одна з величин y залежить від іншої x таким чином, що кожному значенню x відповідає визначене значення y, то таку залежність називають функціональною, а якщо кожному значенню x відповідає деяка сукупність значень y, то статистичною. Частковим випадком статистичного зв’язку є кореляційна залежність, коли зміна величини x, обумовлює зміну розподілу y і його середнього значення.

Експеримент проводять пасивними й активними методами. Під пасивними експериментами розуміють одержання будь-яких даних без планування умов проведення дослідів при випадковій зміні вхідних факторів. При цьому проводять виміри або збирають необхідні дані по різних документах у результаті нормального протікання технологічного процесу. Пасивні методи найбільше доцільно застосовувати до працюючих виробничих установок (натурних моделей).

Пасивний експеримент проводять без плану, але до його організації висувають певні вимоги, виконання яких забезпечує необхідну якість отриманих даних. Це оснащення об’єкта відповідними вимірювальними приладами, встановлення періодичності реєстрації даних, порядок реєстрації даних і т.д. Пасивний експеримент широко використовують для одержання динамічних характеристик лінійного об’єкта, що описується диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Позитивними в пасивному експерименті є відносна простота одержання вихідних даних і порівняно невеликі витрати на їхнє одержання. Однак пасивним експериментам властивий цілий ряд недоліків:

– діапазони зміни вхідних параметрів можуть не відповідати поставленій задачі дослідження, тобто досвідчені точки невдало розташовані;

– сукупність отриманих даних містить недостатню кількість корисної інформації:

– зміни вихідних параметрів обумовлені змінами неконтрольованих вхідних параметрів.

Активний експеримент (заздалегідь спланований) ставлять у тому випадку, якщо досліджуваний об’єкт допускає можливість постановки дослідів у необхідних межах. При цьому досягають зниження витрат праці, засобів і часу, підвищення надійності отриманих результатів дослідження, одночасного вивчення великого числа факторів, що впливають на процес, обліку впливу кожного з факторів і міжфакторних взаємодій. Плани зміни вхідних факторів повинні передбачати застосування простих і найменш трудомістких методів обробки отриманих результатів, що дають можливість одержати опис процесу найбільш простими засобами. Активні експерименти проводять як у виробничих умовах, так і на різних фізичних моделях. На основі результатів цих експериментів можна одержати математичний опис у виді поліномів, користуючись методами регресивного і кореляційного аналізу.

Однофакторний експеримент не дає можливості виявити оптимальні значення вихідного параметра з урахуванням взаємодії двох і більш факторів і тому більш ефективними є багатофакторні плани, при яких одночасно варіюють декількома факторами. Для скорочення числа дослідів складають спеціальні матриці планування, у яких визначають число дослідів і межі зміни факторів. Матриця являє собою перелік варіантів, узятих у даній серії дослідів. Фактором прийнято називати вхідні параметри процесу x_i.

У таблиці представлена матриця планування для двох факторів x_1 та x_2.

Номер досліду	x_1	x_2
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

Матриця планування для трьох факторів x_1, x_2, x_3 при двох рівнях варіювання фактору наведено у наступній таблиці.

Номер досліду	x_1	x_2	x_3
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Такі матриці планування називають повним факторним експериментом (ПФЕ) типу 2^2 і 2^3, відповідно Знаки (+) і (-) – це верхній і нижній рівні кожного фактору.

Для зниження числа дослідів користуються дробовими репліками або постановкою дробового факторного експерименту (ДФЕ). Якщо в матриці типу 2^3 добуток $x_1 \cdot x_2$ дорівняти третьому факторові x_3, то можна обмежитися чотирма дослідами, матриця яких 2^{3-1} представлена в таблиці.

Номер досліду	x_1	x_2	x_3
2	+	-	-
3	-	+	-
5	-	-	+
8	+	+	+

Матриця другої напівреплiки – наведена у наступній таблиці.

Номер досліду	x_1	x_2	x_3
1	-	-	-
4	+	+	-
6	+	-	+
7	-	+	+

Цей третій розрахунковий фактор називають додатковим. Якщо число додаткових факторів прийняти 2, то план називається чвертьреплікою, 3 – однієї восьмою репліки і т.п.

Кількість варіантів дослідів, який необхідно поставити по матриці планування, залежить від числа досліджуваних факторів n. Усього на двох рівнях для n факторів можливо $2n$ варіантів планування. Для наближеного опису процесу лінійним рівнянням і можливості оцінки його адекватності досить поставити від n+2 до n+6 варіантів дослідів. При цьому важливо, щоб у них приблизно однакове число раз зустрічалися верхні і нижні рівні кожного фактору.

Для спрощення розрахунків і більш точного визначення напрямку руху до оптимуму досліди ставлять по так називаних ортогональних матрицях. У них із усіх можливих варіантів обрана невелика їхня кількість. При цьому дотримуються наступних умов:

– у серії дослідів кількість варіантів з верхнім рівнем кожного фактору дорівнює кількості варіантів з нижнім рівнем того ж фактору;

– верхній і нижній рівні будь-якого фактору сполучаються однаковою кількістю разів з верхнім і нижнім рівнями всіх інших факторів.

Після складання матриці планування і вибору інтервалів варіювання факторів відповідно до варіантів матриці ставлять досліди, за результатами яких розраховують лінійне рівняння регресії:

$$y=a_0+a_1 \cdot x_1+a_2 \cdot x_2+a_3 \cdot x_3.$$

Крім викладених формальних сторін одержання експериментальної інформації про технологічні процеси варто враховувати і неформальні чисто технологічні аспекти планування експерименту, тобто визначати можливості виміру величин у даних умовах, у заданих межах, а також стабілізації несуттєвих факторів, умови перерахування даних стосовно до виробничих умов і т.ін.

При виборі плану експерименту варто враховувати деякі найбільш розповсюджені помилки:

– неповний аналіз наявних теоретичних представлень про досліджуваний об’єкт;

– невдалий вибір параметрів спостереження (керуючих факторів);

– невдалий вибір параметрів стану (керованих параметрів);

– неповний облік можливостей виміру відповідних технологічних потоків;

– опис одиничних або випадкових явищ при даних конкретних умовах.

1.5. Експериментально-аналітичній метод моделювання

В основі експериментально-аналітичного методу моделювання лежить метод аналізу розмірностей і теорія подібності.

Розрізняють розмірні і безрозмірні величини. Ці величини пов’язані між собою певними співвідношеннями. Незалежні розмірні величини називають основними (*м*, *кг*, *с*, *К*), а всі інші величини – похідними (*м/с*, *кг·м/с*^{2} тощо). Вираження похідної величини через основні величини називають розмірністю.

Будь-яке фізичне рівняння за розмірністю є однорідним, тобто обидві його частини мають завжди однакову розмірність, незалежно від вибору системи фізичних величин. Це правило розповсюджується і на ще невідомі рівняння. Властивість однорідності є основою теорії розмірностей. Формули розмірності всіх похідних фізичних величин мають вигляд степеневих одночленів:

$$[D]=L^{\alpha}\cdot M^{\beta}\cdot \tau^{\gamma}\cdot T^{\delta},$$

де L, M, τ, T – відповідно довжина, маса, час і температура.

Якщо на основі аналізу того чи іншого явища можна виділити фізичні величини, які впливають на це явище, то встановити характер залежності між виділеними величинами можна на основі принципу однорідності розмірності і за допомогою П-теореми Бекінгема.

П-теорема доводить, що загальну функціональну залежність, яка пов’язує між собою n розмірних величин при k основних одиницях їх вимірювання, можна навести як залежність між n-k безрозмірними комплексами цих величин, а за наявності подібності – як зв’язок між n-k критеріями подібності.

Наприклад рух рідини у трубопроводі залежить від таких величин:

$$\pi=f(v, \mu, \rho, d),$$

де v, μ, ρ – відповідно швидкість, динамічна в’язкість і густина потоку; d – діаметр трубопроводу; π – число подібності.

Цю функцію наближено можна записати у вигляді степеневої залежності:

$$\pi=C\cdot v^{\alpha}\cdot \mu^{\beta}\cdot \rho^{\gamma}\cdot d^{\delta},$$

де C, α, β, γ, δ – невідомі числові коефіцієнти.

Враховуючи, що розмірності обох частин залежності однакові, а C – безрозмірний коефіцієнт, замінимо всі величини в ній розмірностями цих величин:

$$\pi = M^0 \cdot L^0 \cdot \tau^0 \cdot (L \cdot \tau^{-1})^{\alpha} \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot \tau^{-1})^{\beta} \cdot (M \cdot L^{-3})^{\gamma} \cdot L^{\delta},$$

У лівій частині останнього рівняння величина π виражена через розмірність основних величин у нульовому степені. Показники степенів при однакових основних одиницях в обох частинах цього рівняння повинні бути однакові. Тому отримуємо систему трьох рівнянь:

Для M: $\beta+\gamma=0$.

Для L: $\alpha-\beta-3\cdot\gamma+\delta=0$.

Для τ: $-\alpha-\beta=0$.

У цій системі з трьох рівнянь є чотири невідомих α, β, γ, δ. Будь-які три з них завжди можна подати через четверту, наприклад, α. Тоді знайдемо з третього рівняння $\beta=-\alpha$, з першого $\gamma=\alpha$, з другого $\delta=\alpha$.

Підставляючи тепер значення α, β, γ, δ у вихідне рівняння, отримаємо:

$$\pi = C \cdot v^{\alpha} \cdot \mu^{-\alpha} \cdot \rho^{\alpha} \cdot d^{\alpha} = C \cdot \left(\frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}\right)^{\alpha} = C \cdot Re^{\alpha},$$

де α може приймати будь-яке значення, відмінне від нуля.

Значення α і C визначають з обробки результатів експериментальних даних. Тобто визначаючою величиною для руху рідини в трубопроводі являється критерій Рейнольдса.

РОЗДІЛ 2. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТІ

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає закономірності випадкових явищ: випадкові події, випадкові величини, їхні функції, властивості й операції над ними.

Предметом теорії ймовірностей є вивчення математичних моделей реальних випадкових явищ (подій), які називають ймовірнісними моделями. Такі моделі дозволяють зрозуміти математичну сутність реальних випадкових подій та надають можливість прогнозувати перебіг досліджуваних випадкових подій.

2.1. Імовірність та її властивості

2.1.1. Випадкові події. Класифікація подій

Основні поняття теорії ймовірностей випливають із призначення теорії ймовірностей як науки. Теорія ймовірностей займається виявленням закономірностей в масових випадкових явищах природи. Тому основним операційним матеріалом для теорії ймовірностей є події. Внаслідок проведеного дослідження, яке ми будемо називати випробуванням, настає подія.

Експериментом (або випадковим експериментом) називають певний комплекс умов, що забезпечують спостереження за певним реальним випадковим явищем (певною реальною випадковою подією). Кожне окреме проведення експерименту (тобто забезпечення певних умов) називають випробуванням, а відповідний результат випробування називають наслідком, або елементарним наслідком або елементарною подією.

Сукупність усіх елементарних подій, пов’язаних з конкретним експериментом, позначають Ω і називають ***множиною (або простором) елементарних подій***. Простір елементарних подій може містити скінчену, злічену або незлічену множину елементів.

Кожну реальну випадкову подію, пов’язану з цим експериментом, ототожнюють з її математичною моделлю – певною сукупністю результатів цього експерименту. Такі моделі називають подіями. Події позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C або $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Наприклад: підкидання монети – випробування, випав герб – подія.

Подія *A*, яка під час виконання комплексу умов може відбутися, або не відбутися, називається випадковою.

Наприклад, якщо кинути монету, то вона може впасти так, що зверху буде або герб, або напис. Тому подія «при киданні монети випав герб» є випадковою.

Подія, яка обов'язково відбувається під час кожного виконання комплексу умов, називається вірогідною (достовірною), якщо подія А напевно не може відбутися при виконанні комплексу умов, то вона навивається неможливою.

Наприклад, якщо в ящику є лише білі кулі, то те, що витягнута куля, буде білою – достовірна подія, а те, що витягнута куля буде іншого кольору – неможлива подія.

Достовірну подію позначають *U*, а неможливу подію *V*.

Події *A, B, C* ... називаються несумісними, якщо поява однієї із цих подій унеможливлює появу іншої події в одному і тому ж випробуванні.

Наприклад, кинули монету. Поява герба виключає появу напису. Подія «з'явився герб» і « з'явився напис» – несумісні.

Якщо поява однієї події не виключає появи іншої, то такі події називаються сумісними.

Наприклад, якщо маємо дві коробки деталей. Із кожної коробки вибирають навмання по одній деталі. В цьому разі вибір стандартної деталі і з першої коробки, і з другої – будуть подіями сумісними.

Події називаються протилежними, якщо в умовах випробування вони, будучи єдиними його наслідками, і є не сумісні. Подію, протилежну події *A*, позначають через $\overline{A}$.

Прикладами протилежних подій можуть бути влучення і промах при пострілі.

Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються рівноможливими, якщо жодна з цих подій не має «переваги» над іншою.

Наприклад, поява герба і поява напису при киданні монети є події рівноможливі. Або при киданні грального кубика ні одна із граней не має переваги перед іншою.

Події A_1, A_2, ..., A_n, попарно несумісні та рівноможливі, утворюють повну групу подій, з яких хоча б одна неминуче відбудеться, тобто сума цих подій є подією достовірною.

Наприклад, підкидають шестигранний кубик. Позначимо події: A_1 – випала грань з цифрою 1; A_2 – випала грань з цифрою 2; A_3 – випала грань з цифрою 3; A_4 – випала грань з цифрою 4; A_5 – випала грань з цифрою 5; A_6 – випала грань з цифрою 6. Тоді події A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 утворюють повну групу подій.

2.1.2. Класичне визначення ймовірності

Якщо подія A складається з m частинних випадків, що входять до складу повної групи з n попарно несумісних і рівноможливих випадків, то ***ймовірність*** P(A) події A дорівнює:

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

тобто ймовірність $P(A)$ події A дорівнює відношенню числа результатів випробувань, сприятливих події A, до числа всіх можливих результатів випробувань.

Із означення ймовірності випливають такі властивості:

1. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці, тобто:

$$P(U) = 1.$$

Якщо подія достовірна, то число сприятливих випадків дорівнює числу всіх можливих, тобто $m=n$ і тому:

$$P(U) = \frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

2. Ймовірність неможливої події V дорівнює нулю, тобто:

$$P(V) = 0.$$

Якщо подія неможлива, то ні один із результатів випробувань не сприяє появі події, тобто m=0 і, отже:

$$P(V) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0.$$

3. Ймовірність випадкової події А задовольняє таку нерівність:

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Випадковій події А сприяє лише частина із загального числа результатів випробувань. У цьому разі $0 \leq m \leq n$, а отже,

$$\frac{0}{n} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{n}{n}, \text{ тобто } 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Приклад. В ящику 7 однакових за розміром куль: 1 червона, 2 сині, 4 білих. Знайти ймовірність появи синьої кулі, якщо беруть одну кулю з ящика навмання.

Розв'язання. Нехай подія А – навмання взята синя куля. З ящика можна взяти будь-яку кулю із семи, тому усіх можливих наслідків – 7, тому n=7.

Появі синьої кулі сприяти будуть лише 2 кулі, тому m=2. Виходячи з цього одержуємо:

$$P(V) = \frac{2}{7}.$$

Приклад. Знайти ймовірність того, що вибране випадковим чином двозначне число ділиться на 5.

Розв'язання. Експеримент полягає в тому, що випадково вибирається двозначне число. Наслідком такого випробування є одне з чисел від 10 до 99.

Оскільки двозначних чисел 90, то n=90, причому вибір кожного числа можна вважати рівноможливим.

Нехай подія А – вибране двозначне число ділиться на 5.

Загальна кількість наслідків експерименту n=90. Кількість чисел, які діляться на 5 є 18, тому m=18.

Тоді ймовірність події А:

$$P(V) = \frac{18}{90} = \frac{2}{10}.$$

2.1.3. Елементи комбінаторики та їх застосування під час обчислення ймовірностей

Комбінаторика – це розділ математики, який вивчає розміщення об'єктів відповідно до спеціальних правил і методів підрахунку числа всіх можливих способів, якими ці розміщення можуть бути зроблені.

1. Перестановки. Усякий встановлений у скінченній множині порядок називається перестановкою його елементів.

Число всіх перестановок з n елементів позначають P_n. Воно дорівнює добутку послідовних натуральних чисел від 1 до n.

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Приклад. Президент компанії планує відвідати 7 філій, які знаходяться в різних містах. Скільки є різних маршрутів поїздок?

Розв'язання. Кількість різних маршрутів буде рівною кількістю перестановок з 7 елементів.

Тоді одержимо:

$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ маршрутів поїздок.

2. Розміщення. Множина, в якій задано порядок розміщення її елементів, називається впорядкованою. Нехай задано скінченну множину, яка складається з n

елементів. Усяка її упорядкована k-елементна підмножина ($k<n$) називається розміщенням з n елементів по k.

Число розміщень з n елементів по k позначають A_n^k. Це число знаходять за формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Приклад. Керівництво компанії, яке складається з голови, заступника, та головного бухгалтера, обирають з 10 претендентів. Скільки може бути варіантів вибору керівництва компанії?

Розв'язання. Оскільки порядок вибору членів керівництва важливий, то кількість варіантів вибору буде розміщення з 10 по 3.

Тоді одержимо:

$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ різних варіантів вибору керівництва компанії.

3. Сполучення. Нехай дано скінченну множину, яка складається з n елементів. Усяка її k-елементна підмножина ($k<n$) називається сполученням з n елементів по k.

Число сполучень з n елементів по k позначають C_n^k. Це число знаходиться за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Приклад. Приватне підприємство має ліцензію на проведення десяти видів комерційної діяльності. На початку роботи підприємство планує займатися п'ятьма видами діяльності. Скільки є способів вибору цих п'яти видів комерційної діяльності?

Розв'язання. Оскільки порядок вибору видів діяльності не є важливим, то число способів вибору п'яти видів комерційної діяльності буде рівне числу комбінацій з 10 елементів по 5.

Тоді одержимо:

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252 \text{ способи.}$$

Під час знаходження ймовірностей подій доволі часто для обчислення кількості елементарних подій (сприятливих деякій події або всіх можливих подій) використовують елементи комбінаторики (розміщення, перестановки, сполучення).

Приклад. Чотирнадцять варіантів контрольної роботи написані на окремих картках і випадково розподіляються серед 12 здобувачів освіти, які сидять в одному ряду. Кожний здобувач освіти отримує одну картку. Знайти ймовірність того, що варіанти 1 і 2 не будуть використані.

Розв'язання. Маємо експеримент з розподілу 14 карток серед 12 здобувачів освіти. Результатами експерименту є впорядковані (за здобувачами освіти) набори розданих 12 з 14 варіантів контрольних робіт. У цьому разі елементарні події відрізняються одна від одної не лише номерами варіантів, що розподіляються серед здобувачів освіти, а й порядком розподілу. Тому такі елементарні події є розміщеннями, а кількість усіх розміщень (елементарних подій) обчислюється:

$$n = A_{14}^{12} = \frac{14!}{(14-12)!}.$$

Вважаємо, що всі елементарні події рівноможливі.

Нехай подія А – варіанти 1 і 2 залишаться нерозподіленими. Тоді інші 12 карток розподіляться серед 12 здобувачів освіти.

Такі розподіли є перестановками, а їх кількість обчислюється за формулою:

$m = P_{12} = 12!$ – кількість елементарних подій, що сприяють події А.

Отже, маємо:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{P_{12}}{A_{14}^{12}} = \frac{12!\cdot(14-12)!}{14!} = \frac{2!}{13\cdot 14} \approx 0.01.$$

Приклад. У групі 10 хлопців і 5 дівчат, серед яких вибирають дві особи для участі у конференції. Яка ймовірність того, що:

А. Виберуть двох хлопців;

Б. Виберуть хлопця й дівчину?

Розв'язання. У групі 15 осіб, серед яких 10 хлопців і 5 дівчат. Вибір двох осіб із 15 є сполученням, кількість яких:

$$C_{15}^{2} = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = \frac{14\cdot 15}{1\cdot 2} = 105.$$

Це є загальна кількість випадків при *n*=105.

А. Нехай подія *A* – вибрали двох хлопців.

Кількість випадків, що сприяють події А, визначається кількістю виборів 2 хлопців із 10:

$$m = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10}{1\cdot 2} = 45.$$

Тоді ймовірність події *A*:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{45}{105} \approx 0.43.$$

Б. Нехай подія *B* – вибрали хлопця й дівчину.

Кількість випадків, що сприяють події *B*, визначається кількістю виборів 1 хлопця із 10 і 1 дівчини з 5.

Це можливо розрахувати як:

$$m = C_{10}^{1} \cdot C_{5}^{1} = \frac{10!}{1!\cdot(10-1)!} \cdot \frac{5!}{1!\cdot(5-1)!} = 10 \cdot 5 = 50 \text{ способами.}$$

Отже, ймовірність події *B*:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{50}{105} \approx 0.48.$$

Приклад. (*Задача про вибірку*). У партії з *N* деталей – *M* бракованих. Навмання беруть *n* деталей. Знайти ймовірність того, що з *n* деталей буде *m* бракованих.

Розв'язання. Елементарним наслідком є вибір будь-яких деталей з їх загального числа *N*. Число всіх таких наслідків дорівнює числу комбінацій з *N* по *n*, тобто C_N^n.

Подія *A* є виймання *n* деталей, з яких *m* бракованих. Наслідком, який сприяє настанню події *A*, є поява групи з *n* деталей, в яких *n-m* якісних деталей і *m* бракованих. Число таких груп дорівнює $C_{N-M}^{n-m} \cdot C_M^m$, бо групу з m бракованих деталей можна утворити C_M^m способами, а групу *n-m* якісних деталей – C_{N-M}^{n-m} способами. Водночас будь-яка група якісних деталей може комбінуватись з будь-якою групою несправних деталей.

Шукана ймовірність події *A* дорівнює відношенню числа наслідків, які сприяють цій події, до числа всіх елементарних наслідків:

$$P(A) = \frac{C_{N-M}^{n-m} \cdot C_M^m}{C_N^n}.$$

2.1.4. Статистичне означення ймовірності

Використання класичного означення до задач природничо-наукового або економічного характеру не завжди можливо з різних причин. Зокрема, часто неможливо подати результат експерименту як сукупність подій, які можна було б вважати рівноможливими. Наприклад, з міркувань симетрії, на яких ґрунтуються міркування про рівноймовірність подій, вивести ймовірність того, що народжена дитина була хлопчиком, неможливо.

З цієї причини поряд з класичним визначенням ймовірності користуються також статистичним визначенням ймовірності, приймаючи за ймовірність події її відносну частоту.

Відносна частота, поряд з ймовірністю, належить до основних понять теорії ймовірностей. Якщо позначити через μ – число появ події в n – незалежних випробуваннях, то відношення числа появ події до загального числа проведених випробувань називають відносною частотою появи даної події, тобто

$$W = \frac{\mu}{n},$$

де μ – число появ події, n – загальне число випробувань, W – відносна частота.

Порівнюючи класичне визначення ймовірностей і визначення відносної частоти, можна зробити такий висновок: визначення ймовірностей не вимагає, щоб проводились випробування в дійсності; визначення відносної частоти вимагає фактичного проведення випробувань. Тобто ймовірність визначають до випробування, а відносну частоту – після випробування.

Приклад. Відділ технічного контролю виявив у партії з 90 деталей 3 браковані деталі. Знайти відносну частоту бракованих деталей.

Розв'язання. Позначимо через A таку подію, як поява бракованої деталі.

Загальне число деталей n=90. Бракованих деталей – μ=3.

Тоді відносна частота появи бракованої деталі:

$$W(A) = \frac{3}{90} \approx 0.03.$$

Якщо дослідним шляхом встановлена відносна частота, то одержане число можна прийняти за наближене значення ймовірності.

Наприклад: за даними статистики, відносна частота народження дівчат на 1000 дітей характеризується такими числами за кожен місяць:

Місяці	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Частота W	0,486	0,489	0,490	0,471	0,478	0,482	0,462	0,484	0,485	0,491	0,482	0,473

Відносна частота коливається близько 0,482, яке можна прийняти за наближене значення ймовірності народжування дівчат

2.1.5. Геометричне означення ймовірності

Класичне означення ймовірностей використовується лише для експериментів з обмеженим числом рівномірних елементарних подій, тобто коли простір елементарних подій обмежений.

Для математичного опису досліду з нескінченним числом рівноможливих результатів використовують геометричне означення ймовірності.

Ймовірність випадкової події А дорівнює

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

де $m(A)$ – довжина, площа чи об’єм підмножини *A*; $m(\Omega)$ – довжина, площа чи об’єм області.

Якщо множина Ω вимірюється в лінійних одиницях, то *P(A)* дорівнюватиме відношенню довжини, якщо Ω вимірюється в квадратних одиницях, то *P(A)* дорівнюватиме відношенню площ.

Таке означення ймовірності має просту геометричну інтерпретацію: це частина, яку складає довжина, площа чи об’єм множини А від довжини, площі чи об’єму усієї області Ω. Випадкові події в такому разі реалізуються як певні геометричні об’єкти.

Приклад. (*Задача про зустріч*). Два студенти *A* і *B* домовились зустрітися в певному місці між 19 і 20 годиною. Той, хто приходить першим, чекає на другого протягом 20 хв., і не дочекавшись, відходить. Чому дорівнює ймовірність зустрічі студентів А і В, якщо прихід кожного з них протягом вказаної години може відбутись випадково в незалежні моменти?

Розв'язання. Позначимо момент приходу студента A через x, а студента B – через y. Щоб зустріч відбулась, необхідно, щоб виконувалась умова:

$$|x-y| \leq 20,$$
$$-20 \leq (x-y) \leq 20.$$

Маємо $(x-20) \leq y$, $(x+20) \geq y$.

Будемо зображати x і y як координати точки на площині. За одиницю масштабу виберемо хвилину. Всі можливі результати позначимо точками квадрата зі сторонами 60, сприятливі випадки зображуємо нерівностями:

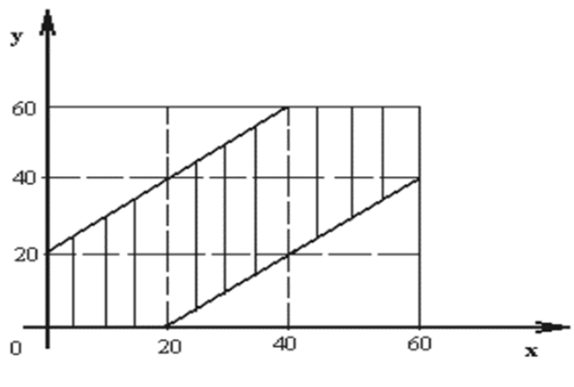
$$(x-20) \leq y,$$
$$(x+20) \geq y.$$

У заштрихованій області (рис.):

$m(\Omega)$ – площа квадрату зі стороною 60, тому $m(\Omega) = 60^2$;

$m(A)$ – площа заштрихованої фігури, яка знаходиться як різниця площ квадратів зі сторонами 60 та 40 відповідно.

Можливість зустрічі студентів:



Тоді для ймовірності зустрічі одержимо:

$$P(A) = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}.$$

2.2. Випадкові величини і функції розподілу

2.2.1. Дискретна випадкова величина

Випадковою величиною X називають таку величину, яка в результаті випробування прийме лише одне з можливих значень наперед невідоме і залежне від випадкових причин, які попередньо не можуть бути враховані.

Дискретною випадковою величиною називають таку випадкову величину, яка приймає ізольовані числові значення із усіх можливих.

Для будь-якої випадкової величини недостатньо відомостей про їх можливі значення. Потрібно знати ще ймовірність появи цих значень. Перелік всіх випадкових значень дискретної випадкової величини та їх відповідних ймовірностей називається закон розподілу дискретних випадкових величин.

Причому повинна виконуватись рівність

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Закон розподілу дискретних випадкових величин може бути заданий наступними способами.

1. ***Табличний***. Цей спосіб полягає в тому, що дається таблиця, в якій записані окремі значення випадкової величини X та відповідні їм ймовірності.

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Якщо випадкова величина X приймає скінчене число різних значень x_1, x_2, …, x_n, то випадкові величини утворюють повну групу попарно несумісних подій, а отже, сума їх ймовірностей повинна бути рівна 1.

2. ***Графічний***. Під час цього способу функцію задають графіком зазвичай у прямокутній системі координат. На осі абсцис відкладають значення випадкової величини, а на осі ординат – ймовірності. Якщо на площині *XOY* сполучити послідовно точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots, (x_n, p_n)$, то дістанемо ламану, яку називають багатокутником розподілу випадкової величини *X*. Прикладом цього способу задання закону розподілу є полігон розподілу ймовірностей.

3. ***Аналітичний*** закон розподілу полягає в тому, що дається математична формула, за якою можна обчислити ймовірності того, що випадкова величина прийме те чи інше значення.

Найважливішими є такі види дискретних розподілів: рівномірний, біноміальний, показниковий, геометричний.

Рівномірний розподіл – це розподіл випадкової величини, яка набуває n різних значень x_i з однаковими ймовірностями:

$$p_i = \frac{1}{n}, \text{ де } i=1, 2, 3, \ldots, n.$$

Наприклад, число точок, що випадають на верхній грані грального кубика, є дискретна випадкова величина, яка має такий рівномірний закон розподілу:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
P	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*	*1/6*

Приклад. Один з п’яти ключів відмикає замок. Скласти закон розподілу кількості випробувань при відмиканні замка, якщо випробуваний ключ у дальших випробуваннях не використовується.

Розв’язання. Ймовірність відмикання замка кожним ключем

$$p = \frac{1}{5}.$$

Випадкова величина X (кількість випробуваних ключів під час відмикання замка) може набувати значень: 1, 2, 3, 4, 5, оскільки маємо п’ять ключів.

При X=1 $p_1 = \frac{1}{5}$ (ймовірність відкрити першим ключем з п’яти).

При X=2 $p_2 = \frac{1}{5}$ (ймовірність відкрити другим ключем з п’яти).

При X=3 $p_3 = \frac{1}{5}$ (ймовірність відкрити третім ключем з п’яти).

При X=4 $p_4 = \frac{1}{5}$ (ймовірність відкрити четвертим ключем з п’яти).

При X=5 $p_5 = \frac{1}{5}$ (ймовірність відкрити п’ятим ключем з п’яти).

Закон розподілу цієї випадкової величини буде мати вигляд:

X	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
P	*1/5*	*1/5*	*1/5*	*1/5*	*1/5*

Перевірка: *1/5+1/5+1/5+1/5+1/5+1/5=1*

Біноміальний розподіл (***розподіл Бернуллі***) – це розподіл випадкової величини, яка набуває значення i=1, 2, 3, …, n, а ймовірності знаходяться з допомогою формули

$$p_i = C_n^i p^i q^{n-i}.$$

Біноміальний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості «успіхів» у серії з n незалежних випробувань, у кожному з яких «успіх» відбувається з ймовірністю р. $q=1-p$ – ймовірності відповідних протилежних подій.

Приклад. Ймовірність складання іспиту на «відмінно» для кожного з шести студентів дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу кількості п’ятірок, які студенти одержали на екзамені.

Розв’язання. Позначимо випадкову величину кількості п’ятірок, одержаних студентами на екзамені, через X. Вона може набувати значень: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

За умовою задачі p=0,4; відповідно q=1-0,4=0,6.

Знайдемо ймовірності, з якими X набуває відповідних значень.

При *X*=0 (на іспиті жоден із 6 студентів не одержав п’ятірки)

$$p(0) = C_6^0 p^0 q^{6-0} = \frac{6!}{0!(6-0)!} \cdot 0.4^0 0.6^6 \approx 0.047.$$

При *X*=1 (на іспиті один із 6 студентів одержав п’ятірку)

$$p(1) = C_6^1 p^1 q^{6-1} = \frac{6!}{1!(6-1)!} \cdot 0.4^1 0.6^5 \approx 0.187.$$

При *X*=2 (на іспиті двоє із 6 студентів одержали п’ятірки)

$$p(2) = C_6^2 p^2 q^{6-2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot 0.4^2 0.6^4 \approx 0.311.$$

При *X*=3 (на іспиті троє із 6 студентів одержали п’ятірки)

$$p(3) = C_6^3 p^3 q^{6-3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot 0.4^3 0.6^3 \approx 0.276.$$

При *X*=4 (на іспиті четверо із 6 студентів одержали п’ятірки)

$$p(4) = C_6^4 p^4 q^{6-4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \cdot 0.4^4 0.6^2 \approx 0.138.$$

При *X*=5 (на іспиті п’ятеро із 6 студентів одержали п’ятірки)

$$p(5) = C_6^5 p^5 q^{6-5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} \cdot 0.4^5 0.6^5 \approx 0.037.$$

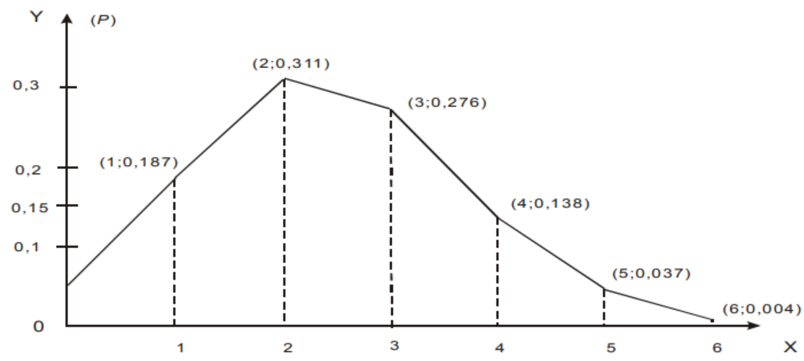
При *X*=6 (всі 6 студентів одержали п’ятірки)

$$p(6) = C_6^6 p^6 q^{6-6} = \frac{6!}{6!(6-6)!} \cdot 0.4^6 0.6^0 \approx 0.004.$$

Закон розподілу для цієї випадкової величини буде мати вигляд:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
p_i	0,047	0,187	0,311	0,276	0,138	0,037	0,004

Багатокутник розподілу для цієї випадкової величини подано на рисунку.



Показниковий розподіл (розподіл Пуассона) – це розподіл випадкової величини, яка набуває значень k=1, 2, 3, …, n, а ймовірності знаходяться за допомогою формули:

$$P_n(k) = \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!},$$

де $a = n \cdot p$.

З допомогою цього розподілу будуються математичні моделі роботи об’єктів обслуговування населення.

Приклад. Магазин отримав 100 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка розіб’ється, дорівнює 0,01. Знайти ряд розподілу випадкової величини *X*, що характеризує кількість розбитих пляшок ($X \in [1, 5]$).

Розв’язання. Ймовірності появи окремих значень випадкової величини обчислюють за формулою:

$$P_n(k) = \frac{a^k \cdot e^{-a}}{k!},$$

де за умовою задачі $a = n \cdot p = 100 \cdot 0.01 = 1$.

При X=1 (під час перевезення розбилась одна пляшка мінеральної води)

$$P(1) = \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} \approx 0.367884,$$

при X=2 (під час перевезення розбилось дві пляшки мінеральної води)

$$P(2) = \frac{1^2 \cdot e^{-1}}{2!} \approx 0.18394,$$

при X=3 (під час перевезення розбилось три пляшки мінеральної води)

$$P(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} \approx 0.06131,$$

при X=4 (під час перевезення розбилось чотири пляшки мінеральної води)

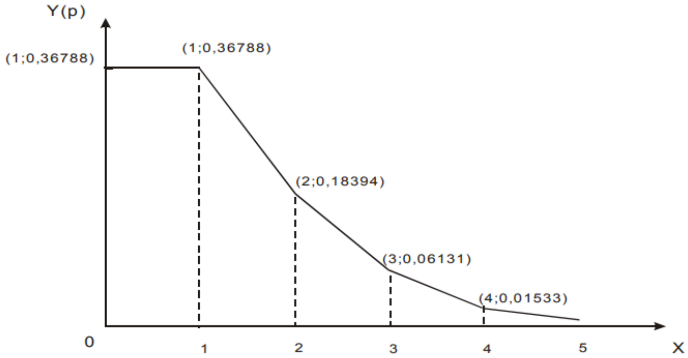
$$P(4) = \frac{1^4 \cdot e^{-1}}{4!} \approx 0.01533,$$

при X=5 (під час перевезення розбилось п’ять пляшки мінеральної води)

$$P(5) = \frac{1^5 \cdot e^{-1}}{5!} \approx 0.00306.$$

Закон розподілу для цієї випадкової величини буде мати вигляд:

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p_i	0,36788	0,18394	0,06131	0,01533	0,00306



Багатокутник розподілу для цієї випадкової величини подано на рисунку.

Геометричний розподіл – це розподіл випадкової величини, що набуває значень $k \in N$ з ймовірностями $p_i = p \cdot q^{k-1}$, де k=1, 2, 3, …, n, число p – фіксоване, а $q=1-p$.

Геометричний розподіл має випадкова величина, яка дорівнює кількості спроб до першого «успіху» в серії незалежних випробувань, у кожному з яких ймовірність успіху дорівнює p.

Приклад. Проводяться послідовні випробування п’яти приладів на надійність. Кожний наступний прилад випробують тільки тоді, коли попередній виявиться надійним. Скласти закон розподілу випадкової величини кількості випробувань приладів, якщо *p* дорівнює *p*=0,9.

Розв’язання. Число приладів, що проходить випробування, позначимо через *X*. Тоді *X* може дорівнювати 1, 2, 3, 4, 5. Якщо перший взятий для випробування прилад виявиться ненадійним, то випробування на цьому закінчяться, тобто буде тільки одне випробування. Ймовірність того, що перший прилад виявиться ненадійним, дорівнює $q=1-p=1-0.9=0.1$. Тому ймовірність величини *X* буде дорівнювати одиниці за $p_1=0.1$.

Якщо перший прилад виявиться надійним, то аби було зроблено тільки два випробування, треба, щоб другий прилад був ненадійним. Ймовірність ненадійності другого приладу дорівнює 0,1, тому за теоремою множення ймовірностей (випадкова величина X має геометричний розподіл):

для X=2: p_2=0.9·0.1=0.09;

для X=3: p_3=0.9·0.9·0.1=0.081;

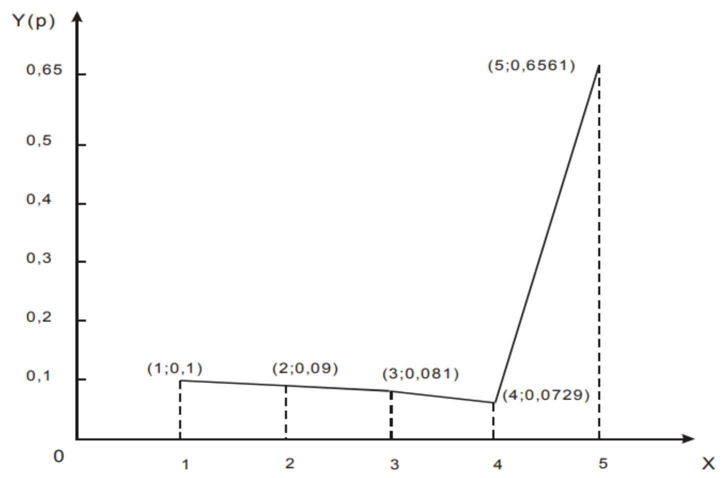
для X=4: p_4=0.9·0.9·0.9·0.1=0.079;

для X=5: p_5=0.9·0.9·0.9·0.9=0.6561.

Закон розподілу для цієї випадкової величини буде мати вигляд:

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
p_i	0,1	0,09	0,081	0,079	0,6561

Використовуючи ці дані, будуємо багатокутник розподілу випадкової величини:



Гіпергеометричний розподіл – це розподіл випадкової величини, яка набуває значень k=1, 2, 3, …, n, а ймовірності знаходяться за допомогою формули:

$$P_k = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^k},$$

де $n \geq m$, $N \geq n$.

Цей розподіл має широке використання. Він виникає під час перевірки виробленої продукції, вивчення громадської думки в основі цього знаходиться експериментальна схема, яка полягає у витяганні (опитуванні) об’єктів без повернення у вихідну сукупність.

Приклад. Із картотеки служби зайнятості навмання вибирають 8 карток, серед яких три відповідають особам працевлаштованим, а решта безробітним. Скласти закон розподілу випадкової величини *X* – числа карток серед відібраних, які відповідають працевлаштованим особам.

Розв'язання. Випадкова величина може набувати значення 0, 1, 2, 3.

Оскільки ми маємо трьох працевлаштованих осіб. Потрібно знайти ймовірності цих значень. Для цього використаємо класичне означення ймовірності.

Ймовірність того, що маємо 4 безробітних і 0 працевлаштованих:

$$P_0 = \frac{C_5^4 \cdot C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

Ймовірність того, що маємо 3 безробітних і 1 працевлаштованого:

$$P_1 = \frac{C_5^3 \cdot C_3^1}{C_8^4} = \frac{6}{14}.$$

Ймовірність того, що маємо 2 безробітних і 2 працевлаштованих:

$$P_2 = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_8^4} = \frac{6}{14}.$$

Ймовірність того, що маємо 1 безробітного і 3 працевлаштованих:

$$P_3 = \frac{C_5^1 \cdot C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

Випадкова величина Х-число карток серед відібраних, які відповідають працевлаштованим особам, буде мати такий закон розподілу:

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*
p_i	1/14	6/14	6/14	*1/14*

Перевірка 1/14+6/14+6/14+1/14=1.

2.2.2. Неперервна випадкова величина

Неперервною випадковою величиною називають таку величину, яка набуває всі свої можливі значення з деякого проміжку.

На відміну від дискретної випадкової величини розподіл неперервної випадкової величини неможливо задати, зазначивши певні значення, яких вона набуває, та відповідні їм ймовірності. Множина можливих значень неперервної випадкової величини незліченна. Тому виникає питання про новий спосіб задання випадкової величини. Він полягає у заданні функції розподілу.

Законом розподілу випадкової величини називають таке співвідношення, яке встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

2.2.3. Інтегральна функція розподілу та її основні властивості

Інтегральною функцією розподілу називають функцію $F(x)$, яка визначає для кожного значення x ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, менше дійсного числа x, тобто:

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрично ця рівність пояснюється так: $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке зображується на числовій вісі точкою, що знаходиться лівіше значення x.

Випадкову величину будемо називати неперервною, якщо її інтегральна функція розподілу $F(x)$ є неперервно диференційованою.

Властивості інтегральної функції розподілу:

1. Інтегральна функція розподілу *F(x)* задовольняє таку нерівність:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

Ця властивість випливає з означення інтегральної функції як імовірності події.

2. Інтегральна функція *F(x)* не є спадною, тобто $F(x_1) \geq F(x_2)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (a, b), дорівнює приросту інтегральної функції, тобто

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана табличним розподілом:

X	1	4	8
P	0,3	*0,1*	0,6

Знайти інтегральну функцію і побудувати її графік.

Розв'язання. Випадкова величина не може бути меншою за одиницю. Отже, для всіх $x \leq 1$ події неможливі, то $F(x)=0$.

Якщо $1<x\leq 4$, то $F(x)=0,3$.

Нехай, наприклад, $x=1,4$. Тоді $F(1,4)$ є ймовірністю події $X<1,4$. Але випадкова величина X тільки в одному випадку набуває значень, меншим від 1,4, а саме, з ймовірністю 0,3.

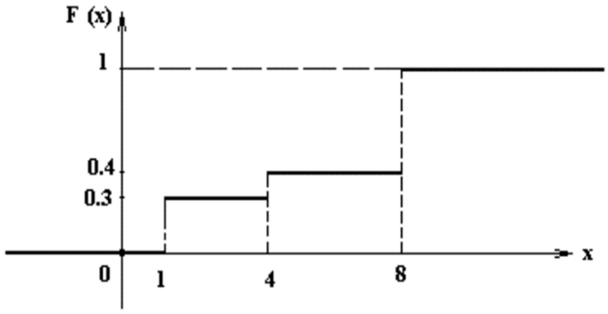
Якщо $4<x\leq 8$, то $F(x)=0,3+0,1=0,4$.

Бо якщо $x=5$. Тоді $F(5)$ виражає ймовірність події $X<5$. Значення величини будуть менші за 5, тобто 4 або 3. Застосовуючи теорему додавання ймовірностей, одержимо $F(x)=0,91$.

Якщо $x>8$, то $F(x)=0,4+0,6=1$.

Отже, інтегральна функція може бути записана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 1 \\ 0{,}3 \text{ при } 1 < x \le 4 \\ 0{,}1 \text{ при } 4 < x \le 4 \\ 1 \text{ при } x > 8 \end{cases}$$



Графік *F(x)* матиме вигляд (інтегральна функція) наведений на рисунку.

2.2.4. Диференціальна функція розподілу та її основні властивості

Диференціальною функцією розподілу *f(x)* або густиною ймовірностей неперервної випадкової величини *X* називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F^{/}(x).$$

З цього означення випливає, що інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини *X* є первісною для диференціальної функції.

Знаючи інтегральну функцію розподілу F(x), легко знайти диференціальну функцію f(x), бо за означенням $f(x) = F^{/}(x)$.

Знаючи диференціальну функцію f(x), інтегральну функцію F(x) можна знайти за формулою:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Приклад. Заданий рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le a \\ \dfrac{1}{b-a} \text{ при } a<x\le b \\ 1 \text{ при } x>b \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію рівномірного закону розподілу.

Розв'язання. Скористаємось формулою

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Якщо $x\le a$, то $f(x)$=0 і, отже $F(x)$=0;

якщо $a<x\le b$, то $f(x)=\frac{1}{b-a}$, отже,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}.$$

Якщо $x>b$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{x}1dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Отже, шукана інтегральна функція рівномірного закону розподілу матиме вигляд:

$$F(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \text{ при } a<x\le b \\ 1 \text{ при } x>b \end{cases}$$

Властивості диференціальної функції розподілу:

1. Диференціальна функція додатна, тобто $f(x)\ge 0$. Ця властивість випливає з того, що інтегральна функція не є спадною і $f(x)=F^{/}(x)\ge 0$.

2. Інтеграл у нескінченних межах від диференціальної функції дорівнює одиниці, тобто:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Ця властивість випливає і з того, що ймовірність випадкової величини попадає в інтервал (-∞; +∞) є подія достовірна.

Зокрема, якщо всі можливі значення випадкової величини належать інтервалу (*a, b*), то $\int_a^b f(x)dx = 1$

Знаючи диференціальну функцію, можна обчислити ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуває значення, що належить інтервалу (a, b).

3. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значення, що належить інтервалу (*a, b*), дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції, в межах від *a* до *b*:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Геометрично дана формула визначає площу криволінійної трапеції, обмеженою віссю абсцис, кривою – диференціальною функцією розподілу *f(x)* і прямими *x=a* та *x=b*. Необхідність в формулі пов'язана з тим, що розподіл неперервних випадкових величин, як правило, задається не інтегральною, а диференціальною функцією розподілу.

Приклад. Неперервна випадкова величина *X* задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \le 0 \\ x^2 \text{ при } 0 < x \le 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: диференціальну функцію розподілу; ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0; 1/2). Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функції розподілу.

Розв'язання.

За означенням диференціальної функції, маємо:

$$f(x) = F^{/}(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0 \\ 2x \text{ при } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

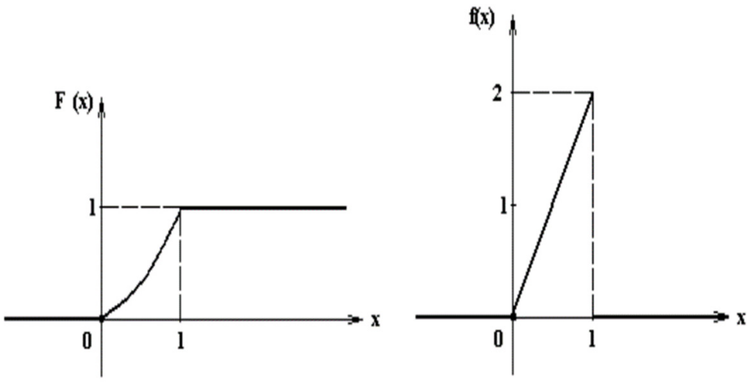
Ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (a, b), визначається формулою:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$P(0 < X < 1/2) = \int_0^{1/2} 2xdx = x^2|_0^{1/2}.$$

Схематичні графіки функцій і мають вигляд:



У багатьох випадках диференціальну функцію розподілу неперервної випадкової величини часто називають ***густиною ймовірності*** в точці x.

2.2.5. Нормальний закон розподілу

Нормальний закон розподілу (який, часто називають законом Гауса) виконує важливу роль в теорії ймовірностей і має серед інших законів розподілу особливе значення. Цей закон найчастіше трапляється на практиці.

Важливою особливістю цього закону є те, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу, які почасти трапляються в типових умовах.

Нормальним законом розподілу випадкової величини *X* називають закон, диференціальна функція якого задається формулою:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальний закон розподілу визначається двома параметрами: a і σ.

Достатньо задати ці параметри, щоб задати нормальний закон розподілу.

Графік диференціальної функції нормального закону розподілу часто називають нормальною кривою або кривою Гауса.

Дослідивши диференціальну функцію $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ методом диференціального числення, отримаємо такі її властивості:

1. Функція $f(x)$ визначена для всіх значень x.

2. При всіх значеннях x функція $f(x)$ набуває додатні значення, тобто графік нормальної кривої розміщений над віссю OX.

3. Границя функції за необмеженого зростання x (за абсолютною величиною) дорівнює нулю, тобто:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0.$$

Це означає, що вісь OX є горизонтальною асимптотою графіка функції.

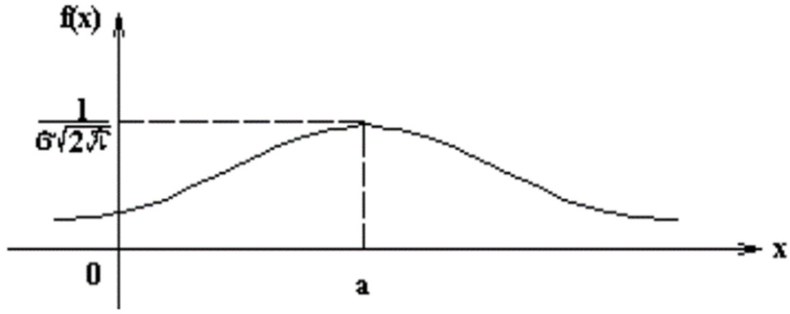
4. Дослідивши функцію на екстремум, знайдемо функцію, що має максимум, рівний

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

5. Функція *f(x)* має дві точки перегину:

$$\left(a-\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right) \text{ і } \left(a+\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right).$$

Схематичний графік нормальної кривої наведений на рисунку.



При *a*=0 і *σ*=1 нормальну криву називають ***нормованою*** і позначають:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x)^2}{2}}.$$

Ймовірність попадання в заданий інтервал (*α, β*) випадкової величини, розподіленої за нормальним законом, визначається за формулою:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{(z)^2}{2}} dz$

Приклад. Випадкова величина *X* розподілена за нормальним законом.

Дано a=30 і σ=10. Знайти ймовірність того, що X набуде значення, що належить інтервалу (10, 50).

Розв'язання. За умовою задачі a=30; σ=10; α=10; β=50. Використовуючи формулу $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, отримаємо:

$$P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Правило трьох сигм

Якщо випадкова величина X розподілена нормально, то ймовірність того, що абсолютна величина відхилення X від її математичного сподівання більше 3σ прагне до 0, тобто $P(|X - a| \geq 3\sigma) \to 0$. Це означає, що $|X - a| < 3\sigma$ – практично достовірна подія.

У практиці це правило використовують так:

Якщо закон розподілу випадкової величини X невідомий, але $|X - a| < 3\sigma$, тоді можна припустити, що X розподілена нормально.

Нормальний закон розподілу випадкової величини широко застосовується на практиці. Це пов'язано з тим, що коли на випадкову величину впливає сума багатьох факторів, кожний із яких впливає як завгодно мало, то випадкова величина має розподіл близький до нормального. На практиці розглядають ще інші закони розподілу, такі, наприклад, як розподіл χ^2, розподіл Стьюдента, розподіл F–Фішера–Снеддона, гама-розподіл та інші.

Розглянемо основні з них.

Розподіл χ^2

Нехай X_i (i=1, 2, n) – нормальні, нормовані незалежні величини. Тоді сума квадратів цих величин

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

розподілена по закону χ^2 з k=n ступенями вільності.

Якщо величини X_i зв'язані одним лінійним співвідношенням, наприклад,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X},$$

то число ступеней вільності буде *k=n+1*. Диференціальна функція розподілу має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ \dfrac{1}{2^{k/2} \cdot \Gamma\left(k/2\right)} \cdot e^{-\frac{x}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}-1} & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$$

де $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt$ – гамма-функція $\Gamma(n+1)=n!$

Розподіл χ^2 визначається параметром – числом ступеней вільності *k*. Коли *k* зростає, розподіл χ^2 прямує до нормального розподілу дуже повільно.

Розподіл Стьюдента

Нехай *X* – нормальна нормована випадкова величина, а *Y* – незалежна від *X* величина, яка розподілена за законом χ^2-квадрат з *k* ступенями вільності.

Тоді величина

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}$$

має розподіл, який називають *t*-розподілом або розподілом Стьюдента з *k* ступенями вільності.

При зростанні *k* розподіл Стьюдента швидко наближається до нормального розподілу

2.2.6. Показниковий закон розподілу

Показниковим (експоненціальним) законом розподілу випадкової величини X називають розподіл ймовірностей, який описується такою диференціальною функцією:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

де λ – стала величина.

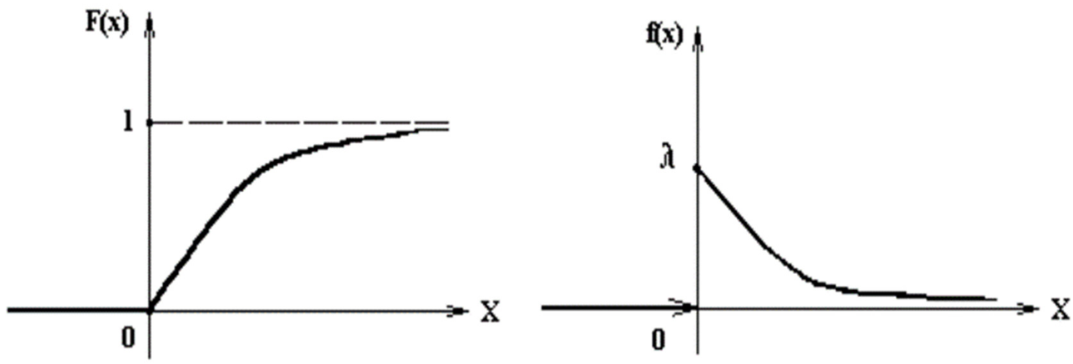
Прикладом неперервної випадкової величини, яка має показниковий закон розподілу, може бути випадковий час між двома послідовними подіями простого потоку (простий потік Пуассона).

Інтегральна функція показникового закону розподілу має вигляд:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x},$$

тобто

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$



Графіки диференціальної та інтегральної функцій показникового розподілу мають вигляд наведений на рисунку.

Приклад. Диференціальна функція має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 2 \cdot e^{-2x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0.3; 1).

Розв'язання. Ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0.3; 1) будемо шукати за формулою

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a).$$

Виходячи з цього маємо:

$$P(a < X < b) = 1 - e^{-2\cdot 0.3} - (1 - e^{-2\cdot 1}) = 0.54881 - 0.13534 = 0.41347.$$

2.2.7. Багатовимірні випадкові величини

Крім одномірних випадкових величин, вивчаються величини, можливі значення яких визначаються двома, трьома, …, n числами. Такі величини називаються відповідно двовимірними, трьохвимірними, …, n-вимірними.

Будемо позначати через (X, $У$) двовимірну величину. Обидві величини X і $У$ розглядаються одночасно, утворюючи систему двох випадкових величин.

Двовимірну випадкову величину (X, $У$) геометрично можна інтерпретувати як випадкову точку $M(X, У)$ на площині (тобто як точку з випадковими координатами).

Наприклад, верстат-автомат штампує сталеві плитки. Якщо контролюють розміри – довжину X і ширину $У$, то маємо двовимірну випадкову величину.

Законом розподілу дискретної двовимірної величини (X, $У$) називають перелік всіх можливих значень цієї величини (тобто пар чисел) x_i, y_j і їх ймовірності $p(x_i, y_j)$ i=1, 2, …, n, j=1, 2, …, m. Закон розподілу подають у вигляді таблиці з подвійним входом.

Перший рядок таблиці містить всі можливі значення складової X, а перший стовпчик – всі можливі значення складової $У$. В клітинах, що на перетині стовпчика x_i і рядка y_j , вказані імовірності $p(x_i, y_j)$ того, що двовимірна випадкова величина набуде значення (x_i, y_j).

X / Y	x_1	x_2	.	.	x_n
y_1	$p(x_1, y_1)$	$p(x_2, y_1)$	.	.	$p(x_n, y_1)$
y_2	$p(x_1, y_2)$	$p(x_2, y_2)$	.	.	$p(x_n, y_2)$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
y_m	$p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_m)$	.	.	$p(x_n, y_m)$

Оскільки події X, $У$ утворюють повну групу подій, то сума ймовірностей, розміщених в усіх клітках таблиці, дорівнює одиниці.

Знаючи закон розподілу двовимірної випадкової величини, можна знайти закон розподілу кожної зі складових.

Приклад. Знайти закон розподілу складових двовимірної випадкової величини, заданої законом розподілу:

X / Y	x_1	x_2	x_3
y_1	*0.30*	*0.10*	*0.20*
y_2	*0.18*	*0.16*	*0.06*

Розв'язання. Розклавши ймовірності за стовпчиками, одержимо ймовірності можливих значень X:

$P(x_1)$=0.30+0.18=0.48; $P(x_2)$=0.10+0.16=0.26; $P(x_3)$=0.20+0.06=0.26.

Закон розподілу складової випадкової величини X матиме вигляд:

X	x_1	x_2	x_3
P	*0.48*	*0.26*	*0.26*

Перевірка: 0.48+0.26+0.26=1.

Аналогічно, склавши ймовірності по рядках, отримаємо ймовірності можливих значень *У*: $P(y_1)$=0.30+0.10+0.20=0.60; $P(y_2)$=0.18+0.16+0.06=0.40.

Закон розподілу складової випадкової величини *Y* матиме вигляд:

Y	y_1	y_2
P	*0.60*	*0.40*

2.3. Числові характеристики випадкових величин

2.3.1. Числові характеристики дискретних випадкових величин

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків всіх можливих значень цієї величини на відповідні імовірності та позначають *M(X)*.

Нехай випадкова величина *X* задана табличним законом розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тоді математичне сподівання визначається формулою:

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n,$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

Приклад. У лотереї з кожних 100 білетів виграють 15. За розміром виграші розподілені так:

Розмір виграшу в грн.	200	100	20
Кількість виграшів	1	4	10

Скласти закон розподілу випадкової величини – розміру виграшу у лотереї та визначити її математичне сподівання.

Розв'язання. Щоб скласти закон розподілу випадкової величини *X* у вигляді таблиці, треба визначити всі можливі її значення. У нашому прикладі, крім записаних в таблиці значень 200, 50 та 10, є ще одне значення – 0 (програш). Відповідні імовірності дорівнюють 1/100=0.01; 4/100=0.04; 10/100=0.1; та 85/100=0.85 (кількість білетів, що відповідають варіантові 0, дорівнює 85).

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

X	200	100	20	0
P	0.01	0.04	0.10	0.85

Математичне сподівання X знаходило за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i,$$

$$M(X)=200\cdot0.01+100\cdot0.04+20\cdot0.10+0\cdot0.85=8.$$

Математичне сподівання має ту ж розмірність, що й випадкова величина.

Ймовірнісний зміст математичного сподівання полягає в тому, що математичне сподівання наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини.

Приклад. Знайти математичне сподівання числа появи події *A* в одному випробуванні, якщо ймовірність настання події *A* дорівнює *p*.

Розв'язання. Випадкова величина *X* числа появи події *A* в одному випробуванні може набувати тільки двох значень:

x_1=1 – подія A відбулась, з ймовірністю p;

x_2=0 – подія A не відбулась, з ймовірністю $q=1–p$.

Математичне сподівання буде дорівнювати:

$$M(X)=1\cdot p+0\cdot q=p.$$

Отже, математичне сподівання числа появи події в одному випробуванні дорівнює ймовірності цієї події.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює сталій величині:

$$M(const)=const.$$

2. Сталу величину можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(const\cdot X)=const\cdot M(X).$$

3. Математичне сподівання добутку кількох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y).$$

4. Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

5. Математичне сподівання числа появи події в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність події у кожному випробуванні:

$$M(X)=n\cdot p.$$

Приклад. Знайти математичне сподівання суми числа очок, які можуть випасти при киданні двох гральних кубиків.

Розв'язання. Позначимо число очок, що можуть випасти на першому кубику, через X, а на другому – через Y. Вони набуватимуть однакових значень 1, 2, 3, 4, 5, 6 з імовірностями p=1/6.

Маємо:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6},$$

$$M(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6}.$$

Математичне сподівання суми числа очок дорівнює:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) = \frac{21}{6} + \frac{21}{6} = \frac{42}{6} = 7.$$

Приклад. Ймовірність влучання в мішень при одному пострілі дорівнює p=0.7. Знайти математичне сподівання числа влучань при десяти пострілах.

Розв'язання. Влучання в мішень при кожному пострілі не залежить від результату інших пострілів, тому вказані події є незалежні і шукане математичне сподівання дорівнює:

$M(X)=n\cdot p=0.7\cdot 10=7$ (влучань).

Математичне сподівання не дає повної характеристики випадкової величини, бо для різних законів розподілу можуть бути однакові математичні сподівання.

Для обчислення відхилення випадкової величини від її математичного сподівання використовують іншу числову характеристику, дисперсію.

Дисперсією (розсіюванням) дискретної випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання і позначають *D(X)*:

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right).$$

Для обчислення дисперсії застосовують формулу, яку отримують, розписавши цю формулу:

$$D(X) = M\left(\left(X - M(X)\right)^2\right) = M\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2\right) =$$
$$= M(X^2) - 2 \cdot M(X) \cdot M(X) + \left(M(X)\right)^2 = M(X^2) - 2 \cdot \left(M(X)\right)^2 + \left(M(X)\right)^2 =$$
$$= M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

Отже

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2.$$

Приклад. Знайти дисперсію випадкової величини *X*, яка має такий закон розподілу

X	2	3	5
P	0.1	0.6	0.3

Розв'язання. Знайдемо математичне сподівання *M(X)*:

$$M(X)=2 \cdot 0.1+3 \cdot 0.6+5 \cdot 0.3=3.5,$$
$$M(X)=2^2 \cdot 0.1+3^2 \cdot 0.6+5^2 \cdot 0.3=13.3.$$

Далі розраховуємо дисперсію:

$$D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = 13.3 - 3.5^2 = 1.05.$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини С дорівнює нулю:

$$D(const)=0.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак дисперсії, піднісши його до квадрату:

$$D(const \cdot X)=const^2 \cdot D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсії цих величин:

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$

5. Дисперсія числа появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких ймовірність p появи події стала, дорівнює добутку числа випробувань на ймовірність появи і непояви події в одному випробуванні:

$$D(X)=n \cdot p \cdot q.$$

6. Дисперсія добутку двох незалежних випадкових величин X, $У$ дорівнює:

$$D(X \cdot Y) = D(X) + D(Y) + M(Y)^2 \cdot D(X) + M(X)^2 \cdot D(Y).$$

Приклад. Кубик підкидується 10 разів. Знайти математичне сподівання та дисперсію появи 6 очок на грані, що випадає.

Розв'язання. З умови задачі маємо n=10; p=1/6; q=1-p=1-1/6=5/6.

Для того, щоб знайти математичне сподівання, скористаємося п'ятою властивістю математичного сподівання:

$$M(X)=n\cdot p=10\cdot 1/6=10/6=1.67.$$

Для того, щоб знайти дисперсію, використаємо п'яту властивістю дисперсії:

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{36} = 1.39.$$

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини X називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Середнє квадратичне відхилення має ту розмірність, що і випадкова величина X. Тому в тих випадках, коли оцінка розсіювання повинна мати ту ж розмірність, що і випадкова величина, замість дисперсії розглядають середнє квадратичне відхилення.

Властивості середнього квадратичного відхилення

1. Середнє квадратичне відхилення сталої величини дорівнює нулю:

$$\sigma(const)=0.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак середнього квадратичного відхилення, взявши по модулю:

$$\sigma(const \cdot X) = |const| \cdot \sigma(X).$$

3. Середнє квадратичне відхилення суми двох незалежних випадкових величин дорівнює:

$$\sigma(X+Y) = \sqrt{\left(\sigma(X)\right)^2 + \left(\sigma(Y)\right)^2}.$$

Модою дискретної випадкової величини *Mo(X)* називають найімовірніше її значення в деякому околі цього значення.

Розподіл називається унімодальним, якщо він має єдину моду (біноміальний, нормальний, показниковий тощо).

Розподіл називається полімодальним, якщо він має більше однієї моди (рівномірний тощо).

Модою абсолютно неперервної випадкової величини є точка максимуму густини розподілу.

Медіаною випадкової величини *Me(X)* називається таке число, для якого виконується умова:

$$P(X<Me(X))=P(X>Me(X)).$$

Медіана неперерваної випадкової величини *X* завжди існує, а якщо *X* має дискретний розподіл, то *Me(X)* може не існувати.

Приклад. Випадкова величина *X* має ряд розподілу, наведений у таблиці. Знайти числові характеристики випадкової величини *X*.

X	1	2	3
P	0.2	0.6	0.2

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини *X* обчислимо за формулою:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i = 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.6 + 3 \cdot 0.2 = 2.$$

Дисперсію випадкової величини X знайдемо за формулою:

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2 =$$
$$= 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.6 + 3^2 \cdot 0.2 - 2^2 = 4.4 - 4 = 0.4$$

Середнє квадратичне відхилення випадкової величини X вирахуємо за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0.4} = 0.632.$$

Числові характеристики основних законів розподілу дискретних випадкових величин, мають такий вигляд.

1. Рівномірний розподіл з параметром n

$$M(X) = \frac{n+1}{2}, D(X) = \frac{n^2-1}{12}, \sigma(X) = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}.$$

2. Біномінальний розподіл з параметром n і p

$$M(X) = n \cdot p, D(X) = n \cdot p \cdot (1-p), \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}.$$

3. Показниковий з параметром λ

$$M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

4. Геометричний з параметром p

$$M(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2}, \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

Приклад. Ймовірність влучення у мішень, що рухається, з пістолета дорівнює 0.001. Відбувається 2000 пострілів. Знайти числові характеристики випадкової величини X, яка дорівнює кількості влучень у мішень.

Розв'язання. Випадкова величина X має показниковий розподіл з параметром λ, який дорівнює $\lambda = n \cdot p$.

За умовою задачі n=2000, p=0.001, тому

$$\lambda = 2000 \cdot 0.001 = 2.$$

Скористаємось формулами для знаходження числових характеристик основних законів розподілу дискретних випадкових величин. При показниковому розподілі:

$$M(X) = \lambda, D(X) = \lambda, \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$$

Тому

$$M(X) = 2, D(X) = 2, \sigma(X) = \sqrt{2}.$$

2.3.2. Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a, b]$, називають визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x) dx.$$

Якщо можливі значення випадкової величини X належать всій дійсній осі, тобто $x \epsilon (-\infty; +\infty)$, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx.$$

Дисперсія неперервної випадкової величини, якщо можливі значення x належать відрізку $[a, b]$, визначається формулою:

$$D(X) = \int_a^b \left(X - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx,$$

де

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Якщо можливі значення випадкової величини *X* належать всій дійсній осі, тобто *x*ϵ*(-∞; +∞)*, то дисперсія визначається формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X - M(X)\right)^2 \cdot f(x)dx,$$

де

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx.$$

Дисперсію можна записати у вигляді:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2,$$
$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Приклад. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*, якщо

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leq 0 \\ 2x \text{ при } 0 < x \leq 1 \\ 1 \text{ при } x > 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Математичне сподівання знаходимо за формулою (5.6):

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 2xdx = \int_0^1 2x^2dx = 2\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Дисперсію визначаємо за формулою:

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2.$$

Підставивши значення, одержимо:

$$D(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 2\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}}.$$

2.3.3. Числові характеристики нормального закону розподілу

Нехай неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

За означенням математичного сподівання для неперервної випадкової величини маємо:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = a.$$

Інтеграл знаходиться за допомогою заміни

$$z = \frac{x-a}{\sigma},\ x=a\text{-}\sigma z,\ dx=\sigma dz.$$

Отже, математичне сподівання нормального закону розподілу дорівнює параметру *a* диференціальної функції розподілу

$$M(x)=a.$$

За означенням дисперсії неперервної випадкової величини, враховуючи, що $M(x)=a$, маємо:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx - a^2 = \sigma^2.$$

Інтеграл знаходиться за допомогою заміни

$$z = \frac{x-a}{\sigma},\ x=a\text{-}\sigma z,\ dx=\sigma dz.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Звідси середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X дорівнює параметру σ.

2.3.4. Числові характеристики показникового закону розподілу

Нехай неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

де λ – стала величина, λ>0.

Використовуючи формулу для математичного очікування, отримаємо:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-\lambda x} dx$$

Інтегруючи частинами, одержимо:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Звідси математичне сподівання показникового розподілу дорівнює оберненій величині параметра λ.

Використовуючи формулу для обчислення дисперсії, одержимо:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x)dx - \left(M(x)\right)^2 = \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2.$$

Інтегруючи частинами, одержимо:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Середнє квадратичне відхилення визначається за формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Відтак математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення показникового закону розподілу рівні між собою, тобто:

$$\sigma(X) = M(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад. Знайти числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 4 \cdot e^{-4x} \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язання. У цьому разі випадкова величина *X* розподілена за показниковим законом із параметром λ=4.

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4},$$
$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16},$$
$$\sigma(X) = M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4}.$$

2.3.5. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції

Для характеристики зв'язку між випадковими величинами *X* і *У* використовується кореляційний момент.

Кореляційним моментом $\boldsymbol{M_{xy}}$ випадкових величин *X* і *У* називають математичне сподівання добутку відхилень цих величин від своїх математичних сподівань:

$$M_{xy} = M\Big(\big(X - M(X)\big) \cdot \big(Y - M(Y)\big)\Big).$$

Для обчислення кореляційних моментів дискретних випадкових величин використовують формулу:

$$M_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Big(\big(x_i - M(x)\big) \cdot \big(y_j - M(y)\big) \cdot p\big(x_i, y_j\big) \Big),$$

$$M_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \big(x - M(x)\big) \cdot \big(y - M(y)\big) \cdot f(x, y) dxdy.$$

Із визначення кореляційного моменту випливає, що він має розмірність, рівну добутку розмірностей випадкових величин *X* і *У*. Для того, щоб мати однакову розмірність, або безрозмірну величину, яка характеризує випадкові величини *X* і *У*, вводять коефіцієнт кореляції r_{xy}.

***Коефіцієнтом кореляції* $\boldsymbol{r_{xy}}$** випадкових величин *X* і *У* називають відношення кореляційного моменту до добутку середніх квадратичних відхилень цих величин, тобто:

$$r_{xy} = \frac{M_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $|r_{xy}| \leq 1$;

2) якщо *X* та *Y* незалежні, то $|r_{xy}| = 0$;

3) якщо між *X* та *Y* існує лінійна залежність *Y=aX+b*, де *a* та *b* – постійні, то $|r_{xy}| = 1$.

Дві випадкові величини *X* і *У* називаються ***корельованими***, якщо їх кореляційний момент (або те саме – коефіцієнт кореляції) відмінний від нуля.

Дві випадкові величини *X* і *У* називаються ***некорельованими*** величинами, якщо їх кореляційний момент дорівнює нулю.

Із означення корельованості величин *X* і *У* випливає їх залежність.

Обернене твердження не завжди можливе, тобто якщо дві величини залежні, то вони можуть бути корельованими і некорельованими. Тобто, кореляційний момент двох залежних величин може не дорівнювати нулю, але може і дорівнювати.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Статистика (від італійського слова *stato* – держава) вивчає кількісний бік суспільних явищ і процесів у нерозривному зв’язку з їх якісним змістом.

Статистику поділяють на описову та пояснювальну. Прикладом описової статистики є книга рекордів Гіннеса. Пояснювальна статистика формулює певні висновки про ті чи інші явища, робить прогноз.

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка і використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Математична статистика – розділ математики, в якому на основі дослідних даних вивчаються імовірнісні закономірності масових явищ.

Основними завданнями математичної статистики є статистична перевірка гіпотез, оцінка розподілу статистичних ймовірностей та його параметрів, вивчення статистичної залежності, визначення основних числових характеристик випадкових вибірок, якими є: вибіркове середнє, вибіркові дисперсії, стандартне відхилення.

Прикладом перевірки статистичних гіпотез є з’ясування питання про те, змінюється чи не змінюється виробничий процес з часом. Прикладом оцінки параметрів є оцінка середнього значення статистичної змінної за дослідними даними. Для вивчення статистичної залежності використовують методи теорії кореляції. Загальні методи математичної статистики є основою теорії похибок.

Предмет математичної статистики полягає в розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків.

3.1. Генеральна та вибіркова сукупності

Припустимо, що потрібно дослідити сукупність однорідних об’єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки. Сукупність предметів або явищ, що об’єднані спільною властивістю, називається об’єктом спостереження.

Сукупність називається генеральною, якщо дослідженню підлягають усі об’єкти сукупності.

Відібрана випадковим чином частина елементів генеральної сукупності, що підлягає дослідженню, називається вибірковою сукупністю або вибіркою.

Вибірки бувають повторними (відібраний об’єкт повертається до генеральної сукупності) та безповторними (об’єкт до сукупності не повертається).

Об’ємом сукупності (вибіркової або генеральної) називається кількість об’єктів сукупності.

Значення ознаки, що змінюється при переході від одного до іншого елемента вибірки, називається варіантою та позначається зазвичай малими латинськими літерами *x, y, z* тощо.

Ряд значень ознаки (ряд варіант), розташований у порядку зростання (спадання), називається варіаційним рядом. Варіаційні ряди бувають дискретними та інтервальними.

3.2. Дискретний варіаційний ряд

Дискретний варіаційний ряд зазвичай задається у вигляді таблиці – ***статистичного розподілу частот***, що містить перелік точкових значень ознаки (варіант) та відповідних їм *частот*:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Частота n_i вказує на те, скільки разів значення ознаки (варіанта) x_i (i=1, 2,…k) зустрілося у вибірковій сукупності.

Об’єм вибірки можна знайти, обчисливши суму всіх частот:

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k,$$

або

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Також замість частот використовують відносні частоти. ***Відносна частота*** ω_i визначається відношенням частоти до суми всіх частот – об’єму вибірки:

$$\omega_i = \frac{n_i}{N}\,(i = 1,2,\ldots,k).$$

При цьому

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_k = 1$$

або

$$\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1.$$

Статистичний розподіл відносних частот має наступний вигляд:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

Різницю r між максимальним і мінімальним елементами вибірки називають *розмахом вибірки*:

$$r = x_{max} - x_{min}.$$

Приклад. В результаті експерименту отримано дані про вміст крохмалю в зразках рецептурної суміші (%):

0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1, 0.2, 0.4, 0.1.

Побудувати дискретний варіаційний ряд, представляючи дані у вигляді статистичного розподілу частот та відносних частот; обчислити розмах вибірки.

Розв’язання. Для побудови варіаційного ряду розташуємо елементи вибірки в порядку зростання:

0.1, 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3, 0.4.

Представимо дані у вигляді статистичного розподілу частот, визначивши варіанти та їх частоти:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
n_i	4	3	1	1

Обчислимо об'єм вибірки за формулою:

$$N = \sum_{i=1}^{4} n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 4 + 3 + 1 + 1 = 9.$$

Визначимо відносні частоти:

$$\omega_1 = \frac{n_1}{N} = \frac{4}{9}, \omega_2 = \frac{n_2}{N} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \omega_3 = \frac{n_3}{N} = \frac{1}{9}, \omega_4 = \frac{n_4}{N} = \frac{1}{9}.$$

Здійснюємо контроль обчислень:

$$\sum_{i=1}^{4} \omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 1.$$

Представимо дані у вигляді статистичного розподілу відносних частот:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4
ω_i	4/9	1/3	1/9	1/9

Розмах вибірки:

$$r = x_{max} - x_{min} = 0.4 - 0.1 = 0.3.$$

3.3. Інтервальний варіаційний ряд

Якщо об'єм вибірки великий, для спрощення обчислень елементи вибірки об'єднують в групи. Для цього інтервал, який містить всю множину елементів вибірки, розбивають на кілька інтервалів довжини h_i, які не перетинаються. Таке завдання вибірки називають ***інтервальним варіаційним рядом***:

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_k; x_{k+1}]$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Для визначеності покладаємо лівий кінець інтервалів закритим, а правий – відкритим (останній інтервал містить два закритих кінці). Частота n_i дорівнює кількості варіант, що потрапили у відповідний інтервал.

Якщо інтервали у варіаційних рядах мають однакову довжину, їх називають *рівновеликими*, у іншому випадку – ***нерівновеликими***.

При побудові інтервального ряду з рівновеликими інтервалами оптимальну кількість інтервалів можна визначити, наприклад, за *формулою* Стерджеса:

$$k = 1 + [3.222 \cdot lgN],$$

де квадратними дужками позначено цілу частину отриманого числа, N – об'єм вибірки.

Довжину інтервалів рівновеликого інтервального ряду можна знайти за формулою

$$h = \frac{z}{k},$$

де k – заздалегідь задана або отримана за формулою Стерджеса кількість інтервалів, z – розмах вибірки.

Зауважимо, що для забезпечення покриття інтервалами усіх варіант треба округлювати величину h в бік більших значень.

За визначеною довжиною інтервалу кінці рівновеликих інтервалів знаходяться наступним чином:

$$x_1 = x_{min};$$

$$x_2 = x_1 + h;$$
$$x_3 = x_2 + h;$$
$$\ldots$$
$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Приклад. В результаті складання іспиту студентами групи в кількості 25 осіб отримано такі бали: 80, 61, 45, 50, 66, 76, 40, 60, 89, 96, 70, 57, 64, 70, 81, 60, 77, 80, 58, 88, 61, 64, 69, 60, 70. Побудувати інтервальний варіаційний ряд розподілу оцінок в групі.

Розв'язання. Розіб'ємо дані на 4 нерівновеликі інтервали, що відповідають оцінкам «незадовільно», «задовільно», «добре» та «відмінно» і визначимо частоти – кількість студентів, оцінки яких потрапили у відповідний інтервал:

$[x_i; x_{i+1})$	$[40; 60)$	$[60; 74)$	$[74; 90)$	$[90; 100]$
n_i	5	12	7	1

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{4} n_i = 5 + 12 + 7 + 1 = 25.$

Таким чином, оцінку «незадовільно» мають 5 студентів, «задовільно» – 12 студентів, «добре» – 7 студентів та «відмінно» – 1 студент.

3.4. Графічні характеристики вибіркових даних

Дискретний варіаційний ряд

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

можна представити графічно у вигляді ***полігону частот***. ***Полігоном частот*** називають ламану лінію, вершинами якої є точки з координатами $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$,…, $(x_k; n_k)$.

Інтервальний варіаційний ряд

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_k; x_{k+1}]$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

можна представити графічно у вигляді ***гістограми частот*** – ступінчатої фігури, яка складається з прямокутників, основами яких є інтервали варіант довжини $h_i=x_{i+1}-x_i$, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h_i}$ (щільність частоти). Площа i-го прямокутника гістограми частот дорівнює сумі частот варіант i-го інтервалу, отже, площа гістограми частот дорівнює сумі усіх частот, тобто об'єму вибірки. Інтервальний варіаційний ряд можна зобразити й у вигляді полігону. Для цього середини верхніх основ прямокутників з яких складається гістограма та дві точки на осі абсцис, що відповідають серединам попереднього перед першим та наступного за останнім інтервалів, з'єднують відрізками прямих ліній. Площа під отриманою ламаною дорівнює площі гістограми.

Також замість полігона і гістограми частот будують ***полігон і гістограму відносних частот***, побудова яких відрізняється лише тим, що на осі ординат полігона частот відкладається відносна частота (1.2), а висоти прямокутників гістограми будуть дорівнювати відповідно $\frac{\omega_i}{h_i}$ (щільність відносної частоти). Гістограма відносних частот є статистичним наближенням щільності розподілу $f(x)$. ознаки генеральної сукупності. Площа гістограми відносних частот буде дорівнювати одиниці.

Приклад. В результаті опиту 50 працівників було встановлено кількісний склад їх родин: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4. Представити дані у вигляді статистичного розподілу частот та у вигляді інтервального ряду в кількості 4 інтервалів. Побудувати полігон частот для дискретного ряду та гістограму частот для інтервального ряду.

Розв'язання. Значення ознаки, що досліджується – кількісний склад родини – позначимо через x_i, відповідні частоти – через n_i. Занесемо дані в таблицю та отримаємо дискретний варіаційний ряд:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	4	6	8	10	9	6	4	1

Розіб'ємо дані на k=4 рівновеликі інтервали. Для знаходження довжини інтервалів використаємо формулу (1.5).

$$z=x_{max}-x_{min}=9-1=8;$$

$$h=\frac{z}{k}=\frac{8}{4}=2.$$

Знайдемо кінці інтервалів:

$$x_1=x_{min}=1;$$

$$x_2=x_1+h=1+2=3;$$

$$x_3=x_2+h=3+2=5;$$

$$x_4=x_3+h=5+2=7;$$

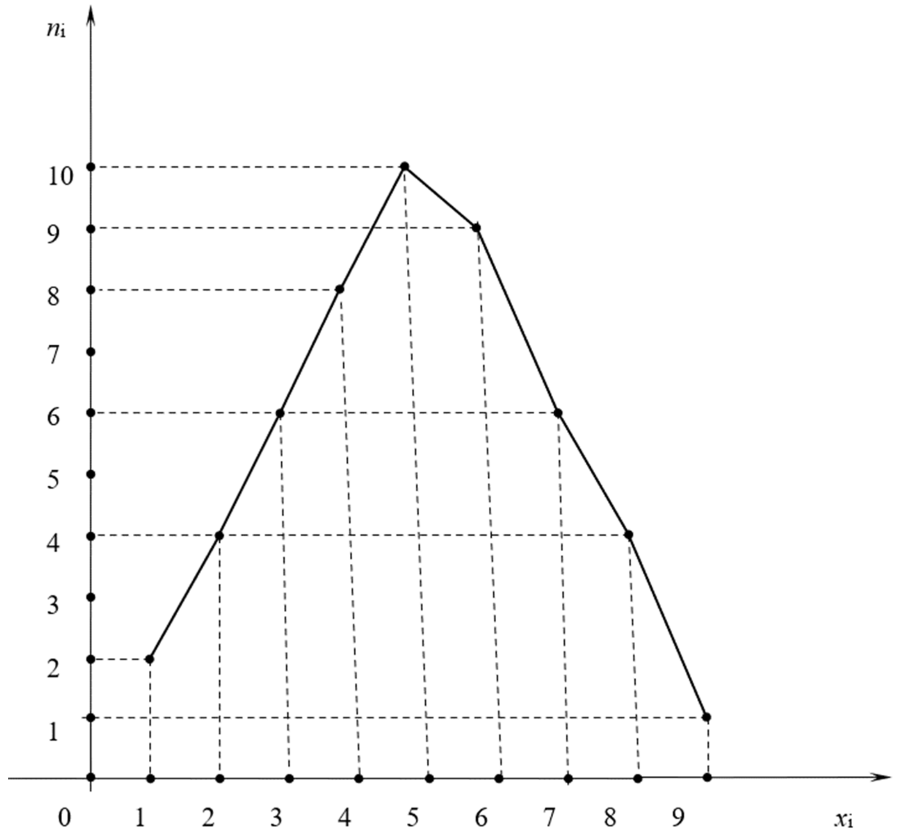
$$x_5=x_4+h=7+2=9.$$

Інтервальний ряд має наступний вигляд:

$[x_i; x_{i+1})$	$[1;3)$	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9]$
n_i	6	14	19	11

Контроль обчислень: $\sum_{i=1}^{4} n_i = 6+14+19+11=50.$

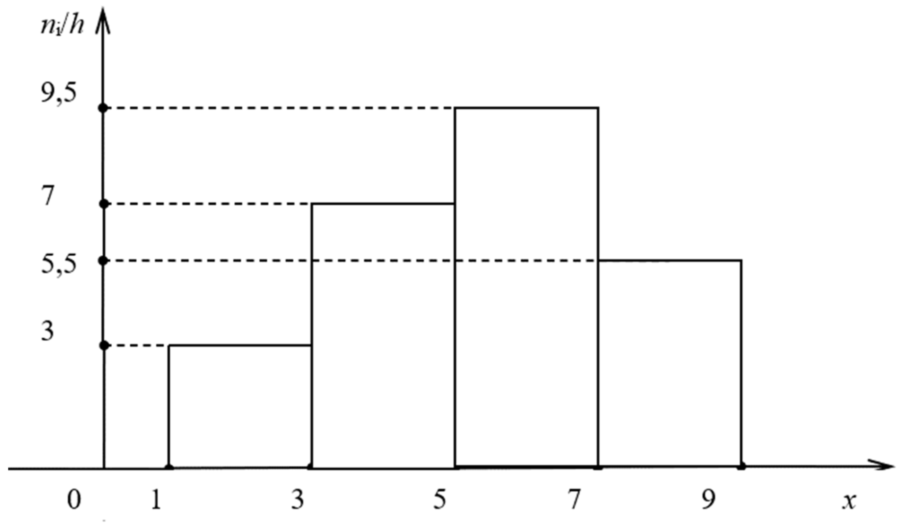
Побудуємо полігон частот для дискретного ряду та гістограму частот для інтервального ряду. Полігон частот має вигляд:



Для побудови гістограми знайдемо густини частот n_i/h:

$[x_i; x_{i+1})$	$[1; 3)$	$[3; 5)$	$[5; 7)$	$[7; 9]$
n_i	6	14	19	11
n_i/h	3	7	9,5	5,5

Тоді гістограма має вигляд:



Розглянемо статистичний аналог функції розподілу дискретної випадкової величини – ***емпіричну функцію розподілу***.

Нехай для дослідження отримано вибіркові дані x_1, x_2, ..., x_k. Визначимо емпіричну функцію розподілу наступним чином:

$$F*(x) = \frac{n_x}{N}.$$

Тут n_x − кількість елементів x_i, що задовольняють нерівності $x_i<x$, N – об'єм вибірки.

Емпірична функція розподілу (або функція розподілу вибірки) $F^*(x)$ має такі властивості:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ є неспадною кусково-сталою функцією;

3) $F*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_{min} \\ 1, & x > x_{max} \end{cases}$ де x_{min} – найменший, x_{max} – найбільший елемент.

Приклад. Отримано дані про вміст хлориду натрію (%) у зразках рецептурної суміші: 0.1, 0.2, 0.3, 0.2, 0.5, 0.5, 0.3, 0.3, 0.2, 0.2. Визначити емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

Розв'язання. Представимо вибіркові дані у вигляді статистичного розподілу частот:

x_i	0.1	0.2	0.3	0.5
n_i	1	4	3	2

Знайдемо об'єм вибірки: $N = \sum_{i=1}^{4} n_i = 1 + 4 + 3 + 2 = 10$.

Визначимо емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$:

коли $x \le 0.1$, $F^*(x)=0$;

коли $0.1<x\leq 0.2$, поява значень, менших за x, спостерігалась при появі значення $x_1=0.1$ $n_1=1$ раз, значить, в цьому інтервалі $F^*(x)=\frac{n_1}{N}=\frac{1}{10}$;

коли $0.2<x\leq 0.3$, поява значень, менших за x, спостерігалась при появі $x_1=0.1$ та $x_2=0.2$ в кількості $n_1+n_2=1+4=5$ разів, значить, в цьому інтервалі $F^*(x)=\frac{n_1+n_2}{n}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$;

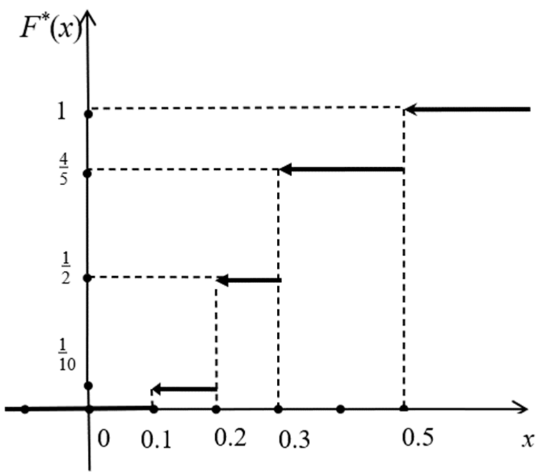
коли $0.3<x\leq 0.5$, поява значень, менших за x, спостерігалась при появі $x_1=0.1$, $x_2=0.2$ та $x_3=0.3$ в кількості $n_1+n_2+n_3=1+4+3=8$ разів, значить, в цьому інтервалі $F^*(x)=\frac{n_1+n_2+n_3}{n}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$;

коли $x>0.5$, $F^*(x)=1$.

Отримали таку емпіричну функцію розподілу вибіркових даних:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0.1\\ \frac{1}{10}, & 0.1<x\leq 0.2\\ \frac{1}{2}, & 0.2<x\leq 0.3\\ \frac{4}{5}, & 0.3<x\leq 0.5\\ 1, & x>0.5\end{cases}$$

графік якої має вигляд:



3.5. Точкові оцінки параметрів розподілу

При розв'язанні багатьох технологічних задач виникає потреба дослідити кількісну ознаку X генеральної сукупності, використовуючи вибіркові дані. Іноді, з деяких міркувань, вдається встановити закон розподілу випадкової величини X. Тоді виникає задача оцінювання параметрів цього закону розподілу − математичного сподівання $M(X)$, дисперсії $D(X)$, середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$.

Для того, щоб шукані статистичні оцінки давали достатньо гарні наближення параметрів, що оцінюються, вони повинні задовольняти таким вимогам:

– *незсунутості* (тобто математичне сподівання такої оцінки повинно бути рівним оцінюваному параметру за будь-якого об'єму вибірки);

– *ефективності* (тобто при заданому об'єму вибірки N така оцінка повинна мати найменшу з можливих дисперсій);

– *спроможності* (тобто якщо $n\to\infty$, статистична оцінка за ймовірністю повинна прямувати до оцінюваного параметра).

Якщо досліджувану ознаку X генеральної сукупності розглядати як випадкову величину, то незсунутою оцінкою її математичного сподівання $M(X)$ є ***вибіркове середнє значення*** $\bar{x}$, зсунутою оцінкою дисперсії $D(X)$ – ***вибіркова дисперсія*** D, незсунутою оцінкою дисперсії $D(X)$ – ***«виправлена» вибіркова дисперсія*** S^2. Для оцінки середнього квадратичного відхилення $\sigma(X)$ ознаки генеральної сукупності використовують ***вибіркове середнє квадратичне відхилення*** σ та ***«виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення*** S.

В залежності від того, в якому вигляді представлено вибіркові дані, використовуються різні формули обчислення оцінок параметрів розподілу.

1. Вибіркові дані представлено у вигляді негрупованого дискретного варіаційного ряду $x_1, x_2, \ldots, x_N$.

В цьому випадку

$$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ – вибіркове середнє значення,}$$

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$$ – вибіркова дисперсія

або

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \bar{x}^2;$$

$$S^2 = \frac{N}{N-1}D$$ – *«виправлена»* вибіркова дисперсія

або

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2;$$

$$\sigma = \sqrt{D}$$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$$S = \sqrt{S^2}$$ – «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення.

2. Вибіркові дані представлено у вигляді статистичного розподілу частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

В цьому випадку

$$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$ – вибіркове середнє значення;

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i$$ – вибіркова дисперсія

або

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, n_i - \bar{x}^2;$$

$$S^2 = \frac{N}{N-1}D$$ – *«виправлена»* вибіркова дисперсія

або

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x})^2 n_i;$$

$\sigma = \sqrt{D}$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$S = \sqrt{S^2}$ – «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення.

3. Вибіркові дані представлено у вигляді інтервального ряду

$[x_i; x_{i+1})$	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	…	$[x_k; x_{k+1}]$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Для знаходження точкових оцінок параметрів розподілу обчислюються середини інтервалів x_i^* (i=1, 2, …, k) за формулою

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

Статистичні оцінки параметрів розподілу набувають вигляду:

$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i$ – вибіркове середнє значення;

$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \bar{x})^2 n_i$ – вибіркова дисперсія

або

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i - \bar{x}^2;$$

$S^2 = \frac{N}{N-1} D$ – *«виправлена»* вибіркова дисперсія

або

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \bar{x})^2 n_i.$$

Середнє квадратичне відхилення та «виправлене» середнє квадратичне відхилення обчислюються аналогічно до попередніх випадків.

В статистичному аналізі широко застосовують такі точкові оцінки, як медіана і мода. Величина моди та медіани залежить тільки від характеру частот, тобто від структури розподілу.

Модою M_0 називається значення ознаки, яке має найбільшу частоту в статистичному розподілі. У дискретних варіаційних рядах мода визначається без додаткових розрахунків за значенням варіанти, що має найбільшу частоту. В інтервальних варіаційних рядах мода визначається за формулою:

$$M_0 = x_0 + h\frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1) + (n_2 - n_3)},$$

де x_0 – нижня (мінімальна) межа модального інтервалу (інтервалу з найбільшою частотою); h – величина інтервалу; n_1 – частота інтервалу, попереднього до модального; n_2 – частота модального інтервалу; n_3 – частота інтервалу, наступного після модального.

Медіаною Me називається таке значення ознаки, що поділяє варіаційний ряд на дві рівні частини, тобто це значення, яке знаходиться у середині ряду розподілу. Якщо в дискретному варіаційному ряді $2m+1$ елементів, то значення ознаки для елементу $m+1$ буде медіанним:

$$M_e = x_{m+1}.$$

Якщо в ряді парна кількість $2m$ елементів, медіану визначають як середню арифметичну величину з двох серединних значень:

$$M_e = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

В інтервальних варіаційних рядах розподілу медіана визначається за формулою:

$$M_e = x_{Me} + h\frac{0.5N - S_{Me-1}}{n_{Me}},$$

де x_{Me} – нижня (мінімальна) межа медіанного інтервалу; h – величина інтервалу; n – об'єм сукупності; S_{Me-1} – накопичена сума частот варіант інтервалу, попереднього до медіанного; n_{Me} – сума частот варіант медіанного інтервалу.

Приклад. При дослідженні партії кулінарних виробів на вміст жиру відібрано 10 зразків. Отримано наступні дані:

x_i	10	12	13	14	15
n_i	1	3	2	1	3

Тут x_i (%)– вміст жиру в i-му зразку, n_i – кількість відповідних зразків.

Обчислити: середнє значення вмісту жиру у відібраних зразках; вибіркову дисперсію та «виправлену» вибіркову дисперсію; вибіркове середнє квадратичне відхилення та «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення; моду та медіану.

Розв'язання. Вибіркове середнє значення обчислимо за формулою:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{10}(10 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 13 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 15 \cdot 3) = 13.1.$$

Для обчислення вибіркової дисперсії використаємо формулу:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^2\, n_i - \bar{x}^2 =$$

$$= \frac{1}{10}(10^2 \cdot 1 + 12^2 \cdot 3 + 13^2 \cdot 2 + 14^2 \cdot 1 + 15^2 \cdot 3) - (13{,}1)^2 = 2.5;$$

«Виправлену» вибіркову дисперсію знайдемо за формулою:

$$S^2 = \frac{N}{N-1} D = \frac{10}{9} \cdot 2.5 = 2.8.$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2.5} = 1.6.$$

«Виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2.8} = 1.7.$$

Маємо дві варіанти з найбільшою частотою, тому

$$M_{01}=12,\ M_{02}=15.$$

Оскільки об'єм вибірки – число парне ($N=10=2\cdot5$), маємо:

$$M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{13+13}{2} = 13.$$

Приклад. Наведено результати вимірювань зросту (в см) випадково відібраних 100 студентів.

Зріст	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студентів	10	14	26	28	12	8	2

Знайти середній зріст та вибіркову дисперсію зросту обстежуваних студентів.

Розв'язання. Знайдемо вибіркове середнє значення та вибіркову дисперсію. Для цього визначимо середини інтервалів x_i^*:

x_i^*	156	160	164	168	172	176	180

Вибіркове середнє значення:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i =$$

$$= \frac{1}{100}(156 \cdot 10 + 160 \cdot 14 + 164 \cdot 26 + 168 \cdot 28 + 172 \cdot 12 + 176 \cdot 8 + 180 \cdot 2) =$$

$$= 166 \text{ (см)};$$

Вибіркова дисперсія:

$$D = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \overline{x})^2 n_i = \frac{1}{100}((156 - 166)^2 \cdot 10 + (160 - 166)^2 \cdot 14 +$$

$$+(164 - 166)^2 \cdot 26 + (168 - 166)^2 \cdot 28 + (172 - 166)^2 \cdot 12 +$$

$$+(176 - 166)^2 \cdot 8 + (180 - 166)^2 \cdot 2) = 33.44 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Таким чином, середній зріст обстежуваних студентів складає 166 см, дисперсія – 33.44 см^2.

3.6. Інтервальні статистичні оцінки параметрів розподілу

Середнє вибіркове значення, вибіркова дисперсія і вибіркове середнє квадратичне відхилення є точковими оцінками параметрів розподілу ознаки генеральної сукупності. Точкова оцінка залежить від об'єму вибірки і може сильно відрізнятися від дійсного значення параметру, що оцінюється, тобто може привести до грубих помилок. Тому при дослідженні вибірок невеликого об'єму виникає необхідність використовувати так звані *інтервальні оцінки*.

Розглянемо точкову оцінку математичного сподівання a (або, що теж саме, генерального середнього значення) деякої кількісної ознаки X генеральної сукупності – вибіркове середнє значення $\bar{x}_в$. Характеристикою *точності оцінки* будемо вважати величину δ, потрібну для виконання нерівності $|\bar{x}_в - a| < \delta$. Внаслідок випадковості того, що той чи інший об'єкт потрапляє до вибіркової сукупності, говорити про виконання останньої нерівності можна лише з деякою ймовірністю γ, яка називається *надійністю* (*надійною або довірчою ймовірністю*) оцінки, тобто

$$P(|\bar{x}_в - a| < \delta) = \gamma,$$

або

$$P(\bar{x}_в - \delta < a < \bar{x}_в + \delta) = \gamma.$$

Це означає, що невідоме математичне сподівання a розподілу ознаки генеральної сукупності з імовірністю γ покривається інтервалом $(\bar{x}_в - \delta;\ \ \bar{x}_в + \delta)$, який називається *надійним інтервалом* або *довірчим інтервалом* для оцінки невідомого математичного сподівання**.**

Особливу цікавість викликає надійний інтервал для оцінки математичного сподівання кількісної ознаки X генеральної сукупності, розподіленої за нормальним законом. Можливі наступні випадки:

1. Якщо заздалегідь відома величина середнього квадратичного відхилення σ, то межі надійного інтервалу для оцінки математичного сподівання a мають вигляд:

$$\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{N}};\quad \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right),$$

де $\bar{x}_в$ – середнє вибіркове значення; N – об'єм вибірки; σ – відоме середнє квадратичне відхилення розподілу ознаки генеральної сукупності; t – величина, що визначається за таблицею значень функції Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ із співвідношення

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2},$$

де γ – заздалегідь обрана надійна ймовірність.

2. Якщо середнє квадратичне відхилення σ досліджуваної ознаки заздалегідь невідомо, то використовується його вибіркова оцінка S – «виправлене» середнє квадратичне відхилення, яке знаходять за даними вибірки. У цьому випадку надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a має вигляд

$$\left(\bar{x}_в - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{N}};\quad \bar{x}_в + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{N}}\right),$$

де $\bar{x}_в$ – вибіркове середнє значення; S – «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення; N – об'єм вибірки; t_γ – величина, що визначається за таблицею розподілу Ст'юдента для N-1 ступенів свободи та надійної ймовірності γ.

Зауважимо, що у деяких таблицях замість надійної ймовірності γ розглядається рівень значущості α=1-γ.

Приклад. Побудувати з надійністю γ=0.99 довірчий інтервал для оцінки середнього вмісту білка (%) у партії хлібобулочних виробів, якщо:

1. середнє квадратичне відхилення вмісту білка усієї партії складає 4 %, середній вміст білка у досліджуваних 16 зразках складає 10.2 %;

2. для досліджування відібрано зразки та визначено вміст білка в них, %: 7, 13, 8, 10, 12, 9, 11, 12, 8.

Вміст білка у виробах вважається нормально розподіленою випадковою величиною.

Розв'язання.

1. За умовою σ=4, $\bar{x}_в = 10.2$, N=16. Надійний інтервал для оцінки середнього вмісту білка знаходиться за формулою:

$$\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{N}};\quad \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right),$$

Знайдемо невідому величну t з рівняння:

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2},$$

$$\Phi(t) = \frac{0.99}{2} = 0.495,$$

з таблиці значень функції Лапласа (додаток 1) знаходимо:

$$t=2.57.$$

Будуємо надійний інтервал:

$$10.2 - 2.57\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 10.2 + 2.57\frac{4}{\sqrt{16}},$$

або

$$7.63<a<12.77.$$

2. Для побудови надійного інтервалу скористаємося формулою:

$$\left(\bar{x}_в - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{N}};\quad \bar{x}_в + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{N}}\right),$$

Для цього визначимо:

- об'єм вибірки N=9;

- вибіркове середнє значення за формулою:

$$\bar{x}_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{9}(7 + 13 + 8 + 10 + 12 + 9 + 11 + 12 + 8) = 10;$$

- «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2};$$

$$S^2 = \frac{1}{9-1}((7-10)^2 + (13-10)^2 + (8-10)^2 \cdot 2 + (10-10)^2 +$$

$$+(12-10)^2 \cdot 2 + (9-10)^2 + (11-10)^2) = 4.5;$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4.5} = 2.12;$$

- значення t_γ з таблиці розподілу Ст'юдента з 9–1=8 ступенями свободи та довірчою ймовірністю γ=0.99:

$$t_\gamma = 3.36.$$

Маємо:

$$10 - 3.36 \cdot \frac{2.12}{\sqrt{9}} < a < 10 + 3.36 \cdot \frac{2.12}{\sqrt{9}}$$

або

$$7.63 < a < 12.37.$$

Таким чином, середній вміст білка (%) партії хлібобулочних виробів з імовірністю 0.99 покривається:

1. інтервалом (7.63; 12.77);
2. інтервалом (7.63; 12.37).

3.7. Статистична перевірка статистичних гіпотез

Статистичною гіпотезою називають будь-яке висловлювання про розподіл генеральної сукупності або про параметри відомих розподілів, що перевіряються за вибіркою. Процес використання вибіркових даних для перевірки гіпотези називають ***статистичним доведенням***.

Основною (нульовою) називається припущена гіпотеза, яка позначається H_0. Разом з припущеною гіпотезою завжди можна розглядати ***альтернативну (конкуруючу)*** гіпотезу H_1. Наприклад, якщо H_0: $M(X)=6$, то H_1: $M(X)\neq 6$, або якщо H_0: $M(X)<6$, то H_1: $M(X)>6$.

Вибір між гіпотезами H_0 та H_1 може супроводжуватися двома видами похибок. Якщо за висновком буде відкинута правильна гіпотеза H_0, то кажуть, що відбулася ***похибка першого роду***. Якщо за висновком буде прийнята неправильна гіпотеза H_0, то кажуть, що відбулася ***похибка другого роду***.

Правило, за яким приймають рішення про правильність гіпотези H_0, називається ***критерієм***.

Ймовірність здійснити похибку першого роду позначається α і називається ***рівнем значущості критерію***.

Ймовірність здійснити похибку другого роду позначають β. Ймовірність $1-\beta$ називають *потужністю критерію*. Найчастіше рівень значущості приймають рівним 0.05 або 0.01. Якщо прийнято рівень значущості рівним 0.05, то це означає, що в п’яти випадках із 100 ми ризикуємо одержати похибку першого роду (відкинути правильну гіпотезу).

Перевірку статистичної гіпотези можна здійснити лише з використанням даних вибірки. Для цього слід вибрати деяку випадкову статистичну характеристику (вибіркову функцію), точний або наближений розподіл якої відомий, і за допомогою цієї характеристики перевірити основну гіпотезу.

Статистичним критерієм узгодження перевірки гіпотези (або просто *критерієм*) називається випадкова величина K, розподіл якої (точний або наближений) відомий і яка застосовується для перевірки основної гіпотези.

Спостереженим значенням критерію узгодження називається значення відповідного критерію, обчислене за даними вибірки.

Після вибору певного критерію узгодження множину всіх його можливих значень поділяють на дві підмножини, що не перетинаються: одна з них містить значення критерію, за яких основна гіпотеза відхиляється, а друга – за яких приймається.

Критичною областю називається сукупність значень критерію, за яких основна гіпотеза відхиляється.

Областю прийняття гіпотези (областю припустимих значень) називається сукупність значень критерію, за яких гіпотезу приймають.

Критерій узгодження K – одновимірна випадкова величина, усі її можливі значення належать деякому інтервалу. Тому критична область та область прийняття гіпотези також будуть інтервалами, а це означає, що існують точки, які ці інтервали відокремлюють.

Критичними точками (межами) критерію К називаються точки $k_{кр}$ (k_{α}), які відокремлюють критичну область від області прийняття гіпотези. Розрізняють однобічну (правобічну, лівобічну) та двобічну критичні області.

Правобічною називається критична область, що визначається інтервалом ($k_{кр}$; $+\infty$), де $k_{кр}$ знаходиться з умови $P(K>k_{кр})=\alpha$.

Лівобічною називається критична область, що визначається інтервалом ($-\infty$; $k_{кр}$), де $k_{кр}$ знаходиться з умови $P(K<k_{кр})=\alpha$.

Двобічною називається критична область, що визначається інтервалом ($-\infty$; $k_{1кр}$)U($k_{2кр}$; $+\infty$), де $k_{1кр}$, $k_{2кр}$ знаходять з умови $P(K<k_{1кр})+P(K>k_{2кр})=\alpha$.

Для кожного критерію узгодження є відповідні таблиці, які дозволяють знайти точку $k_{кр}$.

Якщо рівень значущості α вже обраний, то критичну область доцільно будувати так, щоб потужність критерію була максимальною. Виконання цієї умови забезпечує мінімальну ймовірність похибки другого роду. Слід зауважити, що єдиним способом одночасного зменшення ймовірностей похибок першого та другого роду є збільшення об’єму вибірки.

Для перевірки правильності основної статистичної гіпотези H_0 необхідно:

1. визначити гіпотезу H_1, альтернативну до гіпотези H_0;

2. вибрати статистичну характеристику перевірки;

3. визначити припустиму ймовірність похибки першого роду, тобто рівень значущості α;

4. знайти за відповідною таблицею критичну область (критичну точку) для вибраної статистичної характеристики.

3.8. Деякі критерії перевірки статистичних гіпотез

Порівняння двох дисперсій нормальних генеральних сукупностей X та Y:

Гіпотези	Значення критерію	приймають H_0
H_0: $D(X)=D(Y)$	$F_{сп} = \dfrac{{S_б}^2}{{S_м}^2}$	
H_1: $D(X)>D(Y)$	$F_{кр}(\alpha,\ k_1,k_2)$	$F_{сп}<F_{кр}$
H_1: $D(X)\neq D(Y)$	$F_{кр}(\alpha/2,\ k_1,k_2)$	$F_{сп}<F_{кр}$
$S_б^2$– більша «виправлена» дисперсія; $S_м^2$– менша «виправлена» дисперсія; $k_1=n_1$-1 – число ступенів свободи для вибірки з більшою дисперсією; $k_2=n_2$-1– число ступенів свободи для вибірки з меншою дисперсією; $F_{кр}$ знаходять в таблиці критичних точок розподілу Фішера-Снедекора (додаток 3)		

Приклад. Розглядаються дві генеральних сукупності X і Y, що підкоряються нормальному розподілу. З кожної сукупності добуто вибірку відповідних об'ємів n_X=11 і n_Y=14. За вибірковими даними знайдені «виправлені» середні квадратичні відхилення ${S_X}^2 = 0.76$ та ${S_Y}^2 = 0.38$. На рівні значущості α=0.05 перевірити гіпотезу H_0: $D(X)=D(Y)$ про рівність генеральних дисперсій при конкуруючій гіпотезі H_1: $D(X)>D(Y)$.

Розв'язання. Маємо правобічну критичну область. Обчислимо спостережене значення критерію як відношення більшої «виправленої» дисперсії до меншої:

$$F_{сп}=\frac{S_б{}^2}{S_м{}^2}=\frac{0.76}{0.38}=2.$$

На рівні значущості α=0.05 із ступенями свободи $k_1=n_X$-1=11-1=10 (вибірка з більшою дисперсією) і $k_2=n_Y$-1=14-1=13 (вибірка з меншою дисперсією) знаходимо критичну точку, користуючись додаток 3: $F_{кр}(0.05; 10; 13)=2.67$. Оскільки $F_{сп}<F_{кр}$, з імовірністю $\gamma=1-\alpha=0.95$ приймається гіпотеза H_0. Робимо висновок, що вибіркові дисперсії відрізняються незначуще.

Порівняння двох середніх нормальних генеральних сукупностей X та Y, дисперсії яких невідомі і однакові (невеликі незалежні вибірки, N<30):

Гіпотези	Значення критерію	приймають H_0
H_0: $M(X)=M(Y)$	$T_{сп}=\frac{\overline{x_1}-\overline{x_2}}{\sqrt{(n_1-1)\cdot S_1{}^2+(n_2-1)\cdot S_2{}^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$	
H_1: $M(X)>M(Y)$	$t_{кр\ прав}(\alpha, k)$	$T_{сп}<t_{кр\ прав}$
H_1: $M(X)<M(Y)$	$t_{кр\ лів}(\alpha, k)=-t_{кр\ прав}(\alpha, k)$	$T_{сп}<-t_{кр\ прав}$
H_1: $M(X)\neq M(Y)$	$t_{кр\ двоб}(\alpha, k)$	$\lvert T_{сп}\rvert<t_{кр\ двоб}$
n – об'єм вибірки; $\overline{x}$ – вибіркове середнє значення;		

S^2 – «виправлена» вибіркова дисперсія;
$k=n_1+n_2-2$ – число ступенів свободи;
$t_{кр}$ знаходять в таблиці критичних точок розподілу Ст'юдента (*додаток 2*)

Приклад. На рівні значущості α=0.05 перевірити гіпотезу H_0: $M(X)=M(Y)$ про рівність генеральних середніх нормально розподілених сукупностей X і Y (дисперсії невідомі, але однакові) при конкуруючій гіпотезі H_1: $M(X)>M(Y)$ за невеликими незалежними вибірками

x_i	12.3	12.5	12.8	13.0	13.5
n_i	1	2	4	2	1

y_j	12.2	12.3	13.0
m_j	6	8	2

Розв'язання. Обчислимо об'єми вибірок:

$$n=\sum_{i=1}^{5} n_i = 1+2+4+2+1=10;\ m=\sum_{j=1}^{3} m_i = 6+8+2=16.$$

Знайдемо спостережене значення критерію за формулою

$$T_{\text{сп}}=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)\cdot S_X{}^2+(m-1)\cdot S_Y{}^2}}\cdot\sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Для цього:

- обчислимо вибіркові середні значення:

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i n_i=\frac{1}{10}(12.3\cdot 1+12.5\cdot 2+12.8\cdot 4+13\cdot 2+13.5\cdot 1)=12.8;$$

$$\overline{y} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{3} y_i m_i = \frac{1}{16}(12.2 \cdot 6 + 12.3 \cdot 8 + 13 \cdot 2) = 12.35;$$

- обчислимо «виправлені» вибіркові дисперсії:

$${S_X}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \overline{x})^2 n_i == \frac{1}{9}((12.3 - 12.8)^2 \cdot 1 + (12.5 - 12.8)^2 \cdot 2 + 0 \cdot 4 +$$

$$+(13 - 12.8)^2 \cdot 2 + (13.5 - 12.8)^2 \cdot 1) = 0.111;$$

$${S_Y}^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{3}(y_i - \overline{y})^2 m_i == \frac{1}{15}((12.2 - 12.35)^2 \cdot 6 + (12.3 - 12.35)^2 \cdot 8 +$$

$$(13 - 12.35)^2 \cdot 2) = 0.067.$$

Спочатку перевіримо гіпотезу про рівність генеральних дисперсій, використовуючи критерій Фішера – Снедекора. Дисперсія ${S_X}^2$ більша, ніж дисперсія ${S_Y}^2$, тому перевіряємо гіпотезу *D(X)=D(Y)* із конкуруючою *D(X)>D(Y)*. Знайдемо спостережене значення критерію:

$$F_{сп} = \frac{{S_б}^2}{{S_м}^2} = \frac{0.111}{0.067} = 1.657.$$

Визначимо критичну точку із параметрами α=0.05, $k_1=n$-1=9 (вибірка з більшою дисперсією), $k_2=m$-1=15 (вибірка з меншою дисперсією), користуючись додатком 3:

$$F_{кр},(0.05; 9; 15)=2.59.$$

Оскільки $F_{сп}<F_{кр}$, нема підстав відкидати гіпотезу про рівність дисперсій.

– знайдемо спостережене значення критерію:

$$T_{\text{сп}} = \frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{(n-1)\cdot {S_X}^2+(m-1)\cdot {S_Y}^2}} \cdot \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}} = \frac{12.8-12.35}{\sqrt{9\cdot 0.111+15\cdot 0.067}} \cdot \sqrt{\frac{160\cdot 24}{26}} = 3.86.$$

– оскільки конкуруюча гіпотеза H_1: $M(X)>M(Y)$, маємо правобічну критичну область. За рівнем значущості α=0.05 та $k=n+m$-2=24 ступенями свободи знайдемо із додатку *2* критичних точок розподілу Ст'юдента $t_{кр\ прав}(0.05; 24)=1.71$. Оскільки $T_{сп}>t_{кр\ прав}$, гіпотеза про рівність математичних сподівань відхиляється та на рівні значущості α=0.05 приймається конкуруюча гіпотеза $M(X)>M(Y)$.

Порівняння «виправленої» вибіркової дисперсії з гіпотетичною генеральною дисперсією σ_0^2 нормальної сукупності X:

Гіпотези	Значення критерію	приймають H_0
H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2_{сп} = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2}$	
H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2_{кр}(\alpha, k)$	$\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$
H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2_{лів\ кр}(1-\alpha/2, k)$ $\chi^2_{пр\ кр}(\alpha/2, k)$	$\chi^2_{лів\ кр} < \chi^2_{сп} < \chi^2_{пр\ кр}$
H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{кр}(1-\alpha, k)$	$\chi^2_{сп} > \chi^2_{кр}$
σ^2 – невідома генеральна дисперсія; σ_0^2 – значення дисперсії, що припускають; S^2 – «виправлена» дисперсія; $k=n$-1 – число ступенів свободи; $\chi^2_{кр}(\alpha, k)$ знаходять в таблиці критичних точок розподілу Хі-квадрат (додаток *4*)		

Приклад. З розподіленої нормально генеральної сукупності добуто вибірку об'єму n=21 і за нею знайдено «виправлену» вибіркову дисперсію S^2=16.2. Треба на рівні значущості α=0.01 перевірити гіпотезу про рівність генеральної дисперсії H_0: σ^2=15 при конкуруючій гіпотезі H_1: σ^2>15.

Розв'язання. Маємо правобічну критичну область. Визначимо значення критерію, що спостерігається:

$$\chi^2_{сп} = \frac{(n-1)S^2}{{\sigma_0}^2} = \frac{(21-1)16.2}{15} = 21.6.$$

Знайдемо критичну точку за рівнем значущості α=0.01 та числом ступенів свободи k=n-1=20, скориставшись додатком 4 критичних точок розподілу χ^2: $\chi^2_{кр}(0.01; 20) = 37.57$. Оскільки $\chi^2_{сп} < \chi^2_{кр}$, з імовірністю γ=1-α=0.99 приймаємо гіпотезу H_0. Робимо висновок, що різниця між гіпотетичною та «виправленою» дисперсіями є незначущою.

Порівняння вибіркової середньої з гіпотетичною генеральною середньою a_0 нормальної сукупності X:

<table>
<tr><td rowspan="2">Гіпотези</td><td colspan="2">Значення критерію</td><td rowspan="2">приймають H_0</td></tr>
<tr><td>генеральна дисперсія σ^2 відома</td><td>генеральна дисперсія невідома</td></tr>
<tr><td>H_0: $a=a_0$</td><td>$U_{сп} = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$</td><td>$T_{сп} = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{S}$</td><td></td></tr>
<tr><td>H_1: $a>a_0$</td><td>$\Phi(u_{кр})=(1-2\alpha)/2$</td><td>$t_{кр\ прав}(\alpha, k)$</td><td>$U_{сп}<u_{кр}$ або
$T_{сп}<t_{кр}$</td></tr>
<tr><td>H_1: $a\neq a_0$</td><td>$\Phi(u_{кр})=(1-\alpha)/2$</td><td>$t_{кр\ двоб}(\alpha, k)$</td><td>$\lvert U_{сп}\rvert<u_{кр}$ або
$\lvert T_{сп}\rvert<t_{кр}$</td></tr>
<tr><td>H_1: $a<a_0$</td><td>$\Phi(u_{кр})=(1-2\alpha)/2$</td><td>$t_{кр\ лів}(\alpha, k)=-t_{кр\ прав}(\alpha, k)$</td><td>$U_{сп}<-u_{кр}$ або
$T_{сп}<-t_{кр}$</td></tr>
<tr><td colspan="4">a – невідома генеральна середня;
a_0 – значення середньої, що припускають;
k=n-1 – число ступенів свободи;
$u_{кр}$ знаходять в таблиці значень функції $\Phi(x)$ (додаток 1);
$t_{кр}(\alpha, k)$ знаходять в таблиці критичних точок розподілу Ст’юдента (додаток 2)</td></tr>
</table>

Приклад. З розподіленої нормально генеральної сукупності із відомим середнім квадратичним відхиленням σ=5.2 добуто вибірку об'ємом n=100 і за нею знайдено вибіркове середнє значення $\overline{x}_в = 27.56$. На рівні значущості α=0.05 перевірити гіпотезу про рівність генеральної середньої H_0: a=26 при конкуруючій гіпотезі H_1: a≠26.

Розв'язання. Маємо двобічну критичну область. Визначимо значення критерію, що спостерігається:

$$U_{сп} = \frac{(\bar{x}-a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(27.56-26)\sqrt{100}}{5.2} = 3.$$

Знайдемо критичну точку з рівності

$$\Phi(u_{кр}) = (1-\alpha)/2 = (1-0.05)/2 = 0.475,$$

скориставшись додатком 1: $u_{кр}$=1.96. Оскільки $U_{сп}<u_{кр}$, гіпотеза H_0 не приймається. На рівні значущості α=0.05 приймаємо гіпотезу H_1. Робимо висновок, що вибіркова середня і гіпотетична середня відрізняються значуще.

3.9. Перевірка гіпотези про закон розподілу генеральної сукупності

Під час дослідження деякої ознаки X генеральної сукупності за основу приймається припущення про те, що вона розподілена за певним законом. Загального підходу стосовно висунення гіпотези про закон розподілу не існує. Проте, виходячи з емпіричного розподілу досліджуваної ознаки, висувається та або інша гіпотеза про закон розподілу.

Законами розподілу випадкової величини, які найчастіше зустрічаються під час дослідженні проблем галузі, є нормальний, показниковий, пуассонівський, логарифмічній та ін.

Розглянемо критерій, який найчастіше зустрічається в практиці розв'язання технічних задач засобами математичної статистики – *критерій згоди Пірсона* при застосуванні його до перевірки гіпотези про *розподіл генеральної сукупності*.

Суть критерію полягає в порівнянні емпіричних (тих, які одержані дослідним шляхом) частот n_i і теоретичних частот n_i'. Критерій Пірсона відповідає на питання: чи розходження між частотами є випадковим (незначущим) або невипадковим (значущим). При цьому критерій Пірсона не підтверджує однозначно правильність або неправильність гіпотези, а тільки встановлює її згоду або незгоду з даними спостережень за обраним рівнем значущості. Критерій Пірсона можна використовувати для досить великих груп ($n \geq 50$), на кожному інтервалі (x_i; x_{i+1}) число емпіричних частот n_i ($i=1...s$) повинно бути не менше за 5, в протилежному випадку інтервали потрібно об'єднати, а частоти додати.

Правило Пірсона. Для того щоб при заданому рівні значущості α перевірити основну гіпотезу H_0, потрібно:

1. обчислити теоретичні частоти $n_i' = n \cdot P_i$ для варіант вибірки;
2. обчислити спостережене значення критерію χ^2 за формулою

$$\chi_{cn}^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}.$$

3. знайти ступені свободи критерію χ^2 за формулою $k=s$-1-r, де s – число груп (інтервалів групування) вибірки; r – число параметрів передбаченого закону розподілу.
4. знайти в таблиці критичну точку $\chi_{kp}^2(\alpha, k)$, яка відповідає заданому рівню значущості α та ступеням свободи k;
5. порівняти χ_{kp}^2 та χ_{cn}^2: якщо $\chi_{cn}^2 < \chi_{kp}^2$, то гіпотеза про розподіл генеральної сукупності приймається з ймовірністю γ=1-α, якщо $\chi_{cn}^2 > \chi_{kp}^2$, гіпотезу відхиляють на рівні значущості α.

Правила для знаходження теоретичних частот:

Нормальний розподіл		
Формула обчислення ймовірності	Ступені свободи	Значення аргументів
$P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$k=s$-3	$z_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}$ $z_1=-\infty;\ldots z_{s+1}=\infty$
Показниковий розподіл		
$P_i=e^{-\lambda\, x_i}-e^{-\lambda\, x_{i+1}}$	$k=s$-2	$\lambda=\frac{1}{\bar{x}}$
Рівномірний розподіл		
$P_1=\frac{1}{b^*-a^*}(x_2-a^*)$ $P_i=\frac{1}{b^*-a^*}(x_{i+1}-x_i)$ $P_s=\frac{1}{b^*-a^*}(b^*-x_s)$	$k=s$-3	$a*=\bar{x}-\sqrt{3}\sigma$ $b*=\bar{x}+\sqrt{3}\sigma$
Закон Пуассона		
$P_i=\frac{\lambda^i\cdot e^{-\lambda}}{i!}$	$k=s$-2	$\lambda=\bar{x}$ i=1…r – кількість появ події в n випробуваннях (r – максимальне число події, що спостерігали)

Приклад. Використовуючи критерій Пірсона, на рівні значущості α=0.05 перевірити, чи узгоджується гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності з емпіричним розподілом вибірки

x_i	[3; 8)	[8; 13)	[13; 18)	[18; 23)	[23; 28)	[28; 33)	[33; 38)
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Розв'язання. Побудуємо статистичний ряд, обчисливши значення варіант як середнє арифметичне кінців інтервалів $x_i^*=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$. Маємо розподіл:

x_i^*	5.5	10.5	15.5	20.5	25.5	30.5	35.5
n_i	6	8	15	40	16	8	7

Обчислимо об'єм вибірки, вибіркову середню та вибіркове середнє квадратичне відхилення.

$$N = \sum_{i=1}^{7} n_i = 6 + 8 + 15 + 40 + 16 + 8 + 7 = 100;$$

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} x_i^* n_i = \frac{1}{100}(5.5 \cdot 6 + 10.5 \cdot 8 + 15.5 \cdot 15 + 20.5 \cdot 40 + 25.5 \cdot 16 +$$

$$+30.5 \cdot 8 + 35.5 \cdot 7) = 20.7;$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7}(x_i^*)^2 n_i - \overline{x}^2} = \frac{1}{10}(5.5^2 \cdot 6 + 10.5^2 \cdot 8 + 15.5^2 \cdot 15 + 20.5^2 \cdot 40 +$$

$$+25.5^2 \cdot 16 + 30.5^2 \cdot 8 + 35.5^2 \cdot 7 - 20.7^2)^{1/2} = 7.28.$$

Обчислимо нормовані значення кінців інтервалів за формулою $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$, вважаючи, що z_1=-∞, z_7=∞, та побудуємо таблицю для обчислення теоретичних частот (в таблиці Φ(z) – функція Лапласа з додатку 1).

i	x_i	x_{i+1}	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$P_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$n_i'=n \cdot P_i$	n_i
1	3	8	-∞	-1.74	-0.5	-0.4591	0.0409	4.09	6
2	8	13	-1.74	-1.06	-0.4591	-0.3554	0.1037	10.37	8
3	13	18	-1.06	-0.37	-0.3554	-0.1443	0.2111	21.11	15
4	18	23	-0.37	0.32	-0.1443	0.1255	0.2698	26,98	40
5	23	28	0.32	1	0.1255	0.3413	0.2158	21.58	16
6	28	33	1	1.69	0.3413	0.4545	0.1132	11.32	8
7	33	38	1.69	∞	0.4545	0.5	0.0455	4.55	7
Σ							1	100	100

Обчислимо спостережене значення критерію Пірсона за формулою:

$$\chi_{cn}^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{\left(n_i - n_i'\right)^2}{n_i'}.$$

$$\chi_{cn}^2 = \frac{(6-4.09)^2}{4.09} + \frac{(8-10.37)^2}{10.37} + \frac{(15-21.11)^2}{21.11} + \frac{(40-26.98)^2}{26.98} + \frac{(16-21.58)^2}{21.58} + + \frac{(8-11.32)^2}{11.32} +$$
$$+ \frac{(7-4.55)^2}{4.55} = 13.22.$$

За додатком 4 критичних точок розподілу χ^2, за рівнем значущості α=0.05 та числом ступенів свободи k=7-3=4 знаходимо критичну точку $\chi_{kp}^2(0.05; 4) = 0.49$. Оскільки $\chi_{cn}^2 > \chi_{kp}^2$, на рівні значущості α=0.05 гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності відхиляється.

3.10. Повний факторний експеримент (ПФЕ)

Задано основні рівні факторів x_{10}, x_{20}, x_{30} та інтервали варіювання λ_1, λ_2, λ_3. Спланувати ПФЕ: перейти до кодованих змінних, скласти матрицю планування і записати вигляд рівняння лінійної регресії.

x_{10}	x_{20}	x_{30}	λ_1	λ_2	λ_3
15	5	1,1	3	1	0,1

Переходимо до кодованих змінних:

$X_1 = \frac{x_1 - x_{10}}{\lambda_1}$; $X_2 = \frac{x_2 - x_{20}}{\lambda_2}$; $X_3 = \frac{x_3 - x_{30}}{\lambda_3}$;

X_1=1 при x_1=x_{10}+λ_1=18;

X_1=-1 при x_1=x_{10}-λ_1=12;

X_2=1 при x_2=x_{20}+λ_2=6;

X_2=-1 при x_2=x_{20}-λ_2=4;

X_3=1 при x_3=x_{30}+λ_3=1.2;

X_3=-1 при $x_3=x_{30}+\lambda_3$=1.

Для проведення ПФЕ необхідно N=2^2=4 досліди. Матриця планування ПФЕ має наступний вигляд:

№ досліду i	Фактори						Значення параметра оптимізації y_i
	X_1	X_2	X_3	$X_1 \cdot X_2$	$X_1 \cdot X_3$	$X_2 \cdot X_3$	
1	-1	-1	1	1	-1	-1	y_1
2	1	-1	-1	-1	-1	1	y_2
3	-1	1	-1	-1	1	-1	y_3
4	1	1	1	1	1	1	y_4

Вигляд рівняння регресії:

$$y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3.$$

В результаті ПФЕ отримано дані, наведені в таблиці. На рівні значущості α=0.05 перевірити відтворюваність результатів експерименту за критерієм Кохрена.

№ досліду i	Значення параметра оптимізації y_i			
1	3.7	3.3	3.5	3.0
2	2.7	2.4	2.5	2.3
3	2.4	2.1	2.3	2.8
4	3.0	3.3	3.2	3.1

Маємо m=4 повторних досліди. Для виявлення помилок паралельних дослідів перевіряємо гіпотезу про однорідність «виправлених» вибіркових дисперсій на рівні значущості α=0.05:

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = S_4^2.$$

Обчислюємо «виправлені» вибіркові дисперсії за формулою

$$S_i^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{m}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2,$$

де $\bar{y}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$ – середнє значення досліджуваного параметра за кожним дослідом, i=1, 2, 3, 4 − номер досліду, j=1, 2, 3, 4 − номер повторного досліду.

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{4}(3{,}7 + 3{,}3 + 3{,}5 + 3{,}0) = 3{,}4;\ \bar{y}_2 = \frac{1}{4}(2{,}7 + 2{,}4 + 2{,}5 + 2{,}3) = 2{,}5;$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{4}(2{,}4 + 2{,}1 + 2{,}3 + 2{,}8) = 2{,}4;\ \bar{y}_4 = \frac{1}{4}(3{,}0 + 3{,}3 + 3{,}2 + 3{,}1) = 3{,}2;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{4-1}((3{,}7 - 3{,}4)^2 + (3{,}3 - 3{,}4)^2 + (3{,}5 - 3{,}4)^2 + (3{,}0 - 3{,}4)^2) = 0{,}089;$$

аналогічно

$$S_2^2 = 0{,}029;\ S_3^2 = 0{,}087;\ S_4^2 = 0{,}017.$$

Обчислюємо спостережене значення критерію Кохрена за формулою:

$$G = \frac{\max_i(S_i^2)}{\sum_i S_i^2},$$

$$G = \frac{0{,}089}{0{,}089+0{,}029+0{,}087+0{,}017} = 0{,}401.$$

За таблицею критичних точок розподілу Кохрена (додаток 3) для рівня значущості α=0.05, N=4 дослідів та m-1 ступенів свободи знаходимо:

$$G_{кр} = G(\alpha; N; m-1) = G(0{,}05; 4; 3) = 0{,}6841.$$

Оскільки $G < G_{\text{кр}}$, гіпотеза про однорідність дисперсій приймається з довірчою ймовірністю p=0.95, досліди вважаємо відтворюваними.

В результаті ПФЕ отримано дані, наведені в таблиці. Припускається, що процес описується рівнянням лінійної регресії у вигляді $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$. Обчислити коефіцієнти рівняння регресії.

№ досліду i	Фактори			$\bar{y}_i$ – середнє значення параметра оптимізації
	X_1	X_2	$X_1 \cdot X_2$	
1	-1	-1	1	3.5
2	1	-1	-1	2.4
3	-1	1	-1	1.9
4	1	1	1	3.1

Введемо матрицю коефіцієнтів, що відповідають значенням факторів:

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Знаходимо коефіцієнти рівняння регресії:

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{y}_i = \frac{1}{4}(3{,}5 + 2{,}4 + 1{,}9 + 3{,}1) = 2{,}725;$$

$$b_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{i1}\bar{y}_i = \frac{1}{4}(-3{,}5 + 2{,}4 - 1{,}9 + 3{,}1) = 0{,}025;$$

$$b_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{i2}\bar{y}_i = \frac{1}{4}(-3{,}5 - 2{,}4 + 1{,}9 + 3{,}1) = -0{,}225;$$

$$b_{12} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_{i3}\bar{y}_i = \frac{1}{4}(3{,}5 - 2{,}4 - 1{,}9 + 3{,}1) = 0{,}575.$$

Рівняння регресії має вигляд

$$y = 0{,}725 + 0{,}025X_1 - 0{,}225X_2 + 0{,}575X_1X_2.$$

Проведено ПФЕ 2^2. Кожний дослід повторювався 4 рази. Рівняння регресії отримано у вигляді $y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2$.

На рівні значущості α=0.05 перевірити:

1. статистичну значущість коефіцієнтів рівняння регресії;

2. адекватність лінійної моделі до реального процесу.

Вхідні дані:

Рівняння регресії: $y = 3{,}4 + 0{,}65X_1 + 0{,}7X_2 + 0{,}05X_1X_2$

№ досліду	Кодовані значення факторів			$\bar{y}_i$ – середнє значення параметра оптимізації	S_i^2 – дисперсія досліду
	X_1	X_2	$X_1 \cdot X_2$		
1	-1	-1	1	2.1	0.048
2	1	-1	-1	3.3	0.019
3	-1	1	-1	3.4	0.025
4	1	1	1	4.8	0.029

Знайдемо дисперсію відтворюваності результатів

$$D_в = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i^2 = \frac{1}{4}(0{,}048 + 0{,}019 + 0{,}025 + 0{,}029) = 0{,}03.$$

Для перевірки статистичної значущості коефіцієнтів рівняння регресії обчислимо середню квадратичну помилку при знаходженні коефіцієнтів рівняння регресії

$$S = \sqrt{\frac{D_в}{N \cdot m}} = \sqrt{\frac{0{,}03}{4 \cdot 4}} = 0{,}043.$$

Статистичну значущість кожного коефіцієнта оцінимо за допомогою критерію Стьюдента. Розрахункові значення критерію:

$$t_0 = \frac{|b_0|}{S} = \frac{3,4}{0,043} = 78,2;\ t_1 = \frac{|b_1|}{S} = \frac{0,65}{0,043} = 14,95;$$

$$t_2 = \frac{|b_2|}{S} = \frac{0,7}{0,043} = 16,1;\ t_{12} = \frac{|b_{12}|}{S} = \frac{0,05}{0,043} = 1,15.$$

Критичне значення розподілу Стьюдента знаходимо з додатку 1 за рівнем значущості α=0.05 та ступенями свободи $N \cdot (m-1) = 4 \cdot 3 = 12$:

$$t_{кр} = 2,18.$$

Порівнюючи розрахункові значення з критичним, бачимо, що

$$t_0 > t_{кр};\ t_1 > t_{кр};\ t_2 > t_{кр};\ t_{12} < t_{кр}.$$

Робимо висновок, що коефіцієнт b_{12} рівняння регресії є статистично незначущим, а значить, вважаємо, що $b_{12}=0$. Рівняння регресії набуває вигляду

$$y = 3,4 + 0,65X_1 + 0,7X_2.$$

Для перевірки адекватності отриманої моделі реальному технологічному процесу розрахуємо дисперсію адекватності

$$D_{ад} = \frac{1}{N-N_1}\sum_{i=1}^{N}(\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2,$$

де N – кількість дослідів, N_1 – кількість значущих коефіцієнтів рівняння регресії, $\bar{y}_i$ − середні експериментальні значення досліджуваного параметра, $\hat{y}_i$− значення досліджуваного параметра, розраховані за рівнянням регресії. Маємо:

i	$\bar{y}_i$	$\hat{y}_i$
1	2.1	2.05
2	3.3	3.35
3	3.4	3.45
4	4.8	4.75

$$D_{ад} = \frac{1}{4-3}[(2{,}1-2{,}05)^2 + (3{,}3-3{,}35)^2 + (3{,}4-3{,}45)^2 + (4{,}8-4{,}75)^2] = 0{,}01.$$

Для оцінки дисперсії адекватності скористаємось критерієм Фішера. Розрахункове значення критерію знайдемо за формулою:

$$F = \frac{max(D_в, D_{\text{ад}})}{min(D_в, D_{\text{ад}})},$$

$$F = \frac{max(0{,}03; 0{,}01)}{min(0{,}03; 0{,}01)} = \frac{0{,}03}{0{,}01} = 3.$$

Критичне значення знаходимо за таблицею критичних точок розподілу Фішера (додаток 2)

$$F_{\text{кр}} = F(\alpha; k_1; k_2),$$

де α=0.05 − рівень значущості, $k_1=N\cdot(m-1)=4\cdot3=12$ − число ступенів свободи більшої дисперсії (дисперсії відтворюваності), $k_2=N-N_1=4-3=1$ − число ступенів свободи меншої дисперсії (дисперсії адекватності). Маємо $F_{\text{кр}} = F(0{,}05; 12; 1) = 243{,}9$. Оскільки $F < F_{\text{кр}}$, з довірчою імовірністю $p=1-\alpha=0.95$ вважаємо, що отримане рівняння лінійної регресії $y=3.4+0.65\cdot X_1+0.7\cdot X_2$ адекватно описує технологічний процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв. Навчальний посібник: – Х.: ХДУХТ, 2008 – 148 с. іл. – 23; табл. – 11;. Бібліографія: 6 назв.

2. Огірко О. І., Галайко Н. В. Теорія ймовірностей та математична статистика: навчальний посібник. – Львів: ЛьвДУВС, 2017. – 292 с.

3. Герич М.С., Синявська О.О. Математична статистика: навч. посібник. – Ужгород: ДВНЗ «УжНУ», 2021. – 146 с.

4. Бідюк П.І., Ткач Б.П., Харрінгтон К. Математична статистика. – К.: ДП «Вид. дім «Персонал», 2018. – 348 с.

5. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. – Київ: Центр учбової літератури, 2010. – 424 с.

ДОДАТКИ

Таблиця значень функції $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3988	3986	3989	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3952	3845	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3725	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0794	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,1	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001
4,2	0001	0001	0001	0001	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)	*x*	Φ(*x*)
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,01	0,4778	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,02	0,4783	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,03	0,4788	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,04	0,4793	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,05	0,4798	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,06	0,4803	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,07	0,4808	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,08	0,4812	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,09	0,4817	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,10	0,4821	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,11	0,4826	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,12	0,4830	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,13	0,4834	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,14	0,4838	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,15	0,4842	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,16	0,4846	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,17	0,4850	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,19	0,4857	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,20	0,4861	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,21	0,4864	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3888	1,72	0,4573	2,22	0,4868	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,23	0,4871	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,74	0,2704	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,24	0,4875	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,25	0,4878	3,00	0,4987
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,26	0,4881	3,05	0,4989
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,27	0,4884	3,10	0,49903
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,28	0,4887	3,15	0,49918
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,29	0,4890	3,20	0,49931
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,30	0,4893	3,25	0,49942
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,31	0,4896	3,30	0,49952
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,35	0,49960
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,33	0,4901	3,40	0,49966
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,50	0,49977
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,35	0,4906	3,60	0,49984
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,36	0,4909	3,70	0,49989
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,37	0,4911	3,80	0,499928
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,38	0,4913	3,90	0,499952
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,39	0,4916	4,00	0,499968
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,40	0,4918	4,20	0,499987
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,41	0,4920	4,40	0,4999946
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,42	0,4922	4,60	0,4999979
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,43	0,4925	4,80	0,4999992
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,44	0,4927	5,00	0,4999997
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,45	0,4929		
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,46	0,4931		
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,47	0,4932		
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,48	0,4934		
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,49	0,4936		

Таблиця значень функції Пуассона $P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,9048	8187	7408	6703	6065	5488	4966	4493	4066	3679
1	0905	1637	2222	2681	3033	3293	3476	3595	3659	3679
2	0045	0164	0333	0536	0758	0988	1217	1438	1647	1839
3	0002	0011	0033	0072	0126	0198	0284	0383	0494	0613
4	0000	0001	0003	0007	0016	0030	0050	0077	0111	0153
5	0000	0000	0000	0001	0002	0004	0007	0012	0020	0031
6	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0002	0003	0005

m \ λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
0	0,3329	3012	2725	2466	2231	2019	1827	1653	1496	1353
1	3662	3614	3543	3452	3347	3230	3106	2975	2842	2707
2	2014	2169	2303	2417	2510	2584	2640	2678	2700	2707
3	0738	0867	0998	1128	1255	1378	1496	1607	1710	1804
4	0203	0260	0324	0395	0471	0551	0636	0723	0812	0902
5	0045	0062	0084	0111	0141	0176	0216	0260	0309	0361
6	0008	0012	0018	0026	0035	0047	0061	0078	0098	0120
7	0001	0002	0003	0005	0008	0011	0015	0020	0027	0034
8	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0003	0005	0006	0009
9	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002

m \ λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
0	0,1225	1108	1003	0907	0821	0743	0672	0608	0550	0498
1	2572	2438	2306	2177	2052	1931	1815	1703	1596	1494
2	2700	2681	2652	2613	2565	2510	2450	2384	2314	2240
3	1890	1966	2033	2090	2138	2176	2205	2225	2237	2240
4	0992	1082	1169	1254	1336	1414	1488	1557	1622	1680
5	0417	0476	0538	0602	0668	0735	0804	0872	0940	1008
6	0146	0174	0206	0241	0278	0319	0362	0407	0455	0504
7	0044	0055	0068	0083	0099	0118	0139	0163	0188	0216
8	0011	0015	0019	0025	0031	0038	0047	0057	0068	0081
9	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0022	0027
10	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008
11	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0001	0001	0002	0002

m \ λ	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	9	10
0	0,0498	0302	0183	0111	0067	0025	0009	0003	0001	0000
1	1494	1057	0733	0500	0337	0149	0064	0027	0011	0005
2	2240	1850	1465	1125	0842	0446	0223	0107	0050	0023
3	2240	2158	1954	1687	1404	0892	0521	0286	0150	0076
4	1680	1888	1954	1898	1755	1339	0912	0573	0337	0189
5	1008	1322	1563	1708	1755	1606	1277	0916	0607	0378
6	0504	0771	1042	1281	1462	1606	1490	1221	0911	0631
7	0216	0385	0595	0824	1044	1377	1490	1396	1171	0901
8	0081	0169	0298	0463	0653	1033	1304	1396	1318	1126
9	0027	0066	0132	0232	0363	0688	1014	1241	1318	1251
10	0008	0023	0053	0104	0181	0413	0710	0993	1186	1251
11	0002	0007	0019	0043	0082	0225	0452	0722	0970	1137
12	0001	0002	0006	0016	0034	0113	0263	0481	0728	0948
13	0000	0001	0002	0006	0013	0052	0142	0296	0504	0729
14	0000	0000	0001	0002	0005	0022	0071	0169	0324	0521
15	0000	0000	0000	0001	0002	0009	0033	0090	0194	0347
16	0000	0000	0000	0000	0000	0003	0014	0045	0109	0217
17	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0006	0021	0058	0128
18	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0009	0029	0071
19	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004	0014	0037
20	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0002	0006	0019
21	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0003	0009
22	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0001	0004

Таблиця значень функції $t_\alpha = t(\alpha; n)$

n \ α	**0,95**	**0,99**	**0,999**	n \ α	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	2,78	4,60	8,61	**20**	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	**25**	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	**30**	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	**35**	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5.04	**40**	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	**45**	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	**50**	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	**60**	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	**70**	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	**80**	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	**90**	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	**100**	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	**120**	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця значень функції $q = q(\alpha; n)$

n \ α	**0,95**	**0,99**	**0,999**	n \ α	**0,95**	**0,99**	**0,999**
5	1,37	2,67	5,64	**20**	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	**25**	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	**30**	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	**35**	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	**40**	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	**45**	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	**50**	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	**60**	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	**70**	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	**80**	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	**90**	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	**100**	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	**150**	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	**200**	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	**250**	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу Стьюдента

Кількість ступенів вільності	Рівень значущості α (двостороння критична область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,58
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	1021	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	249	2,79	3,45	3,73
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	202	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область)					

Критичні точки розподілу χ^2

Кількість ступенів вільності k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63	5,02	3,84	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,21	7,38	5,99	0,103	0,051	0,020
3	11,34	9,35	7,81	0,352	0,216	0,115
4	13,28	11,14	9,49	0,711	0,484	0,297
5	15,09	12,83	11,07	1,15	0,831	0,554
6	16,81	14,45	12,59	1,64	1,24	0,872
7	18,48	16,01	14,07	2,17	1,69	1,24
8	20,09	17,53	15,51	2,73	2,18	1,65
9	21,67	19,02	16,92	3,33	2,70	2,09
10	23,21	20,48	18,31	3,94	3,25	2,56
11	24,73	21,92	19,68	4,57	3,82	3,05
12	26,22	23,34	21,03	5,23	4,40	3,57
13	27,69	24,74	22,36	5,89	5,01	4,11
14	29,14	26,12	23,68	6,57	5,63	4,66
15	30,58	27,49	25,00	7,26	6,26	5,23
16	32,00	28,85	26,30	7,96	6,91	5,81
17	33,41	30,19	27,59	8,67	7,56	6,41
18	34,81	31,53	28,87	9,39	8,23	7,01
19	36,19	32,85	30,14	10,12	8,91	7,63
20	37,57	34,17	31,41	10,85	9,59	8,26
21	38,93	35,48	32,67	11,59	10,28	8,90
22	40,29	36,78	33,92	12,34	10,98	9,54
23	41,64	38,08	35,17	13,09	11,69	10,20
24	42,98	39,36	36,42	13,85	12,40	10,86
25	44,31	40,65	37,65	14,61	13,12	11,52
26	45,64	41,92	38,89	15,38	13,84	12,20
27	46,96	43,19	40,11	16,15	14,57	12,88
28	48,28	44,46	41,34	16,93	15,31	13,56
29	49,59	45,72	42,56	17,71	16,05	14,26
30	50,89	46,98	43,77	18,49	16,79	14,95

Критичні точки розподілу *F* Фішера–Снедекора

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5404	5624	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6107
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31	3,24	3,17
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21	3,14	3,07
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06	2,99	2,93
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00	2,93	2,87
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
31	7,53	5,36	4,48	3,99	3,67	3,45	3,28	3,15	3,04	2,96	2,88	2,82
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93	2,86	2,80
33	7,47	5,31	4,44	3,95	3,63	3,41	3,24	3,11	3,00	2,91	2,84	2,78
34	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09	2,98	2,89	2,82	2,76
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74
36	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05	2,95	2,86	2,79	2,72
37	7,37	5,23	4,36	3,87	3,56	3,33	3,17	3,04	2,93	2,84	2,77	2,71
38	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02	2,92	2,83	2,75	2,69
39	7,33	5,19	4,33	3,84	3,53	3,30	3,14	3,01	2,90	2,81	2,74	2,68
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
41	7,30	5,16	4,30	3,81	3,50	3,28	3,11	2,98	2,87	2,79	2,71	2,65

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97	2,86	2,78	2,70	2,64
43	7,26	5,14	4,27	3,79	3,48	3,25	3,09	2,96	2,85	2,76	2,69	2,63
44	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95	2,84	2,75	2,68	2,62
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61
46	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93	2,82	2,73	2,66	2,60
47	7,21	5,09	4,23	3,75	3,43	3,21	3,05	2,92	2,81	2,72	2,65	2,59
48	7,19	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91	2,80	2,71	2,64	2,58
49	7,18	5,07	4,21	3,73	3,42	3,19	3,03	2,90	2,79	2,71	2,63	2,57
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56
55	7,12	5,01	4,16	3,68	3,37	3,15	2,98	2,85	2,75	2,66	2,59	2,53
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
65	7,04	4,95	4,10	3,62	3,31	3,09	2,93	2,80	2,69	2,61	3,53	2,47
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45
75	6,99	4,90	4,05	3,58	3,27	3,05	2,89	2,76	2,65	2,57	2,49	2,43
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42
85	6,94	4,86	4,02	3,55	3,24	3,02	2,86	2,73	2,62	2,54	2,46	2,40
90	6,93	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,84	2,72	2,61	2,52	2,45	2,39
95	6,91	4,84	3,99	3,52	3,22	3,00	2,83	2,70	2,60	2,51	2,44	2,38
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,79	2,66	2.55	2,47	2,39	2,33
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44	2,37	2,31
175	6,78	4,73	3,90	3,43	3,12	2,91	2,74	2,61	2,51	2,42	2,35	2,29
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,70	2,57	2,47	2,38	2,31	2,24
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,68	2,56	245	2,37	2,29	2,23
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,68	2,55	2,44	2,36	2,28	2,22
700	6,67	4,64	3,81	3,35	3,04	2,83	2,66	2,54	2,43	2,35	2,27	2,21
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,66	2,53	2,43	2,34	2,27	2.20
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	6143	6170	6209	6234	6260	6286	6302	6324	6334	6350	6360	6366
2	99,43	99,44	99,45	99,46	99,47	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50	99,50
3	26,92	26,83	26,69	26,60	26,50	26,41	26,35	26,28	26,24	26,18	26,15	26,13
4	14,25	14,15	14,02	13,93	13,84	13,75	13,69	13,61	13,58	13,52	13,49	13,46
5	9,77	9,68	9,55	9,47	9,38	9,24	9,29	9,17	9,13	9,08	9,04	9,02
6	7,60	7,52	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,02	6,99	6,93	6,90	6,88
7	6,36	6,28	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,79	5,75	5,70	5,67	5,65
8	5,56	5,48	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,00	4,96	4,91	4,88	4,86
9	5,01	4,92	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,45	4,41	4,36	4,33	4,31
10	4,60	4,52	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,05	4,01	3,96	3,93	3,91
11	4,29	4,21	4,10	4,02	3,94	3,86	3,81	3,74	3,71	3,66	3,62	3,60
12	4,05	3,97	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,50	3,47	3,41	3,38	3,36
13	3,86	3,78	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,31	3,27	3,22	3,19	3,17
14	3,70	3,62	3,51	3,43	3,35	3,27	3,22	3,14	3,11	3,06	3,03	3,00
15	3,56	3,49	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,01	2,98	2,92	2,89	2,87
16	3,45	3,37	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,90	2,86	2,81	2,78	2,75
17	3,35	3,27	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,80	2,76	2,71	2,68	2,65
18	3,27	3,19	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,71	2,68	2,62	2,59	2,57
19	3,19	3,12	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,64	2,60	2,55	2,51	2,49
20	3,13	3,05	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,57	2,54	2,48	2,44	2,42
21	3,07	2,99	2,88	2,80	2,72	2,64	2,58	2,51	2,48	2,42	2,38	2,36
22	3,02	2,94	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,46	2,42	2,36	2,33	2,31
23	2,97	2,89	2,78	2,70	2,62	2,54	2,48	2,41	2,37	2,32	2,28	2,26
24	2,93	2,85	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,37	2,33	2,27	2,24	2,21
25	2,89	2,81	2,70	2,62	2,54	2,45	2,40	2,33	2,29	2,23	2,19	2,17
26	2,86	2,78	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,29	2,25	2,19	2,16	2,13
27	2,82	2,75	2,63	2,55	2,47	2,38	2,33	2,26	2,22	2,16	2,12	2,10
28	2,79	2,72	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,23	2,19	2,13	2,09	2,06
29	2,77	2,69	2,57	2,49	2,41	2,33	2,27	2,20	2,16	2,10	2,06	2,03
30	2,74	2,66	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,17	2,13	2,07	2,03	2,01
31	2,72	2,64	2,52	2,45	2,36	2,27	2,22	2,14	2,11	2,04	2,01	1,98
32	2,70	2,62	2,50	2,42	2,34	2,25	2,20	2,12	2,08	2,02	1,98	1,96
33	2,68	2,60	2,48	2,40	2,32	2,23	2,18	2,10	2,06	2,00	1,96	1,93
34	2,66	2,58	2,46	2,38	2,30	2,21	2,16	2,08	2,04	1,98	1,94	1,91
35	2,64	2,56	2,44	2,36	2,28	2,19	2,14	2,06	2,02	1,96	1,92	1,89
36	2,62	2,54	2,43	2,35	2,26	2,18	2,12	2,04	2,00	1,94	1,90	1,87
37	2,61	2,53	2,41	2,33	2,25	2,16	2,10	2,03	1,98	1,92	1,88	1,85
38	2,59	2,51	2,40	2,32	2,23	2,14	2,09	2,01	1,97	1,90	1,86	1,84
39	2,58	2,50	2,38	2,30	2,22	2,13	2,07	1,99	1,95	1,89	1,85	1,82
40	2,56	2,48	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	1,98	1,94	1,87	1,83	1,80
41	2,55	2,47	2,36	2,28	2,19	2,10	2,04	1,97	1,92	1,86	1,82	1,79

Рівень значущості α = 0,01												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
42	2,54	2,46	2,34	2,26	2,18	2,09	2,03	1,95	1,91	1,85	1,80	1,78
43	2,53	2,45	2,33	2,25	2,17	2,08	2,02	1,94	1,90	1,83	1,79	1,76
44	2,52	2,44	2,32	2,24	2,15	2,07	2,01	1,93	1,89	1,82	1,78	1,75
45	2,51	2,43	2,31	2,23	2,14	2,05	2,00	1,92	1,88	1,81	1,77	1,74
46	2,50	2,42	2,30	2,22	2,13	2,04	1,99	1,91	1,86	1,80	1,76	1,73
47	2,49	2,41	2,29	2,21	2,12	2,03	1,98	1,90	1,85	1,79	1,74	1,71
48	2,48	2,40	2,28	2,20	2,12	2,02	1,97	1,89	1,84	1,78	1,73	1,70
49	2,47	2,39	2,27	2,19	2,11	2,02	1,96	1,88	1,83	1,77	1,72	1,69
50	2,46	2,38	2,27	2,18	2,10	2,01	1,95	1,87	1,82	1,76	1,71	1,68
55	2,42	2,34	2,23	2,15	2,06	1,97	1,91	1,83	1,78	1,71	1,67	1,64
60	2,39	2,31	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,79	1,75	1,68	1,63	1,60
65	2,37	2,29	2,17	2,09	2,00	1,91	1,85	1,77	1,72	1,65	1,60	1,57
70	2,35	2,27	2,15	2,07	1,98	1,89	1,83	1,74	1,70	1,62	1,57	1,54
75	2,33	2,25	2,13	2,05	1,96	1,87	1,81	1,72	1,67	1,60	1,55	1,52
80	2,31	2,23	2,12	2,03	1,94	1,85	1,79	1,70	1,65	1,58	1,53	1,49
85	2,30	2,22	2,10	2,02	1,93	1,83	1,77	7,69	1,64	1,56	1,51	1,47
90	2,29	2,21	2,09	2,00	1,92	1,82	1,76	1,67	1,62	1,55	1,49	1,46
95	2,28	2,20	2,08	1,99	1,90	1,81	1,75	1,66	1,61	1,53	1,48	1,44
100	2,27	2,19	2,07	1,98	1,89	1,80	1,74	1,65	1,60	1,52	1,47	1,43
125	2,23	2,15	2,03	1,94	1,85	1,76	1,69	1,60	1,55	1,47	1,41	1,37
150	2,20	2,12	2,00	1,92	1,83	1,73	1,66	1,57	1,52	1,43	1,38	1,33
175	2,19	2,10	1,98	1,90	1,81	1,71	1,64	1,55	1,50	1,41	1,35	1,30
200	2,17	2,09	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,53	1,48	1,39	1,33	1,28
300	2,14	2,06	1,94	1,85	1,76	1,66	1,59	1,50	1,44	1,35	1,28	1,22
400	2,13	2,05	1,92	1,84	1,75	1,64	1,58	1,48	1,42	1,32	1,25	1,19
500	2,12	2,04	1,92	1,83	1,74	1,63	1,57	1,47	1,41	1,31	1,23	1,16
600	2,11	2,03	1,91	1,82	1,73	1,63	1,56	1,46	1,40	1,30	1,22	1,15
700	2,11	2,03	1,90	1,82	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,21	1,14
800	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,62	1,55	1,45	1,39	1,29	1,20	1,13
1000	2,10	2,02	1,90	1,81	1,72	1,61	1,54	1,44	1,38	1,28	1,19	1,11
∞	2,08	2,00	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,42	1,36	1,25	1,15	1,00

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
18	4,41	3,55	316	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88
85	3,95	3,10	2,71	2,48	2,32	2,21	2,12	2,05	1,99	1,94	1,90	1,87
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,86
95	3,94	3,09	2,70	2,47	2,31	2,20	2,11	2,04	1,98	1,93	1,89	1,86
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,96	1,91	1,87	1,83
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,85	1,82
175	3,90	3,05	2,66	2,42	2,27	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,84	1,81
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,82	1,78
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,77
600	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	2,02	1,95	1,90	1,85	1,80	1,77
700	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,77
800	3,85	3,01	2,62	2,38	2,23	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,80	1,76
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Рівень значущості α = 0,05												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
1	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	254
2	19,42	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,48	19,49	19,49	19,49	19,50
3	8,71	8,69	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,56	8,55	8,54	8,53	8,53
4	5,87	5,84	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,68	5,66	5,65	5,64	5,63
5	4,64	4,60	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,42	4,41	4,39	4,37	4,37
6	3,96	3,92	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,73	3,71	3,69	3,68	3,67
7	3,53	3,49	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,29	3,27	3,25	3,24	3,23
8	3,24	3,20	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	2,99	2,97	2,95	2,94	2,93
9	3,03	2,99	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,77	2,76	2,73	2,72	2,71
10	2,86	2,83	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,60	2,59	2,56	2,55	2,54
11	2,74	2,70	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,47	2,46	2,43	2,42	2,40
12	2,64	2,60	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,37	2,35	2,32	2,31	2,30
13	2,55	2,51	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,22	2,21
14	2,48	2,44	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,21	2,19	2,16	2,14	2,13
15	2,42	2,38	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,14	2,12	2,10	2,08	2,07
16	2,37	2,33	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	2,04	2,02	2,01
17	2,33	2,29	2,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,04	2,02	1,99	1,97	1,96
18	2,29	2,25	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,00	1,98	1,95	1,93	1,92
19	2,26	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,96	1,94	1,91	1,89	1,88
20	2,22	2,18	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,93	1,91	1,88	1,86	1,84
21	2,20	2,16	2,10	2,05	2,01	1,96	1,94	1,90	1,88	1,84	1,83	1,81
22	2,17	2,13	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,87	1,85	1,82	1,80	1,78
23	2,15	2,11	2,05	2,01	1,96	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,76
24	2,13	2,09	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,82	1,80	1,77	1,75	1,73
25	2,11	2,07	2,01	1,96	1,92	1,87	1,84	1,80	1,78	1,75	1,73	1,71
26	2,09	2,05	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,78	1,76	1,73	1,71	1,69
27	2,08	2,04	1,97	1,93	1,88	1,84	1,81	1,76	1,74	1,71	1,69	1,67
28	2,06	2,02	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,75	1,73	1,69	1,67	1,65
29	2,05	2,01	1,94	1,90	1,85	1,81	1,77	1,73	1,71	1,67	1,65	1,64
30	2,04	1,99	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,72	1,70	1,66	1,64	1,62
31	2,03	1,98	1,92	1,88	1,83	1,78	1,75	1,70	1,68	1,65	1,62	1,61
32	2,01	1,97	1,91	1,86	1,82	1,77	1,74	1,69	1,67	1,63	1,61	1,59
33	2,00	1,96	1,90	1,85	1,81	1,76	1,72	1,68	1,66	1,62	1,60	1,58
34	1,99	1,95	1,89	1,84	1,80	1,75	1,71	1,67	1,65	1,61	1,59	1,57
35	1,99	1,94	1,88	1,83	1,79	1,74	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57	1,56
36	1,98	1,93	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,55
37	1,97	1,93	1,86	1,82	1,77	1,72	1,68	1,64	1,62	1,58	1,55	1,54
38	1,96	1,92	1,85	1,81	1,76	1,71	1,68	1,63	1,61	1,57	1,54	1,53
39	1,95	1,91	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,62	1,60	1,56	1,53	1,52
40	1,95	1,90	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,61	1,59	1,55	1,53	1,51
41	1,94	1,90	1,83	1,79	1,74	1,69	1,65	1,61	1,58	1,54	1,52	1,50

Рівень значущості $\alpha = 0{,}05$												
k_2 \ k_1	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	∞
42	1,94	1,89	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,60	1,57	1,53	1,51	1,49
43	1,93	1,89	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,59	1,57	1,53	1,50	1,48
44	1,92	1,88	1,81	1,77	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,52	1,49	1,48
45	1,92	1,87	1,81	1,76	1,71	1,66	1,63	1,58	1,55	1,51	1,49	1,47
46	1,91	1,87	1,80	1,76	1,71	1,65	1,62	1,57	1,55	1,51	1,48	1,46
47	1,91	1,86	1,80	1,75	1,70	1,65	1,61	1,57	1,54	1,50	1,47	1,46
48	1,90	1,86	1,79	1,75	1,70	1,64	1,61	1,56	1,54	1,49	1,47	1,45
49	1,90	1,85	1,79	1,74	1,69	1,64	1,60	1,56	1,53	1,49	1,46	1,44
50	1,89	1,85	1,78	1,74	1,69	1,63	1,60	1,55	1,52	1,48	1,46	1,44
55	1,88	1,83	1,76	1,72	1,67	1,61	1,58	1,53	1,50	1,46	1,43	1,41
60	1,86	1,82	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,51	1,48	1,44	1,41	1,39
65	1,85	1,80	1,73	1,69	1,63	1,58	1,54	1,49	1,46	1,42	1,39	1,37
70	1,84	1,79	1,72	1,67	1,62	1,57	1,53	1,48	1,45	1,40	1,37	1,35
75	1,83	1,78	1,71	1,66	1,61	1,55	1,52	1,47	1,44	1,39	1,36	1,34
80	1,82	1,77	1,70	1,65	1,60	1,54	1,51	1,45	1,43	1,38	1,35	1,32
85	1,81	1,76	1,70	1,65	1,59	1,54	1,50	1,45	1,42	1,37	1,34	1,31
90	1,80	1,75	1,68	1,64	1,59	1,53	1,49	1,44	1,41	1,36	1,33	1,30
95	1,80	1,75	1,68	1,63	1,58	1,52	1,48	1,43	1,40	1,35	1,32	1,29
100	1,79	1,75	1,68	1,63	1,57	1,52	1,48	1,42	1,39	1,34	1,31	1,28
125	1,77	1,73	1,66	1,60	1,55	1,49	1,45	1,40	1,36	1,31	1,27	1,25
150	1,76	1,71	1,64	1,59	1,54	1,48	1,4	1,38	1,34	1,29	1,25	1,22
175	1,75	1,70	1,63	1,58	1,52	1,46	1,42	1,36	1,33	1,27	1,23	1,20
200	1,74	1,69	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,35	1,32	1,26	1,22	1,19
300	1,72	1,68	1,61	1,5	1,50	1,43	1,39	1,33	1,30	1,23	1,19	1,15
400	1,72	1,67	1,60	1,54	1,49	1,42	1,38	1,32	1,28	1,22	1,17	1,13
500	1,71	1,6	1,59	1,54	1,48	1,42	1,38	1,31	1,28	1,21	1,16	1,11
600	1,71	1,6	1,59	1,54	1,48	1,41	1,37	1,31	1,27	1,20	1,15	1,10
700	1,71	1,66	1,59	1,53	1,48	1,41	1,37	1,30	1,27	1,20	1,15	1,09
800	1,70	1,6	1,58	1,53	1,47	1,41	1,37	1,30	1,26	1,20	1,14	1,09
1000	1,70	1,65	1,58	1,53	1,47	1,41	1,36	1,30	1,26	1,19	1,13	1,08
∞	1,69	1,64	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,28	1,24	1,17	1,11	1,00

Навчальне видання

ПАК Андрій Олегович

ПОТАПОВ Володимир Олексійович

ТОРЯНИК Дмитро Олександрович

СІНЯЄВА Ольга Володимирівна

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ В АГРОІНЖЕНЕРІЇ ТА МЕТОДИ ОБРОБКИ ДАНИХ

Конспект лекцій

В авторській редакції