Міністерство освіти і науки України
Харківський національний аграрний університет
ім. В.В. Докучаєва

Затверджено вченою радою
факультету менеджменту і економіки
(протокол № 3 від 27.10.2020 р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації
до практичних занять і самостійної роботи
для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої
освіти галузі знань 07 «Управління та адміністрування»
спеціальності 073 «Менеджмент»

Харків – 2020

Укладач:
канд. пед. наук, доцент кафедри фізики та вищої математики **О.А. Мандражи**.

Рецензенти:
О.О. Гуторова, доцент, канд. екон. наук, професор кафедри менеджменту і адміністрування ХНАУ ім. В. В. Докучаєва;
Л.В. Шелудько, доцент, канд. екон. наук, доцент кафедри прикладної економіки та міжнародних економічних відносин ХНАУ ім. В. В. Докучаєва.

ВСТУП

У сучасних умовах ефективне господарювання й управління виробничою діяльністю на будь-якому рівні в будь-якій галузі не можливі без використання сучасних методів планування й організації, основою яких є відповідний математичний апарат. Поєднання математичних методів, економічного й політичного аналізу відкриває нові можливості для науки управління та практики.

Безперечно, успіх у професійній або підприємницькій діяльності чималою мірою залежить від рівня розвитку культури економіко-математичних знань, яка складається не тільки з глибоких знань природничо-наукових теорій і соціально-економічних концептів, а, до того ж, із здатності відчувати математичні характеристики економічних явищ, класифікувати та узагальнювати властивості соціально-економічних об'єктів.

Математика – мова, якою останнім часом користується будь-яка природнича і більшість суспільних наук. Серед інших соціальних наук саме економіка більш за все застосовує математичні методи. Інтегрування економіки і математики безумовно збагачує економічну науку, озброює її інструментами розрахунків, прогнозів, оцінок, що у свою чергу відкриває нові галузі застосування до різноманітних економічних, фінансових й управлінських задач та стає базою для стратегічного управління.

У зв’язку з цим курс вищої математики займає особливе місце і лежить в основі математичної освіти. Введення в математику понять змінної величини, вектора, функції дозволяє перейти від розв̕язання окремих фізичних та геометричних задач до створення загальних методів розв̕язання цих задач.

Курс ,,Вища математика" для спеціальностей з управління є необхідною складовою частиною фахової підготовки спеціалістів і гарантує їм подальше використання знань і навичок в процесі вивчення інших дисциплін як математичного, так й управлінського профілю. А тому в умовах аграрного ЗВО курс вищої математики є одним з основних, визначальних як для всього процесу навчання, так і подальшої практичної діяльності спеціаліста. Він є необхідним для успішного засвоєння спеціальних дисциплін.

Програма вивчення обов’язкової навчальної дисципліни “Вища математика” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки молодших бакалаврів. Дисципліна викладається у першому семестрі першого курсу з використанням лекційних та практичних форм навчання та екзаменаційною формою контролю.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є загальні математичні властивості та закономірності й теоретичні засади імовірнісно-статистичного апарату.

1. Опис навчальної дисципліни

Найменування показників	Галузь знань, спеціальність, освітній рівень	Характеристика навчальної дисципліни
		денна форма навчання
Кількість кредитів – 3	Галузь знань 07 Управління та адміністрування	Обов'язкова
	Спеціальність 073 „ Менеджмент ” Освітньо-професійна програма „ Менеджмент ”	
Модулів – 2	Освітній рівень: початковий (короткий цикл)	**Рік підготовки:**
Змістових модулів – 2		1 -й
Індивідуальне завдання: розрахунково-графічне завдання за темами		**Семестр**
Загальна кількість годин - 90		1 -й
		Лекції
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 4 самостійної роботи студента - 5		10 год.
		Практичні, семінарські
		10 год.
		Самостійна робота
		70 год.
		Вид контролю: іспит

2. Мета та завдання дисципліни

Мета курсу: засвоєння здобувачами базових математичних знань; вироблення вміння розв'язувати задачі у професійній діяльності та навичок математичного дослідження прикладних задач; забезпечення відповідним понятійним та математичним апаратом, необхідним для значно глибшого та чіткішого розуміння багатьох економічних законів і співвідношень, які мають імовірнісний характер; розвинення у здобувачів мислення; формування навичок використання повного об'єму інформації та комунікативних засобів для визначення джерел інформації.

Викладання вищої математики має наступні завдання:

- оволодіння здобувачами основами математичного апарату;
- опрацювання та застосування статистичних даних для наукових та практичних висновків;
- розвиток мислення;
- вироблення навичок самостійного вивчення наукової літератури з математики та її застосування;
- на основі розуміння методології математичного моделювання економічних процесів самостійно розв'язувати професійно-орієнтовані задачі та ситуації, давати економічну інтерпретацію одержаним результатам.

Для вивчення вищої математики необхідні знання математики в обсязі середньої школи.

"Вища математика" належить до циклу фундаментальних дисциплін і забезпечує вивчення загальнонаукових та спеціальних дисциплін, адже сучасний фахівець галузі економіки та управління повинен вільно аналізувати економічні процеси та вміти приймати оптимальні рішення, використовуючи для цього математичний апарат, моделі та методи.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач повинен знати:

1. Поняття матриці, оберненої матриці, дії над матрицями;
2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь, теорему Кронекера-Капеллі;
3. Основні поняття векторної алгебри: означення вектора, розклад вектора за базисом, означення та геометричний зміст скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;
4. Різні види рівнянь площини та прямої в просторі;
5. Різні види рівнянь прямої на площині;
6. Графіки елементарних функцій та їхні властивості, поняття про границю функції, теореми про границі, поняття неперервності функції, класифікацію точок розриву;
7. Визначення похідної, таблицю похідних, геометричний та економічний зміст похідної, основні теореми про похідні;
8. Поняття первісної, невизначеного інтеграла, таблицю інтегралів, основні методи інтегрування, поняття визначеного інтеграла, формулу Ньютона-Лейбніца, поняття невласних інтегралів.
9. Аксіоматику теорії ймовірностей. Класичне, геометричне і статистичне визначення ймовірностей. Властивості ймовірностей.
10. Теореми додавання і множення ймовірностей. Складні та залежні події. Умовну ймовірність. Формулу повної ймовірності. Формулу Байєса.
11. Незалежні події. Попарну незалежність подій, незалежність в сукупності.

12.Повторні незалежні випробування. Формулу Бернуллі. Асимптотичні формули в схемі Бернуллі.

13.Означення випадкової величини. Функцію розподілу (інтегральну функцію) та функцію щільності (диференціальну функцію) випадкової величини.

14.Дискретні і неперервні випадкові величини та їхні числові характеристики.

15.Основні поняття математичної статистики.

На підставі знань з навчальної дисципліни майбутній фахівець повинен уміти:

1. Розв'язувати системи лінійних рівнянь, користуватись формулами Крамера, знаходити ранг матриці, обернену матрицю;

2. Обчислювати скалярний, векторний, мішаний добуток векторів, довжину вектора, кут між векторами, застосовувати формули векторної алгебри для розв'язування задач на пряму та площину;

3. Будувати графіки функцій, знаходити границі функцій;

4. Знаходити похідну складної функції;

5. Знаходити невизначений інтеграл за допомогою таблиці, методів заміни змінних, підстановки та інтегрування частинами;

6. Обчислювати визначені інтеграли;

7. Розв’язувати задачі, використовуючи класичне і статистичне визначення ймовірності.

8. Розв’язувати задачі, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, умовні ймовірності, формулу повної ймовірності, формулу Байєса.

9. Перевіряти події на незалежність, незалежність в сукупності, знаходити ймовірності незалежних подій.

10. Користуючись формулою Бернуллі й асимптотичними формулами в схемі Бернуллі знаходити ймовірності подій в схемі незалежних випробувань.

11. Знаходити числові характеристики випадкових величин, розподіл функції випадкової величини.

12. Досліджувати закони розподілів випадкових величин.

13. Встановлювати кореляційну залежність між величинами.

Наслідком вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» має стати розвиток й удосконалення наступних результатів навчання (компетентностей):

інтегральна компетентність;

серед загальних компетентностей

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
- Здатність застосовувати знання у практичних ситуаціях.

- Здатність спілкуватися державною мовою як усно, так і письмово.
- Навички використання інформаційних і комунікаційних технологій.
- Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.
- Здатність до адаптації та дій в новій ситуації.
- Здатність бути критичним і самокритичним.
- Здатність генерувати нові ідеї (креативність) та приймати обґрунтовані рішення.
- Здатність вчитися і оволодівати сучасними знаннями.
- Здатність до проведення досліджень на відповідному рівні;

серед спеціальних (фахових, предметних) компетентностей

- Здатність застосовувати математичні методи та моделі для вирішення управлінських задач.

Матеріал для самостійного опанування:

Диференціальні рівняння першого та другого порядку.

Дослідження збіжності рядів.

Частинні похідні функцій декількох змінних.

Екстремуми функцій декількох змінних.

3. Програма навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Вища математика

Тема 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

1-2. Матриці. Основні поняття про матриці. Дії з матрицями. Визначники другого, третього та *n*-ого порядків. Мінори та алгебраїчні доповнення. Розклад визначника за елементами будь-якого ряду. Ранг матриці. Обернена матриця та її властивості.

3. Системи лінійних рівнянь. Формули Крамера. Матричний метод та метод Гауса розв'язування систем лінійних рівнянь.
4. Геометричні вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів.
5. Лінійний простір. Лінійна залежність і лінійна незалежність векторів у лінійному просторі. Базис. Розклад вектора за базисом.
6. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

Тема 2. Аналітична геометрія

7. Системи координат на прямій, площині, у просторі. Основні задачі на метод координат: відстань між двома точками, поділ відрізка у даному відношенні. Рівняння лінії на площині. Різні види рівнянь прямої на площині. Кут між двома прямими. Системи лінійних нерівностей.
8. Площина та пряма в просторі. Рівняння площини. Рівняння прямої в просторі. Кут між прямими, площинами, прямою і площиною. Умови паралельності та перпендикулярності.
9. Криві другого порядку. Коло, еліпс, гіпербола, парабола.

Тема 3. Вступ до математичного аналізу

10. Сталі та змінні величини. Основні відомості про функцію: визначення

функції, область визначення, способи задання, графічне зображення, елементарні функції, класифікація.

11. Числові послідовності, границя числової послідовності. Нескінченно малі та нескінченно великі величини.
12. Границі функції. Границя функції у точці, на нескінченності; односторонні границі функції. Основні теореми про границі. Визначні границі. Порівняння нескінченно малих величин.
13. Неперервність функції. Точки розриву функції, їх класифікація. Основні теореми про неперервні на відрізку функції.

Тема 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

14. Похідна функції. Задачі, що приводять до поняття похідної. Економічний, механічний та геометричний зміст похідної. Зв'язок неперервності та диференційованості функції. Таблиця похідних та правила диференціювання. Похідні вищих порядків.
15. Диференціал функції. Геометричний та економічний зміст диференціалу функції. Застосування диференціалу при наближених обчисленнях.
16. Основні теореми про диференційовані функції. Правило Лопіталя, розкриття невизначеностей.
17. Зростання та спадання функції, необхідна та достатня умови монотонності. Екстремум функції, необхідна та достатня умови існування екстремуму. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
18. Опуклість, угнутість кривої, точки перегину. Необхідна і достатня ознаки опуклості та угнутості кривої. Необхідна та достатня умови існування точки перегину кривої.
19. Асимптоти кривої. Повне дослідження функції і побудова її графіка. Класичні екстремальні задачі.

Тема 5. Інтегральне числення функцій однієї змінної

20. Первісна, невизначений інтеграл, його властивості. Таблиця інтегралів.

21. Основні методи інтегрування: табличне інтегрування, заміна змінної, інтегрування підстановкою та частинами.
22. Інтегральна сума. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми. Формула Ньютона-Лейбніца. Геометричний зміст, властивості визначеного інтеграла.
23. Невласні інтеграли, їхні властивості. Застосування поняття визначеного інтеграла в економіці.

Змістовий модуль 2. Теорія імовірностей та основи математичної статистики

Тема 1. Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності

1. Множини та дії над ними. Теореми додавання і добутку. Елементи комбінаторики.
2. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей. Поняття випадкової події (випадкові події як підмножини у просторі елементарних подій), класифікація подій. Властивості ймовірності. Алгебра подій. Важливі моделі знаходження ймовірностей подій. Аксіоматична побудова теорії ймовірностей.

Тема 2. Важливі теореми теорії ймовірностей

3. Основні теореми теорії ймовірностей, їхня економічна інтерпретація.
4. Повна група подій, протилежні події.
5. Залежні події. Умовна ймовірність та її властивості. Теорема суми для сумісних подій.
6. Повна група подій. Формула повної імовірності. Байєсові формули ймовірності гіпотез.

Тема 3. Послідовність незалежних випробовувань за схемою Бернуллі

7. Повторні незалежні випробування. Формула Бернуллі. Поняття розподілу ймовірностей у схемі Бернуллі.
8. Локальна формула Муавра-Лапласа та інтегральна асимптотична формула Лапласа.
9. Асимптотична формула Пуассона.

Тема 4. Числові характеристики дискретної випадкової величини

10. Випадкові величини та їхня економічна інтерпретація.
11. Дискретна випадкова величина. Числові характеристики дискретних випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення. Мода та медіана.
12. Функція розподілу та її властивості.
13. Основні розподіли дискретних випадкових величин (рівномірний на скінченній множині, біноміальний, Пуассона та ін.).

Тема 5. Неперервна випадкова величина та її характеристики

14. Інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини, її властивості.
15. Диференціальна функція (щільність) розподілу, її властивості. Імовірнісний зміст диференціальної функції.
16. Математичне сподівання неперервної випадкової величини. Дисперсія, середнє квадратичне відхилення.
17. Початкові та центральні моменти, коефіцієнт асиметрії, ексцес.
18. Закони розподілу неперервних випадкових величин: рівномірний на відрізку, показниковий (експоненціальний), нормальний на площині та ін.
19. Імовірність потрапляння значень нормально розподіленої величини в заданий інтервал.

Тема 6. Основні поняття математичної статистики

20. Основні задачі математичної статистики.
21. Вибірковий метод. Варіаційний ряд.
22. Числові характеристики варіаційного ряду.
23. Полігон частот, гістограма.

Тема 7. Статистичні оцінки параметрів розподілу

24. Поняття та вимоги до статистичної оцінки.
25. Точкові оцінки параметрів розподілу.
26. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.

Тема 8. Елементи теорії кореляції

27. Функціональна, статистична та кореляційна залежності.
28. Кореляційна таблиця.
29. Коефіцієнт кореляції, його властивості.

Тема 9. Регресійний аналіз

30. Вибіркове рівняння регресії для не згрупованих даних.
31. Вибіркове рівняння регресії для згрупованих даних.

4. Теми лекцій

№ п/п	Теми лекцій	Кількість годин
Змістовий модуль 1. ***Вища математика***		
1.	Основи теорії матриць	0,2
2.	Елементи теорії визначників	0,3
3.	Застосування матриць при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Формули Крамера	0,2
4.	Елементи векторної алгебри	0,3
5.	Пряма на площині	0,5
6.	Площина та пряма в просторі	0,5
7.	Числові послідовності та їхні границі	0,5
8.	Границя функції та її неперервність	0,5
9.	Похідна функції	0,5
10.	Основні теореми про диференційовані функції. Диференціал функції	0,5
11.	Застосування похідної при дослідженні функцій. Асимптоти графіку функції. Загальна схема дослідження функцій	1
12.	Невизначений інтеграл	0,2
13.	Визначений інтеграл	0,4
14.	Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтеграла в економіці	0,4

	Змістовий модуль 2. ***Теорія імовірностей та основи математичної статистики***	
15.	Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності	0,5
16.	Важливі теореми теорії ймовірностей	0,5
17.	Послідовність незалежних випробовувань за схемою Бернуллі	0,5
18.	Числові характеристики дискретної випадкової величини	0,5
19.	Неперервна випадкова величина та її характеристики	0,5
20.	Основні поняття математичної статистики	0,5
21.	Статистичні оцінки параметрів розподілу	0,3
22.	Елементи теорії кореляції	0,4
23.	Регресійний аналіз	0,3
	Разом	10

5. Теми практичних занять

№ п/п	Тема	Кількість годин
Змістовий модуль 1 *Вища математика*		
1.	Основи теорії матриць. Елементи теорії визначників	0,2
2.	Застосування матриць при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Формули Крамера	0,3
3.	Елементи векторної алгебри.	0,5
4.	Пряма на площині. Площина та пряма в просторі	1
5.	Числові послідовності та їхні границі	0,5
6.	Границя функції та її неперервність	0,5
7.	Похідна функції	0,2
8.	Основні теореми про диференційовані функції. Диференціал функції	0,3
9.	Застосування похідної при дослідженні функцій. Асимптоти графіку функції. Загальна схема дослідження функцій	0,5
10.	Невизначений інтеграл	0,5
11.	Визначений інтеграл	0,5
12.	Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтеграла в економіці	1
Змістовий модуль 2 *Теорія імовірностей та основи математичної статистики*		
13.	Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності	0,5
14.	Важливі теореми теорії ймовірностей	0,5
15.	Послідовність незалежних випробовувань за схемою Бернуллі	0,5
16.	Числові характеристики дискретної випадкової величини	0,5
17.	Неперервна випадкова величина та її характеристики	0,5
18.	Основні поняття математичної статистики	0,5
19.	Статистичні оцінки параметрів розподілу	0,3
20.	Елементи теорії кореляції	0,4
21.	Регресійний аналіз	0,3
	Разом	10

6. Матеріали до практичних занять

1. *Матриці та дії над ними. Визначники квадратичних матриць*

У 1858 році А. Келі (А́ртур Ке́лі (англ. Arthur Cayley) — англійський математик) зайнявся систематичною побудовою чисел нової природи – *таблиць* (прямокутних, зокрема квадратних), що складаються з дійсних чисел (або навіть комплексних). Вони отримали назву ***матриць.*** Якщо в матриці m рядків і n стовпчиків, то говорять, що вона має розмірність $m \times n$. В окремому випадку, коли число рядків в матриці дорівнює числу стовпчиків, тобто $m = n$, отримаємо квадратну (квадратичну) матрицю n – го порядку. Тобто кількість її рядків (або стовпців) називають порядком матриці. Наприклад, таблиця $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ є матрицею розмірів 3×4. Вона має 3 рядки і 4 стовпчики. Для запису, матрицю зазвичай заключають у круглі дужки і позначають однією великою буквою (наприклад, A, M). Можемо записати

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання для здобувачів:

Запишіть, будь ласка, приклад матриці 5-го порядку.

Числа, з яких складається матриця, називаються її елементами. Для кожного елемента матриці можна визначити відповідні рядок і стовпчик, у яких він знаходиться. Так, у матриці A елемент 9 знаходиться у *2* рядочку і *3* стовпчику. У зв'язку з цим, коли записують довільну матрицю, її елементи позначають буквою з двома індексами, наприклад, a_{ij} (i визначає номер рядочка, j – номер стовпчика).

За аналогією з числами Келі увів для матриць однієї і тієї ж самої розмірності визначення рівності, правила додавання, віднімання, множення на число.

Завдання для здобувачів:

Які б ви ввели визначення для зазначених дій?

Дві матриці A та B з однаковими розмірами $m \times n$ вважаються рівними, коли їхні відповідні елементи рівні, тобто коли $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Матриці можна транспонувати, множити на число, додавати, множити на матрицю.

Транспонувати – це означає зробити рядки матриці стовпцями з тими ж номерами, а стовпці – рядками. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Щоб помножити матрицю на число, досить кожен елемент матриці помножити на це число.

Сума двох матриць є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць-доданків. З означення випливає, що додавати можна лише матриці однакових розмірів. Суму матриць A та B позначають $A+B$.

У той же спосіб визначають різницю $A-B$ двох матриць A та B.

Складніше визначити добуток матриць. Спочатку помножимо квадратичну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ на матрицю-стовпець $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Це виконується за правилом “множення рядка на стовпець”:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix}$$

(у результаті отримуємо матрицю-стовпець). Дану дію можна записати так: $A \cdot X = C$, де C – матриця, що записана у правій частині формули.

За допомогою множення матриць можна компактно записувати системи рівнянь. Так, систему

$\begin{cases} 2x + 6y = 17, \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$ можна записати у вигляді: $A \cdot X = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Саме можливість такого компактного запису системи рівнянь і продиктував вибір правила множення матриць: “рядок на стовпець”.

Завдання для здобувачів:

Наведіть власний приклад системи і запишіть її у вигляді добутку матриць.

А тепер добуток матриць запишіть як систему рівнянь.

Матриці використовують для компактного запису підсумків якогось турніру, результатів поставки (у яких-небудь одиницях) товару з кількох пунктів відправлення у кілька пунктів призначення, вартості перевезень цих товарів тощо. Тобто матриця є зручною як деяке інформаційне зведення.

Наведемо приклад застосування матриць.

Багатогалузеве підприємство потребує балансу між окремими галузями. Кожна галузь є, з одного боку, виробником одного визначеного набору видів продукції, а з іншого – споживачем іншого набору видів продукції. Виникає складне завдання: узгодити об'єми виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби у продукції. Наприклад, візьмемо виробничу сферу з 3 галузей, кожна з яких виробляє один (власний) продукт. Означимо період часу, наприклад, рік, протягом якого всі коефіцієнти залишаються постійними. Нехай

x_i – загальний (валовий) випуск i-ої галузі ($x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$);

x_{ij} – об'єм продукції i-ої галузі, яка постачається для j-ої галузі в процесі виробництва;

a_{ij} – затрати i-ої галузі на випуск однієї одиниці продукції для j-ої галузі, де $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \geq 0$.

Тоді балансові співвідношення матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Або у матричній формі $X = AX$, де X –матриця випусків галузей, A – матриця прямих затрат.

Визначники 2-го, 3-го, n –го порядку та їхні властивості

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2. \end{cases} \qquad (1)$$

Розв'яжемо систему методом виключення невідомих:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2. \end{cases}\right| \begin{matrix} \cdot\ a_{22} \\ - \\ \cdot\ a_{12} \end{matrix}$$

Отримаємо: $(a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})\ x_1 = h_1\, a_{22} - h_2\, a_{12}$.

Позначимо: $a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12} = \Delta$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix} = h_1 \cdot a_{22} - h_2 \cdot a_{12}, \qquad (2`)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix} = h_2 \cdot a_{11} - h_1 \cdot a_{21}. \qquad (2``)$$

Визначник Δ називається визначником системи або визначником відповідної матриці.

Визначником другого порядку називається:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Тут зліва – позначення визначника другого порядку, праворуч – його значення.

Величини a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – елементи визначника.

Як бачимо, визначник другого порядку має $2 \times 2 = 4$ елемента, що розташовані у вигляді таблиці з двома рядками та двома стовпцями, розміщеної між двома вертикальними лініями.

Треба звернути увагу на індекси елементів визначника: перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, у яких розташований елемент.

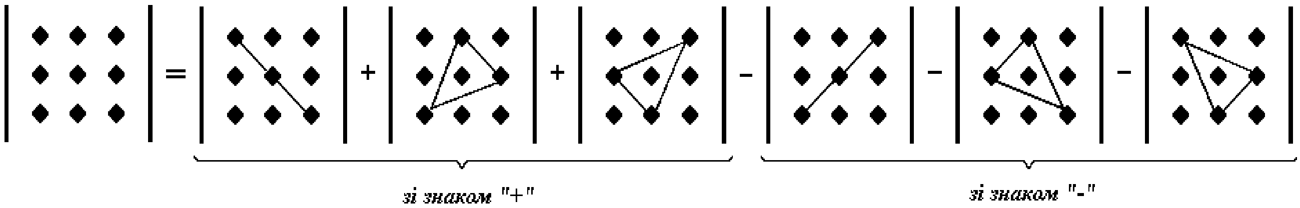
Якщо елементи визначника являють собою числа, то визначник також є число, що одержують за вказаною вище формулою.

Визначники позначаються, як правило, грецькими літерами Δ або δ, а також det (від слова детермінант, тобто визначник).

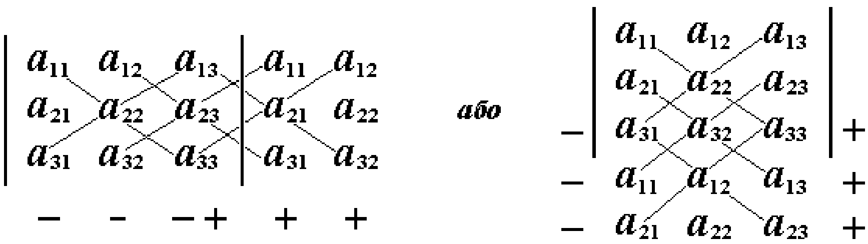
Визначник третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Хоча вираз для визначника третього порядку є досить громіздкий, закон його складання дуже простий. Схематично правило обчислення визначника третього порядку можна зобразити таким чином:



Легко також запам'ятати правило Сар'юса обчислення визначників третього порядку. Згідно за цим правилом слід приписати праворуч від визначника перший та другий стовпці або знизу від визначника перший та другий рядки та вибрати відповідні добутки елементів згідно з наведеною нижче схемою:



Як бачимо, якщо елементами визначника є числа, то й визначник також є число.

Визначник $n-$го порядку позначають так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він має n^2 елементів з $n!$ членів. При $n=10$ визначник має $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10=3628800$ членів, для запису яких треба було б мати більш 20 тисяч сторінок. Тому обчислення визначників більш ніж третього порядку зводиться до обчислення визначників третього або другого порядків за допомогою таких двох властивостей визначника:

1. визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого ряду (рядка або стовпця) додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на одне й те саме число;

2. визначник довільного порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення, зокрема, якщо у визначника $n-$го порядку всі елементи, крім одного, будь-якого ряду дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку цього елемента, що відрізняється від нуля, на його алгебраїчне доповнення.

За допомогою першої з цих властивостей у будь-якому ряді всі елементи, крім одного, робимо рівними нулю, а за допомогою другої – порядок визначника знижуємо на одиницю. Так робимо доти, доки не прийдемо до визначника третього або другого порядків.

3. визначник з двома однаковими рядками або стовпцями дорівнює – *нулю.*

Зазначимо, що визначником першого порядку є число a_{11}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку є добуток $(-1)^{i+j}$ та визначника $(n-1)-$го порядку, який називається мінором (мінóр з лат. minor – менший, також малий. Можна пригадати мінор у музиці), отриманого з даного визначника викреслюванням $i-$го рядка та $j-$ го стовпця. Позначають алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij}, а мінор елемента a_{ij} через M_{ij}. При цьому $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Приклад 1.1. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)-3\cdot 4=-10-12=-22.$$

Приклад 1.2. Обчислити визначник

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 0+4\cdot 5\cdot(-6)+1\cdot 3\cdot 1-1\cdot(-2)\cdot(-6)-4\cdot 3\cdot 0-2\cdot 5\cdot 1=$$
$$=0-120+3-12-0-10=-139.$$

Як бачимо, якщо елементами визначника є числа, то й визначник також є число.

Приклад 1.3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 6 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Визначник Δ не зміниться, якщо другий рядок ми додамо до першого й віднімемо від третього та четвертого, тобто:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Використовуючи той факт, що в третьому стовпці даного визначника знаходяться три нулі, розкладемо визначник за елементами третього стовпця. Тоді одержимо:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{4} a_{3j} A_{3j} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} =$$

$$= 0 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Якщо від третього стовпця віднімемо подвоєний перший, то матимемо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix}.$$

Знову ж таки, використовуючи те, що в другому рядку є два нулі, розкладаючи визначник за елементами другого рядка остаточно маємо:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{3} a_{2j} A_{2j} = -(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) = -(1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}) =$$

$$= -A_{21} = -(-1)^{2+1} M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 23.$$

Приклад 1.4. Дано матриці:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Знайти B^T, $2A+3B^T$, $A-B^T$, $A+B$.

Розв'язання.

$$B^T=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$2A+3B^T=2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ -8 & 10 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 12 & 9 \\ -3 & 6 & -15 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4+0 & 6+12 & 2+9 \\ -8-3 & 10+6 & 0+15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 18 & 11 \\ -11 & 16 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$A-B^T=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-0 & 3-4 & 1-3 \\ -4+1 & 5-2 & 0+5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Суму $A+B$ отримати неможливо. Чому?

Приклад 1.5. Знайти добутки AB та BA, якщо:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 2+1\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 2+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 & 2\cdot 2+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 2 & 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 1+2\cdot 2 \\ 0\cdot 1+1\cdot 2 & 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриці-добутки AB та BA не тільки не рівні, але навіть різної розмірності.

Приклад 1.6. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=2x-3$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$f(A) = 2A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 10 \\ -2 & -6 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 10 \\ -2 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7. Знайти добуток AB, якщо $A = (1\ \ 3\ \ -5\ \ 4)$ і $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$AB = (1\ \ 3\ \ -5\ \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + (-5) \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) = 31.$$

2. Застосування матриць при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Формули Крамера

Задамо систему з n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = c_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = c_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Числа a_{11}, a_{12},..., a_{nn} – коефіцієнти системи, задають матрицю коефіцієнтів (матрицю системи) A.

Розв'язком системи (1) з n невідомими $x_1, x_2, ..., x_n$ називається такий набір чисел $x_1 = \lambda_1$, $x_2 = \lambda_2$, ..., $x_n = \lambda_n$, підстановка яких перетворює кожне рівняння системи у тотожність. Тут a_{ij} – коефіцієнти системи з $i = 1,2,...,n$; $j = 1,2,...,n$, котрі вважаються відомими.

Якщо визначник системи Δ (визначник матриці A) відрізняється від нуля,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то вона має тільки один розв'язок, що знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ ....,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де допоміжні визначники Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n утворені з початкового визначника Δ шляхом послідовних замін стовпців вільними членами $c_1, c_2, ..., c_n$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & c_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & c_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і т. ін.

Приклад 2.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22, \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю коефіцієнтів системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$detA = 6$ або $\Delta A = 6$ (обчислення визначника третього порядку можна пригадати за прикладом 1.2). Задана система має один розв'язок, який обчислимо за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Складемо матриці A_1, A_2, A_3, а потім знайдемо їхні відповідні визначники:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \\ 22 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & 2 \\ 22 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 22 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 4 & 22 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 22 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 8 \\ 4 & 1 & 22 \end{vmatrix} = 24$$

За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1, \qquad x_2 = \frac{12}{6} = 2, \qquad x_3 = \frac{24}{6} = 4.$$

Перевірка

$$\begin{cases} 1+2+2\cdot 4 = 11 \to 11 = 11, \\ 2\cdot 1 - 2 + 2\cdot 4 = 8 \to 8 = 8, \\ 4\cdot 1 + 2 + 4\cdot 4 = 22 \to 22 = 22. \end{cases}$$

Після підстановки розв’язку у рівняння системи вони перетворились в тотожності. Цей факт підтверджує правильність розв’язання.

Відповідь: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$ або $(1; 2; 4)$

Приклад 2.2. Розв’язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = -1, \\ -3x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Розв’язання. Спочатку запишемо матрицю коефіцієнтів системи

$$detA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$\Delta A = -37$. Задана система має один розв’язок, який обчислимо за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

Складемо матриці A_1, A_2, A_3, а потім знайдемо їхні відповідні визначники:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -37,$$

$$A_2=\begin{pmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 5\end{pmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & 5 & 5\end{vmatrix}=-37,$$

$$A_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 5\end{pmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & -3 & -2\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=-37$$

За формулами Крамера

$$x_1=\frac{-37}{-37}=1,\qquad x_2=\frac{-37}{-37}=1,\qquad x_3=\frac{-37}{-37}=1.$$

Завдання для здобувачів:

Виконайте перевірку самостійно і переконайтесь у правильності розв'язку.

Запитання для самоперевірки

1. Що називається визначником другого, третього, n-го порядків?
2. Назвіть основні властивості визначників.
3. Що називається мінором, алгебраїчним доповненням елемента визначника?
4. Напишіть формули Крамера для розв'язку системи лінійних рівнянь. Що називається матрицею?
5. Як визначаються основні дії з матрицями?
6. Опишіть матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь.
7. Опишіть геометричну інтерпретацію систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими?

3. Елементи векторної алгебри

З історії векторів.

Термін "вектор" походить від латинського слова vector, що означає – "той, що несе".

Уперше, в 1587 році, фламандський учений Сімон Стевін, розглядаючи додавання сил, прийшов до висновку, що для знаходження результату необхідно скористатися "паралелограмом" сил, при цьому для позначення сил він скористався стрілками.

Довгий час вектор розглядався тільки як напрямлений відрізок, який визначається своїм початком і кінцем. З розробкою теорії геометричних перетворень вектор почали розглядати не тільки як напрямлений відрізок, але і як паралельне перенесення.

Початки векторного числення були вперше викладені Фрідріхом Вільгельмом Бесселем – німецьким астрономом, математиком і геодезистом, який був членом Берлінської АН. Ось його означення суми кількох напрямлених відрізків: “Щоб скласти більше, ніж два відрізка, необхідно слідувати правилу: розміщуємо їх так, щоб кінець першого співпадав з початком другого, а кінець другого співпадав з першою точкою третього і так далі, потім з тією точкою, де останній відрізок закінчився, і називається цей останній відрізок сумою всіх даних відрізків”.

Французький учений Карно вводить позначення вектора за допомогою риски зверху: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}$. Німецький математик Август Фердинанд Мебіус вперше подав геометричну кількість AB у вигляді різниці координат точок B і A. Однак, вважається, що основоположниками векторної алгебри є англійський математик У. Гамільтон (1805 – 1865) і німецький математик Г. Грассман (1809 – 1877). Гамільтон першим став застосовувати термін “вектор” і оперувати з ним у тривимірному просторі. Він вперше ввів терміни “скаляр”, “скалярний добуток”. Грассман уперше виклав учення про $n -$ вимірний векторний простір. Вектори він називав палочками і позначав їх жирними літерами латинського алфавіту. Скалярний добуток, який називають ще внутрішнім, він позначив a/b, а векторний, який називають зовнішнім, – $[a, b]$.

Означення вектора.

Вектором називається напрямлений відрізок (або впорядкована пара точок).

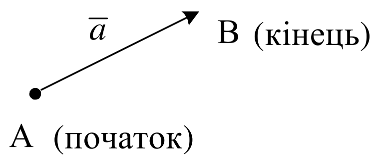


Рис.1

Позначення:

$\overline{AB}$, $\overline{a}$, $\boldsymbol{a}$ (рис.1)

Нульовий вектор – це вектор, початок якого співпадає з його кінцем. Наприклад, $\overline{0} = \overline{AA}$.

Відстань між початком і кінцем вектора називається *довжиною* (*модулем* або *абсолютною величиною*) вектора: $\left|\overline{AB}\right|$, $\left|\overline{a}\right|$. Якщо довжина вектора дорівнює одиниці, то він називається одиничним або ортом (orientation, лат. – орієнтація). Позначення орта вектора $\overline{a}$: $\overline{a}_o$.

Вектори, розташовані на одній або на паралельних прямих називаються *колінеарними* (позначення: $\overline{a} \parallel \overline{b}$).

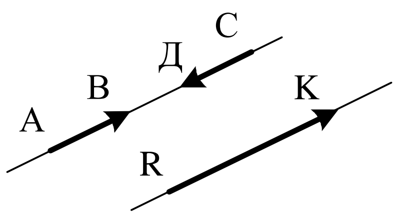


Рис.2

Наприклад (рис.2): $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$; $\overline{AB} \parallel \overline{RK}$; $\overline{CD} \parallel \overline{RK}$;

$\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{RK}$ – однаково напрямлені (співнапрямлені) вектори,

$\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$; $\overline{CD} \uparrow\downarrow \overline{RK}$ – протилежно напрямлені вектори.

Вважається, що напрям нульового вектора невизначений і цей напрям є колінеарним будь-якому вектору.

Вектори, які належать одній площині або розташовані на прямих, паралельних одній площині, називаються *компланарними*.

Рівними називаються вектори, які колінеарні, однаково напрямлені і мають рівні модулі:

$$\overline{a} = \overline{b} \leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad \overline{a} \parallel \overline{b}, \\ 2. \quad \overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, \\ 3. \quad |\overline{a}| = |\overline{b}|. \end{cases}$$

З цього означення випливає, що вектори не змінюються при паралельному перенесенні. Отже, ми розглядаємо так звані *вільні вектори*.

Добутком вектора $\overline{a}$ на дійсне число α називається вектор $\overline{b}$, який задовольняє наступним умовам:

$$\overline{b} = \alpha\overline{a} \leftrightarrow \begin{cases} 1. \quad |\overline{b}| = |\alpha| \cdot |\overline{a}|, \\ 2. \quad \overline{b} \parallel \overline{a}, \\ 3. \quad \overline{b} \uparrow\uparrow \overline{a}, \text{ якщо } \alpha > 0; \\ \quad\;\; \overline{b} \uparrow\downarrow \overline{a}, \text{ якщо } \alpha < 0; \\ \quad\;\; \overline{b} = \overline{0}, \quad \text{якщо } \alpha = 0. \end{cases}$$

Наприклад (рис.3), $\overline{b} = -05\overline{a}$; $\overline{c} = -2\overline{a}$; $\overline{d} = 1{,}5\overline{a}$.

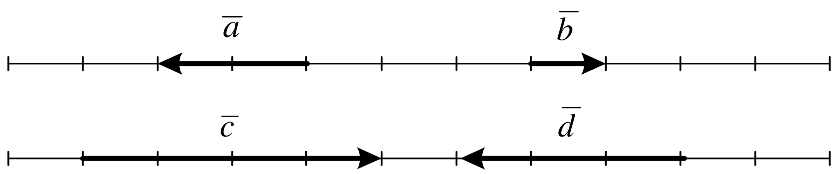


Рис.3

Сумою $\overline{a}+\overline{b}$ двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається вектор, який сполучає початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$ за умови, що вектор $\overline{b}$ відкладено від кінця вектора $\overline{a}$.

Рис.4

Це означення дозволяє побудувати суму будь-яких двох векторів і називається *правилом трикутника* (рис.4). Причому, очевидно, що сума двох векторів не залежить від вибору початкової точки А. Таким чином, для будь-яких трьох точок А, В і С має місце рівність:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}\,.$$

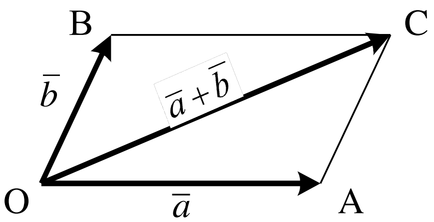


Рис.5

Другий спосіб побудови суми двох векторів – так зване *правило паралелограма* (рис.5)*:*

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ відкласти від спільного початку О, то сумою $\overline{a}+\overline{b}$ є вектор $\overline{OC}$, який виходить з тієї ж точки О і співпадає з діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки О.

Очевидно, що це правило є наслідком правила трикутника. Ним можна користуватися, якщо вектори-доданки не колінеарні.

Координати вектора.

Задамо декартову систему координат та визначимо координати вектора таким чином, щоб рівні вектори мали рівні координати. Нехай є вектор $\overrightarrow{AB}$, причому т. $A(x_A; y_A)$, т. $B(x_B; y_B)$ (рис. 6).

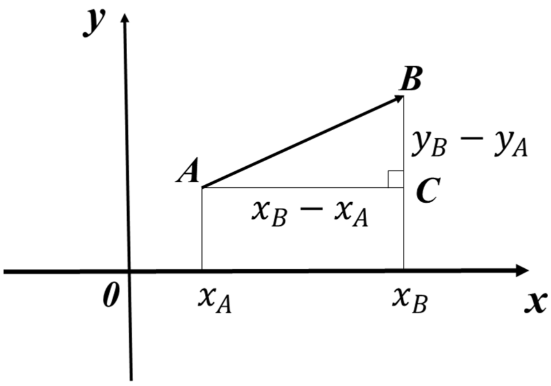


Рис. 6

Тоді $x_B - x_A$ назвемо координатою абсциси вектора $\overrightarrow{AB}$, а $y_B - y_A$ координатою ординати.

Таким чином, вектор

$$\overrightarrow{AB}\ (x_B - x_A;\ y_B - y_A).$$

З прямокутного трикутника ABC (AC і BC – катети, AB – гіпотенуза) за теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$, отже, довжина вектора $\overrightarrow{AB}$ (довжина відрізка, яким зображується вектор) буде знаходитись за формулою:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

якщо вектор задано координатами, наприклад, $\vec{a}\left(a_x; a_y\right)$, тоді формула запишеться $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}$.

За рисунком 3, де розглядався добуток вектора $\bar{a}$ на дійсне число α геометрично, запишемо дію множення вектора на число у координатах. Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $\left(a_x; a_y\right)$, то вектор $\beta\vec{a}$, де β – будь-яке довільне дійсне число, окрім 0, буде мати координати $\left(\beta a_x; \beta a_y\right)$, причому вектори $\vec{a}$ і $\beta\vec{a}$ – колінеарні. Отже, якщо $\beta \neq 0$, то можна зробити висновок, що ***колінеарні вектори мають пропорційні координати***. Справедливе і обернене твердження, якщо координати векторів пропорційні, то вектори колінеарні.

Завдання для здобувачів:

Виконайте навчальні вправи

1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2; 3; -1)$, $B(1; -4; 5)$.
   Розв'язання:
   координати вектора знаходять за формулою:
   $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$
   Отже, координати вектора $\overrightarrow{AB}$ будуть дорівнювати:
   $1 - 2 = -1$; $-4 - 3 = -7$; $5 - (-1) = 6$. Маємо, $\overrightarrow{AB}(-1; -7; 6)$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}(-1; -7; 6)$.

Для самостійної роботи: знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1; 5; -3)$, $B(-1; 4; -5)$.

2. Знайти координати вершини C, якщо три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати: $A(3; -2; 1)$, $B(-6; 4; 2)$, $D(-3; 2; -4)$.
   Розв'язання: так як $ABCD$ – паралелограм, то вектор $\overrightarrow{AB}$ дорівнює вектору $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. ***Рівні вектори мають рівні координати.*** Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $-6 - 3 = -9$; $4 - (-2) = 6$; $2 - 1 = 1$. $\overrightarrow{AB}(-9; 6; 1)$. Нехай вершина C має координати $(x_c; y_c; z_c)$, тоді координати вектора $\overrightarrow{DC}$ можна записати
   $\overrightarrow{DC}$ $(x_c + 3;\ y_c - 2;\ z_c + 4)$. Прирівняємо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$: $x_c + 3 = -9$, $y_c - 2 = 6$, $z_c + 4 = 1$. Отримаємо, $x_c = -12$, $y_c = 8$, $z_c = -3$. Таким чином, вершина C має координати $(-12; 8; -3)$.

Відповідь: $C(-12; 8; -3)$.

Для самостійної роботи: знайти координати вершини C, якщо три вершини паралелограма $ABCD$ мають координати: $A(4; -5; -2)$, $B(2; 3; -8)$, $D(-3; -4; 6)$.

3. Модуль вектора $\vec{m}(5; -3; z)$ дорівнює 9. Знайти z.
   Розв'язання: довжина направленого відрізка (***модуль або абсолютна величина вектора)*** $\boldsymbol{\vec{a}(a_x; a_y; a_z)}$ ***знаходиться за формулою:***

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Користуючись записаною формулою, запишемо $9^2 = 25 + 9 + z^2$, $47 = z^2$ та $z = \pm\sqrt{47}$.

Відповідь: $z = \pm\sqrt{47}$.

Для самостійної роботи: модуль вектора $\vec{m}(x; -10; 8)$ дорівнює 13. Знайти x.

4. Знайти координати точки C такої, що $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = 0$, де $A(3; -4; 1)$, $B(-2; 6; -3)$.
   Розв'язання: ***координати вектора-суми двох векторів*** $\boldsymbol{\vec{a}(a_x; a_y; a_z) + \vec{b}(b_x; b_y; b_z) = \vec{c}(c_x; c_y; c_z)}$ ***знаходяться за формулами:***
   $\boldsymbol{c_x = a_x + b_x; \quad c_y = a_y + b_y; \quad c_z = a_z + b_z.}$

Позначимо координати точки $C\ (x_c; y_c; z_c)$, тоді $\overrightarrow{CA}\ (3 - x_c; -4 - y_c; 1 - z_c)$, $\overrightarrow{CB}\ (-2 - x_c; 6 - y_c; -3 - z_c)$. За формулою суми маємо:

$3 - x_c + (-2) - x_c = 0, \qquad -4 - y_c + 6 - y_c = 0, \qquad 1 - z_c + (-3) - z_c = 0.$
Розв'язавши дані рівняння, отримаємо:

$$x_c = 0{,}5\,, \quad y_c = 1, \quad z_c = -1.$$

Отже, точка C має координати $(0{,}5; 1; -1)$.

Відповідь: $C(0{,}5; 1; -1)$.

Для самостійної роботи: знайти координати точки K такої, що $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{KH} = 0$, де $M(0; 5; -8)$, $H(-6; 3; 7)$.

5. Зайти значення x та y, при яких вектори $\vec{a}(x; -8; 12)$ і $\vec{b}(24; y; -36)$ колінеарні.
   Розв'язання: ***вектори*** $\boldsymbol{\vec{a}}$ ***і*** $\boldsymbol{\vec{b}}$ ***колінеарні, якщо***
   $\boldsymbol{\vec{b} = \lambda\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}}$ ***(відповідні координати пропорційні)***

Тому за даними координатами складемо пропорцію: $\frac{24}{x} = \frac{y}{-8} = \frac{-36}{12}$

$$\lambda = -36 : 12 = -3$$
$$y = -3 \cdot (-8) = 24$$
$$x = 24 : (-3)$$

або знайти x та y за пропорцією.

Відповідь: $x = -8$ та $y = 24$.

Для самостійної роботи: знайти значення x та z, при яких вектори $\vec{p}(x; 3; -13)$ і $\vec{q}(5; -12; z)$ колінеарні.

Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів.

Будемо розглядати *декартову прямокутну систему координат*.

Кутом між будь-якими векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок (рис.7).

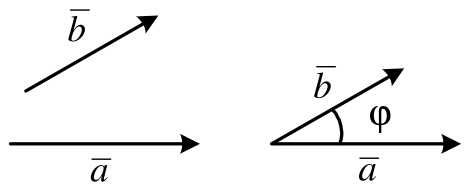


Рис.7

Позначення: $\varphi = \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$. Будемо вважати, що $0° \leq \varphi \leq 180°$.

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ співнапрямлені, зокрема один з них або обидва нульові, то вважають, що кут між ними дорівнює 0°.

Два вектори називаються *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює 90°.

Надалі будемо розглядати ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними.

$$(\overline{a} \cdot \overline{b}) = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають: $(\overline{a}\,\overline{b})$.

Геометричні властивості:

1°. Для того, ***щоб два ненульові вектори були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю***:

$\overline{a} \perp \overline{b} \leftrightarrow (\overline{a} \cdot \overline{b})=0.$

Доведення.

$(\overline{a} \cdot \overline{b})=0 \quad \Leftrightarrow \quad |\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi=0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\varphi=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi=90°.$

2°. Довжина вектора дорівнює кореню квадратному з його скалярного квадрата: $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a} \cdot \overline{a})}$.

Скалярним квадратом вектора $\overline{a}$ називається скалярний добуток ($\overline{a} \cdot \overline{a}$), він позначається: $(\overline{a} \cdot \overline{a})=\overline{a}^{\,2}$.

Доведення.

Дійсно, $(\overline{a} \cdot \overline{a})=|\overline{a}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos 0°=|\overline{a}|^2$. Отже, $|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a} \cdot \overline{a})}$.

Приклад 3.1. Знайти значення скаляра $3\overline{m}^{\,2} - 2\overline{m} \cdot \overline{n} + 4\overline{n}^{\,2}$, якщо $|\overline{m}| = \dfrac{1}{3}$, $|\overline{n}| = 6$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Розв’язання.

$$3\overline{m}^{\,2} - 2\overline{m} \cdot \overline{n} + 4\overline{n}^{\,2} = 3|\overline{m}|^2 - 2|\overline{m}| \cdot |\overline{n}| \cdot \cos \widehat{\overline{m}\overline{n}} + 4|\overline{n}|^2 =$$

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 4 \cdot 6^2 = \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 144 = 142\frac{1}{3}.$$

Запис скалярного добутку через координати векторів.

Скалярний добуток двох векторів, визначених своїми декартовими прямокутними координатами $\overline{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b}(x_2; y_2; z_2)$, дорівнює сумі попарних добутків відповідних координат:

$$\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 .$$

Очевидно, що коли вектори задано своїми декартовими прямокутними координатами на площині: $\overline{a} = (x_1, y_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2)$, то $\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$.

Наслідок 1

$$|\overline{a}| = \sqrt{(\overline{a} \cdot \overline{a})} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} .$$

Наслідок 2

$$\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2+{z_2}^2}}.$$

Наслідок 3

Якщо $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, то відстань між точками A і B, тобто модуль вектора $\overline{AB}$, обчислюється за формулою:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Приклад 3.2. Знайти кут між векторами $\vec{a}(1;-3)$ і $\vec{b}(7;1)$.

Розв'язання. Позначимо кут між векторами φ. Знайдемо кут φ, застосовуючи наслідок 2, за яким

$$\cos\varphi=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}}.$$

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot7+(-3)\cdot1}{\sqrt{1^2+(-3)^2}\sqrt{7^2+1^2}}=\frac{7-3}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{50}}=\frac{4}{\sqrt{100\cdot5}}=\frac{4}{10\sqrt{5}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Отже, кут $\varphi=\arccos\frac{2}{5\sqrt{5}}$. Можемо ще зазначити, що кут φ є гострим, оскільки $\cos\varphi=\frac{2}{5\sqrt{5}}>0$.

Векторний добуток векторів.

Векторним добутком векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається такий третій вектор $\bar{c}$, для якого виконуються наступні умови:

1. вектор $\bar{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (а отже і до площини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$);

2. $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Векторний добуток звичайно позначають: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\vec{c}$ або $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}$.

Одна з геометричних властивостей.

Якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ зведено до спільного початку, то $\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=S$, де S – площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (рис.8).

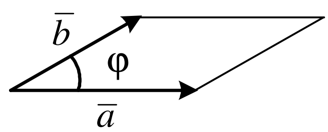


Рис.8

Введемо одиничні (тобто довжина дорівнює 1) вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ у декартовому просторі (рис. 9 зліва). Як бачимо за рисунком, вектор $\vec{\imath}$ розташований на осі абсцис, виходить з початку координат та має напрям, що співпадає з додатним напрямом осі Ox. Аналогічно розташовуються і вектори $\vec{\jmath}$ та $\vec{k}$. Розглянемо приклад їхнього застосування. Нехай маємо вектор $\vec{a}(5,3)$. Зобразимо вектор $\vec{a}$ на координатній площині, тобто відкладемо його від початку координат, а потім представимо як суму векторів $\vec{\imath}$ та $\vec{\jmath}$ (рис. 9 справа) за правилом трикутника.

Таким чином отримаємо, що $\vec{a} = 5\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$, де коефіцієнти 5 і 3 є координатами вектора.

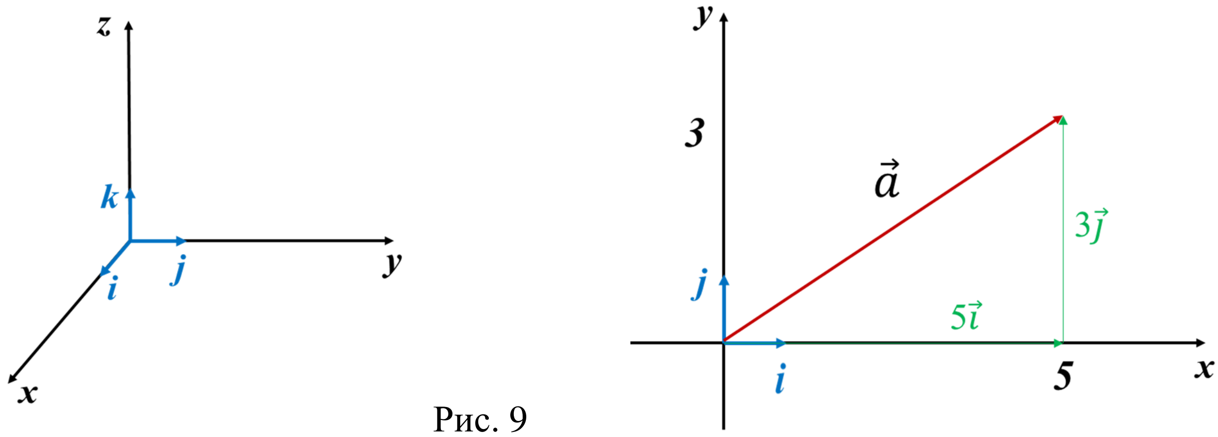


Рис. 9

Приклад 3.3. Подайте даний вектор $\vec{c}(-1{,}5;\ 2)$ через суму векторів $\vec{\imath}$ та $\vec{\jmath}$.

Розв'язання. $\vec{c} = -1{,}5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

Приклад 3.4. Запишіть координати вектора $\vec{p}$, якщо $\vec{p} = \vec{\imath} - 9\vec{\jmath}$.

Розв'язання. $\vec{p}(1;\ -9)$.

Запис векторного добутку через координати векторів.

Якщо два вектора $\bar{a}$ і $\bar{b}$ визначені своїми декартовими прямокутними координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$ і задано вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, то векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд:

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Приклад 3.5. Обчислити векторний добуток векторів $\vec{a}(2;3;5)$ і $\vec{b}(1;2;1)$.

Розв’язання.

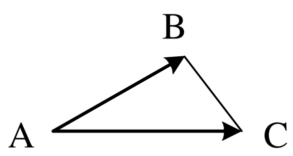
$$[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} = -7\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}.$$

Приклад 3.6. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки $A(4;2)$, $B(9;4)$ і $C(7;6)$.

Розв’язання. Для розв’язання скористаємось геометричною властивістю векторного добутку, а саме формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]\right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}\ (5;2)$ і $\overrightarrow{AC}\ (3;4)$. Зверніть увагу, що за визначенням кута між векторами, маємо розглядати вектори саме із спільним початком, а тому можна було би також знайти площу трикутника за векторами $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{BA}$ або $\overrightarrow{CB}$ та $\overrightarrow{CA}$.



Обчислимо векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\vec{c} = [\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 20\vec{k} - 6\vec{k} = 14\vec{k}.$$

Зауважимо, оскільки вершини трикутника задано на площині, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ за віссю Oz мають координату 0.

Також, за визначенням векторного добутку: векторним добутком векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий третій вектор $\overline{c}$, для якого виконується умова перпендикулярності вектора $\overline{c}$ до кожного з векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ (а отже і до площини векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$) – маємо, що отриманий у ході розв’язання вектор $\vec{c} = 14\vec{k}$, координати якого за осями Ox та Oy дорівнюють 0, є перпендикулярним до площини xy.

Знайдемо модуль вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = 14$ і за формулою отримаємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}]\right| = \frac{1}{2}\cdot 14 = 7 \text{ кв. од.}$$

Завдання для здобувачів:

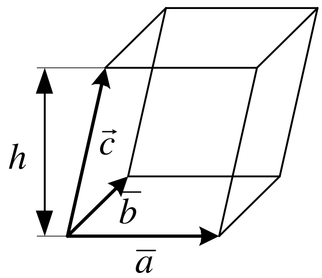
Знайдіть площу цього трикутника за векторами $\overrightarrow{BC}$ та $\overrightarrow{BA}$ або $\overrightarrow{CB}$ та $\overrightarrow{CA}$.

Мішаний добуток векторів.

Мішаним (векторно-скалярним) добутком векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ називається скалярний добуток вектора $[\vec{a} \times \vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, тобто $([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c})$.

Геометричний зміст мішаного добутку.

Модуль мішаного добутку $([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c})$ трьох некомпланарних векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда.



$$V = |([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c})|$$

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Завдання для здобувачів:

Подумайте і поясніть, чому мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю.

Запис мішаного добутку через координати векторів

Якщо вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ задано своїми декартовими прямокутними координатами $\overline{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\overline{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\overline{c}(x_3; y_3; z_3)$, то їх мішаний добуток дорівнює визначнику, рядками якого є координати даних векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$:

$$(\overline{a}\overline{b}\overline{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Приклад 3.7. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами в точках $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$ і $D(5; 5; 6)$.

Розв'язання.

Об'єм V такої піраміди дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right)\right|$$

Знайдемо координати цих векторів: $\overrightarrow{AB}\ (2; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC}\ (2; 3; 2)$ і $\overrightarrow{AD}\ (3; 3; 4)$ і обчислимо об'єм:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7, \qquad V = \frac{1}{6} \cdot |7| = \frac{7}{6}\ \text{куб. од.}$$

Зверніть увагу, для знаходження об'єму піраміди, як і у прикладі 3.6, важливо, щоб вектори мали спільний початок, отже, можна було також взяти вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BD}$ або $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{CD}$.

Завдання для здобувачів:

Знайдіть об'єм піраміди за векторами $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BD}$ або $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ та $\overrightarrow{CD}$.

Запитання для самоперевірки

1. Які величини називаються скалярними? Векторними?

2. Які вектори називаються колінеарними?

3. Як скласти два вектори?

4. Які два вектори називаються рівними?

5. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати точок його початку та кінця?

6. Як помножити вектор на скаляр?

7. Дайте визначення скалярного добутку двох векторів.

8. Як знайти скалярний добуток двох векторів за їх координатами.

9. Напишіть формулу для визначення кута між двома векторами.

10. Напишіть формулу для знаходження площі трикутника за допомогою векторного добутку.

11. Напишіть формулу для знаходження об'єму піраміди за допомогою мішаного добутку.

12. Напишіть умови: колінеарності двох векторів; їх перпендикулярності.

4. Пряма на площині. Площина та пряма у просторі

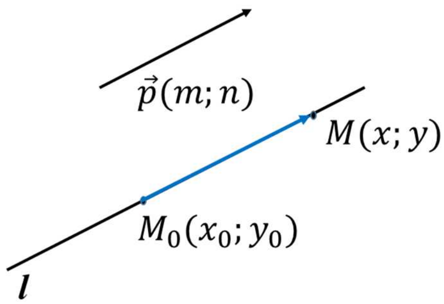
Ще раз пригадаємо (для ненульових векторів та множників):

колінеарні вектори мають пропорційні координати,

щоб два вектори були перпендикулярними, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю, а отже, є справедливим і твердження: якщо вектори перпендикулярні, їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Нагадаємо основні ***види рівнянь прямої на площині***.

Канонічне рівняння прямої.



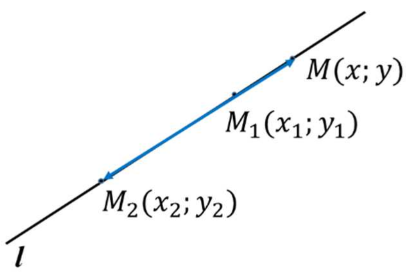
Запишемо рівняння прямої l через дану точку $M_0(x_0;y_0)$, яка належить прямій l, та напрямний (розташований паралельно до прямої або на прямій) ненульовий вектор $\vec{p}(m;n)$, тобто $\vec{p} \parallel l$.

Візьмемо на прямій l будь-яку відмінну від M_0 точку $M(x;y)$, тоді вектори $\vec{p}$ та $\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0;\ y-y_0)$ будуть колінеарні за визначенням, а, отже, їхні координати є пропорційними:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$ – канонічне ріняння прямої.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Рівняння прямої l за двома даними точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ складається аналогічно.

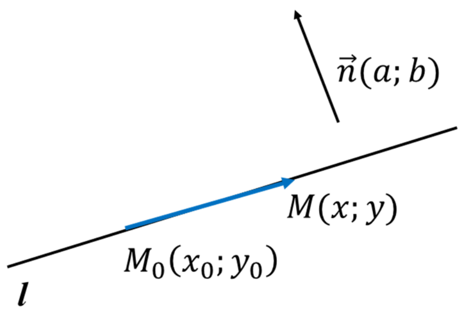


Запишемо рівняння прямої l через задані дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, що належать прямій l. Для цього візьмемо на прямій l будь-яку відмінну від M_1 та M_2 точку $M(x;y)$, тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}\,(x-x_1;\ y-y_1)$ та $\overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ будуть колінеарні за визначенням, а, отже, їхні координати є пропорційними:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$ – рівняння прямої за двома точками.

Зауважимо, оскільки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ задані точки, отже, їхні координати відомі, то $x_2 - x_1$ та $y_2 - y_1$ можна обчислити. Позначимо $x_2 - x_1 = m$, а $y_2 - y_1 = n$. Після підстановки m і n у рівняння прямої за двома точками, отримаємо канонічне рівняння прямої.

Загальне рівняння прямої.



Запишемо рівняння прямої l через дану точку $M_0(x_0; y_0)$, яка належить прямій l, та нормальний (нормальний або вектор нормалі – це вектор, що є перпендикулярним до даної прямої) ненульовий вектор $\vec{n}(a; b)$, тобто $\vec{n} \perp l$.

Візьмемо на прямій l будь-яку відмінну від M_0 точку $M(x; y)$, тоді вектори $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}$ $(x - x_0;\ y - y_0)$ будуть взаємно перпендикулярні, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Виконаємо деякі перетворення

$$ax - ax_0 + by - by_0 = 0.$$

Оскільки нормальний вектор $\vec{n}(a; b)$ та точка $M_0(x_0; y_0)$ є заданими, то вираз $-ax_0 - by_0$ можна обчислити. Нехай $-ax_0 - by_0 = c$, тоді рівняння запишеться:

$$ax + by + c = 0 \text{ — загальне рівняння прямої.}$$

Зауважимо, що канонічне рівняння прямої можна перетвореннями звести до загального виду, оскільки маємо пропорцію, а як відомо, за основною властивістю пропорції добуток її крайніх членів дорівнює добутку середніх:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

$$n(x - x_0) = m(y - y_0) \text{ та спростити.}$$

Приклад 4.1. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(1; 2)$ паралельно до вектора $\vec{p}(5; -2)$.

Розв’язання. Канонічне рівняння прямої має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$

Тоді маємо:

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y - 2}{-2}.$$

Отримане рівняння є шуканим канонічним рівнянням прямої.

Завдання для здобувачів:

Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3;-1)$, паралельно до вектора $\vec{p}(2;-1)$.

Відповідь:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}.$$

Приклад 4.2. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-3;7)$ та $M_2(1{,}5;-6)$.

Розв'язання. Згідно із співвідношенням (рівнянням прямої, що проходить через дві точки)

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

маємо

$$\frac{x+3}{1{,}5+3}=\frac{y-7}{-6-7},$$

тобто

$$\frac{x+3}{4{,}5}=\frac{y-7}{-13}.$$

Відповідь: $\frac{x+3}{4{,}5}=\frac{y-7}{-13}$ – канонічне рівняння прямої що роходить через дві задані точки $M_1(-3;7)$ та $M_2(1{,}5;-6)$.

Завдання для здобувачів:

Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(-0{,}3;2{,}5)$ та $M_2(5{,}7;-3{,}5)$.

Приклад 4.3. Скласти загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-8;4)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(12;5)$.

Розв'язання. Загальне рівняння прямої має вид:

$$ax+by+c=0.$$

Для нашого завдання краще скористатись наступним його записом:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Отже, маємо

$$12(x+8)+5(y-4)=0.$$

$$12x+96+5y-20=0.$$

$$12x+5y+76=0$$ – шукане загальне рівняння прямої.

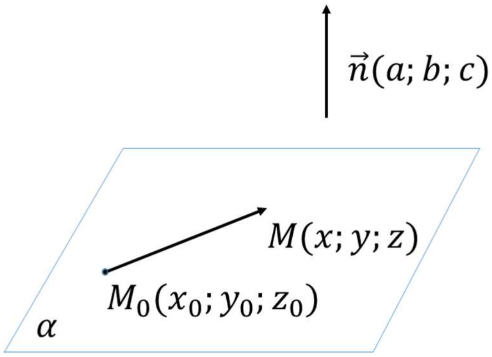
Завдання для здобувачів:

Скласти загальне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(0;-1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(-2;7)$.

Відповідь: $-2x + 7y + 7 = 0$.

Площина у просторі. Нагадаємо основні види рівнянь.

Загальне рівняння площини.



Запишемо рівняння площини α через дану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, яка належить площині α, та нормальний ненульовий вектор $\vec{n}(a; b; c)$, тобто $\vec{n} \perp \alpha$.

Візьмемо на площині α будь-яку відмінну від M_0 точку $M(x; y; z)$, тоді вектори $\vec{n}$ та $\overrightarrow{M_0M}\ (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$ будуть взаємно перпендикулярні, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Отримали *рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до вектора.*

Виконаємо перетворення

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0.$$

Оскільки нормальний вектор $\vec{n}(a; b; c)$ та точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ є заданими, то вираз $-ax_0 - by_0 - cz_0$ можна обчислити. Нехай $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d$, тоді рівняння запишеться:

$$ax + by + cz + d = 0 - \text{загальне рівняння площини.}$$

Приклад 4.4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-3; 2; 1{,}3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(1; -5; 7)$.

Розв’язання. Запишемо рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до вектора:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

та підставимо дані з умови

$$1(x + 3) - 5(y - 2) + 7(z - 1{,}3) = 0,$$

виконаємо спрощення

$$x + 3 - 5y + 10 + 7z - 9{,}1 = 0.$$

Отримали шукане рівняння

$$x - 5y + 7z + 3{,}9 = 0.$$

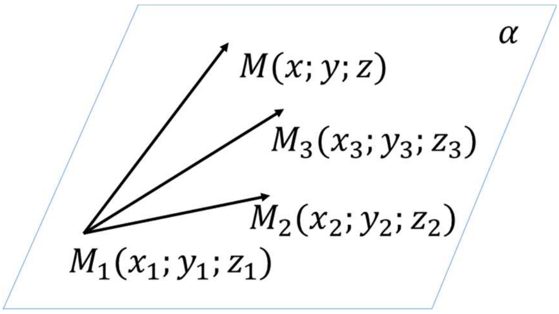
Завдання для здобувачів:

Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(6; -2; 1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(4; 11; -7)$.

Відповідь:

$$4x + 11y - 7z + 5 = 0.$$

Рівняння площини, що проходить через три точки.



Запишемо рівняння площини α через задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, що належать їй, та не лежать на одній прямій.

Візьмемо на площині α будь-яку відмінну від M_1, M_2 та M_3 точку $M(x; y; z)$, тоді вектори $\overrightarrow{M_1M}\,(x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}\,(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1)$ будуть компланарні за визначенням, отже, їхній мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 - \text{рівняння площини, що}$$

проходить через три задані точки.

Приклад 4.5. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-3; 2; 1)$, $M_2(0; 4; -1)$ та $M_3(3; 0; -6)$.

Розв'язання. Запишемо рівняння площини, що проходить через три задані точки.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

підставимо дані з умови та виконаємо спрощення

$$\begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 0 + 3 & 4 - 2 & -1 - 1 \\ 3 + 3 & 0 - 2 & -6 - 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x + 3 & y - 2 & z - 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} x + 3 & y - 2 \\ 3 & 2 \\ 6 & -2 \end{matrix} = -14(x + 3) - 12(y - 2) - 6(z - 1) -$$

$$-12(z - 1) - 4(x + 3) + 21(y - 2) = 0$$

$$-18(x + 3) + 9(y - 2) - 18(z - 1) = 0$$

$$-18x - 54 + 9y - 18 - 18z + 18 = 0$$

$$-18x + 9y - 18z - 54 = 0 \ \mid : (-9)$$

$$2x - y + 2z + 6 = 0 - \text{шукане рівняння.}$$

Рівняння, яке отримано, має вид загального рівняння площини, отже, вектор $\overrightarrow{(2;-1;2)}$ є нормальним вектором даної площини.

Завдання для здобувачів:

Скласти рівняння площини, що проходить через точки $M_1(-7;5;0)$, $M_2(3;-2;1)$ та $M_3(1;-1;0)$.

Відповідь: $3x - 4y + 2z + 41 = 0$.

Основні ***види рівнянь прямої у просторі***.

Канонічне рівняння прямої.

За аналогією до канонічного рівняння прямої на площині запишемо рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k} - \text{канонічне ріняння прямої,}$$

де $(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки M_0, що належить прямій, а $(m; n; k)$ – координати напрямного вектора $\vec{p}$.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки.

Так само, за аналогією до рівняння прямої, що проходить через дві точки, запишемо рівняння прямої у просторі:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_0}{z_2 - z_1} - \text{рівняння прямої за двома точками.}$$

Завдання для здобувачів:

Виведіть канонічне рівняння та рівняння прямої, що проходить через дві точки, у просторі аналогічно до рівнянь для прямої на площині.

Оскільки ми розглядаємо пряму у просторі, то (як відомо з курсу геометрії за 10 клас) її можна задати як лінію перетину двох площин. Отже, рівняння прямої, як лінії перетину двох площин, має вигляд:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

за умови, що дані площини не паралельні, тобто $(a_1; b_1; c_1) \neq k(a_2; b_2; c_2)$.

Запитання для самоперевірки

1. Знайдіть у доступних для вас джерелах: визначення прямокутної декартової системи координат; формулу для знаходження відстані між двома точками; формулу для визначення координат точки, яка ділить даний відрізок навпіл або у даному відношенні.

2. Напишіть рівняння прямої на площині:

а) канонічне,

б) яка проходить через дану точку у заданому напрямку,

в) яка проходить через дві дані точки,

г) загальне.

3. Як знайти координати точки перетину двох прямих?

4. Як знайти кут між двома прямими (розгляньте питання для кожного виду прямої окремо)?

5. Запишіть рівняння площини:

а) загальне,

б) яка проходить через три точки.

6. Запишіть усі відомі вам рівняння прямої у просторі.

5. Поняття границі. Границя функції

Розглянемо поняття границі. Кажуть, що змінна величина x у деякому процесі прямує до кінцевої границі a, якщо величина a є постійною і x у цьому процесі необмежено наближається до a. Тоді записують

$$x \to a \qquad \text{або} \qquad \lim x = a$$

Символ $\lim$ складається з перших трьох букв латинського слова *limes* (французького *limite*), яке означає «границя».

Таким чином, кінцевою границею змінної величини, якщо вона існує, є величина постійна.

Відповідно до даного визначення ***нескінченно малі величини*** – це величини, що прямують до нуля, тобто мають границею нуль. ***Нескінченно*** ж ***великі*** величини кінцевої границі не мають (записують $\to \infty$).

Якщо говорити, «x необмежено наближається до a» – це все одно, що сказати «різниця між x та a необмежено наближається до нуля», тобто $x - a = \alpha$ є нескінченно мала. Останню рівність можна записати у вигляді

$$x = a + \alpha \quad \text{або} \quad x = (\lim x) + \text{н. м.}$$

Змінна величина x може прямувати до своєї границі a, залишаючись менше за неї, тобто зі сторони менших значень, тоді умовно записують

$$x \to a - 0 \qquad \text{або} \qquad \lim x = a - 0$$

(це, звичайно, умовний запис, адже $a - 0 = a$).

Якщо x у процесі прямування до a залишається більшим за a, то пишуть $x \to a + 0$. Нарешті, x може прямувати до a, то будучи більшим за a, то меншим за a.

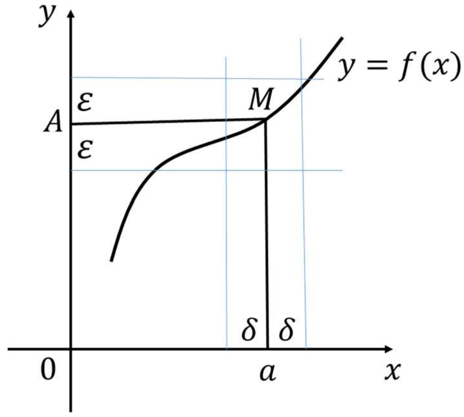
Розглянемо функцію $y = f(x)$ неперервного аргументу x. Нехай незалежна змінна x необмежено наближається до числа a. Це означає, що ми надаємо x значення, які як завгодно наближаються до a, але не дорівнюють a. Запишемо це так: $x \to a$, і будемо казати, що x прямує до a. Може виявитися при цьому, що відповідні значення $f(x)$ необмежено наближаються до деякого числа A. Тоді говорять, що число A є границя функції $y = f(x)$ при $x \to a$ або що функція $y = f(x)$ прямує до числа A при $x \to a$.

Число A називається ***границею функції*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x \to a}$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від числа a, відповідні значення функції $f(x)$ як завгодно мало відрізняються від числа A.

Якщо A є границя функції $f(x)$ при $x \to a$, то це записують так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ або $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A$.

Точка a, до якої прямує незалежна змінна x, називається її ***граничною точкою***.

Слід звернути увагу на те, що в цьому означенні не потрібно, щоб функція була задана і в граничній точці; необхідно лише, щоб функція була визначена в якому-небудь околі граничної точки, але не обов'язково в самій точці. Знаходження границі функції, визначеної в деякому околі точки a, але не в ній самій, і буде складати одне з найважливіших завдань теорії границь.



Наявність у функції $y = f(x)$ при $x \to a$ границі, яка дорівнює A, геометрично ілюструють таким чином: проведемо до осі Ox в точці a і до осі Oy в точці A перпендикуляри, продовживши їх до перетину в точці M, і довільно задамо додатне число ε ($\varepsilon \to 0$); тоді знайдеться такий δ-окіл точки $x \to a$, що частина графіку функції $y = f(x)$, яка відповідає цьому околу, буде міститися в смузі, обмеженій прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. *Зрозуміло, що якщо при $x \to a$ функція має границю, то тільки одну, бо значення функції для значень x, які наближаються до a, повинні бути як завгодно близькі до якогось сталого числа і, отже, не можуть бути одночасно близькі до двох різних сталих чисел.*

Наближаючись до своєї границі, функція може залишатися більше за неї або менше за неї, а може набувати значень, з наближенням аргументу до граничної точки, то більші за неї, то менші, тобто коливаючись біля своєї границі; при цьому вона може приймати і значення , які дорівнюють границі.

Поняття про розкриття невизначеностей.

Розглянемо частку $\frac{f(x)}{g(x)}$ і припустимо, що обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ одночасно прямують до нуля. Тут ми стикаємося з зовсім особливою обставиною: хоча нам відомі границі $f(x)$ і $g(x)$, але про границю їх відношення – не знаючи самих цих функцій від x – ніякого загального твердження ми зробити не можемо. *Ця границя, в залежності від закону зміни обох функцій, може мати різні значення або навіть взагалі не існувати*. Таким чином, знання границь функцій $f(x)$ і $g(x)$ в даному випадку не дозволяє ще робити висновок про поведінку їх відношення: необхідно знати самі функції, тобто закон їх зміни разом з x, і безпосередньо досліджувати відношення $\frac{f(x)}{g(x)}$. Для того, щоб охарактеризувати цю особливість, кажуть, що коли $f(x) \to 0$ і $g(x) \to 0$, вираз $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляє невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Існують також інші види невизначеностей: $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $(0 \cdot \infty)$, (∞^0), $(\infty - \infty)$, (0^0), (1^∞).

Невизначеність $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ означає, що маємо відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$, де функції $f(x)$ і $g(x)$ при наближенні до точки a є нескінченно великими. Невизначеність $(0 \cdot \infty)$ означає, що маємо добуток деяких двох функцій, одна з яких при наближенні до a є нескінченно малою, а друга – нескінченно великою. Аналогічно може бути з'ясований зміст інших видів невизначеностей.

При обчисленні границь функцій часто доводиться мати справу з невизначеностями. Через те, що до них безпосередньо не можна застосовувати основні теореми про границі, то над цими виразами (функціями) доводиться виконувати різні перетворення (спрощення) з тим, щоб останні звести до таких, до яких можна вже застосувати основні теореми про границі. Загального способу, за допомогою якого можна було б розкрити невизначеність (знайти границю), поки не винайдено. Проте до окремих видів невизначеностей можна дати деякі вказівки.

Так, *при розкритті невизначеності* $\left(\frac{0}{0}\right)$ *доцільно в чисельнику і в знаменнику виділити різницю* $x-a$ (її називають критичним множником) *і поділити на неї (скоротити).* Тут a – точка, в якій знаходиться границя функції. Скорочувати на величину $x-a$ можна, бо хоч $x \to a$, але, згідно з означенням границі функції, $x \neq a$. Виділити різницю $x-a$ можна різними методами: групування членів і винесення спільного множника за дужки, розкладанням квадратного тричлена на множники, діленням многочлена на $x-a$ «кутом» (цей спосіб буде докладно розглядатися у наступних прикладах) та ін.

Друга чудова границя.

Розглянемо змінну величину $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, де n – зростаюча змінна величина, яка набуває значення з натурального ряду чисел 1, 2, 3, …

Границя змінної величини $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ називається *числом* e (читають: експонента): $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Число e – ірраціональне і тому не може бути точно виражено яким-небудь кінцевим десятковим дробом. Наближено воно дорівнює $e = 2,718...$.

Функція $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при x, яке прямує до нескінченності, прямує до границі e: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Границя дробово-раціональної функції при $x \to a$**.**

1. Знайти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Розв'язання. Підставивши спочатку значення $x=3$ до функції, бачимо, що чисельник і знаменник дробу при $x \to 3$ прямують до нуля. Маємо невизначеність виду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тому розкладаємо чисельник і знаменник на множники, виділяючи критичний множник $x-3$, на який і скорочуємо дріб (оскільки $x \neq 3$, а $x \to 3$):

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=\frac{3+3}{3}=2.$$

2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$.

Розв'язання. Тут теж маємо невизначеність виду $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Розв'яжемо це завдання двома способами.

I спосіб. Розкладемо на множники чисельник і знаменник дробу методом групування та винесення спільного множника за дужки:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^2(x+1)-(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=\frac{0}{2}=0.$$

II спосіб. Цей спосіб зручніше використовувати, якщо методом групування розкласти на множники не вдається. Поділимо чисельник і знаменник на критичний множник $x-1$ «кутом». Ділення многочлена на многочлен виконується по правилу ділення цілих чисел.

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3-x^2-x+1 & \underline{x-1} \\ \underline{x^3-x^2} & x^2-1 \\ -\,-x+1 & \\ \underline{-x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Ділення починаємо з ділення старших членів: $x^3 : x = x^2$. Записуємо результат x^2 в частку. Помножуємо дільник на x^2 і віднімаємо від діленого. Отримуємо перший залишок: $-x+1$. Далі старший член залишку ділимо на старший член дільника: $(-x):x=1$. Дописуємо результат в частку. Помножуємо дільник на 1 і віднімаємо з першого залишку. Отримуємо 0. Це означає те, що многочлен x^3-x^2-x+1 націло поділився на $x-1$, а частка від ділення – x^2-1.

Так само поділимо знаменник дробу на $x-1$:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\, x^3+x^2-x-1 & \underline{x-1} \\
\underline{\;x^3-x^2\qquad\quad} & x^2+2x+1 \\
\quad \_\, 2x^2-x+1 & \\
\quad \underline{2x^2-2x\;} & \\
\qquad\quad \_\, x-1 & \\
\qquad\quad \underline{x-1} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2-1)}{(x-1)(x+2x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{0}{2}=0.$

Завдання для самостійного розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-5x+3x^2}{3-4x+x^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3+x^2-7x-15}{x^2+3x-18}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-3x^2-2x}{2x^4-7x^2+x-6}$; 7) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^3+4x^2-5x-6}{2x^3-3x^2+4x+9}$.

Відповіді: 1) $\dfrac{5}{2}$; 2) $\dfrac{5}{13}$; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{7}{9}$; 5) $\dfrac{26}{9}$; 6) $\dfrac{18}{37}$; 7) $-\dfrac{1}{4}$.

Границя дробово-раціональної функції при $x\to\infty$.

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

Розв'язання. Це невизначеність виду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Розділимо чисельник і знаменник дробу на старший степінь x, тобто на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{7}{x}-\dfrac{2}{x^3}}{6-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{2+0-0}{6-0+0}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Цей приклад можна розв'язати простіше, скориставшись лише правилом, за яким необхідно порівняти старші степені чисельника і знаменника. В даному прикладі степені чисельника і знаменника рівні, отже

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Завдання для здобувачів:

Як Ви бачите, другий спосіб раціональніший за перший, і тому рекомендуємо користуватися ним і надалі, але поміркуйте, як переконатись у справедливості цього правила.

Завдання для самостійного розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5+7x^3-4}{3x^5-3x^2+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2-5x-7}{2x^2+x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+2}{6x^3+2x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2+5x^5}{2x+3x^2-x^5}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x^2+8}{7x^5-3x^2-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^4-2x+5}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x-5-3x^5}{2x^2-3-x^6}$.

Відповіді: 1) 2; 2) 4; 3) ∞; 4) –5; 5) 0; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{2}{9}$; 8) 0.

Границя ірраціональних функцій.

1. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

Розв'язання. Обчислення цієї границі майже не відрізняється від обчислення попереднього прикладу. Тут необхідно розділити чисельник і знаменник на старший степінь x, тобто на x^4. Або скористатися тим же правилом, як і в попередньому прикладі:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^7}+\dfrac{4}{x^8}}}=\frac{3}{1}=3.$$

Завдання для самостійного розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{16+x^4}+x}{2x^2-7}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^6+27}-2}{x^2+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4(x^2+1)}{x^2+\sqrt[4]{x^8-1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{7-3x+4x^2}}{5x-2}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^4-1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt[5]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^3-1}}$ (*підказка: скоротити дріб на* x).

Відповіді: 1) $\frac{1}{2}$; 2) ∞; 3) 2; 4) $\frac{2}{5}$; 5) 1.

2. Знайти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$.

Розв'язання. Необхідно помножити чисельник і знаменник на вирази, спряжені заданим у чисельнику і у знаменнику, щоб за формулою різниці квадратів позбутися квадратних коренів, тобто на $\sqrt{2x+3}+1$ і $\sqrt{5+x}+2$, а потім скоротити на критичний множник . Отже,

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}=\lim_{x\to -1}\frac{(2x+3-1)(\sqrt{2x+3}+1)}{(5+x-4)(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)(\sqrt{2x+3}+1)}{(x+1)(\sqrt{5+x}+2)}=\frac{2\cdot 4}{2}=4$$

Завдання для самостійного розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}{x-4}$; 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.

Відповіді: 1) 1; 2) $-2\sqrt{6}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Друга чудова границя.

Знайти

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}}$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину у дужках.

Це можна зробити трьома способами:

розділити чисельник на знаменник,

записати чисельник у вигляді: $x-2=x+4-4-2=x+4-6$ (ми додали і відняли у ньому 4), за потреби згрупувати чисельник та почленно розділити на знаменник: $\frac{x-2}{x+4}=\frac{(x+4)-6}{x+4}=1+\frac{-6}{x+4}$,

додати до дробу 1 та, щоб вираз не змінив свого значення, відняти 1:

$$1+\frac{x-2}{x+4}-1=1+\frac{x-2}{x+4}-\frac{x+4}{x+4}=1+\frac{x-2-(x+4)}{x+4}=1+\frac{-6}{x+4}.$$

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}}$. Таким чином, при $x\to\infty$ дана функція представляє собою степінь, основа якого прямує до 1. Перетворимо функцію таким чином, щоб використати другу чудову границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-6}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-6}}\right]^{\frac{-6}{x+4}\cdot\frac{x}{x+2}}.$$

Оскільки $\frac{-6}{x+4}\to 0$ при $x\to\infty$ та показник дробу є оберненим до виразу $\frac{-6}{x+4}$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{x+4}\right)^{\frac{x+4}{-6}} = e$ (за дугою чудовою границею). Взявши до уваги, що $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-6\cdot x}{(x+4)\cdot(x+2)} = 0$, отримаємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+4}\right)^{\frac{x}{x+2}} = e^0 = 1$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x]$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями логарифмів, а також другою чудовою границею, матимемо:

$$\lim_{x\to\infty}(3x+5)[\ln(x+5)-\ln x] = \lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+5} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+5} = \ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x+5} =$$

$$= \ln\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{x}3x+5} = \ln e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5(3x+5)}{x}} = \ln e^{15} = 15.$$

Завдання для самостійного розв'язання:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-3}\right)^{5x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}(4x-5)[\ln(2x-5)-\ln(2x+3)]$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+9x^2)}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{4x-3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-x}{2-3x}\right)^{2x-7}$.

Відповіді: 1) e^5; 2) –16; 3) 3; 4) e^4; 5) 0.

Приклад 5.1. Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$, в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$.

Розв’язання. а) Підстановка граничного значення аргументу приводить до невизначеного виразу і має вигляд $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Для усунення цієї невизначеності розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники та скоротимо дріб на множник $(x+3)$. Таке скорочення тут можливе, тому що множник $(x+3)$ не дорівнює нулю при $x \to -3$:

$$\lim_{x\to -3} \frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(4x-1)(x+3)}{(3x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -3} \frac{4x-1}{3x+1} = \frac{4\cdot(-3)-1}{3\cdot(-3)+1} = \frac{13}{8}.$$

б) При $x \to \infty$ вираз $\sqrt{x^2+3x} - x$ дає невизначеність вигляду $\infty - \infty$. Для її усунення помножимо та розділимо цей вираз на $\sqrt{x^2+3x} + x$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+3x} + x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1} = \frac{3}{2}.$$

в) При $x \to \infty$ вираз $\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$ є невизначеність вигляду 1^{∞}. Для усунення цієї невизначеності зобразимо основу степеня у вигляді суми 1 та нескінченно малої при $x \to \infty$ величини та використаємо формулу другої чудової границі:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Тоді маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4}{2x+1}\cdot(4x+5)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{-16x-20}{2x+1}} = e^{-8}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте визначення поняття функції.

2. Що називається областю визначення функції? Областю значень функції?

3. Перелічить основні елементарні функції. Назвіть їх загальні властивості.

4. Що називається границею функції?

5. Яка величина називається нескінченно малою? Нескінченно великою?

6. Напишіть формулу другої чудової границі.

7. Запишіть основні невизначеності, які зустрічаються при знаходженні границь функцій.

6. Похідна функції. Застосування похідної при дослідженні функцій

Розглянемо похідну функції. Нехай задана функція $y = f(x)$. Тоді швидкість її зміни, що відноситься до одиниці зміни аргументу, при значенні аргументу x дорівнює

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Ця швидкість називається похідною, що взята від змінної y за змінною x. Іншими словами, похідна – це границя приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. З огляду на те, що при різних значеннях x указана швидкість (якщо говорити взагалі) є різною, то похідна представляє собою нову функцію від x, яку прийнято позначати $y' = f'(x)$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$ і будемо вважати, що як вона сама так і її похідна не мають розривів. З того, що $y' = tg\alpha$, випливає, що функція зростає у кожному інтервалі, в якому її похідна додатна. Іншими словами, якщо швидкість зміни якої-небудь величини додатна, то ця величина зростає, а якщо швидкість від'ємна, то величина спадає. Так як похідна при неперервному переході від додатних значень до від'ємних, має пройти через нульове значення, то точки, в яких інтервал зростання змінюється на інтервал спадання мають власну назву. Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються стаціонарними.

Стаціонарні точки і точки, в яких похідна першого порядку не існує, називаються критичними. З метою встановлення того, чи є дана критична точка точкою екстремуму (екстремальною точкою), необхідно проводити дослідження. Наприклад, якщо похідна при переході через критичну точку змінює знак, то така критична точка є точкою екстремуму, якщо знак похідної не змінюється, то точка, що розглядається, не є екстремальною.

Дія знаходження похідних називається ***диференціюванням***.

Приклад 6.1. а) Знайти похідну функції $y = f(x) = 2^{\sin x}$.

Маємо складну функцію: $y = f(u) = 2^u$, де $u = \varphi(x) = \sin x$. Для застосування формули похідної від складеної функції знайдемо попередньо y'_u та u'_x за допомогою таблиці похідних від елементарних функцій:

$$y'_u = (2^u)' = 2^u \ln 2; \;\; u_x{}' = cos x.$$

Остаточно отримаємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 2^u \ln 2 \cdot \cos x \cdot$$

б) Знайти похідну функції:

$$y = \cos^4 x.$$

Положимо $\cos x = u$, тоді $y = u^4$; $y'_u = 4u^3$; $u'_x = -\sin x$. Знаходимо:

$$y'_x = -4u^3 \cdot \sin x = |u = \cos x| = -4\cos^3 x \cdot \sin x.$$

Приклад 6.2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \ln\left(2 + \sin 3x\right)$; б) $y = \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 1\right)^4$.

Розв'язання: Послідовно застосувавши правило диференціювання складної функції, правила та формули диференціювання, маємо:

а) $$y' = \left[\ln\left(2 + \sin 3x\right)\right]' = \frac{1}{2 + \sin 3x}\left(2 + \sin 3x\right)' =$$

$$= \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot \left[2' + \left(\sin 3x\right)'\right] = \frac{1}{2 + \sin 3x} \cdot \cos 3x \cdot \left(3x\right)' = \frac{3\cos 3x}{2 + \sin 3x};$$

б) $$y' = \left[\left(3^{arctg\sqrt{x}} + 1\right)^4\right]' = 4 \cdot \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 1\right)^3 \cdot \left(3^{arctg\sqrt{x}} + 1\right)'$$

$$y' = 4\cdot\left(3^{arctg\sqrt{x}}+1\right)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\left(arctg\sqrt{x}\right)'$$

$$y' = 4\cdot\left(3^{arctg\sqrt{x}}+1\right)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$y' = \left(3^{arctg\sqrt{x}}+1\right)^3\cdot 3^{arctg\sqrt{x}}\cdot\frac{\cdot 2\ln 3}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Завдання для самостійного розв'язання:

Обчислити похідні функцій:

а) $y = \frac{1}{x^2} - 5\sqrt[5]{x^9} + \frac{12}{\sqrt[6]{x}}$; б) $y = x^7 arctgx$;

в) $y = \frac{e^x}{sinx}$; г) $y = \sqrt[3]{ln2x}$.

Приклад 6.3. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Розв'язання: Дослідження функції проведемо за схемою:

- знайдемо область визначення функції;
- дослідимо функцію на неперервність;
- дослідимо функцію на парність та непарність;
- знайдемо інтервали зростання та спадання функції та точки екстремуму;
- знайдемо інтервали опуклості та вогнутості кривої та точки її перегину;
- знайдемо асимптоти кривої;
- побудуємо графік функції.

1. Функція визначена при всіх значеннях аргументу, крім $x=1$ (оскільки неможна ділити на нуль).

2. Функція неперервна на всій області визначення, тобто на інтервалах $(-\infty;1)$ та $(1;\infty)$.

3. Оскільки область визначення функції не є симетричною, то функція не є ні парною, ні непарною. Перевіримо для будь-яких x з області визначення функції, окрім $x = \pm 1$, чи виконуються умови парності або непарності, тобто $f(-x) = f(x)$ чи $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \frac{-2x-1}{(-x-1)^2};\ -f(x) = -\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

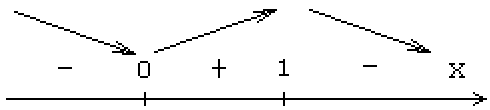
Отже, $f(-x) \neq f(x)$ та $f(-x) \neq -f(x)$, тобто і для означеної області визначення задана функція не є ні парною, ні непарною.

4. Для дослідження функції на екстремум знайдемо її першу похідну:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - (2x-1) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3},$$

та прирівняємо до нуля: $y' = 0$ при $x = 0$, а y' не існує при $x = 1$. Маємо дві критичні точки: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Але точка $x_2 = 1$ не належить до області визначення функції, екстремуму в ній бути не може. Розіб'ємо числову вісь на три інтервали $(-\infty; 0)$, $(0;1)$, $(1;\infty)$. У першому та третьому інтервалах перша похідна від'ємна, отже, задана функція тут спадає; у другому інтервалі похідна додатна і функція зростає. При переході через точку $x = 0$ перша похідна змінює знак з мінуса на плюс, тому в цій точці функція має мінімум: $y_{min} = y(0) = -1$. Отже, $A(0; -1)$ – точка мінімуму.

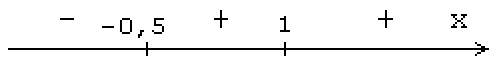
На рисунку знаками +, – вказані інтервали знакосталості похідної y', а стрілочками – відповідно зростання та спадання досліджуваної функції.



5. Для визначення точок перегину графіка функції та інтервалів вогнутості та опуклості кривої знайдемо другу похідну:

$$y'' = -\frac{2(x-1)^3 - 3(x-1)^2 \cdot (-2x)}{(x-1)^6} = \frac{4x+2}{(x-1)^4}.$$

$y'' = 0$ при $x = -\frac{1}{2}$ та y'' не існує при $x = 1$. Розіб'ємо числову вісь на три інтервали $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, $(1;\infty)$.



На першому інтервалі друга похідна y'' від'ємна, отже, дуга досліджуваної кривої опукла; на другому та третьому інтервалах y'' додатна і графік є вогнутим. При переході через точку $x = -\frac{1}{2}$ y'' змінює свій знак, тому $x = -\frac{1}{2}$ абсциса точки перегину. Звідси $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ – точка перегину графіка функції.

6. $x = 1$ точка розриву функції, до того ж

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=\infty .$$

Тоді за визначенням пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою графіка (асимптота кривої – це пряма, до якої крива при віддаленні в нескінченність наближається як завгодно близько.).

Для визначення рівняння похилої асимптоти (оскільки вертикальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти) $y=kx+b$ скористуємося формулами:

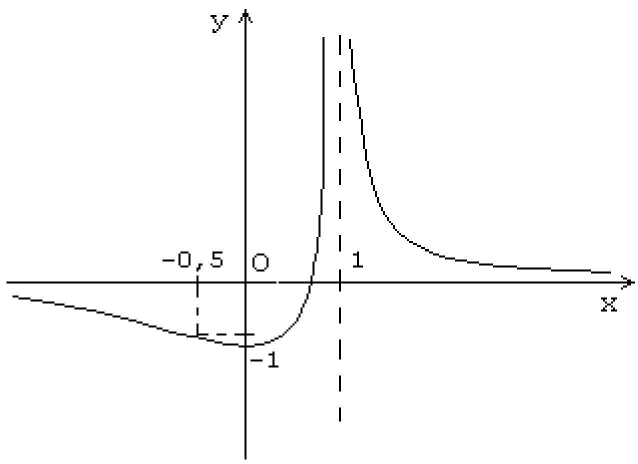
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right].$$

Тоді

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Звідси пряма $y=0$ є горизонтальною асимптотою графіка досліджуваної функції, показаного на рисунку.



Запитання для самоперевірки

1. Що називається похідною функції?

2. Який геометричний зміст похідної?

3. Знайдіть у доступних для вас джерелах основні правила диференціювання та формули диференціювання основних елементарних функцій, рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці.

4. Як шукають точки екстремуму?

5. Як визначають опуклість та вогнутість кривої, точки перегину графіка функції?

6. Що називається асимптотою кривої? Як знайти вертикальні та похилі асимптоти?

7. Опишіть схему дослідження функції та побудови її графіка.

Застосування похідної при складанні економічних моделей.

Розглянемо перший етап побудови математичної моделі економічної рівноваги за роботою Бондаренко Анастасії, учениці-члена Харківського територіального відділення Малої академії наук України (2019 рік), яка використала її при моделюванні рівноваги ринкової економіки для фірми, наприклад, «Янь».

Баланс між попитом і пропозицією має місце не при довільних, а саме при ринкових цінах, що означає, зокрема, платоспроможність попиту. Одне з важливих завдань економічної науки – визначення умовної рівноваги економіки, і в тому числі рівноважних ринкових цін.

Найбільш прості математичні моделі економічної рівноваги будуються при наступних припущеннях [Океанова З.К. Основы экономики. Учебное пособие / Океанова З.К. – М.: Инфра-М Форум, 2016. – 287 с. та Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посібник / Вітлінський В.В. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с.]:

1) досконала ринкова конкуренція, що означає відсутність як великих виробничих корпорацій (тим більше монополій), так і об'єднань працівників, які можуть диктувати свої умови для всієї системи;

2) незмінність виробничих можливостей системи: обладнання, виробничі приміщення, технології, що не змінюються з часом;

3) незмінні в часі економічні інтереси партнерів: підприємці не намагаються збільшити свій прибуток, робітники – платню, інвесторів влаштовують відсотки, одержувані за цінними паперами і т. і.

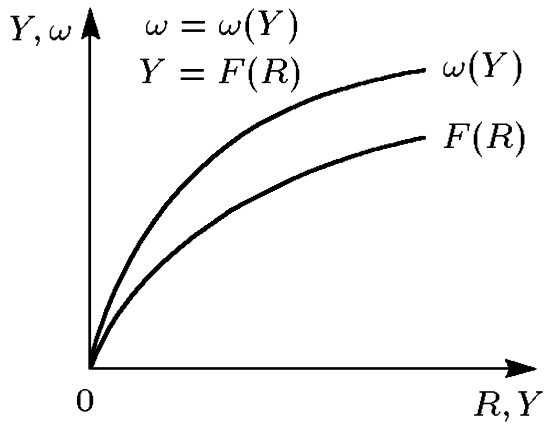
Треба відзначити, що відповідають цим припущенням моделі, які описують досить окремий випадок «застиглої» в часі ідеальної ринкової економіки. Однак вони дають відповідь на питання про можливість існування економічної рівноваги, що формується із ринкового «хаосу» і пов'язують між собою основні показники економічної системи. Одна з таких – модель Кейнса – розглядає як агентів наймачів і найманих, споживачів і зберігачів, виробників та інвесторів, що діють на ринках робочої сили, продуктах та грошах, тобто тих, хто розподіляє та обмінює ці товари (труд, гроші, продукти) між собою.

Перший макропоказник системи – національний дохід Y, що являється єдиним (для простоти) продуктом, виробленим в одиницю часу. Цей продукт виробляється виробничим сектором економіки, а його величина задається функцією F, яка залежить від кількості та якості ресурсів, складу основних фондів і числа зайнятих працівників R (другий показник). Відповідно до припущення в стані рівноваги виробнича функція F, а з нею і продукт Y визначається лише зайнятістю, тобто:

$$Y = F(R). \tag{2.1}$$

Відносно $F(R)$ зазвичай вважається, що $F(0) = 0$, $F'(R) > 0$, $R > 0$ і $F''(R) < 0$ при $R > 0$ [Самарский А.А. Математическое моделирование / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматгиз, 2001. – 320 с.].

Функція має властивість «насичення»: зі зростанням R випуск зростає все повільніше. Такий підхід цілком виправданий, оскільки при надто великій кількості зайнятих на виробництвах, кількості роботи на фронті буде не вистачати. Наприклад, одна кілька старателів, що знайшли золоту жилу, швидко і без перешкод досягнуть своєї максимальної продуктивності, але при великій кількості робочих вони почнуть заважати один одному та їх унікальна продуктивність зменшиться; нарешті, при великій кількості старателів видобування золота взагалі перестане зростати, так як знов прибуваючі не зможуть підступитись до місця розробки.



Графік національного доходу.

Співвідношення (2.1) дає зв'язок між ринками праці (R) і продукту (Y). Додаткове співвідношення визначається за допомогою одного з основних постулатів класичної політекономії:

4) заробітна плата s працівника дорівнює вартості продукту, що була б втрачена при зменшенні зайнятості на одну одиницю, тобто заробітна плата дорівнює граничному продукту праці.

Зауважимо, що в постулаті 4) не враховуються (вважаються малими) інші витрати, які відпали б в результаті скорочення одного робочого місця (витрати на ресурси, обладнання і т. д.). Таким чином, з постулату отримуємо:

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s\ , \tag{2.2}$$

де $\Delta Y^{(1)}$ – кількість продукту, втрачена при зменшенні зайнятості на одиницю, p – ціна продукту (так що зліва в даній рівності записана величина втраченої вартості). Якщо зайнятість змінилася на величину ΔR, то з останньої рівності, очевидно, ми маємо:

$$\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R\ , \tag{2.3}$$

де $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R$ – вартість, втрачена або отримана при зміні числа працівників на ΔR. Вважаючи ΔR і ΔY малими в порівнянні з R і Y, перепишемо останню рівність у диференціальній формі:

$$\frac{dY}{dR} = \frac{s}{p} \tag{2.4}$$

або, приймаючи до уваги (2.1):

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \tag{2.5}$$

Оскільки $F(R)$ задана (а з нею відома функція $F'(R)$), то при відомих показниках s і p з формули (2.5) можна знайти рівень зайнятості R, а з (2.1) і величину продукту Y. Нагадаємо: цей рівень відповідає числу працівників, згодних працювати за дану зарплату при даних цінах й інших характеристиках системи, а не взагалі можливої кількості найманих робітників. Передбачається, що для забезпечення рівноважного рівня зайнятості завжди знайдеться достатня кількість бажаючих працювати на існуючих умовах.

7. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$, якщо у будь-якій точці цього відрізка функція $F(x)$ диференційована та має похідну $F'(x)$, яка дорівнює $f(x)$.

Якщо функція $f(x)$ має первісну $F(x)$, то вона має нескінченну множину первісних, які відрізняються одна від одної на сталу C, тобто $F(x) + C$.

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається сукупність усіх ї первісних і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Властивості невизначеного інтеграла:

1. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює тій самій функції, до якої додається будь-яка стала.

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Сталий множник виноситься за знак інтеграла.

$\int c f(x)dx = c\int f(x)dx$, де $c = const$.

4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі їх інтегралів.

$$\int \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$ 2. $\int \dfrac{dx}{x} = ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C;$ 4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$;

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$; 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C$.

Безпосереднє інтегрування базується на застосуванні табличних інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла та найпростіших перетворень підінтегрального виразу. Наприклад:

$$\int\left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{x} + 4e^x\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{3}}dx - 3\int\frac{dx}{x} + 4\int e^x dx =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - 3\ln|x| + 4e^x + C.$$

Інтегрування частинами.

Якщо є дві функції від змінної x $u(x)$ та $v(x)$, то

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Для того, щоб скористатися формулою інтегрування частинами необхідно виконати таку послідовність дій:

1) розбити підінтегральний вираз на два множники u та dv;

2) знайти du диференціюванням $u(x)$;

3) знайти v інтегруванням dv.

4) Важливою умовою правильного використання формули інтегрування частинами є вибір множників u та dv. Загальних вказівок на цей рахунок немає, але існують правила для окремих випадків:

1. Якщо підінтегральний вираз містить в собі добуток функцій типу a^x, $\cos x$, $\sin x$ на степеневу функцію, то за u треба брати степеневу функцію.

2. Якщо підінтегральний вираз є добутком логарифмічної або оберненої тригонометричної функції на степеневу, то за u треба брати логарифмічну або обернену тригонометричну функції.

Приклад 7.1. Знайти інтеграли методом інтегрування частинами:

а) $\int xe^x dx$; $u=x$, $dv=e^x dx$, тоді $du=dx$, $v=\int e^x dx=e^x$.

Остаточно

$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$$

б) $\int x\ln x dx$, $u=\ln x$, $dv=xdx$, тоді $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$.

Остаточно

$$\int x\ln x dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\int\frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{2}\int xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln x-\frac{1}{4}x^2+C.$$

Інтегрування за допомогою підстановки.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі здійснюється за допомогою підстановок двох типів: $x=\varphi(t)$ або $t=\alpha(x)$.

Введення нової змінної дозволяє привести інтеграл до більш простого або до табличного. Для того, щоб виконати заміну змінної, треба весь підінтегральний вираз $f(x)dx$ виразити через нову змінну t, а після знаходження нового невизначеного інтеграла знову повернутися до старої змінної x.

Приклад 7.2. Знайти інтеграл за допомогою методу підстановки

$$\int\cos(2x+1)dx.$$

Зробимо підстановку $2x+1=t$. Візьмемо диференціали від обох частин рівності $2dx=dt$, тобто $dx=\frac{1}{2}dt$. Замінимо $2x+1$ та dx на їх вирази через t. Тоді початковий інтеграл буде мати вигляд:

$$\int \cos(2x+1)dx=\int \cos t\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int \cos t\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+C=\frac{1}{2}\sin(2x+1)+C.$$

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте визначення первісної функції.
2. Що називається невизначеним інтегралом від заданої функції?
3. Запишіть загальні властивості невизначеного інтеграла.
4. Запишіть формули таблиці основних інтегралів.
5. В чому зміст метода інтегрування заміною змінних.
6. Запишіть формулу інтегрування частинами для невизначеного інтеграла.

8. Визначений інтеграл. Невласні інтеграли. Застосування визначеного інтеграла в економіці

Визначений інтеграл позначається

$$\int_a^b f(x)dx,$$

де a і b – відповідно нижня та верхня межі інтегрування.

Властивості визначеного інтегралу:

1.Значення визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt.$$

2.Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3.Якщо переставити межі інтегрування, то визначений інтеграл змінить знак

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

4.Якщо точка c належить відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5.Сталий множник виноситься за знак визначеного інтеграла

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

6.Визначений інтеграл від суми двох функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від кожної функції

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

7.Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює приросту первісної від підінтегральної функції на відрізку інтегрування.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Остання властивість називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Приклад 8.1. Обчислити інтеграл:

$$\int_{-1}^{2}\left(4x^3 + 2x\right)dx = 4\int_{-1}^{2} x^3 dx + 2\int_{-1}^{2} x dx = \left(x^4 + x^2\right)\Big|_{-1}^{2} = 20 - 2 = 18.$$

Обчислення визначених інтегралів за допомогою заміни змінної.

Нехай треба обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t)$. Припустимо, що значенню $x = a$ відповідає значення $t = \alpha$, а $x = b$ – значення $t = \beta$, тобто $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Тоді при виконанні таких умов:

1) при $\alpha \le t \le \beta$ значення функції $\varphi(t)$ не виходить за межі відрізка $[a;b]$,

2) функція $\varphi(t)$ та її похідна $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha;\beta]$,

виконується формула заміни змінних у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt.$$

Приклад 8.2. Обчислити інтеграл: $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Введемо заміну $x = e^t$, тоді при $x=1$ $t=0$, при $x=e$ $t=1$,

$$\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx = \int_0^1 \frac{t^3}{e^t}e^t\,dt = \left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Обчислення визначеного інтеграла за допомогою інтегрування частинами.

Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервні разом зі своїми похідними на відрізку $[a;b]$, то виконується формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Послідовність дій та правила розподілу підінтегрального виразу на функції $u(x)$ та $v(x)$ залишаються такими самими, як і для інтегрування частинами невизначеного інтеграла.

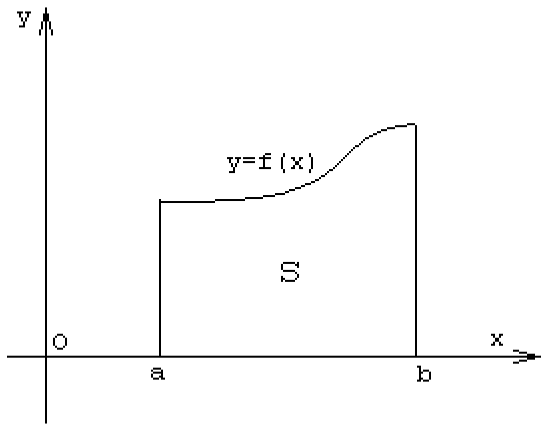
Приклад 8.3. Обчислити інтеграл:

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx,\quad u=x,\quad dv=\sin dx,\ \text{тоді}\ \ du=dx,\quad v=\int\sin x\,dx=-\cos x,$$

$$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos x)dx = \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

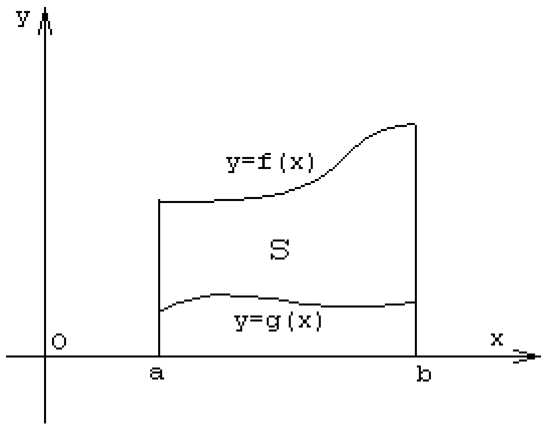
Геометричне застосування визначеного інтеграла. Обчислення площ фігур.

Площа криволінійної трапеції, що обмежена зверху графіком функції $y=f\left(x\right)$, справа та зліва, відповідно, прямими $x=b$ і $x=a$, знизу – віссю Ох, знаходиться за формулою:



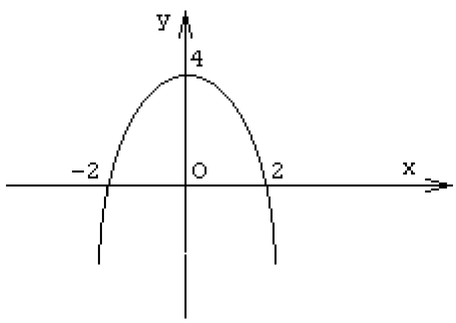
$$S=\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b y\,dx.$$

У загальному випадку площа криволінійної трапеції, яка обмежена зверху та знизу графіками функцій $y=f\left(x\right)$ та $y=g\left(x\right)$ відповідно, а зліва та справа – прямими $x=b$ і $x=a$, знаходиться за формулою:



$$S=\int_a^b \left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)dx.$$

Приклад 8.4. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої прямою $y=x+4$ та параболою $y=\frac{1}{3}\left(x-2\right)^2$.



Спочатку знаходимо абсциси точок перетину прямої та параболи

$$x+4=\frac{1}{3}\left(x-2\right)^2,\;\; x^2-7x-8=0,\;\; x_1=-1,\;\; x_2=8.$$

$$S=\int_{-1}^{8}\left(x+4-\frac{1}{3}\left(x-2\right)^2\right)dx=\frac{1}{3}\int_{-1}^{8}\left(7x+8-x^2\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{7}{2}x^2+8x-\frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_{-1}^{8}=40{,}5.$$

Невласні інтеграли з нескінченними межами та інтеграли від необмежених функцій. Збіжні та розбіжні інтеграли.

I. Невласні інтеграли з нескінченними межами.

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена для усіх $x>0$ та інтегруєма на будь-якому відрізку $[a,A]$, тоді границя $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx$ називається невласним інтегралом у межах від a до $+\infty$ і позначається $\int_a^\infty f(x)dx$. Так саме визначаються інтеграли

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_A^c f(x)dx + \lim_{B\to-\infty}\int_c^B f(x)dx.$$

Якщо наведені вище границі існують, то відповідні інтеграли називаються збіжними. У зворотному випадку – розбіжними.

Приклад 8.5. Перевірити на збіжність наступний інтеграл:

$$\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{A\to\infty}\int_{e^2}^{A}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_{e^2}^{A} = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\ln^2 A}\right) = \frac{1}{8},$$

тобто інтеграл збіжний.

Приклад 8.6. Перевірити на збіжність наступний інтеграл:

$$\int_0^\infty x\sin s dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x\sin x dx = \lim_{A\to\infty}\left(-x\cos x\,\Big|_0^A + \int_0^A \cos x dx\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-A\cos A + \sin A\right).$$

Остання границя не існує, тобто інтеграл розбіжний.

II. Невласні інтеграли від необмежених функції.

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена при $a\le x<b$, інтегрована на будь-якому відрізку $[a,b-\varepsilon]$, $0<\varepsilon<b-a$ та необмежена зліва від точки b, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо ця границя існує, то невласний інтеграл збіжний, в протилежному випадку – розбіжний.

Аналогічно, якщо функція $f(x)$ необмежена справа від точки a, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Нарешті, якщо функція $f(x)$ необмежена в деякій внутрішній точці c відрізку $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to+0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Приклад 8.7. Перевірити на збіжність наступний інтеграл:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{1+\varepsilon}^{e} \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right) = \frac{3}{2},$$

маємо збіжний інтеграл.

Приклад 8.7. Перевірити на збіжність наступний інтеграл:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{\pi/2-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0} \ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{4}\right) = \infty,$$

отже, інтеграл розбіжний.

Запитання для самоперевірки

1. Запишіть загальні властивості визначеного інтеграла.

2. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца.

3. Запишіть формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

4. Яким чином виконується заміна змінної у визначеному інтегралі?

5. Який геометричний зміст визначеного інтеграла?

6. Дайте визначення інтеграла з нескінченними границями інтегрування.

7. Сформулюйте поняття невласного інтеграла від розривної функції.

Застосування визначеного інтеграла в економіці.

Застосування визначеного інтеграла в економіці розглянемо на прикладі організації успішної рекламної кампанії за роботою Руднєвої Олександри, учениці-члена Харківського територіального відділення Малої академії наук України (2019 рік).

Успішна рекламна кампанія частіше всього вимагає достатньо значних капіталовкладень. Це, звичайно, вимагає ретельних обрахунків як вкладених в неї грошей, так і отриманого прибутку. Одним з найбільш надійних методів розв’язання даної задачі є дослідження математичної моделі, яка описує дане питання [Вітлінський В.В. Моделювання економіки: навч. посібник / Вітлінський В.В. – К.: КНЕУ, 2003. – 408 с. та Самарский А.А. Математическое модели-рование / Самарский А.А., Михайлов А.П. – М.: Физматгиз, 2001. – 320 с.].

Отже, фірма починає рекламувати новий товар або послугу. При цьому прибуток від майбутніх продажів повинен з лишком покривати витрати на рекламну кампанію. Зрозуміло, що спочатку витрати можуть перевищувати прибуток, оскільки лише мала частина потенційних покупців буде проінформована про новинку. Потім, при збільшенні числа продажів, вже можливо розраховувати на помітний прибуток, і, нарешті, наступить момент, коли ринок насититься, і рекламувати товар далі стане безглуздо.

Математична модель рекламної кампанії ґрунтується на таких основних припущеннях. Вважається, що величина $\frac{dN}{dt}$ – швидкість зміни з часом числа споживачів, які дізналися про товар і готових купити його (t – час, що минув з початку рекламної кампанії, $N(t)$ – число вже інформованих клієнтів), пропорційна кількості покупців, які не чули про нього, тобто величині $\alpha_1(t)\big(N_0 - N(t)\big)$, де

N_0 - загальне число потенційних платоспроможних покупців,

$\alpha_1(t) > 0$ характеризує інтенсивність рекламної кампанії (фактично пов’язана з витратами на рекламу в даний момент часу).

Передбачається також, що споживачі, які дізнались про товар тим чи іншим чином поширюють отриману інформацію серед необізнаних, виступаючи як би додатковими рекламними «агентами» фірми. Їх внесок дорівнює величині $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ і тим більше, чим більше число агентів. Величина $\alpha_2(t) > 0$ характеризує ступінь спілкування покупців між собою (вона може бути встановлена, наприклад, за допомогою опитувань).

Таким чином, швидкість зміни кількості покупців буде залежати від тих, хто бачив рекламу, плюс тих, хто розказав про це своїм друзям. В результаті отримуємо рівняння

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)]\big(N_0 - N(t)\big). \tag{1}$$

При $\alpha_1(t) \gg \alpha_2(t)N(t)$ з (1) виходить модель типу моделі Мальтуса

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)\big(N_0 - N(t)\big),$$

при протилежній нерівності – рівняння логістичної кривої

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(t)N(t)\big(N_0 - N(t)\big).$$

Отримана аналогія цілком зрозуміла, тому що при побудові даної моделі і моделі зростання чисельності популяції використовувалася одна і та ж ідея «насичення»: швидкість росту з часом будь-якої величини пропорційна добутку поточного значення цієї величини $N(t)$ на різницю $N_0 - N(t)$ між її рівноважним (популяція) або граничним (покупці) та поточним значеннями.

Аналогія між обома процесами закінчується, якщо в якійсь момент часу величина $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)$ стає нульовою або навіть від'ємною (для цього необхідно, щоб один або обидва коефіцієнта $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ стали від'ємними). Подібний негативний ефект досить часто зустрічається в рекламних кампаніях різного роду і повинен спонукати їх організаторів або змінити характер реклами, або зовсім відмовитися від подальшої пропаганди. Заходи по збільшенню популярності товару можуть, в залежності від значень величин $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$, направлятися на поліпшення результатів як прямої (параметр $\alpha_1(t)$), так і непрямої (параметр $\alpha_2(t)$) реклами.

Модель (1) позбавлена очевидного недоліку, властивого логістичному рівнянню. Дійсно, вона не має рішень, які звертаються в нуль в кінцевий момент часу. Стосовно до реклами це означало б, що частина покупців ще до початку кампанії вже знає про новий товар. Якщо ж розглянути модель (1) в околі точки $N(t = 0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ – момент початку кампанії), вважаючи, що $N \ll N_0$, $\alpha_2(t)N \ll \alpha_1(t)$ то рівняння (1) приймає вигляд

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t)N_0$$

і має рішення, яке знаходиться прямим інтегруванням:

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \tag{2}$$

що задовольняє природній початковій умові при $t = 0$.

З (2) відносно легко вивести співвідношення між рекламними витратами і прибутком на самому початку кампанії. Позначимо через p величину прибутку від одиничного продажу, якою б вона була без витрат на рекламу. Вважаємо для простоти, що кожен покупець купує лише одну одиницю товару. Коефіцієнт $\alpha_1(t)$ за своїм змістом – число рівнозначних рекламних дій в одиницю часу (наприклад, розклеювання однакових афіш). Через s позначимо вартість елементарного акту реклами. Тоді сумарний прибуток є

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt, \tag{3}$$

а вироблені витрати

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt. \tag{4}$$

Прибуток перевищує витрати за умови $pN_0 > s$, і якщо реклама є дієвою і недорога, а ринок досить ємний, то виграш досягається з перших же моментів кампанії (в реальності між оплатою реклами, рекламною дією і наступною покупкою має місце так званий ***лаг*** – тимчасова затримка, яка може бути врахована в більш повних моделях). При не дуже ефективній або дорогій рекламі фірма на перших кроках зазнає збитків. Однак ця обставина, взагалі кажучи, не може служити підставою для припинення реклами. Дійсно, вираз (3) і отримана з його допомогою умова $pN_0 > s$ справедливі лише при малих значеннях $N(t)$, коли функції P і S зростають з часом за однаковими законами. При збільшенні $N(t)$ відкинуті в (1) члени стають помітними, зокрема посилюється дія непрямої реклами. Тому функція $N(t)$ може стати більш «швидкою» функцією часу, ніж у формулі (3). Цей нелінійний ефект в зміні величини $N(t)$ при незмінному темпі зростання витрат дає можливість компенсувати фінансову невдачу початкової стадії кампанії.

Пояснимо це твердження в окремому випадку рівняння (1) з постійними коефіцієнтами α_1, α_2. Заміною $\overline{N} = \alpha_1/\alpha_2 + N$ воно зводиться до логістичного рівняння

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}(\bar{N}_0 - \bar{N}), \bar{N}_0 = \alpha_1/\alpha_2. \quad (5)$$

Його інтегрування дає розв'язок:

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_0[1 + (\bar{N}_0 \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1)e^{-\bar{N}_0 \alpha_2 t}]^{-1}. \quad (6)$$

При цьому $\bar{N}(0) = \alpha_1/\alpha_2$, так що $N(0) = 0$, і початкова умова виконується. З (5) видно, що похідна функції $\bar{N}(t)$, а звідси і функції $N(t)$ може при $t > 0$ бути більше її початкового значення. Дослідження виразу (5) на екстремум показує, що максимум похідних досягається при $\bar{N} = \bar{N}_0/2$,

$N = (\alpha_1/\alpha_2 + N_0)/2$:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_{max} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_{max} = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^2}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}. \quad (7)$$

У цей період поточний прибуток, тобто прибуток, що одержується в одиницю часу, має величину

$$P_{max} = \frac{pdN}{dt} = p\alpha_2 \frac{(\alpha_1/\alpha_2 + N_0)^2}{4}. \quad (8)$$

Віднімаючи з P_{max} початковий поточний прибуток

$P_0 = p(dN/dt)_{t=0} = p\alpha_1 N_0$ (див. (2)), отримуємо

$$P_{max} - P_0 = p\frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4},$$

тобто різниця між початковим і максимальним поточним прибутком може бути досить значною. Сумарний економічний ефект від кампанії (його необхідною умовою є, очевидно, виконання нерівності

$$P_{max} - P_0 = p\frac{(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0)^2}{4} > \alpha_1 s,)$$

визначається всім її ходом, характеристики якого обчислюються з (5), (6) за допомогою обчислення первісної.

Як випливає з (5), починаючи з деякого моменту, продовжувати рекламу стає невигідно. Дійсно, при $\bar{N}(t)$, що близько до $\bar{N}_0$, рівняння (5) записується у вигляді

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}_0(\bar{N}_0 - \bar{N}),$$

Його розв'язання наближається при $t \to \infty$ до граничного значення $\bar{N}_0$ (а функція $N(t)$ – до N_0) за повільним експоненціальним законом. В одиницю часу з'являється мізерно мале число нових покупців, і прибуток, що надходить, при будь-яких умовах не може покрити триваючих витрат.

7. Матеріали для самостійної роботи

У задачах 1 – 10 систему рівнянь запишіть у матричній формі та розв'яжіть її за допомогою формул Крамера.

1. $\begin{cases} x+y-3z=0, \\ 3x+2y+2z=-1, \\ x-y+5z=-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x+3y-z=1, \\ x+y-4z=0, \\ 4x+5y-5z=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x-2y-z=5, \\ x+3y+2z=2, \\ 5x-2y+4z=-7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-4y+2z=-5, \\ 4x+y+3z=-3, \\ 2x+3y+4z=1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+4y-3z=2, \\ x+y+2z=0, \\ 3x-2y+z=-5. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x+2y-3z=1, \\ 2x+2y-z=-7, \\ 4x+y-2z=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x-y+4z=2, \\ x+2y+3z=7, \\ 5x+3y+2z=8. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-3y+2z=-4, \\ 2x+y-3z=-1, \\ x-2y+5z=1. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x-y+3z=1, \\ 3x+2y+4z=8, \\ 2x-2y+4z=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x-2y-5z=-9, \\ 4x+3y-2z=4. \end{cases}$

У задачах 11 – 20 задано вершини трикутника ABC. Знайти:

1) довжину сторони AB;

2) рівняння сторін AB і AC;

3) кут BAC;

4) рівняння висоти CD та її довжину.

11. $A(-5; 0)$, $B(7; 9)$, $C(5; -5)$.

12. $A(-7; 2)$, $B(5; 11)$, $C(3; -3)$.

13. $A(-5; -3)$, $B(7; 6)$, $C(5; -8)$.

14. $A(-6; -2)$, $B(6; 7)$, $C(4; -7)$.

15. $A(-8; -4)$, $B(4; 5)$, $C(2; -9)$.

16. $A(0; -1)$, $B(12; 8)$, $C(10; -6)$.

17. $A(-6; 1)$, $B(6; 10)$, $C(4; -4)$.

18. $A(-2; -4)$, $B(10; 5)$, $C(8; -9)$.

19. $A(-3; 0)$, $B(9; 9)$, $C(7; -5)$.

20. $A(-9; -2)$, $B(3; 7)$, $C(1; -7)$.

У задачах 21 – 30 задано координати точок А, В, С. Потрібно:

1) знайти координати векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$ та модулі цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$.

21. A (7;-4;1), B (12;-3;1), C (10;1;5).

22. A (0;-3;3), B (5;-2;3), C (3;2;7).

23. A (-2;-1;-2), B (3;0;-2), C (1;4;2).

24. A (-6;0;0), B (-1;1;0), C (-3;5;4).

25. A (-2;-3;-8), B (3;-2;-8), C (1;2;-4).

26. A (1;0;-1), B (6;1;-1), C (4;5;3).

27. A (-1;4;1), B (4;5;1), C (2;9;5).

28. A (3;-6;-3), B (8;-5;-3), C (6;-1;1).

29. A (1;0;0), B (6;1;0), C (4;5;4).

30. A (2;-8;-2), B (7;-7;-2), C (5;-3;2).

У задачах 31 – 40 задано координати вершин піраміди.
Знайти її об'єм.

31. $A_1(4;3;6),\quad A_2(1;2;1),\quad A_3(-1;0;1),\quad A_4(-4;6;0).$

32. $A_1(-1;2;3),\quad A_2(1;-3;0),\quad A_3(-6;5;8),\quad A_4(-5;2;-4).$

33. $A_1(2;2;4),\quad A_2(4;-1;-2),\quad A_3(3;3;1),\quad A_4(-4;2;1).$

34. $A_1(2;3;4),\quad A_2(-2;5;-2),\quad A_3(-7;5;2),\quad A_4(-7;-3;6).$

35. $A_1(-1;6;2),\quad A_2(2;0;-3),\quad A_3(3;6;-3),\quad A_4(9;6;7).$

36. $A_1(0;-1;-1),\quad A_2(-2;3;5),\quad A_3(1;-5;-9),\quad A_4(-1;-6;3).$

37. $A_1(5;2;0),\quad A_2(2;5;0),\quad A_3(1;2;4),\quad A_4(-1;7;1).$

38. $A_1(2;-1;-2),\quad A_2(1;2;1),\quad A_3(5;0;-6),\quad A_4(-10;9;-7).$

39. $A_1(-3;0;-4),\quad A_2(-2;7;1),\quad A_3(3;-8;-4),\quad A_4(1;-4;6).$

40. $A_1(5;4;5),\quad A_2(-5;-3;6),\quad A_3(-1;-6;-3),\quad A_4(-2;2;-1).$

Завдання більш складного рівня

I Задано координати вершин трикутника *ABC*. Знайти:

1. Рівняння медіани *BK*.
2. Довжину медіани *BK*.
3. Рівняння прямої, що проходить через вершину *A* паралельно стороні *BC*.
4. Рівняння висоти *AP*.
5. Довжину висоти *AP*.
6. Точку перетину медіани *BK* та висоти *AP*.
7. Кут *KBC*.
8. Площу трикутника *ABC*.

II Дано координати вершин тетраедра *ABCD* (координати точок візьміть довільно).

Знайти:

1. Об'єм тетраедра.
2. Рівняння граней тетраедра.
3. Рівняння ребер тетраедра.
4. Площу трикутника *ABC*.
5. Довжину висоти тетраедра, опущеної з вершини *D*.
6. Кут між ребрами *AB* і *CD*.
7. Кут між гранями *ABD* і *ABC*.

Варіант	$\boldsymbol{A(x_1; y_1)}$	$\boldsymbol{B(x_2; y_2)}$	$\boldsymbol{C(x_3; y_3)}$
1	(-4; 2)	(1; 5)	(-1; 5)
2	(4; 1)	(2; 3)	(1; -2)
3	(-6; 1)	(3; 7)	(-2; 5)
4	(-1; 6)	(3; 3)	(8; 0)
5	(1; -1)	(2; 5)	(4; -1)
6	(4; -3)	(-1; 5)	(5; -1)
7	(3; 0)	(1; 6)	(7; -2)
8	(0; 2)	(-1; 6)	(-4; -2)
9	(2; 1)	(3; -1)	(9; -1)
10	(-1; 2)	(1; 8)	(4; 4)

У задачах 41 – 50 знайти вказані границі.

41. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$;

42. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-8x+7}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$;

43. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2 5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$;

44. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$;

45. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$;

46. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$;

47. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$;

48. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$;

49. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$;

50. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$.

У задачах 51 – 60 знайти похідні функцій.

51. а) $y = 3x^4 - \dfrac{5}{3x^3} - 9\sqrt[3]{x^2} - 1$; б) $y = \dfrac{arctg\, x}{1 + x^2}$;

в) $y = \left(x^3 + 1\right)\ln\left(x + 1\right)$; г) $y = e^{\sin 5x}$;

52. а) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{3x^3} + 4\sqrt[4]{x}$; б) $y = \left(x^2 - 2\right)\sin x$;

в) $y = \dfrac{2x}{arctg\, x}$; г) $y = \sqrt[4]{x^3 + lg\, x}$;

53. а) $y = 4x^2 - \dfrac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4}$; б) $y = \left(1 - x^2\right) ctg\, x$;

в) $y = \dfrac{e^x}{2x + 1}$; г) $y = lg\left(x^2 + 5\right)$;

54. а) $y = 3x^5 - \dfrac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = 5^x \cdot tg\, x$;

в) $y = \dfrac{\arccos x}{x^3 - 1}$; г) $y = \sqrt{x^3 + \sin 3x}$;

55. а) $y = 3x + \dfrac{4}{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \left(x^2 + 1\right) arctg\, x$;

в) $y = \dfrac{\sin x}{x - 3}$; г) $y = \left(lg\, x - \cos 3x\right)^2$;

56. а) $y=5x^2-\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$; б) $y=(x+3)\arcsin x$;

в) $y=\dfrac{lg\,x}{x^2+1}$; г) $y=\left(e^{3x}-\sin 3x\right)^2$;

57. а) $y=4x^2-\dfrac{3}{x^2}+5\sqrt[5]{x^3}$; б) $y=e^{2x}\left(x^3-1\right)$;

в) $y=\dfrac{lg\,x}{x^2-2x}$; г) $y=\left(\lg\sin x-x\right)^3$;

58. а) $y=x^5-\dfrac{1}{2x^2}-4\sqrt{x}-3$; б) $y=\left(4x^2+1\right)tg\,x$;

в) $y=\dfrac{\sin x}{x-\cos x}$; г) $y=\left(x^2-lg\,x\right)^3$;

59. а) $y=2x^3-\dfrac{2}{3x^6}+3\sqrt[3]{x^2}$; б) $y=\left(x+e^x\right)\arcsin x$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{x+\sin x}$; г) $y=lg\,tg\,2x$;

60. а) $y=5x^6-\dfrac{3}{2x^4}+8\sqrt[4]{x^3}$; б) $y=x^3arctg\,x$;

в) $y=\dfrac{x+2}{lg\,x}$; г) $y=\left(3x^2+e^{2x}\right)^4$.

У задачах 61 – 70 знайти невизначений інтеграл.

61. $\int\left(\frac{3x}{x^2}-\sqrt{x}+\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx.$ 62. $\int\frac{x^2+5x-1}{\sqrt{x}}dx.$

63. $\int\left(\frac{2}{x^2}-3\sin x-4e^x\right)dx.$ 64. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)dx.$

65. $\int\left(3\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}\right)dx.$ 66. $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx.$

67. $\int\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx.$ 68. $\int\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+1\right)dx.$

69. $\int tg^2 x\,dx.$ 70. $\int e^x\left(2-4\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$

У задачах 71 – 80 знайти невизначений інтеграл за допомогою підстановки.

71. $\int\left(3x+4\right)^3 dx.$ 72. $\int\frac{dx}{4x+1}.$

73. $\int tg\,3x\,dx.$ 74. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}.$

75. $\int\frac{\left(\ln x\right)^3}{x}dx.$ 76. $\int e^{-x^2+1}x\,dx.$

77. $\int \frac{tg\,x}{\cos^2 x} d\,x$.

78. $\int \frac{arctg^2 x}{1+x^2} d\,x$.

79. $\int \frac{e^{2x} d\,x}{e^{2x}+5}$.

80. $\int \frac{d\,x}{\sqrt[6]{(2x+3)^5}}$.

У задачах 81 – 90 знайти невизначений інтеграл за допомогою інтегрування частинами.

81. $\int x\,arctg\,4x\,d\,x$.

82. $\int x^2 \sin x\,d\,x$.

83. $\int \frac{\ln x\,d\,x}{x^4}$.

84. $\int \arcsin\frac{x}{5} d\,x$.

85. $\int \frac{x\,d\,x}{\sin^2 x}$.

86. $\int arctg\sqrt{2x-1}\,d\,x$.

87. $\int x^5 e^x d\,x$.

88. $\int \arccos 2x\,d\,x$.

89. $\int (\ln x)^3 d\,x$.

90. $\int e^{\sin x} \sin 2x\,d\,x$.

У задачах 91 – 100 за допомогою формули Ньютона-Лейбніца знайти значення визначеного інтегралу.

91. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\,x}{\sin^2 x}$.

92. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{d\,x}{1+x^2}$.

93. $\int\limits_1^3 \left(2x^2+3x\right)dx$.

94. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{2}}\,dx$.

95. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \dfrac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

96. $\int\limits_4^9 \dfrac{dx}{x\sqrt{x}}$.

97. $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

98. $\int\limits_1^3 \dfrac{dx}{x^2}$.

99. $\int\limits_4^9 \left(2\sqrt{x}+\sqrt{x^3}\right)dx$.

100. $\int\limits_1^2 \left(4+\dfrac{2}{x^2}\right)dx$.

У задачах 100 – 110 знайти значення визначеного інтегралу за допомогою відповідної підстановки.

101. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

102. $\int\limits_{-2}^3 \sqrt{7-x}\,dx$.

103. $\int\limits_0^2 \dfrac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

104. $\int\limits_1^3 \dfrac{x\,dx}{1+x^4}$.

105. $\int\limits_e^{e^2} \dfrac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

106. $\int\limits_0^5 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{4+x}}$.

107. $\int\limits_0^3 \dfrac{x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}$.

108. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.

109. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x\, dx.$

110. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}.$

У задачах 111 – 120 дослідити збіжність невласного інтеграла.

111. $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{3} x}.$

112. $\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{x^{2}-2x+1}.$

113. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{2}+1}{x^{3}} dx.$

114. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{2}+x^{4}}.$

115. $\int\limits_{-2}^{5} \frac{8dx}{(x+1)^{\frac{3}{7}}}.$

116. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^{2}+4}.$

117. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^{5}}}.$

118. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^{2}+2x+1}}.$

119. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}} x^{5} dx.$

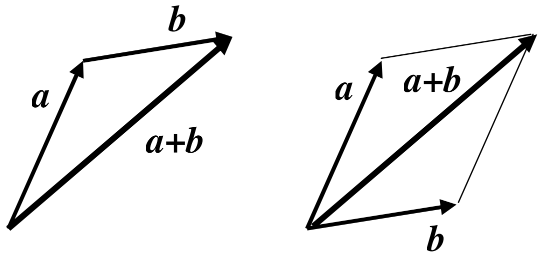
120. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^{2}} dx.$

8. Довідково-інформаційний матеріал

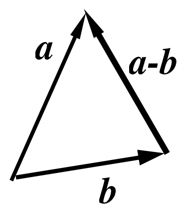
ВЕКТОРИ

Дії над векторами

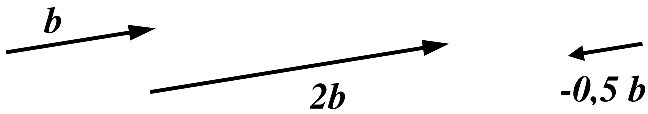
1. Додавання векторів



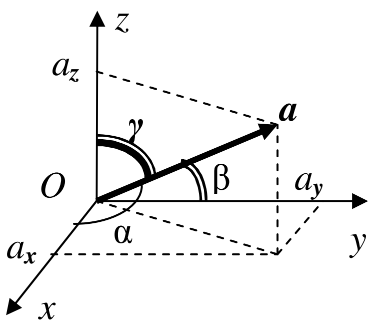
2. Віднімання векторів



3. Множення на число (приклади)



Вектори у декартовій системі координат



$$\bar{a} = a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k} = \left(a_x ; a_y ; a_z \right) ,$$

$$\overline{AB} = \left(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A \right) .$$

Довжина вектора $\quad |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ **.**

Напрямні косинуси $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \dfrac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\bar{a}|}.$

Дії над векторами, заданими у координатній формі

$$\bar{a} + \bar{b} = \left(a_x + b_x ; a_y + b_y ; a_z + b_z \right) ,$$

$$\bar{a} - \bar{b} = \left(a_x - b_x ; a_y - b_y ; a_z - b_z \right) ,$$

$$\lambda \bar{a} = \left(\lambda a_x ; \lambda a_y ; \lambda a_z \right) .$$

Умова колінеарності векторів $\quad \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$.

Скалярний та векторний добутки векторів

Добуток	Скалярний	Векторний
Позначення	$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a}\cdot\vec{b})$	$\vec{a}\times\vec{b}$, $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$
Тип величини	Число	Вектор
Означення	$\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$	$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, якщо: 1) $\vec{c}$ перпендикулярний векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$; 2) трійка векторів $\vec{a}\,,\vec{b}\,,\vec{c}$ – права; 3) $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$
Властивості	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert^2$	$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ $\vec{a}\times\vec{a}=\mathbf{0}$
Добутки ортів	$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ $\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$	$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\mathbf{0}$ $\rightarrow+\quad \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ \vec{i}\ \vec{j}\quad \leftarrow-$
Обчислення в ДСК	$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$	$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$

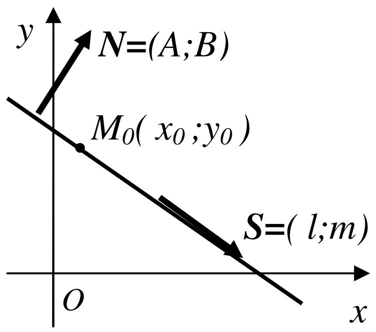
Основні задачі	довжина вектора $$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$ косинус кута між векторами $$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|}$$ проекція вектора на інший вектор $$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left\|\vec{b}\right\|}$$ умова перпендикулярності $$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$	площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ $$S = \left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$$ площа трикутника $$S_{\Delta} = \frac{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}{2}$$ висота паралелограма $$h_a = \frac{S}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}$$ висота трикутника $$h_a = \frac{2S_{\Delta}}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}$$

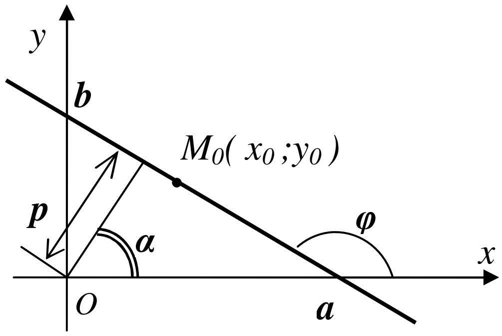
Мішаний добуток векторів

Позначення	$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ або $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$
Означення	$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$
Властивості	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$
Обчислення у ДСК	$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

Основні задачі	умова компланарності трьох векторів $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$$ орієнтація трійки векторів: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} > 0$ – права трійка ; $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} < 0$ – ліва трійка об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $$V_{паралелепіпеда} = \left\| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\|$$ об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ $$V_{піраміди} = \frac{1}{6}\left\| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\|$$ висота паралелепіпеда $$h = \frac{V_{паралелепіпеда}}{S_{грані}} = \frac{\left\| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\|}{\left\| \vec{a}\times\vec{b} \right\|}$$ висота піраміди $$h = \frac{3V_{піраміди}}{S_{грані}} = \frac{\left\| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right\|}{\left\| \vec{a}\times\vec{b} \right\|}$$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ





Найпростіше рівняння

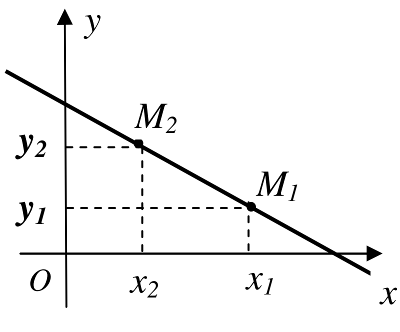
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Загальне рівняння

$$Ax + By + C = 0.$$

Канонічне рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$



Рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$y = kx + b, \qquad k = tg\,\varphi.$$

Рівняння прямої, що проходить у заданому напряму (рівняння в'язки)

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Рівняння у відрізках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Нормальне рівняння

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \; k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Умова паралельності прямих $\boldsymbol{k_2 = k_1}$.

Умова перпендикулярності прямих $\boldsymbol{k_2 = -\dfrac{1}{k_1}}$.

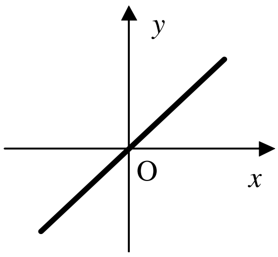
Кут θ між прямими (гострий) $tg\,\theta = \left| \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$.

Відстань від точки ***M*** до прямої $\boldsymbol{d(M) = |\, x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha - p \,|}$,

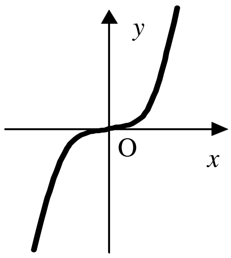
або $\boldsymbol{d(M) = \dfrac{|\, A x_M + B y_M + C \,|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$.

ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

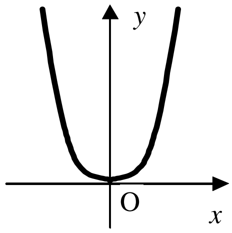
Алгебраїчні функції



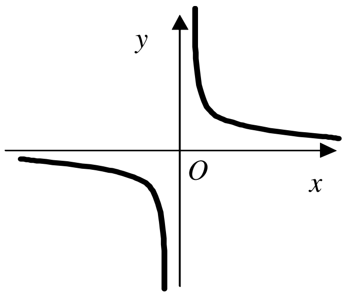
$y = x$



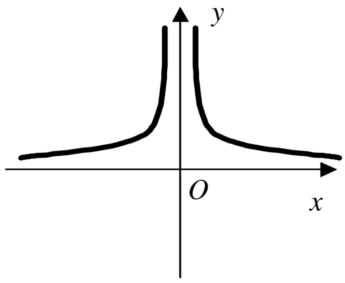
$y = x^3$, $y = x^{2n+1}$



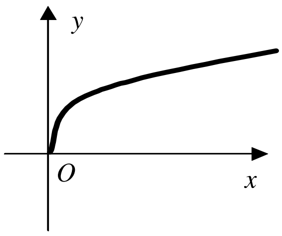
$y = x^2$, $y = x^{2n}$



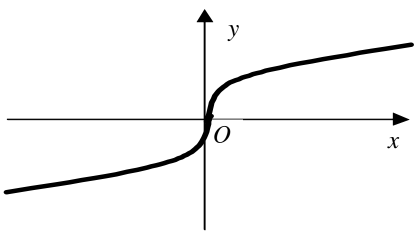
$y = \dfrac{1}{x}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$



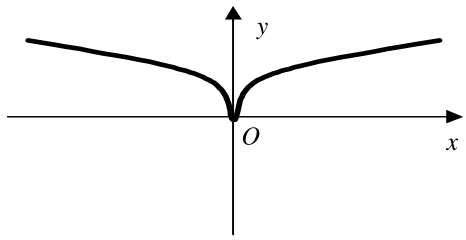
$y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$



$y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$



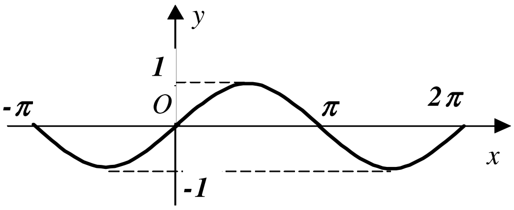
$y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[2n+1]{x}$



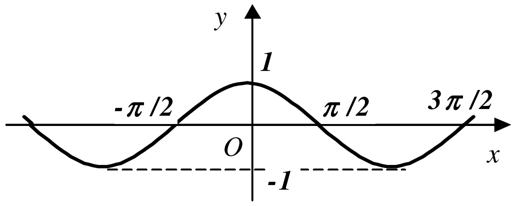
$y^3 = x^2$, $y^{2n+1} = x^{2m}$

$(2n + 1 > 2m)$

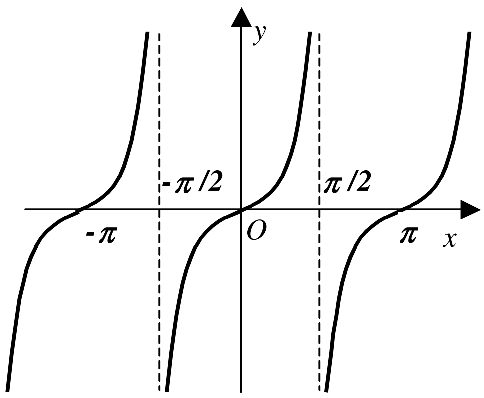
Трансцендентні функції



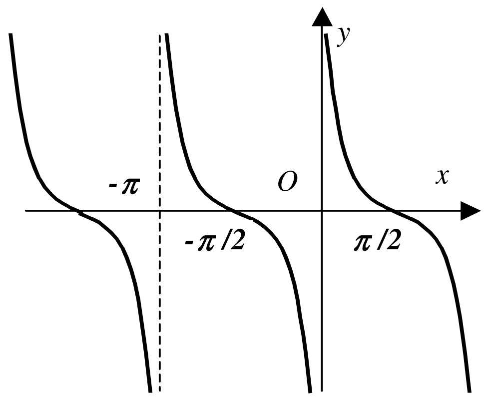
$y = \sin x$



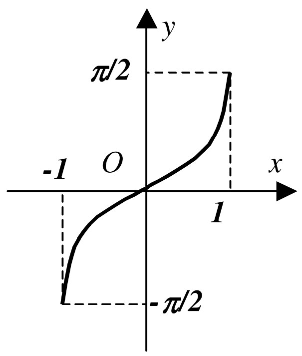
$y = \cos x$



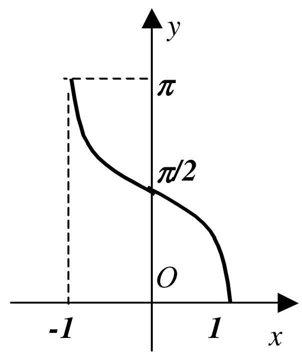
$y = tg\, x$



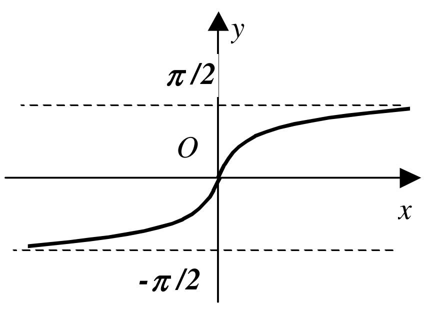
$y = ctg\, x$



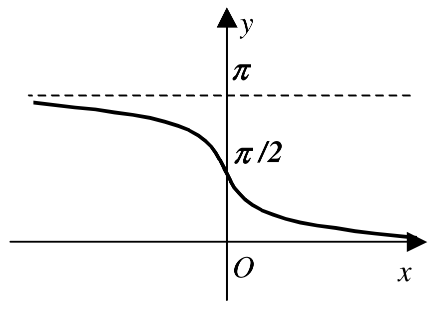
$y = \arcsin x$



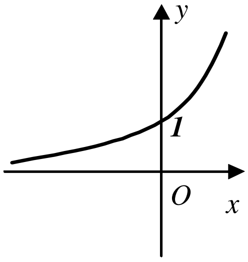
$y = \arccos x$



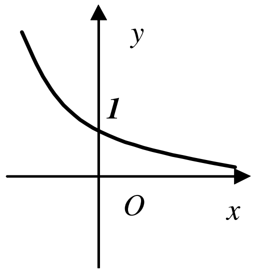
$y = arctg\, x$



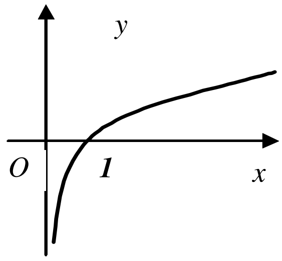
$y = arcctg\, x$



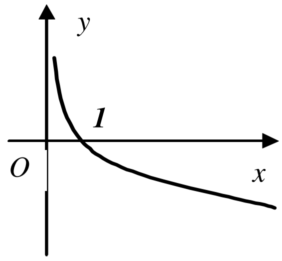
$y = a^x, a > 1$



$y = a^x, 0 < a < 1$



$y = \log_a x, a > 1$



$y = \log_a x, 0 < a < 1$

ГРАНИЦІ

Перша чудова границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

Друга чудова границя $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e\ .$$

МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ

У випадку невизначеності $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ треба поділити чисельник та знаменник на найвищий степінь змінної.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+3x-8}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^3-4x+5}{x^3}}{\dfrac{x^2+3x-8}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{8}{x^3}}=\left(\dfrac{1}{0}\right)=\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[4]{3x^4+x}}{\sqrt{x^2+7}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}+\dfrac{\sqrt[4]{3x^4+x}}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{x}}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^3}}+\sqrt[4]{\dfrac{3x^4+x}{x^4}}}{\sqrt{\dfrac{x^2+7}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[4]{3+\dfrac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\dfrac{7}{x^2}}}=\sqrt[4]{3}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!+n!}{(n+2)!}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+1)+n!}{(n+1)(n+2)n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+2)}{n!(n+1)(n+2)}=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=$

$=\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0.$

У разі невизначеності $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ треба чисельник та знаменник розкладати на множники.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-6x+8}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x-4}=$

$$\frac{12}{-2}=-6.$$

Якщо границя містить ірраціональність, позбутися її за допомогою формул скороченого множення; якщо невизначеність не зникне, а трансформується у (∞/∞), поділити на старший степінь змінної (з урахуванням добування коренів).

5) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{2x+3}-3)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x+3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2x-6}{(x^2-9)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{2}{(x+3)\left(\sqrt{2x-3}+3\right)}=\frac{1}{18}.$$

Якщо вираз має тригонометричні функції, перетворити суми тригонометричних функцій на добутки; множники, границя котрих не дорівнює 0 або ∞, замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати 1-у чудову границю.

6) $$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 5x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}=\frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\sin x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 3x}{3x}3x\cdot\frac{\sin x}{x}x}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot x}{x^2}=6$$

У випадку степенево-показникової функції (невизначеність $\left(1^\infty\right)$) основу записати як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу чудову границю та перейти до границі у показнику.

7) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x-4}\right)^x=\left(1^\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+1}{3x-4}-1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{3x-4}\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{3x-4}\right)^{\frac{3x-4}{5}}\right]^{\frac{5}{3x-4}\cdot x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{3x-4}}=e^{\frac{5}{3}};$$

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 2}(1+(3x-5)-1)^{\frac{1}{x-2}}=\lim_{x\to 2}(1+(3x-6))^{\frac{1}{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left[(1+(3x-6))^{\frac{1}{3x-6}}\right]^{\frac{3x-6}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-6}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{3(x-2)}{x-2}}=e^{3}.$$

ПОХІДНІ

Похідні основних елементарних функцій	**Похідні складених елементарних функцій**
1. $\left(x^{n}\right)'=n\,x^{n-1}$	1a. $\left(u^{n}\right)'=n\,u^{n-1}\cdot u'$
2. $(x)'=1$	
3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	3a. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^{2}}$	4a. $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^{2}}\cdot u'$
5. $\left(a^{x}\right)'=a^{x}\ln a$	5a. $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\ln a\cdot u'$
6. $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$	6a. $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$
7. $\left(\log_{a}x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	7a. $\left(\log_{a}u\right)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u'$
8. $(\lg x)'=\dfrac{1}{x\ln 10}$	8a. $(\lg u)'=\dfrac{1}{u\ln 10}\cdot u'$
9. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	9a. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
10. $(\sin x)'=\cos x$	10a. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
11. $(\cos x)'=-\sin x$	11a. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
12. $(tg\,x)'=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$	12a. $(tg\,u)'=\dfrac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'$

13. $(ctg\,x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ 13a. $(ctg\,u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$

14. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 14a. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

15. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 15a. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$

16. $(arctg\,x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ 16a. $(arctg\,u)' = \dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

17. $(arcctg\,x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ 17a. $(arcctg\,u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

1. $C' = 0$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

$$(u \pm C)' = u'$$

3. $(uv)' = u'v + v'u$

$$(C\cdot u)' = C\cdot u'$$
$$(C\cdot x)' = C$$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}$$
$$\left(\frac{x}{C}\right)' = \frac{1}{C}$$

ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ

Для дослідження функції і побудови її графіка здобувач повинен добре знати, що при зростанні функції $y' > 0$, при спаданні $y' < 0$ і розуміти різницю між необхідною та достатньою умовами існування екстремуму функції, а також необхідною і достатньою умовами існування точок перегину.

$y'(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування екстремуму;

$y''(x_0) = 0$ або не існує – необхідна умова існування точок перегину.

Із цих умов знаходяться критичні точки.

Достатня умова для існування екстремуму в т. M_0 або точки перегину – зміна знака відповідно до першої і другої похідної при переході через критичну точку.

$y' > 0$ – функція зростає $\nearrow$; $y' < 0$ – функція спадає $\searrow$;

$y'' > 0$ – функція вгнута $\overset{+}{\cup}$; $y'' < 0$ – функція опукла $\underset{-}{\cap}$.

ІНТЕГРАЛ

ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

1. а) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

   б) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

   в) $\int df(x) = f(x) + C$.

2. а) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A = const$.

   б) $\int [\, f_1(x) + f_2(x)\,]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

   в) $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$, якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Заміна змінної

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \left\{\begin{matrix} \varphi(x) = t \\ \varphi'(x)dx = dt \end{matrix}\right\} = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi(x)) + C$$

$x\,dx \quad \to \quad x^2 = t$

$x^n\,dx \quad \to \quad x^{n+1} = t$

$\sin x\,dx \quad \to \quad \cos x = t$

$\cos x\,dx \quad \to \quad \sin x = t$

$e^{kx}\,dx \quad \to \quad e^{kx} = t$

$a^x\,dx \quad \to \quad a^x = t$

$\dfrac{dx}{x} \quad \to \quad \log_a x = t$, $\ln x = t$

$\dfrac{dx}{x^n} \quad \to \quad \dfrac{1}{x^{n-1}} = t$

$\dfrac{dx}{\sqrt{x}} \quad \to \quad \sqrt{x} = t$

$\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \to \quad \arcsin x = t$, $\arccos x = t$

$\dfrac{dx}{1+x^2} \quad \to \quad arctg\,x = t$, $arcctg\,x = t$

$\dfrac{dx}{\cos^2 x} \quad \to \quad tg\,x = t$

$\dfrac{dx}{\sin^2 x} \quad \to \quad ctg\,x = t$

Інтегрування частинами

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

1) $\int \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x^n \\ P_n(x) \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx}, a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$; $\quad \int \frac{x}{\cos^2 kx}dx$; $\quad \int \frac{x}{\sin^2 kx}dx$.

$u = x \qquad u = x$

2) $\int x^s \underbrace{\log_a^n x}_{u}\, dx$, $s \neq -1$; $\quad \int x^n \underbrace{\arcsin kx}_{u}\, dx$; $\quad \int x^n \underbrace{arctg\,kx}_{u}\, dx$.

3) Циклічні інтеграли

$\int \underbrace{\begin{bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \end{bmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{kx} \\ a^x \end{bmatrix} dx}_{dv}$; $\quad \int \underbrace{\sin \ln x}_{u}\, dx$; $\quad \int \underbrace{\cos \ln x}_{u}\, dx$; $\quad \int \underbrace{\sqrt{ax^2 + b}}_{u}\, dx$.

Таблиця інтегралів (більш розширена)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$

$\int dx = x + C$

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int \frac{dx}{x+a} = \ln|x+a| + C$

3. $\int \frac{dx}{x^2+p} = \frac{1}{\sqrt{p}} arctg \frac{x}{\sqrt{p}} + C$

$\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x + C$

4. $\int \frac{dx}{x^2-p} = \frac{1}{2\sqrt{p}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{p}}{x+\sqrt{p}}\right| + C$

$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm p}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm p} \right| + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{p-x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{p}} + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

7. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

10. $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

11. $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg \frac{x}{2} \right| + C$

13. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$

14. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$

16. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a} \ln|ax^2+b| + C$

$\int \frac{x\,dx}{x^2+b} = \frac{1}{2} \ln|x^2+b| + C$

17. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+b}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+b} + C$

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+b}} = \sqrt{x^2+b} + C$

$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{b-x^2}} = -\sqrt{b-x^2} + C$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Формула Ньютона - Лейбніца для обчислення визначених інтегралів

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Спосіб підстановки у визначених інтегралах

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \left| \begin{matrix} \varphi(t) = x; & при\ t = \beta \quad x = \varphi(\beta) = b \\ \varphi'(t)dt = dx; & при\ t = \alpha \quad x = \varphi(\alpha) = a \end{matrix} \right| = \int_a^b f(x)dx .$$

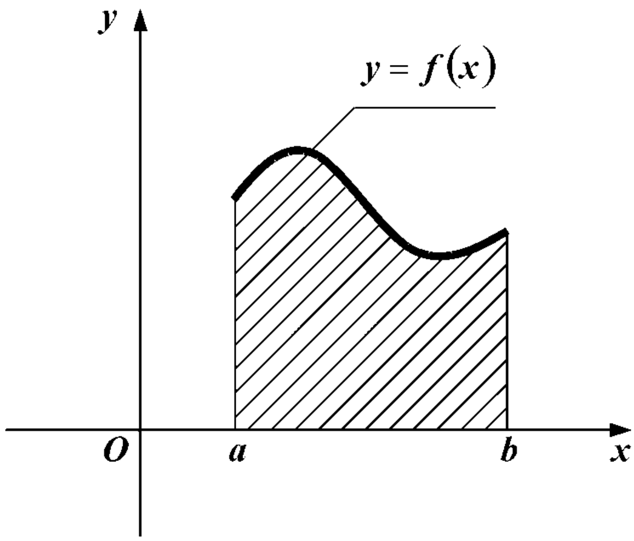
Спосіб інтегрування частинами у визначених інтегралах

$$\int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu .$$

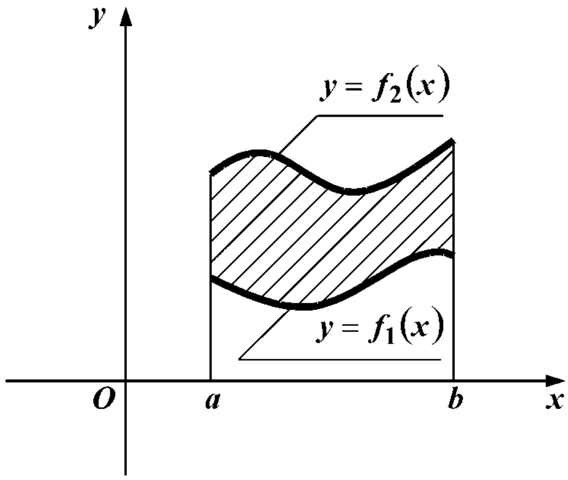
Обчислення площі плоскої фігури.

а) криволінійна трапеція:

$$S = \int_a^b f(x)dx; \quad f(x) > 0 ,$$

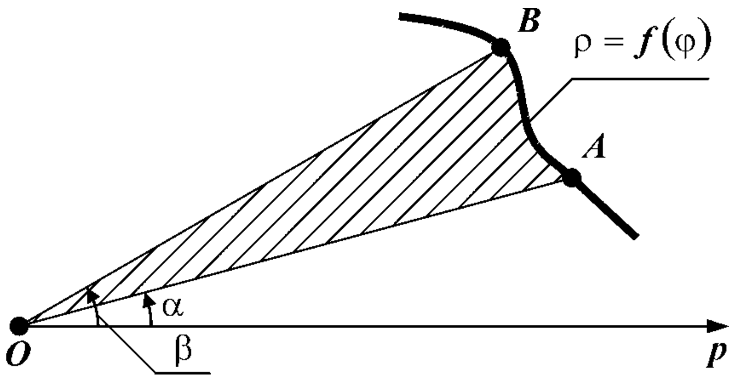


$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx; \quad f_2(x) > f_1(x).$$



б) криволінійний сектор:

$$S = \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \rho^2(\varphi) d\varphi,$$



Невласні інтеграли з нескінченними границями

а) невласні інтеграли з нескінченними границями

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx .$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx .$$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} xdx + \int_c^{\infty} f(x),$ де c –довільне значення, $f(x)$ – всюди неперервна функція.

Якщо границя такого інтегралу є кінцевою, то такий інтеграл називається збіжним; у разі, коли інтеграл прямує до ∞, його називають розбіжним.

б) невласні інтеграли від розривних функцій

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx ,$$

де $x = c$ – точка розриву функції, де

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx .$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx .$$

ЗМІСТ

Укладач: **Мандражи Оксана Анатоліївна**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації

до практичних занять і самостійної роботи

для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої

освіти галузі знань 07 «Управління та адміністрування»

спеціальності 073 «Менеджмент»