

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ЯВНЫХ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКЕ

Вступление. Известно, что в промышленно развитых странах (Германия, Япония, Франция, США, Италия, Южная Корея) с целью сокращения времени технологического процесса и экономии энергетических затрат при горячей прокатке полосы, проводятся исследования по усовершенствованию технологии ее производства, на базе которых разрабатывается новое оборудование, в том числе оборудование, для сверхскоростного охлаждения листа (ULTRA FAST COOLING - UFC) на участках перед чистовой группой клетей и после чистовой группы перед моталкой [1].

Отечественные оборудование и технология прокатки полосы были созданы в соответствии с требованиями времени их конструирования и, соответственно, не существует прокатных станов V поколения, позволяющих использовать при изготовлении тонкого лист процессы сверхскоростного охлаждения, а также современных методов проектирования технологического процесса прокатки, с использованием этого эффективного приема. Технологии прокатки полосы нуждаются в существенных изменениях с учетом требований экономии энергии для уменьшения себестоимости готовой продукции путем усовершенствования оборудования и режимов обжатий с учетом теплового состояния полосы.

Однако, нерешенной до настоящего времени остается проблема охлаждения полосы и валков при минимальном расходе энергии, что позволило бы более эффективно использовать существующее оборудование для осуществления нового технологического процесса. Одним из перспективных путей решения практических задач разработки новых технологий и оборудования является привлечение для этих вопросов метода математического моделирования с использованием аналоговой и цифровой вычисляемой техники.

Вследствие этого, разработка рационального охлаждения полосы и валков на основе математического моделирования этого технологического процесса является своевременной и актуальной.

Анализ состояния вопроса, основных достижений и литературы. В предыдущих работах авторов [2,3] была разработана математическая модель теплового состояния полосы и валков во время прокатки, которая включает все возможные варианты, которые имеют место во время горячей прокатки. Учтены теплообмен валка с горячей полосой, а также с водой, идущей на охлаждение валка, геометрические размеры зон деформации и принудительного охлаждения, а также их взаимное расположение. Если математическая модель явления известна, то одним из путей ее

исследования и получения конечного решения является математическое моделирование, то есть решение систем уравнений за помощью или без помощи вычисляемых машин [4,5]. На основании рассмотрения этих работ с учетом применения вычислительных машин для решения теплофизических задач можно сделать вывод, что для решения нелинейных и объемных задач, которые описываются уравнениями типа уравнения нестационарной теплопроводности, наиболее эффективным является метод конечных разностей. Для получения результата в числовом виде, согласно этому методу, переходят от дифференциальных уравнений с частичными производными к соответствующим уравнениям в конечных разностях. Уравнение в конечных разностях получают путём замены производных их конечными разностями.

В работах [4,5] приведены примеры перехода от дифференциальных уравнений с частичными производными к уравнениям в конечных разностях. Они имеют практически одинаковый вид и отличаются лишь записью в зависимости от системы координат (прямоугольная или цилиндрическая) и вида (линейного или нелинейного). Приведены конечно - разностные уравнения для прямоугольной и цилиндрической систем координат с неравномерными шагами по исследуемому объёму. Эти уравнения предназначены для определения зависимостей при вычислении RC – сеточных или R-R – сеточных электромоделей при решении задач нестационарной теплопроводности неявным конечно - разностным методом.

В случае использования явного конечно - разностного метода задача упрощается – необходимо лишь самостоятельно составить конечно – разностное уравнение баланса энергии для каждого узла с учетом объектов исследований.

Согласно изложенному, **целью данной работы** является разделение слябов, являющихся заготовкой при горячей прокатке листа, сеткой при решении двухмерной задачи нестационарной теплопроводности явным конечно - разностным методом, составление уравнений баланса энергии для возможных вариантов сетки с последующей конечно-разностной аппроксимацией Фурье. Материалы этих исследований являются основой для последующего численного решения задач нестационарной теплопроводности (теплового состояния) полосы и валков при горячей прокатке.

Материалы исследований. В случае двухмерной задачи уравнение математического описания процессов теплообмена в системе полоса-окалина-валок имеет вид [6]

$$c_m \rho_m \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho_m (c_m T) + q_v \quad (1)$$

Поскольку первым этапом технологического цикла прокатки листовой стали, где происходят интенсивные теплообменные процессы, является обжатие слябов в прокатном стане, рассмотрим возможность применения метода явных конечных разностей для решения задач теплообмена на этом этапе.

Схема разделения сляба сеткой в поперечном сечении представлена на рис.1.

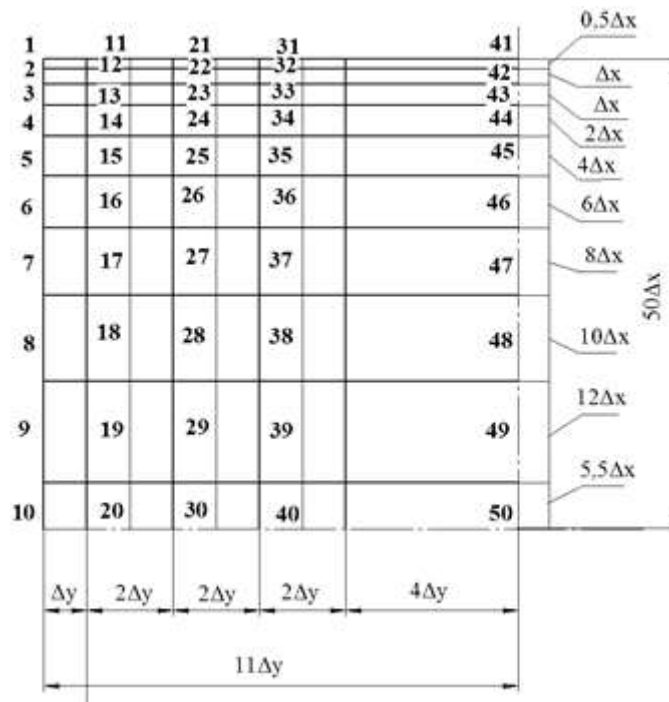


Рис. 1 Разделение четверти сляба сеткой (осесимметричная задача).

Учтено, что в направлении оси x сетка должна быть гуще в подповерхностных слоях и более разреженная в слоях, расположенных ближе к середине сляба.

Как видно из рис.1, узлы 10, 20, 30, 40 и 50 расположены на середине сляба параллельно оси y . Узлы 41-50 расположены также на середине сляба, но параллельно оси x .

В соответствии с рекомендациями [7], записываем баланс энергии для каждого узла, получая алгебраические уравнения для температуры в каждом узле. Рассмотрим составление баланса энергии для типичного внутреннего узла 24 (рис.1), представленного в увеличенном виде на рис 2.

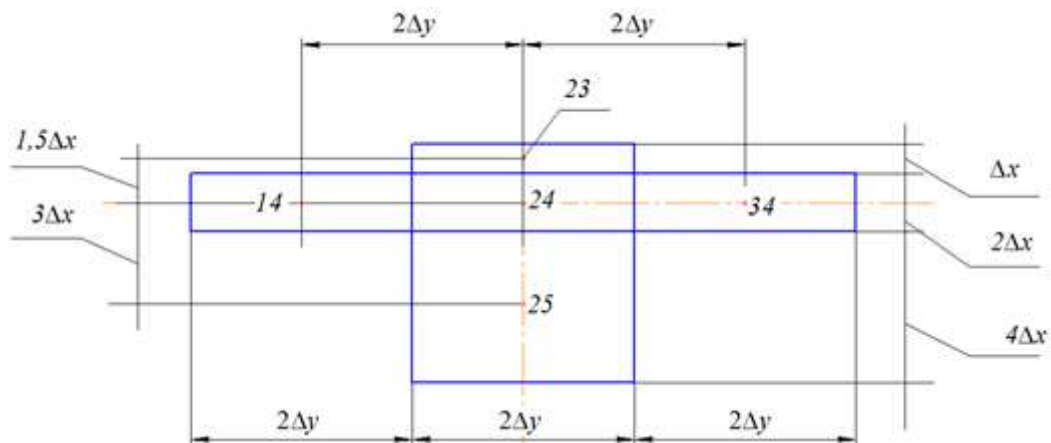


Рис.2 – Схема типичного внутреннего и соседних с ним узлов в середине сляба.

Баланс энергии для узла 24 запишем в виде

$$q_{23 \rightarrow 24} + q_{34 \rightarrow 24} + q_{25 \rightarrow 24} + q_{14 \rightarrow 24} + q_G + q_{w, 25 \rightarrow 24} = \frac{\partial U'_{24}}{\partial \tau}, \quad (2)$$

где: U'_{24} – внутренняя энергия в узле 24;

q_G – тепловыделение в выделенном объёме;

$$q_G = q_v \times V; \quad (3)$$

V – объём элементарного узла;

$$V_{24} = 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z \quad (4)$$

q_v – интенсивность тепловыделения на единицу объёма;

Δz – толщина элементарного объёма по нормали к плоскости чертежа;

q_w – скорость переноса тепла при деформировании металла;

$$q_w = q'_w \times V; \quad (5)$$

q'_w – скорость изменения внутренней энергии материала на единицу объёма;

$$q'_w = \frac{c \times \rho \times U \times T}{\Delta x_{i\pm 1}}; \quad (6)$$

где: $\Delta x_{i\pm 1}$ – расстояние между узлом 24 и узлами, расположенными над узлом 24 (i-1), а также под узлом 24 (i+1).

Изменение внутренней энергии в узле представляем в виде

$$\frac{\partial U_{24}}{\partial \tau} \approx m \times c \frac{\Delta T_{24}}{\Delta \tau} = c \times \rho \times 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z \frac{T_{24,\tau+\Delta\tau} - T_{24,\tau}}{\Delta \tau} \quad (7)$$

где: m – масса выделенного объёма;

ρ – удельный вес;

c – теплоёмкость;

ΔT_{24} – повышение температуры в узле (за время $\Delta \tau$);

$\Delta \tau$ – расчётное время;

$T_{24,\tau}$ – температура (начальная) в узле (во время τ);

$T_{24,\tau+\Delta\tau}$ – температура в узле через время $\Delta \tau$.

Заменяя составляющие теплового потока конечно - разностной аппроксимацией Фурье, и учитывая зависимости (2) -(7), запишем уравнение (2) в виде

$$\begin{aligned} & \lambda \times 2\Delta y \times \Delta z \frac{T_{23,\tau} - T_{24,\tau}}{1,5\Delta x} + \lambda \times 2\Delta x \times \Delta z \frac{T_{34,\tau} - T_{24,\tau}}{2\Delta y} + \lambda \times 2\Delta y \times \Delta z \frac{T_{25,\tau} - T_{24,\tau}}{3\Delta x} + \\ & + \lambda \times 2\Delta x \times \Delta z \frac{T_{14,\tau} - T_{24,\tau}}{2\Delta y} + q_v \times 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z + \frac{c \times \rho \times U (T_{23,\tau} - T_{24,\tau}) 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z}{1,5\Delta x} + \\ & + \frac{c \times \rho \times U (T_{25,\tau} - T_{24,\tau}) 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z}{3\Delta x} = c \times \rho \times 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z \frac{T_{24,\tau+\Delta\tau} - T_{24,\tau}}{\Delta \tau}. \end{aligned} \quad (8)$$

Разделим правую и левую части уравнения (8) на $c \times \rho \times 2\Delta x \times 2\Delta y \times \Delta z$ и умножим на $\Delta \tau$.

Разделив толщину листа на 2 (осесимметричная задача) и полученный результат на 50, определим

размер Δx в мм. Разделив ширину листа на 2 (осесимметричная задача) и полученный результат на 11, определим размер Δy в мм.

$$\text{Представим безразмерный коэффициент } A \text{ как } A = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (9)$$

$$\text{Отсюда } \Delta y = A \times \Delta x \quad (10)$$

Поскольку половина толщины листа разделена на 50 (вся толщина листа на 100 Δx), мы имеем значения Δx , требующие очень малых шагов по времени $\Delta \tau$ для обеспечения стабильности решения.

Вследствие малого времени решения $\Delta \tau$ имеем возможность перейти от нелинейной задачи к линеаризованной. Принимаем, что за время решения $\Delta \tau - \lambda$, c , и ρ – неизменные и подставляются с учетом начальной температуры узла.

Учитывая зависимость (10), а также то, что $\lambda/(c\rho)=a$, и $(a \times \Delta \tau)/\Delta x^2 = F_0$, после соответствующих упрощений уравнение (8) будет иметь вид

$$\begin{aligned} T_{24,\tau+\Delta\tau} = & \frac{1}{6}F_0(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau}) + (1 - 0,5F_0)T_{24,\tau} + \frac{0,25F_0}{A^2}(T_{34,\tau} + T_{14,\tau} - 2T_{24,\tau}) + \\ & + \frac{q_v \Delta \tau}{c\rho} + \frac{U \Delta \tau}{3\Delta x}(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau} - 3T_{24,\tau}) \end{aligned} \quad (11)$$

Проанализируем полученное уравнение (11). При толщине сляба 150 мм и ширине 1650 мм $\Delta x=1,5$ мм, а $\Delta y=75$ мм Безразмерный коэффициент в зависимости (8) $A=75/1,5=50$. При подстановке в уравнение (11) этого значения получаем

$$\begin{aligned} T_{24,\tau+\Delta\tau} = & 0,1666F_0(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau}) + (1 - 0,5F_0)T_{24,\tau} + 0,0001F_0(T_{34,\tau} + T_{14,\tau} - 2T_{24,\tau}) + \\ & + \frac{q_v \Delta \tau}{c\rho} + \frac{U \Delta \tau}{3\Delta x}(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau} - 3T_{24,\tau}) \end{aligned} \quad (12)$$

Как видно из уравнения (12) третий его член, который учитывает изменения температуры узла 24 в результате влияния соседних по оси y узлов, имеет множитель 0,0001. Сумма температур $(T_{34,\tau} + T_{14,\tau} - 2T_{24,\tau})$ скорее всего равняется нулю, или приближается к нему. Вследствие этого, третьим членом в уравнении (12) можем пренебречь, и получим новый вид этого уравнения.

$$T_{24,\tau+\Delta\tau} = 0,1666F_0(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau}) + (1 - 0,5F_0)T_{24,\tau} + \frac{q_v \Delta \tau}{c\rho} + \frac{U \Delta \tau}{3\Delta x}(2T_{23,\tau} + T_{25,\tau} - 3T_{24,\tau}) \quad (13)$$

Составление баланса энергии для углового узла (1), представленного на рис.3 и основные обозначения подобны вышеприведенным.

Баланс энергии для узла (1), записываем в виде

$$q_{1 \rightarrow i} + q_{a_1} + q_{a_2} + q_G + q_w = \frac{\partial U_1}{\partial \tau} \quad (14)$$

где q_{a_1} – тепловой поток к узлу 1 от другого твердого тела (валка);

q_{a_2} – конвекционный тепловой поток к узлу 1 от окружающей среды.

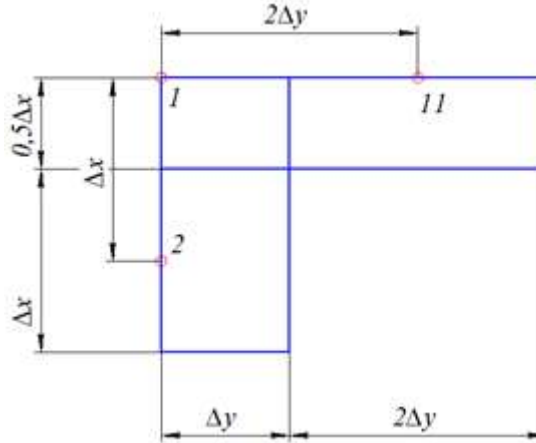


Рис. 3 – Схема поверхностного углового узла и соседних с ним узлов

Конечно - разностная аппроксимация Фурье уравнения (14) имеет вид

$$\begin{aligned} & \lambda \Delta y \Delta z \frac{T_{2,\tau} - T_{1,\tau}}{\Delta x} + \lambda \frac{\Delta x}{2} \Delta z \frac{T_{11,\tau} - T_{1,\tau}}{2\Delta y} + a_1 \Delta y \Delta z (T_{B,\tau} - T_{1,\tau}) + a_2 \frac{\Delta x}{2} \Delta z (T_{oc,\tau} - T_{1,\tau}) + \\ & + q_v \frac{\Delta x}{2} \Delta y \Delta z + \frac{c\rho U (T_{2,\tau} - T_{1,\tau}) \frac{\Delta x}{2} \Delta y \Delta z}{\Delta x} = c\rho \frac{\Delta x}{2} \Delta y \Delta z \frac{T_{1,\tau+\Delta\tau} - T_{1,\tau}}{\Delta\tau}, \end{aligned} \quad (15)$$

где a_1 – коэффициент теплопередачи между металлом и валком; T_B – температура валка в момент времени τ ; a_2 – коэффициент теплоотдачи в окружающую среду; T_{oc} – температура окружающей среды.

После упрощений, подобных тем, которые применили в предыдущем примере уравнение (15) имеет вид

$$\begin{aligned} T_{1,\tau+\Delta\tau} &= 2F_0 T_2 + \frac{1}{2A^2} F_0 T_{11} + \left(1 - \frac{1}{2A^2} F_0 - 2F_0 - 2Bi' F_0 - \frac{U\Delta\tau}{\Delta x} \right) T_{1,\tau} + T_{1,\tau+\Delta\tau} = \\ &= F_0 \left(2Bi' T_{B,\tau} + \frac{1}{A} Bi''' T_{oc,\tau} \right) + \frac{q_v \Delta\tau}{c\rho} + \frac{U\Delta\tau}{\Delta x} T_{2,\tau}; \end{aligned} \quad (16)$$

где:

$$Bi' = \frac{a_1 \times \Delta x}{\lambda}; \quad Bi''' = \frac{a_2 \times A \times \Delta x}{\lambda}$$

Узел на боковой поверхности сляба. Основные размеры типичного элементарного узла (4) и соседних с ним представлены на рис.4.

Уравнение баланса энергии для узла (4) имеет вид

$$q_{3 \rightarrow 4} + q_{14 \rightarrow 4} + q_{5 \rightarrow 4} + q_{a_2} + q_G + q_{w3 \rightarrow 4} + q_{w5 \rightarrow 4} = \frac{\partial U_4}{\partial \tau} \quad (17)$$

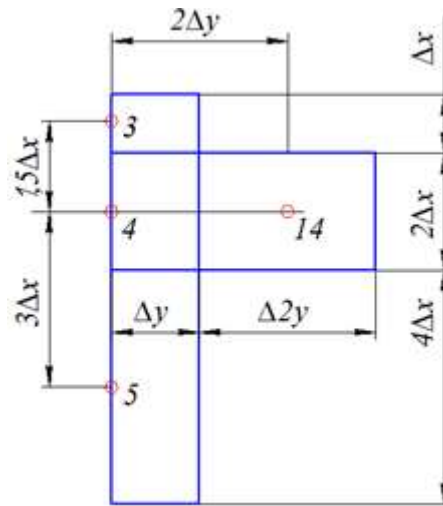


Рис.4 Схема поверхностного бокового узла

Члены уравнения (17) могут быть представлены с помощью конечно-разностной формы закона Фурье.

$$\begin{aligned} & \lambda \Delta y \Delta z \frac{T_{3,\tau} - T_{4,\tau}}{1,5\Delta x} + 2\Delta x \Delta z \frac{T_{14,\tau} - T_{4,\tau}}{2\Delta y} + \lambda \Delta y \Delta z \frac{T_{5,\tau} - T_{4,\tau}}{3\Delta x} + a_2 2\Delta x \Delta z (T_{oc} - T_{4,\tau}) + \\ & q_v 2\Delta x \Delta y \Delta z + \frac{c\rho U (T_{3,\tau} - T_{4,\tau}) \times 2\Delta x \Delta y \Delta z}{1,5\Delta x} + \frac{c\rho U (T_{5,\tau} - T_{4,\tau}) \times 2\Delta x \Delta y \Delta z}{3\Delta x} = \\ & = c\rho \times 2\Delta x \Delta y \Delta z \frac{T_{4,\tau+\Delta\tau} - T_{4,\tau}}{\Delta\tau} \end{aligned} \quad (18)$$

После упрощений уравнение (18) имеет вид

$$\begin{aligned} T_{4,\tau+\Delta\tau} = & F_0 \left(\frac{1}{3} T_{3,\tau} + \frac{1}{2A^2} T_{14,\tau} + \frac{1}{6} T_{5,\tau} \right) + \left(1 - \frac{F_0}{2} - \frac{F_0}{2A^2} - \frac{F_0}{A} Bi'' - \frac{U\Delta\tau}{\Delta x} \right) T_{4,\tau} + \\ & + \frac{q_v \Delta\tau}{c\rho} + \frac{U\Delta\tau}{3\Delta x} (2T_{3,\tau} + T_{5,\tau}) \end{aligned} \quad (19)$$

Конечно-разностные уравнения для определения температуры в узлах сетки (рис.1) выведены из уравнений баланса энергии для соответствующих узлов, после упрощений имеют вид: для узла 10

$$T_{10,\tau+\Delta\tau} = F_0 \left(\frac{T_{9,\tau}}{63,25} + \frac{T_{20,\tau}}{11A^2} \right) + \left(1 - \frac{F_0}{63,25} - \frac{F_0}{11A^2} \right) T_{10,\tau} + \frac{q_v \Delta\tau}{c\rho} + \frac{U\Delta\tau}{11,5\Delta x}; \quad (20)$$

для узла 21

$$\begin{aligned} T_{21,\tau+\Delta\tau} = & 2F_0 (T_{22,\tau} + Bi' \times T_{B,\tau}) + \left(1 - 2F_0 - \frac{0,5F_0}{A^2} - 2Bi' F_0 - \frac{U\Delta\tau}{\Delta x} \right) T_{21,\tau} + \\ & + \frac{0,25F_0}{A^2} (T_{11,\tau} + T_{31,\tau}) + \frac{q_v \Delta\tau}{c\rho} + \frac{U\Delta\tau \times T_{22,\tau}}{\Delta x}; \end{aligned} \quad (21)$$

для узла 30

$$T_{30,\tau+\Delta\tau} = 0,0158F_0 \times T_{29,\tau} + \left(1 - 0,0158F_0 - \frac{0,25F_0}{A^2} - \frac{0,087U\Delta\tau}{\Delta x}\right) T_{30,\tau} + \frac{\Delta\tau}{c\rho} + \frac{0,087 \times U\Delta\tau \times T_{29,\tau}}{\Delta x} \quad (22)$$

Все другие конечно-разностные уравнения для узлов сетки, представленной на рис.1 выводятся подобным образом.

Анализируя приведенные уравнения (16), (19-22) видим, что во всех этих уравнениях присутствующие члены, которые учитывают изменения температуры узла в результате влияния соседних по оси y узлов с безразмерным коэффициентом A^2 . Используя подход, примененный для анализа уравнения (11), можно сделать вывод, что и для других узлов сетки (рис.1) изменением температуры узла в результате передачи, или потери тепла по оси y за счет теплопроводности можем пренебрегать.

Этот вывод допустим в случае, если на поверхности металла вдоль оси y коэффициенты теплопередачи к валкам и коэффициент теплоотдачи к воде или окружающей среде – одинаковые. В таком случае задача упрощается и отпадает необходимость решать трехмерную задачу.

Выводы. 1. Установлено, что для исследования процессов теплообмена полосы и валков, а также валков, с водой во время прокатки наиболее эффективным является метод математического моделирования. Для решения теплофизических задач теплообмена системы валок – полоса, описываемых уравнениями нестационарной теплопроводности, наиболее эффективным является выбранный метод конечных разностей.

2. В прямоугольной системе координат выполнено разделение слябов, из которых прокатывается горячекатаная полоса, условной сеткой с неравномерным шагом по пространству. Для характерных узлов сетки составлены конечно - разностные уравнения баланса энергии, которые после аппроксимации и упрощений позволили получить уравнение для определения температуры для всех узлов условной сетки.

3. Выполненные исследования являются основой для последующих расчетов и решения нелинейных задач, которые описываются уравнениями нестационарной теплопроводности, в частности задач теплового состояния системы валок – полоса при прокатке тонких полос.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. De Paere, Simon P., Moerkerke I., Hermann J.C. Control of the temperature of the bar on entry to the finisher // ECSC STEEL RTD PROGRAMME. – 2000. – P.1-9.
2. Trishevskii O.I., Saltavets N.V. Mathematical model of the thermal state of strip in rolling // Steel in translation 2009– №2 Vol 39 – P.42-44. Allerton Press Inc.

3. **Тришевский О. И., Салтавец Н. В.** [Текст] / Разработка математической модели теплового состояния валков при прокатке. // Сталь. – 2011. - № 12. - С. /22-23.

4. **Коздоба Л.А.** [Текст] / Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса.//М.:Энергия.-1972.-296 с.

5. **Кузьмин М.П.** [Текст] / Электрическое моделирование явлений нестационарных процессов теплообмена. // М.:Энергия.-1974.-416 с.

6. **Тришевский О.И., Салтавец Н.В.** [Текст] / Математическая модель теплового состояния системы валок-полоса и её использование при реконструкции станов горячей прокатки. // Сборник научных трудов «Обработка металлов давлением» №2(23) Краматорск, 2010. С.53-59.

7. **Крейт Ф., Блэк У.** [Текст] / Основы теплопередачи. // М.: Мир.–1983.-512 с.

РЕФЕРАТ

Установлено, что для численного решения теплофизических задач теплообмена системы валок – полоса, описываемых уравнениями нестационарной теплопроводности, наиболее эффективным является метод конечных разностей. Для дальнейшего численного решения задач нестационарной теплопроводности (теплового состояния) полосы и валков при горячей прокатке слябы, являющиеся заготовкой при горячей прокатке листа, разделены условной сеткой, для возможных вариантов узлов которой при решении двухмерной задачи нестационарной теплопроводности составлены уравнения баланса энергии с последующей конечно - разностной аппроксимацией Фурье.

Ключевые слова: *сляб, лист, горячая прокатка, делительная сетка, тепловое состояние, нестационарная теплопроводность, баланс энергии, аппроксимация, конечно-разностной метод.*

ABSTRACT

It is set that for the numeral decision of thermophysical tasks of heat exchange of the system of roller – hot-rolled strip, which are described equalizations of non-stationary heat conductivity, most effective is a method of eventual differences. For the further numerical solution of problems of non-stationary heat conductivity strip and rolls when rolling, slabs are divided by a grid for which possible options of knots at the solution of a two-dimensional problem of non-stationary heat conductivity the equations of balance of energy with the subsequent finite-difference method approximation of Fourier are worked out.

Keywords: *strip, hot rolling, dividing grid, thermal state, transient conduction, energy balance, the approximation of the finite-difference method.*

подрисуночных надписей к статье Тришевского О.И. и Салтавца Н.В. «Использование метода явных конечных разностей для решения задач теплообмена при горячей прокатке»

Рис. 1 Разделение четверти сляба сеткой (осесимметричная задача).

Рис.2. Схема типичного внутреннего и соседних с ним узлов в середине сляба.

Рис. 3. Схема поверхностного углового узла и соседних с ним узлов.

Рис.4. Схема поверхностного бокового узла.