ков и др. М.: ВНИИОЭНГ, 1992. 358 с. 3. Моделирование и управление газотранспортными системами / *Г.Н. Поляков, Е.И. Яковлев, А.С. Пиотровский.* СПб.: Недра, 1992. 256 с. 4. *Кривошеин Б.Л.* Теплофизические расчеты газопроводов. М.: Недра, 1982. 168 с. 5. *Коротаев Ю.П., Кривошеин Б.Л., Новаковский В.Н.* Термогазодинамика газопромысловых систем. М.: Недра, 1991. 276 с. 6. О математических моделях неизотермического нестационарного течения газа в трубах / *Б.Л. Кривошеин, А.В. Дубинский и др.* // Известия вузов. Нефть и газ. 1976. №12. С. 82–86. 7. *Брук В.А.* Нестационарный теплообмен между потоком газа в трубопроводе и внешней средой // Промышленная теплотехника. 1982. Т. 4. №5. С. 48–53. 8. *Идин М.А., Шершков В.В.* Решение задачи движения газа в трубе методом малого параметра // Пневматика и гидравлика: Приводы и системы управления. 1984. Вип. 10. С. 249–263. 9. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с. 10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1984. 832 с. 11. *Скляров Ю.С., Минкин С.И.* Анализ переходных процессов в длинных линиях постоянного тока методами теории дифференциально-разностных уравнений // Известия вузов. Электромеханика. 1975. №7. С. 687–694.

Поступила в редколлегию 00.00.02

УДК 621.771.63; 621.785

Т.С.СКОБЛО, докт.техн.наук; ***А.И.СИДАШЕНКО***, канд.техн.наук;
А.Д.МАРТЫНЕНКО; Н.В.СЛОНОВСКИЙ; ХГТУСХ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РЕЖИМА ЛАЗЕРНОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО ПОДВЕРГНУТЫХ ХИМИКО-ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ПРОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПОКРЫТИЙ

В роботі розглянуті існуючі методи проведення деазотування деталей, попередньо підданих хіміко-термічній обробці та наведено результати експериментів і математичне обгрунтування режимів процесу дисоціації нитридів для підвищення міцності відновлювальних покриттів.

Ряд деталей машин и оборудования для повышения износостойкости и обеспечения высокого уровня прочности и твердости подвергают химико-термической обработке – азотированию, цементации, нитро-цементации. В процессе их эксплуатации и изнашивания такой упрочненный слой частично сохраняется, что при восстановлении любым из общепринятых методов наращивания не обеспечивает получение качественного покрытия.

Наиболее часто встречаемые в производстве способы восстановления [1] включают такие технологические операции как - предварительную термообработку, удаление дефектов путем обточки, наплавку слоя металла с помощью электрода, предварительную и окончательную механическую и термическую обработки.

Недостатком этих способов является то, что требуется выполнение большого количества операций, предшествующих восстановительной – наплавке, отжиг для снятия напряжений, механическая обработка для снятия дефектного слоя. Кроме того, наплавка слоя металла с помощью электрода приводит к интенсивному прогреву и короблению тонкостенных и длинномерных деталей, а также изменению физико-механических свойств сердцевины деталей. Для завершения операции восстановления детали требуется последующая окончательная термическая обработка. Такая технология эффективна для небольшого объёма восстанавливаемых деталей или для которых требуется компенсация изношенного слоя более 2-3мм.

Удаление частично сохранившегося упрочненного слоя путём механической обработки уменьшает эффективное сечение и снижает усталостную прочность детали. При такой подготовке к ремонту много металла идет в отходы, приходится удалять полностью оставшийся упрочненный слой, который в ряде случаев и не содержит каких-либо дефектов. В процессе ремонта и восстановления деталей приходится наносить компенсирующий слой существенно больший, чем это можно было бы сделать при сохранении качественного и предварительно упрочненного слоя. Это связано с тем, что при наличии такого слоя при восстановлении наплавкой из-за нагрева происходят структурные изменения, которые приводят к разложению (диссоциации) окислов нитридов и растворения карбидов.

Процесс сопровождается газовыделением, поро- и трещинообразованием. Кроме того, большое количество тепла, выделяемое при наплавке, может существенно изменить геометрическую форму детали. Поэтому наиболее целесообразным является разложение упрочняющих фаз перед восстановлением с использованием локального нагрева для формирования заданной по величине переходной зоны при обработке лазерным лучом.

В промышленности известен способ разложения слоя, полученного химико-термической обработкой [2], который позволяет восстанавливать деталь без полного его удаления. Метод заключается в обезуглероживании стальных изделий путем нагрева и выдержки при 1000-1050^{0}С в расплаве оксидов: - железа (2,7-2,9вес %); – бария (14–16 вес %) и хлористого железа (остальное). Этот метод не может быть использован для тонкостенных, длинномерных деталей, поскольку приведет к изменению геометрических размеров (короблению), разупрочнению сердцевины, увеличению зерна в металле рабочего слоя при длительной выдержке в области высоких температур, развитию процессов эрозии.

Большинство деталей машин и оборудования, работающих в сопряжении, имеют износ рабочего слоя, не превышающий 0,5 мм, поэтому компенсировать его по известной технологии не эффективно из-за большого количества операций, интенсивного прогрева деталей, большого расхода наплавляемого металла и объёмов механической обработки (до и после восстановления).

Для восстановления длинномерных и тонкостенных деталей, предварительно упрочненных химико-термическим способом, нами предложено выполнение следующего ряда технологических операций:

– предварительную лазерную термическую обработку поверхности детали (отжиг) для “разложения” оставшегося после эксплуатации азотированного слоя, путем его нагрева до температуры диссоциации нитридов и карбонитридов на глубину формирования переходной зоны (0,4-0,5мм);

– нанесение компенсирующего износ покрытия, используя при этом электроискровую обработку (ЭИО) электродами из стали типа 30Х13 с одновременной пластической деформацией (ППД) шариком или роликом;

– окончательная механическая обработка детали под номинальный размер – шлифование.

Для определения математической зависимости между параметрами лазерной обработки и глубиной разложения нитридов в качестве геометрической модели выбрали полый цилиндр ограниченный двумя коаксиальными цилиндрическими поверхностями. Используя принцип относительности, считали процесс обработки – установившимся, отсутствует зависимость между температурой детали и ее теплопроводностью, луч лазера постоянным (отсутствует неоднородность в распределении плотности мощности по диаметру лазерного пятна) и неподвижным, а цилиндр – совершающим сложное движение: вращательное относительно оси и поступательное вдоль нее. Выбрали цилиндрическую систему координат r, θ, z (рис. 1) с осью, совпадающей с осью цилиндра (втулки). В рассматриваемом случае движущейся среды (т.е. перемещающейся втулки) уравнение теплопроводности имеет вид 1 с учетом конвективных процессов (во внутренней части втулки) [3-5].

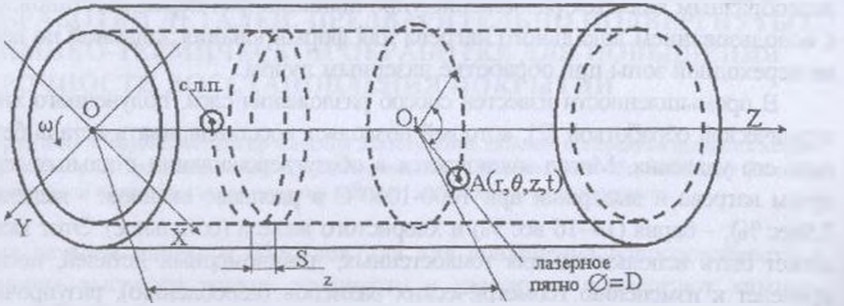

Рис. 1. Схема для расчета режимов лазерной термообработки

$$\frac{D}{Dt}T - \chi\nabla^2 T = 0\,, \qquad (1)$$

где D/Dt – субстанциональная производная; T – температура во внутренних точках цилиндра; χ – коэффициент температуропроводности; ∇^2 – оператор Лапласа. Температуру T отсчитывали от окружающей среды (температура воздуха внутри помещения $T_в = 20\ ^0C$).

Рассмотрим термообработку внешней поверхности цилиндра (втулки). При этом краевым условием на внутренней поверхности будет: $T(r,\theta,z) = 0$ (2), а на внешней поверхности в области Γ^b, совпадающей со следом лазерного луча – $\frac{\partial}{\partial r}T(r,\theta,z)\Big|_{r=b} = -\frac{q}{\lambda}$ (3), и вне области Γ^b:$T(b,\theta,z) = 0$ (4), где $\partial/\partial r$ – частная производная; q – плотность теплового потока переносимого лазерным пучком через поверхность цилиндра; λ – коэффициент теплопроводности материала втулки; a, b – внутренний и внешний радиусы цилиндра.

Решение уравнения (1) при краевых условиях (2) и (4)дает распределение температурного поля во внутренних точках цилиндра. Переходя к решению краевой задачи (1) и (4) перепишем уравнение (1) в эквивалентном виде [3]:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}T + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}T + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}T + \frac{\partial^2}{\partial z^2}T - \frac{\omega}{\chi}\frac{\partial}{\partial \theta}T - \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z}T = 0\,; \qquad (5)$$

краевыми условиями будут: $T(a,\theta,z) = 0$ (6); $T(b,\theta,z) = T^b\,\chi(\theta)\chi(z)$ (7), где T^b – температура поверхности в области Γ^b; $\chi(\theta)$, $\chi(z)$ – функции, равные единице в области Γ^b и нулю вне – Γ^b.

Найдем коэффициент Фурье $T_k(r,z)$ функции $T(r,\theta,z)$,

$$T_k(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} T(r,\theta,z)e^{-ik\theta}d\theta\,. \qquad (8)$$

где k – индекс суммирования $k = \overline{-\infty : +\infty}$; i – мнимая единица $i = \sqrt{-1}$; θ – полярный угол.

Умножая соотношения (5) и (7) на $e^{-ik\theta}$ и интегрируя почленно (слагаемые в (5), содержащие производные по θ, интегрируем по частям), находим:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}T_k(r,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2}T_k(r,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}T_k(r,z) - \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z}T_k(r,z) - \frac{i\omega}{\chi}T_k(r,z) = 0\,, \qquad (9)$$

где в соотношениях (5) и (9): V – скорость перемещения лазерного луча вдоль оси цилиндра; ω – угловая скорость вращения цилиндра (втулки).

В дальнейшем будут использоваться функции $U^a_{sk}(r)$, определяемые соотношением:

$$U^a_{sk}(r) = I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\,, \qquad (10)$$

где $I_k(\,)$, $N_k(\,)$ – функции Бесселя и Неймана порядка n; β_{sk} – корни уравнения. При этом:

$$I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b) = 0\,. \qquad (11)$$

Найдем приближенные (но достаточно точные) значения корней β_{sk}. Используя асимптотические представления функций $I_k(\xi)$, $N_k(\eta)$ при больших значениях параметров ξ, η [6], находим:

$$I_k(\xi) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\xi}}\cos\left(\xi - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) \quad (12); \qquad N_k(\eta) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}}\sin\left(\eta - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right). \quad (13)$$

Исходя из (10) (12), (13) получим:

$$U^{a}_{sk}(r) \approx \frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta_{sk}}\frac{1}{\sqrt{ra}}\left[\cos\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(\beta_{sk}a - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\beta_{sk}r - \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi}{4}\right)\right] \qquad (14)$$

Таким образом, по формуле сложения имеем:

$$U^{a}_{sk}(r) \approx -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\beta_{sk}}\frac{1}{\sqrt{ra}}\sin\left[\beta_{sk}(r-a)\right]; \qquad (15)$$

из (11) и (15) находим: $\sin[\beta_{sk}(b-a)] \approx 0$,

откуда: $$\beta_{sk} \approx \pi/_{b-a}\, s, \quad s = \overline{0 \ldots \infty}. \qquad (16)$$

Отметим, что в [7] получены более точные асимптотические оценки для бесселевых функций, что дает возможность уточнить соотношения (15), (16). Умножим почленно уравнение (9) на $U^{a}_{sk}(r)$, и проинтегрируем в пределах (a, b). Преобразуем, имеющееся выражение (13), введя оператор L_k и используем функции $T^{a}_{sk}(z)$ и $U^{a}_{sk}(z)$:

$$L_k T^{a}_{sk}(z) \equiv \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^{a}_{sk}(z) = \int_a^b\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}T_k(r,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2}T_k(r,z)\right]\times$$
$$\times U^{a}_{sk}(r)rdr = \int_a^b\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2}T_k(r,z)\right]\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]\times$$
$$\times rdr = \int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r}T_k(r,z)\right]\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr =$$
$$= \int_a^b\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)dr - k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)\times\right.$$
$$\left.\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr = r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]\Big|_{r=a}^{b} -$$
$$-\int_a^b r\frac{\partial}{\partial z}T_k(r,z)\frac{d}{dr}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr - k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)\times\right.$$
$$\left.\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr = b\left[I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b)\right]\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)\Big|_{r=b} -$$
$$-a\left[I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}a)\right]\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)\Big|_{r=a} - \int_a^b r\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)\times\right.$$
$$\left.\times N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{1}{r}drT_k(r,z) - k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr =$$
$$= -\left\{r\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{1}{r}T_k(r,z)\Big|_{r=a}^{b} - \int_a^b T_k(r,z)\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left[I_k(\beta_{sk}r)\times\right.\right. \qquad (17)$$
$$\left.\left.\times N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr\right\} - k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr =$$

$$= -\Big\{b\big[I_k^1(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k^1(\beta_{sk}b)\big]\beta_{sk}T_k(b,z) - a\big[I_k^1(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)\times$$

$$\times N_k^1(\beta_{sk}a)\big]\beta_{sk}T_k(a,z)\Big\} + \int_a^b T_k(r,z)\Big\{\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\big[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\big] +$$

$$+\left(r\beta_{sk}^2 - \frac{k^2}{r}\right)\big[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) - I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\big] - r\beta_{sk}^2\big[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}a) -$$

$$- I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}r)\big]\Big\}dr$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке, тождественно равно нулю в соответствии с дифференциальным уравнеисм для цилиндрических функций [6]. Используя выражение для вронскиана функций Бесселя [7] зависимость (17) представится в виде:

$$\frac{d^2}{dz^2}T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z}T_{sk}^a(z) - (\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi})T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi}[T_k(a,z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)}T_k(b,z)], \qquad (17,a)$$

где $$T_{sk}^a(z) = \int_a^b T_k(r,z)U_{sk}^a(r)rdr.$$

Найдем выражсние для $T_k(b,z)$, из (8) имеем:

$$T_k(b,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\varphi_0/2}^{\varphi_0/2} T^b\chi(\theta)\chi(z)e^{-ik\theta}d\theta, \qquad (18)$$

где φ_0 – угловой размер области Γ^b, центр которой расположен в точке (b, 0, 0). Считая температуру T^b в области Γ^b постоянной, получим:

$$T_k(b,z) = \frac{1}{2\pi}T^b\frac{1}{-ik}(e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{ik\frac{\varphi_0}{2}}) = \frac{1}{\pi}T^b\chi(z)\frac{1}{k}\frac{e^{ik\frac{\varphi_0}{2}} - e^{-ik\frac{\varphi_0}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi}\chi(z)T^b\frac{\sin k\varphi_0/2}{k}, \qquad (19)$$

Из (19) и (17) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2}T_{sk}^a(z) - \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z}T_{sk}^a(z) - \left(\beta_{sk}^2 + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T_{sk}^a(z) = \frac{2}{\pi}\left[T_k(a,z) - \frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)}\frac{1}{\pi}\chi(z)\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}T^a\right], \qquad (20)$$

Аналогичным образом может быть прсобразовано уравнение (9), но ужс применительно к функциям $T_{sk}^b(z)$ и $U_{sk}^b(r)$. С помощью зависимости (21):

$$U_{sk}^b(r) = I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r). \qquad (21)$$

имеем:

$$L_kT_{sk}^b(z) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{V}{\chi}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T_{sk}^b(z) = \int_a^b\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}T_k(r,z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2}T_k(r,z)\right]\times$$

$$\times U_{sk}^b(r)rdr = \int_a^b\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r^2}T_k(r,z)\right]\big[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\big]\times$$

$$\times rdr = \int_a^b\left[\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z) - \frac{k^2}{r}T_k(r,z)\right]\big[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b) - I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\big]dr =$$

$$=\int_a^b\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)dr-k^2\int_a^b T_k(r,z)\left[I_k(\beta_{sk}r)\times\right.$$

$$\left.\times N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr=r\frac{\partial}{\partial r}T_k(r,z)\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]\Big|_{r=a}^{b}-$$

$$-\int_a^b r\frac{\partial}{\partial z}T_k(r,z)\frac{d}{dr}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr-k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)\times\right.$$

$$\left.\times N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr=b\left[I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b)\right]\frac{\partial}{\partial r}T_{sk}(r,z)\Big|_{r=b}-$$

$$-a\left[I_k(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}a)\right]\frac{\partial}{\partial r}T_{sk}(r,z)\Big|_{r=a}-\int_a^b r\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)\times\right. \qquad (21,а)$$

$$\left.\times N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{1}{r}dr\,T_k(r,z)-k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr$$

Выражение в первой квадратной скобке в 21,а тождественно равно нулю, функция во второй квадратной скобке равна нулю в соответствии с (11). Таким образом, предыдущее соотношение (после еще одного интегрирования по частям) преобразуется в:

$$-\left\{r\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]\frac{1}{r}T_k(r,z)\Big|_{r=a}^{b}-\int_a^b T_k(r,z)\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr\right\}-k^2\int_a^b T_k(r,z)\frac{1}{r}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]dr=-\{bI_k\times$$

$$\times\left[I_k^1(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}b)-(\beta_{sk}b)N_k^1(\beta_{sk}b)\right]\beta_{sk}T_k(b,z)-a\left[I_k^1(\beta_{sk}a)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k^1(\beta_{sk}a)\right]\times \qquad (21,б)$$

$$\times\beta_{sk}T_k(a,z)\}+\int_a^b T_k(r,z)\left\{\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]+\left(r\beta_{sk}^2-\frac{k^2}{r}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]-r\beta_{sk}^2\left[I_k(\beta_{sk}r)N_k(\beta_{sk}b)-I_k(\beta_{sk}b)N_k(\beta_{sk}r)\right]\right\}dr$$

Подынтегральное выражение в фигурной скобке тождественно равно нулю в связи с тем, что цилиндрические функции первого, второго и третьего рода, либо их линейные комбинации удовлетворяют дифференциальному уравнению [115] $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}U+\left(\beta_{sk}^2-\frac{k^2}{r^2}\right)U=0$, где $U=z_k(\beta_{sk}r)$; $z_k(\beta_{sk}r)$ – любая из перечисленных цилиндрических функций.

Выражения в квадратных скобках вне интегралов могут быть преобразованы с помощью вронскианов функций Бесселя и Неймана [116] в выражения для вронскиана W функций U_1, U_2: $W(U_1,U_2)=U_1U_2^1-U_1^1U_2$; подставив функции Бесселя и Неймана, найдем: $W(I_k,N_k)=2/\pi z$, отсюда для соотношения в первой квадратной скобке в (21,б) находим его значение: $-2/\pi\rho_{sk}b$.

Преобразуем выражение во второй квадратной скобке вне интеграла в (21,б), используя соотношение, вытекающее из (11)

$$N_k(\beta_{sk}b) = N_k(\beta_{sk}a)\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)},$$

получим для второй квадратной скобки представление:

$$-\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}W(I_k, N_k)(\beta_{sk}a)$$

В этом выражении указан условно аргумент функций, входящий в определитель Вронского [8]. При этом получаем соотношение:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^b_{sk}(z) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^b_{sk}(z) - \left(\beta^2_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^b_{sk}(z) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}T_k(a,z) - T_k(b,z)\right], \quad (22)$$

Рассмотрим частные случаи уравнений (20) и (22). Если на внешней поверхности температура равна нулю, то и $T_k(b,z)=0$ тогда из (22) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^b_{skb}(z) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^b_{skb}(z) - \left(\beta^2_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^b_{skb}(z) = \frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}T_k(a,z), \quad (23)$$

В случае равной нулю температуры поверхности $T_k(a,z) \equiv 0$ из выражения (20) при нулевой температуре на внутренней поверхности имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^a_{ska}(z) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^a_{ska}(z) - \left(\beta^2_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^a_{ska}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)}T_k(b,z), \quad (24)$$

Вычислим $T_k(a,z)$ по аналогии с (19):

$$T_k(a,z) = \frac{1}{2\pi}T^a\chi(z)\frac{1}{-ik}\left(e^{-ik\frac{|\varphi_0|}{2}} - e^{ik\frac{|\varphi_0|}{2}}\right) = \frac{1}{\pi}T^a\chi(z)\frac{e^{ik\frac{|\varphi_0|}{2}} - e^{-ik\frac{|\varphi_0|}{2}}}{2i} = \frac{1}{\pi}T^a\chi(z)\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}, \quad (25)$$

где T^a – температура (постоянная) на внутренней поверхности цилиндра при воздействии лазерного луча (т.е. в области Γ^a). Из (24) и (25) имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^a_{ska}(z) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^a_{ska}(z) - \left(\beta^2_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^a_{ska}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)}\frac{1}{\pi}T^b\chi(z)\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (26)$$

а из (22) и (19) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^b_{skb}(z) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^b_{skb}(z) - \left(\beta^2_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^b_{skb}(z) = \frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{1}{\pi}T^a\chi(z)\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}, T^b = 0, \quad (27)$$

Нижние индексы "a" и "b" указывают на какой из поверхностей r=a или r=b температура равна нулю, верхние индексы в $T^b_{skb}(z)$, $T^a_{ska}(z)$ указывают какое из интегральных преобразований из $U^a_{sk}(r)$, (или $U^b_{sk}(r)$) было использовано. Из сопоставления (26) и (27) выходит следующее правило перехода от $T^b_{skb}(z)$ к $T^a_{ska}(z)$ для получения $T^a_{ska}(r)$: если известно выражение для $T^b_{skb}(r)$

следует функцию $T^b_{skb}(z)$ умножить на: $-\dfrac{I_k^2(\beta_{sk}a)}{I_k^2(\beta_{sk}b)}\dfrac{\theta_k^b}{\theta_k^a}$ (28),

где $$\theta_k^a = \frac{1}{\pi}\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}T^a,\ \theta_k^b = \frac{1}{\pi}\frac{\sin k|\varphi_0|/2}{k}T^b \qquad (29)$$

Предварительно решив уравнение для $T^b_{skb}(r)$ в соответствии с (22), (27) и (29)получим:

$$\frac{d^2}{dz^2}T^b_{skb}(r) - \frac{V}{\chi}\frac{d}{dz}T^b_{skb}(z) - \left(\beta_{sk} + \frac{i\omega k}{\chi}\right)T^b_{skb}(z) = \frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\chi(z)\theta_k^a, \qquad (30)$$

а затем по указанному выше правилу перейдем к $T^a_{ska}(z)$.

Введем обозначения:

$$\eta^{sk}(z) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}T_k(a,z) - T_k(b,z)\right] = \frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\chi(z)\theta_k^a,\ \text{при } T_k(b,z)=0;$$

$$b^* = -V/\chi;\ C^{sk} = -(\beta_{sk}^2 + ik\omega/\chi), \qquad (31)$$

Таким образом, из (30) находим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi^{sk}(z) + b^*\frac{d}{dz}\varphi^{sk}(z) + C^{sk}\varphi^{sk} = \eta^{sk}(z), \qquad (32)$$

где – $\varphi^{sk}(z) = T^b_{sk}(z)$, (либо $= T^b_{skb}(z)$, если $T_k(b,z)=0$) (32,a)

Преобразуем (32) к виду не содержащему первой производной. Имеем:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left\{\left[\varphi^{sk}(z)e^{\alpha z}\right]e^{-\alpha z}\right\} + b^*\left\{\left[\varphi^{sk}(z)e^{\alpha z}\right]e^{-\alpha z}\right\} + C^{sk}\left[\varphi^{sk}(z)e^{\alpha z}\right]e^{-\alpha z} = \eta^{sk}(z), \quad (33)$$

полагая: $$\varphi_{sk}(z) = \varphi^{sk}(z)e^{\alpha z}, \qquad (34)$$

(считаем α постоянным параметром) получим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_{sk}(z) - 2\alpha\frac{d}{dz}\varphi_{sk}(z) + \alpha^2\varphi_{sk}(z) + b^*\left[\frac{d}{dz}\varphi_{sk}(z) - \alpha\varphi_{sk}(z)\right] + C^{sk}\varphi_{sk}(z) = \eta^{sk}(z)e^{\alpha z}, \quad (35)$$

или:

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_{sk}(z) + \left(b^* - 2\alpha\right)\frac{d}{dz}\varphi_{sk}(z) + \left(\alpha^2 - b^*\alpha + C^{sk}\right)\varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \qquad (36)$$

где $$\eta_{sk}(z) = \eta^{sk}(z)e^{\alpha z}, \qquad (37)$$

Далее выберем α, удовлетворяющее соотношению: $\alpha = b^*/2$, (38)

тогда: $$\alpha^2 - b^*\alpha + C^{sk} = -\left(b^*\right)^2/4 + C^{sk} \equiv -\mu_{sk}^2, \qquad (39)$$

отсюда: $$\mu_{sk}^2 = \left(b^*\right)^2/4 - C^{sk} = \left(V/2\chi\right)^2 + \beta_{sk}^2 + ik\omega/\chi, \qquad (40)$$

Таким образом находим:

$$\frac{d^2}{dz^2}\varphi_{sk}(z) - \mu_{sk}^2\varphi_{sk}(z) = \eta_{sk}(z), \qquad (41)$$

Это уравнение решим методом вариации произвольных постоянных [6]. В качестве фундаментальной системы однородного уравнения (41) имеем:

$$\varphi_{sk}^{(1)}(z) = e^{\mu_{sk} z}, \quad \varphi_{sk}^{(2)}(z) = e^{-\mu_{sk} z}, \tag{42}$$

Представим $\varphi_{sk}(z)$ в виде:

$$\varphi_{sk}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)\varphi_{sk}^{(1)}(z) + C_{sk}^{(2)}(z)\varphi_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(1)}(z)e^{\mu_{sk} z} + C_{sk}^{(2)}(z)e^{-\mu_{sk} z}, \tag{43}$$

откуда находим в соответствии с методом Лагранжа:

$$\left[\frac{d}{dz}C_{sk}^{(1)}(z)\right]e^{\mu_{sk} z} + \left[\frac{d}{dz}C_{sk}^{(2)}(z)\right]e^{-\mu_{sk} z} = 0, \tag{44}$$

$$\left[\frac{d}{dz}C_{sk}^{(1)}(z)\right]e^{\mu_{sk} z} + \left[\frac{d}{dz}C_{sk}^{(2)}(z)\right]e^{-\mu_{sk} z} = \frac{1}{\mu_{sk}}\eta_{sk}(z), \tag{45}$$

тогда:

$$\frac{d}{dz}C_{sk}^{(1)}(z) = \frac{1}{2\mu_{sk}}e^{-\mu_{sk} z}\eta_{sk}(z) \quad (46), \quad \frac{d}{dz}C_{sk}^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\mu_{sk}}e^{\mu_{sk} z}\eta_{sk}(z), \quad (47),$$

или после интегрирования:

$$C_{sk}^{(1)}(z) = C_{sk}^{(1)}(0) + \frac{1}{2\mu_{sk}}\int_0^z e^{-\mu_{sk}\bar{z}}\eta_{sk}(\bar{z})dz, \tag{48}$$

$$C_{sk}^{(2)}(z) = C_{sk}^{(2)}(0) - \frac{1}{2\mu_{sk}}\int_0^z e^{\mu_{sk} z}\eta_{sk}(\bar{z})dz, \tag{49}$$

Исходя из (43) находим результат выражения:

$$\begin{aligned}\varphi_{sk}(z) &= C_{sk}^{(1)}(0)e^{\mu_{sk} z} + C_{sk}^{(2)}(0)e^{-\mu_{sk} z} + \frac{1}{2\mu_{sk}}\int_0^z \eta_{sk}(\bar{z})\left[e^{\mu_{sk}(z-\bar{z})} - e^{-\mu_{sk}(z-\bar{z})}\right]d\bar{z} = \\ &= A_{sk}e^{\mu_{sk} z} + B_{sk}e^{-\mu_{sk} z} + \frac{1}{\mu_{sk}}\int_0^z \eta^{sk}(\bar{z})\mathrm{sh}\left[\mu_{sk}(z-\bar{z})\right]\eta^{sk}(\bar{z})e^{\alpha\bar{z}}d\bar{z}\end{aligned}, \tag{50}$$

где A_{sk}, B_{sk} – произвольные постоянные (как и $C_{sk}^{(1)}(0)$, $C_{sk}^{(2)}(0)$).

Соотношение (50) есть общим решением однородного уравнения (41), так как является суммой частного решения неоднородного. Из (50) находим в соответствии с (34) и (37).

$$\varphi^{sk}(z) = e^{-\alpha z}\left\{A_{sk}e^{-\mu_{sk} z} + \beta_{sk}e^{-\mu_{sk} z} + \frac{1}{\mu_{sk}}\int_0^z \mathrm{sh}\left[\mu_{sk}(z-\bar{z})\right]e^{\alpha\bar{z}}\eta^{sk}(\bar{z})d\bar{z}\right., \quad (51),$$

или используя (38) и (40) имеем:

$$\varphi^{sk}(z) = A_{sk}e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} + \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right]z} + B_{sk}e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}} - \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right]z} + \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 + \beta_{sk}^2 + \frac{ik\omega}{\chi}}}\times, \tag{52}$$

$$\times\int_0^z\left[\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}T_k(a,\bar z)-T_k(b,\bar z)\right]sh\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z$$

что соответствует "полному" уравнению (22) для $T_{sk}^b(z)$ (т.е. неравны нулю значения температуры на поверхности цилиндра при r = a, r = b). Из уравнения (52) при соотношении между $\varphi^{sk}(z)$ и $T_{sk}^b(z)$ имеем:

$$T_{sk}^b(z)=A_{sk}e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}+\frac{V}{2\chi}\right]z}+B_{sk}e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}-\frac{V}{2\chi}\right]z}+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}}\times \tag{53}$$

$$\times\int_0^z\left[\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}T_k(a,\bar z)-T_k(b,\bar z)\right]sh\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z$$

В частном случае, когда температура на наружной поверхности равна нулю из (53) имеем:

$$T_{skb}^b(z)=A_{sk}e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}+\frac{V}{2\chi}\right]z}+B_{sk}e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}-\frac{V}{2\chi}\right]z}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}}\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\int_0^z T_k(a,\bar z)sh\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z \tag{54}$$

Если учитывать значение уравнения (25), слагаемое в (54), содержащее интеграл, запишем в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}}\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{1}{\pi}T^a\frac{\sin k\frac{|\varphi_0|}{2}}{k}\int_0^z\chi(z)sh\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z, \tag{55}$$

отсюда на основании (29) представим это выражение в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}}\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\theta_k^a\int_0^z\chi(z)sh\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta_{sk}^2+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z$$

Внося это выражение в (54) находим $T_{skb}^b(z)$:

$$T^b_{skb}(z) = A_{sk}e^{\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta^2_{sk}+\frac{ik\omega}{\chi}}+\frac{V}{2\chi}\right]z} + B_{sk}e^{-\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta^2_{sk}+\frac{ik\omega}{\chi}}-\frac{V}{2\chi}\right]z} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta^2_{sk}+\frac{ik\omega}{\chi}}}\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\theta^a_k\int_0^z\chi(\bar z)\,\mathrm{sh}\left[\sqrt{\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2+\beta^2_{sk}+\frac{ik\omega}{\chi}}(z-\bar z)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-\bar z)}d\bar z. \quad (56)$$

Таким образом, функция $T^b_{skb}(z)$ удовлетворяет уравнение (30).

Проверим, что функция $T^b_{skb}(z)$, определяемая соотношением (54) удовлетворяет решению дифференциального уравнения (23). Функция $T_k(a,z)$ является разрывной в точке $z=\pm|z_0|/2$, ,

где z_0 – размер области Γ^a в направлении оси z.

В соответствии с (25) функция $T_k(a,z)$ имеет вид: $T_k(a,z)=\theta^a_k\chi(z)$,

где $\chi(z)$ – разрывная функция, которая может быть представлена, например, с помощью функции Хевисайда [8] соотношением:

$$\chi(z)=\theta(z+a)-\theta(z-a)\equiv\theta(a-|z|),$$

где $\chi(z)$ – характеристическая функция отрезка $[-a,a]$; $\theta(a)$ – функция Хевисайда (в нашем случае следует полагать $a=|z_0|/2$).

Находим последовательно для членов, содержащихся в выражении (54) произвольные постоянные (A_{sk} и B_{sk}), т.е. для однородного уравнения (30), используя сокращенное обозначение: $\sqrt{(V/2\chi)^2+\beta^2_{sk}+ik\omega/\chi}=\sqrt{\ }$,

получим: $\left(V/2\chi\pm\sqrt{\ }\right)^2-V/\chi\left(V/2\chi\pm\sqrt{\ }\right)-\left(\beta^2_{sk}+ik\omega/2\right)=0.$

Таким образом, содержащиеся в формуле (54) произвольные постоянные (A_{sk} и B_{sk}), удовлетворяют решение однородного выражения (23). Подставляя слагаемое, содержащее интеграл в (23) получим:

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\ }}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\left\{\frac{d}{dz}T_k(a,z_1)e^{\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}(z-z_1)}\mathrm{sh}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]\Big|_{z_1=z}+\frac{d}{dz}\int_0^z T_k(a,z)\frac{d}{dz}e^{\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}(z-z_1)}\mathrm{sh}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]dz_1-\right.$$

$$\left.-\frac{V}{\chi}\left\langle T_k(a,z)e^{\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}(z-z_1)}\mathrm{sh}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]\Big|_{z_1=z}+\int_0^z T_k(a,z_1)\frac{d}{dz}e^{\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}(z-z_1)}\mathrm{sh}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]dz_1\right\rangle-\left(\beta^2_{sk}+\frac{i\omega k}{\chi}\right)\right\}$$

Первые слагаемые в фигурной и угловой скобках равны нулю т.к. $\mathrm{sh}(\circ)=0$. Тогда это выражение представим в виде:

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\ }}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\left\{\frac{d}{dz}\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle\frac{V}{2\chi}\mathrm{sh}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]+\mathrm{ch}\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]\sqrt{\ }\right\rangle e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}dz-\frac{V}{\chi}\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle\frac{V}{2\chi}\times\right.\right.$$

$$\times sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]\sqrt{\Gamma}\Big)e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}dz_1-(\beta_{sk}^2+\frac{i\omega k}{\chi})\int_0^z T_{sk}(a,z_1)e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]dz_1\Bigg\},$$

или:

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\Bigg\{\sqrt{\Gamma}T_k(a,z)+\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle\left(\frac{V}{2\chi}\right)^2 sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+\frac{V}{2\chi}\sqrt{\Gamma}ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]\right\rangle dz_1+\int_0^z T_k(a,z_1)\times$$

$$\times\frac{V}{2\chi}\sqrt{\Gamma}ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+\left(\sqrt{\Gamma}\right)^2 sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]-\frac{V}{\chi}\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle\frac{V}{2\chi}sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]\sqrt{\Gamma}\right\rangle\times\quad ,$$

$$\times e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}dz_1-(\beta_{sk}^2+\frac{i\omega k}{\chi})\int_0^z T_{sk}(a,z_1)e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]dz_1\Bigg\}$$

отсюда и из выражения (23),приводя подобные члены получим:

$$\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\int_0^z T_k(a,z_1)sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+\frac{V}{2\chi}\sqrt{\Gamma}ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]dz_1+\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle\frac{V}{2\chi}\sqrt{\Gamma}ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+\right.$$

$$\left.+sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]-\frac{V}{\chi}\int_0^z T_k(a,z_1)\left\langle sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]+\sqrt{\Gamma}ch\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]\right\rangle\right\rangle e^{\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}(z-z_1)}dz_1$$

Таким образом, функция $T_{skb}^{b}(z)$, определяемая соотношением (54), удовлетворяет уравнению (23). Перейдем к определению постоянных A_{sk} и B_{sk}, входящих в функцию $T_{skb}^{b}(z)$. В соответствии с (56) вычислим предварительно интеграл

$$S=\int_0^z \chi(z_1)sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}dz_1\,, \tag{57}$$

Рассмотрим отдельно области изменения значений z: $-|z_0|/2<z<|z_0|/2$, $z<-|z_0|/2$, $z>|z_0|/2$. В первой области $-|z_0|/2<z<|z_0|/2$ имеем $\chi(z)\equiv 1$ и из (57) находим последовательно:

$$\begin{aligned}S&=\int_0^z e^{V/2\chi(z-z_1)}sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]dz_1=\frac{1}{2}\int_0^z\left[e^{(\sqrt{\Gamma}+V/2\chi)(z-z_1)}-e^{(-\sqrt{\Gamma}+V/2\chi)(z-z_1)}\right]dz_1=\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\Gamma}+V/2\chi}\left[e^{(\sqrt{\Gamma}+V/2\chi)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\Gamma}-V/2\chi}\left[e^{-(\sqrt{\Gamma}-V/2\chi)z}-1\right]\right\}\end{aligned} \tag{58}$$

В области $z>|z_0|/2$ имеем:

$$S=\int_0^{|z_0|/2}e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}sh\left[\sqrt{\Gamma}(z-z_1)\right]dz_1=\frac{1}{2}\int_0^{|z_0|/2}\left[e^{\left(\sqrt{\Gamma}+\frac{V}{2\chi}\right)(z-z_1)}-e^{-\left(\sqrt{\Gamma}-\frac{V}{2\chi}\right)(z-z_1)}\right]dz_1=-\frac{1}{2}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\left(z-\frac{|z_0|}{2}\right)}-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{\left(-\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\left(z-\frac{|z_0|}{2}\right)}-e^{\left(-\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\left[1-e^{\left(-\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\} \quad (59)$$

Для области $z<-|z_0|/2$ находим:

$$S=\int_0^{-|z_0|/2}e^{\frac{V}{2\chi}(z-z_1)}\,sh\left[\sqrt{\ }(z-z_1)\right]dz_1=\frac{1}{2}\int_0^{-|z_0|/2}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)(z-z_1)}-e^{\left(-\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)(z-z_1)}\right]dz_1=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\}, \quad (60)$$

Из (56), (58) – (60) находим представления для $T^{b+}_{skb}(z)$ при $z>|z_0|/2$; $T^{b+}_{skb}(z)$ при $z<|z_0|/2$; $T^{b-}_{skb}(z)$ при $z>-|z_0|/2$ и $T^{b-}_{skb}(z)$ при $z<-|z_0|/2$;

I. В области $z>|z_0|/2$

$$T^{b+}_{skb}(z)=A^{+}_{sk}e^{\left(\sqrt{\ }+V/2\chi\right)z}+B^{+}_{sk}e^{-\left(\sqrt{\ }-V/2\chi\right)z}+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\right\}, \quad (61)$$

II. При $z<-|z_0|/2$

$$T^{b-}_{skb}(z)=A^{-}_{sk}e^{\left(\sqrt{\ }+V/2\chi\right)z}+B^{-}_{sk}e^{-\left(\sqrt{\ }-V/2\chi\right)z}+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\right\}, \quad (62)$$

III. В области $-|z_0|/2<z<|z_0|/2$

$$T^{b\pm}_{skb}(z)=A^{\pm}_{sk}e^{\left(\sqrt{\ }+V/2\chi\right)z}+B^{\pm}_{sk}e^{-\left(\sqrt{\ }-V/2\chi\right)z}+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]\right\}. \quad (63)$$

Здесь верхние индексы "+", "-" соответствуют принадлежности переменной z областям $z > 0$ и $z < 0$ соответственно. Для определения значений постоянных. A^+_{sk}, B^+_{sk}, A^-_{sk}, B^-_{sk} воспользуемся условиями ограниченности $T^b_{skb}(z)$ в областях $z > 0$ и $z < 0$, а также условиями сопряжения в точке $z = 0$ (аналогичные условия использовались в[5] при решении других задач). Рассмотрим условие ограниченности $T^{b+}_{skb}(z)$ в области $z > |z_0|/2$. Из (61) имеем:

$$T^{b+}_{skb}(z) = \left\{ A^+_{sk} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\} e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z} +$$

$$+ B^+_{sk}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}. \tag{64}$$

Исходя из (64) и условия ограниченности при $z > |z_0|/2$ имеем:

$$A^+_{sk} = -\frac{1}{\pi}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right], \tag{65}$$

Откуда следует, что при $z > |z_0|/2$:

$$T^{b+}_{skb}(z) = B^+_{sk}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}, \tag{66}$$

При $z < -|z_0|/2$ условие ограниченности $A^{b-}_{skb}(z)$, вытекающее из (62), будет записано в виде:

$$T^{b-}_{skb}(z) = A^-_{sk}e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z} + \left\{ B^-_{sk} - \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]\right\} \times$$

$$\times e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}, \tag{67}$$

Откуда условие ограниченности примет вид:

$$B^-_{sk} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right], \tag{68}$$

При этом для $T^{b-}_{skb}(z)$ имеем представление: при $z < -|z_0|/2$;

$$T^{b-}_{skb}(z) = A^-_{sk}e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}, \tag{69}$$

Используя (63) и (65) находим $T^{b+}_{skb}(z)$ при $0 < z < |z_0|/2$:

$$T_{skb}^{b+}(z)=-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}+B_{sk}^{+}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]\right\}, \quad (70)$$

Принимая во внимание (63) и (68), получим при $-|z_0|/2<z<0$:

$$T_{skb}^{b-}(z)=A_{sk}^{-}e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]\right\}, \quad (71)$$

Условиями сопряжения при z = 0 будут:

$$T_{skb}^{b+}(z)\Big|_{z=0+0}=T_{skb}^{b-}(z)\Big|_{z=0-0}, \quad (72)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}T_{skb}^{b+}(z)\Big|_{z=0+0}=\frac{\partial}{\partial z}T_{skb}^{b-}(z)\Big|_{z=0-0} \quad (73).$$

Из (70), (71), (72) имеем:

$$-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]+B_{sk}^{+}=A_{sk}^{-}+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\times\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]$$

отсюда;

$$A_{sk}^{-}-B_{sk}^{+}=-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]-\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\},$$

или;

$$A_{sk}^{-}-B_{sk}^{+}=\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]-\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\}, \quad (74)$$

используя (70), (71) и (73) находим;

$$-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)B_{sk}^{+}=\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)A_{sk}^{-}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\{1-1\}$$

отсюда:

$$\left(\sqrt{\ } + \frac{V}{2\chi}\right)A^-_{sk} + \left(\sqrt{\ } - \frac{V}{2\chi}\right)B^+_{sk} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2\right], \quad (75)$$

Исключая A^-_{sk} из этого соотношения и (74) находим:

$$\left(\sqrt{\ } + \frac{V}{2\chi}\right)\left\{B^+_{sk} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left[\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left\langle 1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left\langle 1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right\rangle\right]\right\} +$$

$$+\left(\sqrt{\ } - \frac{V}{2\chi}\right)B^+_{sk} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2\right]$$

или;

$$\left[\left(\sqrt{\ } + \frac{V}{2\chi}\right) + \left(\sqrt{\ } - \frac{V}{2\chi}\right)\right]B^+_{sk} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left\{\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} + e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2\right]\right\} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left(\sqrt{\ } + \frac{V}{2\chi}\right)\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] - \frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\right\}$$

Откуда:

$$B^+_{sk}2\sqrt{\ } = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left\{\left(1+\frac{\sqrt{\ }+V/2\chi}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\right)e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} + \left(1-\frac{\sqrt{\ }+V/2\chi}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\right)e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} -\right.$$

$$\left.-2+\left(\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi} - \frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\right)\left(\sqrt{\ }+V/2\chi\right)\right\}$$

Таким образом. имеем:

$$B^+_{sk} = \frac{1}{2\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\left(\sqrt{\ }\right)^2}\left[\frac{2}{\sqrt{\ }-V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 2 - \frac{2V/2\chi}{\left(\sqrt{\ }-V/2\chi\right)\left(\sqrt{\ }+V/2\chi\right)}\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\left(\sqrt{\ }\right)^2}2\left[\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - \frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}}\right] = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}}\times\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1\right], \quad (76)$$

отсюда и из (74):

$$A^-_{sk} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta^a_k}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}} - 1\right] + \frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right] -\right.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\Bigg\} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right], \quad (77)$$

Таким образом, для интервала $0<z<|z_0|/2$ из (63), (65) и (76) имеем $T_{skb}^{b+}(z)$:

$$T_{skb}^{b+}(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z} + B_{sk}'e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]\right\} = -\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\times$$

$$\times\left[1-e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z} + \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left\{\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left[e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right]+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left(e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}-1\right)\right\} = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\times$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}-\left(\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}+\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\times$$

$$\times\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left[\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}-\frac{2\sqrt{\ }}{\left(\sqrt{\ }\right)^2-(V/2\chi)^2}\right]. \quad (78)$$

Соответственно для области $z>|z_0|/2$ находим $T_{skb}^{b+}(z)$ из выражений (66) и (74):

$$T_{skb}^{b+}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\left\{\left[e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}+\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}\right\} = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\,\mathrm{sh}\left[\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}. \quad (79)$$

В случае $z<-|z_0|/2$ имеем из (69), (77):

$$T_{skb}^{b-}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\left\{\left[e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}-1\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}+\left[1-e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}}\right]\times\right.$$

$$\times e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}\Bigg\} = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\,\mathrm{sh}\left[\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}, \qquad (80)$$

Таким образом, окончательное решение уравнения (30) при $-\infty\langle z\langle+\infty$ приобретает вид:

1) При $z\in\left(-\infty,-|z_0|/2\right)$ из (80):

$$T_{skb}^{b-}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}\,\mathrm{sh}\left[\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}\right]e^{\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)z}, \qquad (81)$$

2) При $z\in\left(-|z_0|/2,|z_0|/2\right)$ из (78):

$$T_{skb}^{bs}(z) = \frac{1}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\left[\frac{1}{\sqrt{\ }+V/2\chi}e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\times e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}-\frac{2\sqrt{\ }}{\left(\sqrt{\ }\right)^2-\left(V/2\chi\right)^2}\right], \qquad (82)$$

3) При $z\in\left(|z_0|/2,+\infty\right)$ из (79):

$$T_{skb}^{b+}(z) = -\frac{2}{\pi}\frac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}\frac{\theta_k^a}{\sqrt{\ }}\frac{1}{\sqrt{\ }-V/2\chi}\,\mathrm{sh}\left[\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)\frac{|z_0|}{2}\right]e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{V}{2\chi}\right)z}, \qquad (83)$$

В связи с тем, что характеристическая функция $\chi(z)$ разрывна в точках $z=\pm|z_0|/2$, проводилась проверка условия их сопряжения для (81); (82); (83).

Отметим, что условия соответствия относятся к распределению температурного поля [3, 4], т.е. к функции $T_b(r,\theta,z)$. Выше использовались условия сопряжения величин $T_{skb}^{b}(z)$, которые являются коэффициентами Фурье разложения функции $T_b(r,\theta,z)$ по составляющим $e^{ik\theta}$, $U_{sk}^{b}(r)$, образующих ортонормированный базис (с точностью до нормирующего множителя) в пространстве L^2 (пространстве Гильберта [8]).

В связи с тем, что $T_b(r,\theta,z)$ принадлежит $L^2(a, b)$, указанные условия сопряжения для $T_{skb}^{b}(z)$ относятся также и к $T_b(r,\theta,z)$. Используя формулы обращения для тригонометрических рядов Фурье по угловой координате θ и задачи Штурма-Лиувилля – по радиальной координате r [6], получим представление для $T(r,\theta,z)$; имеем при $\theta,z\in\Gamma^b$.

$$T(r,\theta,z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{ka}^{a}(r,z)e^{ik\theta}, \qquad (84)$$

индексы "a" в верху и внизу в $T_{ka}^{a}(r,z)$ соответствуют разложению $T_{ka}^{a}(r,z)$ по функциям $U_{sk}^{a}(\cdot)$ и условию равенства нулю температуры на внутренней стороне втулки. Таким образом, имеет место аналогия с (82).

Используем представления [6]

$$T^{a}_{ka}(r,z)=\frac{\pi^2}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\beta_{sk}\,\frac{I^2_k(\beta_{sk}b)}{I^2_k(\beta_{sk}a)-I^2_k(\beta_{sk}b)}\,\frac{}{}T^{a}_{ska}(z)U^{a}_{sk}(r), \tag{85}$$

или

$$T(r,\theta,z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\pi^2}{2}\sum_{s=1}^{\infty}\beta^2_{sk}\,\frac{I^2_k(\beta_{sk}b)}{I^2_k(\beta_{sk}a)-I^2_k(\beta_{sk}b)}\,\frac{1}{\pi}R^{sk}\theta^{b}_{k}\,\frac{I_k(\gamma_{sk}b)}{I_k(\gamma_{sk}a)}\,\frac{1}{\sqrt{\;}}\left[\frac{1}{\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\left(\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\frac{1}{\sqrt{\;}-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}e^{-\left(\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}-\frac{2\sqrt{\;}}{\sqrt{\;}^2-\left(\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)^2}\right]U^{a}_{sk}(r), \tag{86}$$

или:

$$T(r,\theta,z)=-\frac{1}{2}T^{b}\sum e^{ik\theta}\,\frac{\sin k\frac{\varphi_0}{2}}{k}\sum_{s=-\infty}^{\infty}I_s\,\frac{\beta^2_s}{\sqrt{\;}}\left[\frac{1}{\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}e^{-\left(\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\;}-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}e^{-\left(\sqrt{\;}-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}-\frac{2\sqrt{\;}}{\sqrt{\;}^2-\left(\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)^2}\right]U^{a}_{sk}(r), \tag{87}$$

где

$$I_s=\frac{1}{\dfrac{I_k(\beta_{sk}a)}{I_k(\beta_{sk}b)}-\dfrac{I_k(\beta_{sk}b)}{I_k(\beta_{sk}a)}}, \tag{88}$$

Соотношение (87) может быть представлено в виде:

$$T_0=\frac{T(r,\theta,z)-T_b(r,\theta,z)}{T^{b}\sqrt{ab}}(b-a)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{ik}\,\frac{\sin k\frac{\varphi_0}{2}}{k}\sum_{s=1}^{\infty}(-1)^{s-1}\,\frac{\beta^2_{sk}}{2\sqrt{\;}}\left[\frac{1}{\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}\times e^{-\left(\sqrt{\;}+\frac{1V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}-z\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\;}+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}e^{-\left(\sqrt{\;}-\frac{1V}{2\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2}+z\right)}\right]U^{a}_{sk}(r)+\sum(-1)^{s-1}U^{a}_{sk}(r)\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}M_{sk}e^{i\theta}\,\frac{\sin\frac{\varphi_0}{2}k}{k}, \tag{89}$$

где

$$M_{sk} = 1 - \frac{\beta_{sk}^2}{\beta_{sk}^2 + i\,kw/x} \tag{90}$$

Введем обозначения:

$$\sum = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{\ }} \left[\frac{1}{\sqrt{\ } + \left(\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)^2} e^{-\left(\sqrt{\ } + \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{\ } - \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}} e^{-\left(\sqrt{\ } + \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] U_{sk}^a(r)$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} U_{sk}^a(r) \sum\nolimits_2' \quad ; \quad \sum\nolimits_2' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_{sk} e^{i\theta k} \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} k}{k}$$

После чего получим выражение:

$$\sum + \sum = -\frac{2}{\pi^2} \frac{b-a}{\sqrt{ra}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\theta k} \frac{\sinh \frac{\varphi_0}{2} k}{k} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{\ }} \left[\frac{1}{\sqrt{\ } - \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}} e^{-\left(\sqrt{\ } + \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} - z\right)} + \frac{1}{\sqrt{\ } - \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}} \times \right.$$

$$\left. \times e^{-\left(\sqrt{\ } + \frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_0|}{2} + z\right)} \right] \frac{1}{s} \sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right) - \frac{2}{\pi} \frac{b-a}{\sqrt{ra}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right)}{s} e^{-\theta s} \times \frac{\mathrm{sh}\left[\left(\pi - \frac{\varphi_0}{2}\right) s\right]}{\mathrm{sh}\, \pi a} \tag{91}$$

При получении (91) использовали равенства:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \sin kx = -\frac{\pi}{2} \mathrm{sh}(x - \pi) a \,\mathrm{cosech}\, \pi a \;:, 0 < x < 2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{a^2 + k^2} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi}{2a^2} \{1 - \mathrm{sh}[(\pi - x)a] \,\mathrm{cosech}\, \pi a\} - \frac{x}{2a^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx \cos ky = \frac{\pi - x}{2}, \; y < x < \pi,$$

получаемые разложением правых частей в ряды Фурье.

Из соотношения: $q = -\lambda \frac{\partial}{\partial r} T(r, \theta, z)$,

где

$r = b$: $\quad -|\varphi_0|/2 \le \theta \le |\varphi_0|/2; \quad -|z_0|/2 \le z \le |z_0|/2;$

q – мощность теплового потока, переносимого лазерным лучом через поверхность втулки; λ – коэффициент теплопроводности материала детали.

Подставляя сюда, выражение (91) получаем представление в виде:

$$\frac{T(r,\theta,z)}{T^b}=\frac{r-a}{b-a}\chi(\theta)\chi(z)+\sqrt{\frac{b}{r}}\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{i\theta k}\frac{\sin k\frac{\varphi_o}{2}}{k}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\beta_{sk}^2}{2\sqrt{\ }}\left[\frac{1}{\sqrt{\ }+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}\times\right.\right.$$

$$\left.\times e^{-\left(\sqrt{\ }+\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_o|}{2}-z\right)}+\frac{1}{\sqrt{\ }-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}}e^{-\left(\sqrt{\ }-\frac{1}{2}\frac{V}{\chi}\right)\left(\frac{|z_o|}{2}+z\right)}\right]\frac{1}{s}\sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right)-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\times$$

$$\left.\times\sin\left(\frac{b-r}{b-a}\pi s\right)e^{-\theta a_s}\operatorname{sh}\left[\left(\pi-\frac{\varphi_o}{2}\right)a_s\right]\operatorname{cosec}\, h a_s\right\}, \tag{92}$$

где $a_s\equiv\beta_{sk}\chi/w$; T^b – температура в зоне Γ^b. Найдем:

$$T(r,\theta,z)=\frac{k|Q|}{\lambda S_{пл}}(b-a)\frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{b}+\sqrt{2}\pi^{3/4}\sqrt{\frac{b}{D}}\sqrt{\frac{n}{\chi}}\right](b-a)}-\frac{k|Q|}{\lambda S_{пл}}(b-r), \tag{93}$$

где $|Q|$ – тепловой поток, переносимый лазерным лучом; $S_{пл}$ – площадь лазерного следа на поверхности детали. Из (93) находим:

$$\Delta=b-r=\left\{\frac{1}{1+\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\frac{1}{b}+\sqrt{2}\pi^{3/4}\sqrt{\frac{b}{D}}\sqrt{\frac{n}{\chi}}\right](b-a)}-\frac{\pi\lambda D^2 T(r,\theta,z)}{4k\rho(b-a)}\right\}(b-a), \tag{94}$$

где $T(r,\theta,z)$ - температура (под следом лазерного луча на поверхности детали) на глубине $\Delta=b-r$ при принятом выше условии, что T_o – температура окружающей среды (воздуха) равна нулю.

При $T_o\neq0$ очевидно имеем: $T_д(r,\theta,z)=T(r,\theta,z)+T_o$

где $T_д(r,\theta,z)$ - действительная температура внутри втулки, при температуре окружающей среды (воздуха) не равной нулю.

Таким образом, находим: $T(r,\theta,z)=T_д(r,\theta,z)-T_o$ (95). Полагая, что значение $T_д(r,\theta,z)$ является равным температуре разложения азотированного поверхностного слоя детали, т.е. $T_д(r,\theta,z)=625^\circ C$ (96), и используя средние величины параметров разупрочнения при лазерной обработке, входящих в (94) и равные:

$n = 0{,}29$ 1/с; $D = 4\times10^{-3}$м; $P = 1{,}15\times10^{3}$Вт; $k = 0{,}9$; $\lambda = 24{,}7$ Вт/м К;
$b = 3{,}2\ 10^{-2}$ м; $b\text{-}a = 1.1\ 10^{-2}$ м; $\chi = 5{,}96\ 10^{-6}$ м^2/с, $\rho = 7.83$ г/см^3, (97)

находим из него: $\Delta=b-r=5{,}2\cdot10^{-4}$ м $=0{,}52$ мм (98), где Δ – толщина слоя, разложившегося в результате лазерной термообработки на внешней поверхности детали.

Экспериментальная проверка подтвердила, что при таких параметрах обработки начинается диссоциация нитридов и карбонитридов на глубине до 0,50-0,54мм. Процесс лазерной обработки сопровождается потрескиванием и газовыделением. Качество обработанной поверхности хорошее и при диссоциации нитридов не требуется последующей механической обработки (точение, шлифовка). Использование лазерной обработки (перед восстанавливающей ЭИО) обеспечивает локальный нагрев и не приводит к разупрочнению сердцевины, что особенно важно для длинномерных деталей типа – шток, которые подвергаются сложной термической обработке. Эксперименты проводили на промышленной установке – "Комста - 2", образцами были детали узла парораспределения турбины, снятые после эксплуатации для ремонта.

Получены зависимости [9] уровня и однородности твердости от плотности мощности при лазерной обработке деталей (штоки и втулки узла парораспределения турбины, подвергнутые азотированию на глубину до 0,5 мм). Данные экспериментов представлены в виде таблицы.

Плотность мощности, КВт/см^2	Средний уровень твердости, HRC	Наличие дефектов (поры, трещины)
6,0	56,6±2,0	наличие пор и микротрещин
7,0	28,5±2,0	поверхность без видимых дефектов
8,0	26,8±1,8	то же
9,0	25,7±2,2	-//-
10,0	26,1±1,5	незначительное оплавление поверхности
11,0	26,1±1,2	видимое оплавление поверхности

Примечание: * – материал деталей – сталь 20Х1М1Ф1ТР; диаметр деталей 40мм; обороты – 16 мин$^{-1}$.

Список литературы: 1. А.с. №1722762, СССР. МКИ B23P 6/00. Способ ремонта прокатных валков. / *Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Автухов А.К.* и др. /БИ. №12, 1990. – 8 с. 2. А.с. №1468933, СССР. МКИ 4C21 Д3/02. Способ обезуглераживания стальных изделий. / *Кандаловский И.П.* и др. – 3 с. 3. *Карташов Э.М.* Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа, 1986. – 480 с. 4. *Морс Ф.М., Фешбах Г.Н.* Методы теоретической физики. Т.I. – М.: Изд-во АН СССР. 1960. – 886 с. 5. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – М.: Наука, 1964. – 487 с. 6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т.II. – М.: Наука, 1960. – 295 с. 7. *Слоновский Н.В.* Об одном классе интегральных представлений и некоторых оценках функций Бесселя. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – М.: АН СССР. – № 5. – 1968. 8.Функции математической физики. / *Кампе де Фурье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т.* – М.: Физматгиз, 1963. – 402 с. 9. *Мартыненко А.Д., Скобло Т.С., Сидашенко А.И., Слоновский Н.В.* Способ восстановления и упрочнения деталей лазерным лучом. //Сб. науч. тр.: Підвищення надійності відновлюємих деталей машин. Вип. 4: – Харьков: ХГТУСХ, 2000. – С. 82-87.

Поступила в редколлегию 16.07.02