

Ольшанський В.П.,  
Бурлака В.В.,  
Сліпченко М.В.,  
Малець О.М.

Харківський національний технічний  
університет сільського господарства  
імені П.Василенка, м. Харків, Україна,  
E-mail: teoriyaTMM@gmail.com

## ПРО КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КВАДРАТИЧНО-НЕЛІНІЙНОЮ ЖОРСТКІСТЮ

УДК 534.1:539.3

В роботі розглянуто вільні коливання системи з одним ступенем вільності за умови, що сила пружності пружини пропорційна квадрату її деформації. Побудовано дві форми аналітичного розв'язку нелінійного диференціального рівняння. В першій, розв'язок виражено через еліптичний косинус, а в другій – через Атеб-функції. Складено таблиці для обчислень значень цих функцій і побудовано в безрозмірних координатах графіки, які спрощують розрахунки переміщень осцилятора у часі. Виведено формули для обчислення періодів коливань при наданні осцилятору початкового відхилення від положення рівноваги, або початкової швидкості (миттєвого імпульса). Наведено приклади розрахунків з використанням відомих таблиць неповного еліптичного інтеграла першого роду та з використанням складеної таблиці періодичних Атеб-функцій.

**Ключові слова:** квадратично-нелінійний осцилятор, вільні коливання, еліптичний косинус, Атеб-функції, апроксимація.

### Актуальність

Внаслідок нелінійних коливань з великими амплітудами може відбуватись руйнування елементів конструкцій або порушення їх працездатності. Тому дослідження особливостей механічних коливань відноситься до актуальних задач. Це в першу чергу стосується коливань менш вивчених суттєво нелінійних систем.

### Аналіз останніх публікацій

Про активні дослідження в цій галузі механіки в Україні свідчать не лише численні статті, а й докторські дисертації [1,2] та видані в останні роки монографії [3,4], де є відповідні огляди літературних джерел.

### Мета статті

Метою даної статті є спрощення розрахунку вільних коливань суттєво нелінійного осцилятора з використанням аналітичних розв'язків рівняння руху в спеціальних функціях та встановлення зв'язку між двома формами цих розв'язків.

### Викладення основного матеріалу

В останні роки диференціальні рівняння зі степенною нелінійністю активно використовує Львівська школа механіки для моделювання різних динамічних процесів. При цьому аналітичні розв'язки рівнянь часто виражають через так звані Атеб-функції. Зокрема розв'язок рівняння:

$$m\ddot{x} + cx^{v+1} = 0, \quad (m, c > 0), \quad (1)$$

з певними обмеженнями на  $v$ , подано у вигляді [2]:

$$x = a \cdot Ca(v+1, 1, \omega t + \psi),$$

де  $\omega = \sqrt{\frac{c(v+2)}{2m}} a^{\frac{v}{2}}$ ,  $a$  – амплітуда коливань,  $\psi$  – фаза коливань,

$Ca(v+1, 1, \omega \cdot t + \psi)$  - Атеб-косинус.

При  $v = 1$  рівняння (1) не описує коливань. Тому окремо розглянемо випадок осцилятора квадратично-нелінійної жорсткості.

Коливальні переміщення  $x(t)$  у часі  $t$  матеріальної точки масою  $m$  описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + cx^2 \text{sign}(x) = 0, \quad (2)$$

де  $c$  - характеризує жорсткість осцилятора.

Розглянемо два варіанти початкових умов при  $t = 0$ :

$$\text{а) } x(0) = -a, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad \text{і б) } x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (3)$$

У першому рух осцилятора спричинений початковим відхиленням на  $(-a)$  осцилятора вліво від положення рівноваги  $x = 0$ , а у другому – початковою швидкістю  $v_0$  у цьому положенні.

Уведенням позначення  $\dot{x} = v$ , з урахуванням того, що  $\ddot{x} = v \frac{dv}{dx}$ , рівнянню (2) надаємо форму:

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{c}{m} x^2 \text{sign}(x) = 0. \quad (4)$$

1. Орієнтуючись на умови а) в (3), розглянемо рух на проміжку  $-a \leq x \leq 0$ , коли  $v > 0$ , тобто матеріальна точка рухається зліва направо в напрямі вісі  $Ox$ . Тоді  $\text{sign}(x) = -1$  і (4) приймає вигляд:

$$v dv = \frac{c}{m} x^2 dx. \quad (5)$$

Інтегруванням цього виразу отримаємо:

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{c_1 + \frac{2c}{3m} x^3}, \quad (6)$$

де  $c_1$  - довільна стала.

Умова а) в (3) виконується, коли  $c_1 = \frac{2c}{3m} a^3$ .

Тому (6) зводиться до :

$$\sqrt{\frac{2c}{3m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{a^3 + x^3}}.$$

Подальше інтегрування дає:

$$\tau = \omega t = \int_{-x/a}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}, \quad (7)$$

де  $\omega = \sqrt{\frac{2ac}{3m}}$ .

Інтеграл в правій частині (7) виражається через неповний еліптичний інтеграл першого роду  $F(\varphi, k)$ . Згідно з [5, с.96]:

$$\sqrt[4]{3}\tau = F(\varphi, k),$$

причому:

$$k = \sin 75^\circ; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3} - 1 + (-x/a)}{\sqrt{3} + 1 - (-x/a)}. \quad (8)$$

В теорії спеціальних функцій [5, 6] прийнято, що:

$$\cos \varphi = \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\tau, k). \quad (9)$$

Це так званий еліптичний косинус.

Із (8) і (9) випливає, що:

$$x = x(t) = -a \left[ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\tau, k)}{1 + \operatorname{cn}(\sqrt[4]{3}\tau, k)} \right]. \quad (10)$$

Таким чином, для розрахунку переміщень осцилятора у часі при вільних коливаннях треба обчислити значення еліптичного косинуса.

Вираз (7) дає можливість знайти період коливань  $T$ , оскільки:

$$\frac{\omega T}{4} = I = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}.$$

Згідно з [5, с. 53] значення  $I$  виражається через Гама-функцію  $\Gamma(z)$ , по формулі:

$$I = \sqrt[3]{4} \frac{\Gamma^2(4/3)}{\Gamma(5/3)}.$$

Враховуючи, що [5, с. 52]:  $\Gamma(4/3) \approx 0,8929795$ ;  $\Gamma(5/3) \approx 0,9027453$ , одержуємо:

$$I \approx 1,402182; \quad T = \frac{4I}{\omega} \approx 6,869261 \sqrt{\frac{m}{ac}}.$$

Як бачимо, період коливань залежить від початкового відхилення  $a$  або амплітуди коливань, що не властиво лінійним системам, де має місце ізохронність коливань.

Формула (10) дає можливість при розрахунках  $x(t)$  використовувати лінійну інтерполяцію й таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду, надруковані в [5, с. 103] або в [6, с. 429].

Розглянемо приклади розрахунку.

Приклад 1. Нехай  $\tau = 0,667$ . Тоді  $\sqrt[4]{3}\tau \approx 0,878$ . У таблиці в [5] знаходимо, що  $F(\varphi, \sin 75^\circ) = 0,878$  при  $\varphi \approx 45^\circ$ . Для цього кута  $\operatorname{cn}(0,878; \sin 75^\circ) \approx \cos 45^\circ \approx 0,707$  і за формулою (7)  $x/a \approx -0,703$ .

Приклад 2. Якщо  $\tau = 1$ , то  $\sqrt[4]{3}\tau \approx 1,316$ . У таблиці знаходимо, що  $F(\varphi, \sin 75^\circ) = 1,316$  при  $\varphi \approx 61^\circ$ . Тоді  $\operatorname{cn}(1,316; \sin 75^\circ) \approx \cos 61^\circ \approx 0,4848$  і по формулі (7) одержуємо  $x/a \approx -0,4$ .

Для спрощеного розрахунку руху осцилятора, без застосування таблиці еліптичного інтеграла, можна використовувати графік, поданий на рис. 1, що відображає залежність (10), поширену на проміжок  $0 \leq x \leq a$ .

Далі цей графік треба продовжити симетрично вправо відносно вертикалі  $\tau = 2,804$  до значення  $\tau = 5,608$ , де  $x = -1$ .

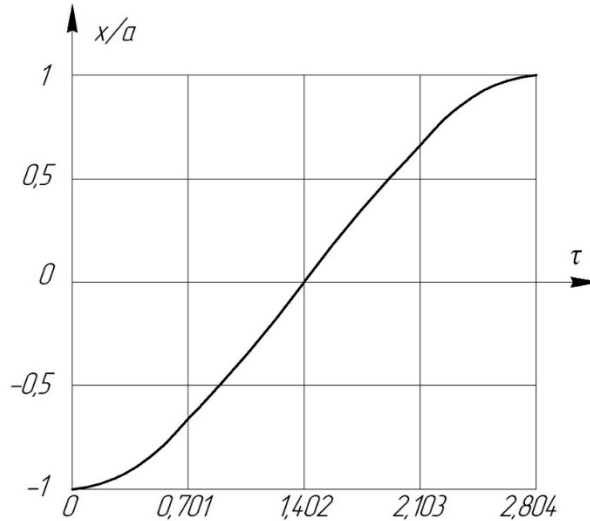


Рис. 1. Графік для розрахунку коливань при  $x(0) = -a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$

2. У випадку початкових умов б) в (3) розглянемо рух осцилятора на проміжку  $x \in [0; a_*]$ , де  $\dot{x} > 0$ ,  $\text{sign}(x) = 1$  і рівняння (5) набуває вигляд:

$$v dv = -\frac{c}{m} x^2 dx.$$

Його інтегрування дає:

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{c_2 - \frac{2c}{3m} x^3}.$$

Тут  $c_2$  - довільна стала, яка для вказаних початкових умов приймає значення  $c_2 = v_0^2$ . Тому:

$$\sqrt{\frac{2c}{3m}} dt = \frac{dx}{\sqrt{a_*^3 - x^3}},$$

де  $a_* = \sqrt[3]{\frac{3mv_0^2}{2c}}$ .

Подальшим інтегруванням отримуємо:

$$\tau_* = \frac{v_0 t}{a_*} = \int_0^{x/a_*} \frac{du}{\sqrt{1-u^3}} = I - \int_{x/a_*}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^3}}. \quad (11)$$

Тоді, по аналогії з попереднім варіантом:

$$\sqrt[4]{3}(I - \tau_*) = F(\varphi, k);$$

$$x(t) = a_* \left\{ 1 - \sqrt{3} \frac{1 - cn \left[ \sqrt[4]{3} (I - \tau_*), k \right]}{1 + cn \left[ \sqrt[4]{3} (I - \tau_*), k \right]} \right\}. \quad (12)$$

Тут, як і раніше,  $k = \sin 75^\circ$ .

Згідно з (11) період коливань  $T_*$  становить:

$$\frac{v_0 T_*}{4a_*} = I \Rightarrow T_* = \frac{4Ia_*}{v_0} \approx 6,420391 \sqrt[3]{\frac{m}{cv_0}}.$$

Період коливань  $T_*$  залежить від початкової швидкості (наданого імпульса), що не властиво лінійним системам.

Для розрахунку  $x(t)$  по формулі (12) теж можна використовувати таблиці неповного еліптичного інтеграла першого роду.

Приклад 3. Обчислимо  $x(t)$ , коли  $\tau_* = 1$ ,  $\sqrt[4]{3}(I - \tau_*) \approx 0,529$ . У таблиці в [5, с.103], знаходимо, що  $\varphi \approx 29^\circ$ . Для цього кута  $cn(0,529, k) = \cos \varphi \approx 0,8746$ . Тоді по формулі (12)  $x/a_* \approx 0,884$ .

З метою спрощення розрахунків побудовано відповідний графік, на рис.2, куди попадає точка з координатами, розрахованими в попередньому прикладі. Цей графік треба продовжити вправо антисиметрично відносно вертикалі  $\tau_* = 2,804$  до значення  $\tau_* = 5,608$ , де  $x = 0$ .

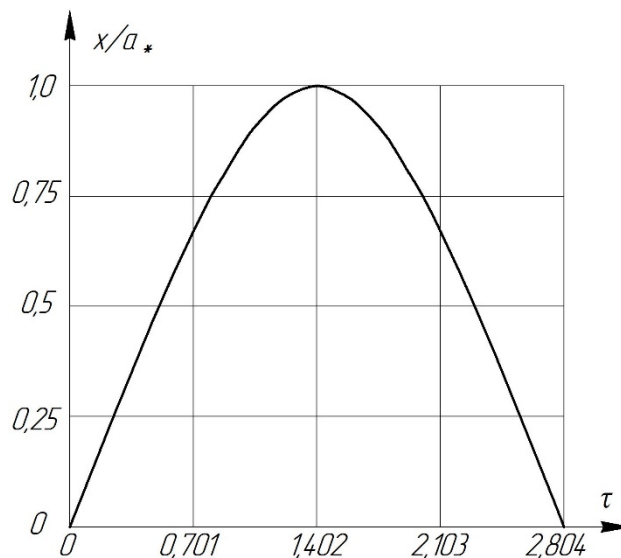


Рис.2. Графік для розрахунку коливань при  $x(0)=0$ ,  $\dot{x}(0)=v_0$

Далі зупинимось на інших варіантах аналітичних розв'язків, розглянутих задач, з використанням Атеб-функцій.

Для початкових умов а) в (3) використаємо співвідношення (7). Воно є окремим випадком більш загального виразу:

$$\frac{\nu+1}{2} \int_{0 \leq \zeta \leq 1} \frac{du}{(1-u^{\nu+1})^{n/(n+1)}} = q \quad (13)$$

У відповідності з (7), нижня межа інтегрування в (13) є Атеб-косинусом, тобто:

$$\zeta = Ca(v, n, q). \quad (14)$$

Вираз (7) збігається з (13) при  $v = 2$ ,  $n = 1$ ,  $q = \frac{3}{2}\tau$ . Тому

$$x = -aCa\left(2, 1, \frac{3}{2}\tau\right). \quad (15)$$

Для початкових умов б) в (3) має місце вираз (11), який є окремим випадком більш загального співвідношення:

$$\frac{v+1}{2} \int_0^{0 \leq \zeta \leq 1} \frac{du}{(1-u^{v+1})^{n/(n+1)}} = q. \quad (16)$$

Тут верхня межа інтегрування  $\zeta$  подається Атеб-синусом [7]:

$$\zeta = Sa(v, n, q) \quad (17)$$

Тому, згідно з (11), (16) і (17), при  $v = 2$ ,  $n = 1$ ,  $q = \frac{3}{2}\tau_*$ ,  $\zeta = \frac{x}{a_*}$ , маємо:

$$x = a_* Sa\left(2, 1, \frac{3}{2}\tau_*\right). \quad (18)$$

Для спрощення інженерних розрахунків по формулах (15) і (18) складена таблиця періодичних Атеб-функцій.

Таблиця 1

Значення Атеб-функцій

$\eta$	$Sa\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right)$	$Ca\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right)$	$\eta$	$Sa\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right)$	$Ca\left(2, 1, \frac{3}{2}\eta\right)$
0,00	0,000	1,000	0,75	0,712	0,630
0,05	0,050	0,998	0,80	0,751	0,586
0,10	0,100	0,992	0,85	0,788	0,541
0,15	0,150	0,983	0,90	0,822	0,494
0,20	0,200	0,970	0,95	0,854	0,447
0,25	0,250	0,954	1,00	0,884	0,399
0,30	0,299	0,934	1,05	0,910	0,350
0,35	0,347	0,911	1,10	0,933	0,301
0,40	0,397	0,885	1,15	0,953	0,252
0,45	0,445	0,855	1,20	0,970	0,202
0,50	0,492	0,824	1,25	0,983	0,152
0,55	0,539	0,789	1,30	0,992	0,102
0,60	0,584	0,1752	1,35	0,998	0,052
0,65	0,628	0,713	1,402	1,000	0,000
0,70	0,61	0,672	—	—	—

Звернемось до прикладу 2, де  $\tau = \eta = 1$ . В таблиці значень Атеб-функцій

$Ca\left(2,1,\frac{3}{2}\right) = 0,399$ . Тому згідно з (15)  $x/a = -0,399$ , що мало відрізняється від  $x/a = -0,4$  у згаданому прикладі. Якщо  $\tau_* = \eta = 1$ , то  $Sa\left(2,1,\frac{3}{2}\right) = 0,844 = x/a_*$ . Саме таке значення  $x/a_*$  одержано по формулі (12) у прикладі 3. Отже, маємо гарне узгодження результатів обчислень двома способами.

Із формул (10), (15) і (12), (18) випливає, що:

$$\begin{aligned} Ca\left(2,1,\frac{3}{2}\eta\right) &= 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{3}\eta, \sin 75^\circ\right)}{1 + \operatorname{cn}\left(\sqrt[4]{3}\eta, \sin 75^\circ\right)}; \\ Sa\left(2,1,\frac{3}{2}\eta\right) &= 1 - \sqrt{3} \frac{1 - \operatorname{cn}\left[\sqrt[4]{3}(1-\eta), \sin 75^\circ\right]}{1 + \operatorname{cn}\left[\sqrt[4]{3}(1-\eta), \sin 75^\circ\right]}. \end{aligned} \quad (19)$$

Тобто задіяні періодичні Атеб-косинус і Атеб-синус виражаються через еліптичний косинус.

Крім наведеної вище таблиці, при наближеному обчисленні значень  $x(t)$  з використанням Атеб-функцій, може бути в нагоді наступна апроксимація:

$$Sa\left(2,1,\frac{3}{2}\eta\right) = \begin{cases} \eta & 0 \leq \eta \leq 0,4 \\ 2(A+B) & \text{при } 0,4 < \eta \leq 0,95 \\ \sin(1,12\eta) & 0,95 < \eta \leq 1,402. \end{cases} \quad (20)$$

Тут  $A = \sqrt[3]{0,5 + \sqrt{Q}}$ ;  $B = \sqrt[3]{0,5 - \sqrt{Q}}$ ;  $Q = \left(\frac{2}{3\eta}\right)^3 + 0,25$ .

Похибка апроксимації менша 2,5 %.

Для обчислення  $Ca\left(2,1,\frac{3}{2}\eta\right)$  слід прийняти до уваги, що:

$$Ca\left[2,1,\frac{3}{2}(1-\eta)\right] = Sa\left(2,1,\frac{3}{2}\eta\right). \quad (21)$$

Це спрощує проведення наближених розрахунків.

### Висновки

1. Показано, що задіяні періодичні Атеб-функцій виражаються через еліптичний косинус.

2. При коливаннях, спричинених початковим відхиленням від положення рівноваги осцилятора, період коливань обернено пропорційний квадратному кореню з модуля відхилення. Якщо коливання спричинені початковим імпульсом, то період коливань обернено пропорційний кубічному кореню з модуля початкової швидкості. При збільшенні вказаних початкових збурень зменшується період коливань осцилятора, що властиво системі з жорсткою нелінійною характеристикою.

## Література

1. Сокіл Б.І. Нелінійні коливання механічних систем і аналітичні методи їх досліджень: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. д-ра техн. наук. 05.02.09 / Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Львів, 2001. — 36 с.
2. Пукач П.Я. Методи аналізу динамічних процесів у нелінійних неавтономних механічних системах різної структури: Автореф. дис. на здоб. наук. ступ. д-ра техн. наук. 05.02.09 / Нац. ун-т «Львів. політехніка». — Львів, 2014. — 38 с.
3. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем Т.1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с.
4. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П.Я. Пукач – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.
5. Янке Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш – М.: Наука, 1977. – 344с.
6. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицам) / А. Абрамовиц, И. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832 с.
7. Грицик В.В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Атеб-функцій / В.В. Грицик, М.А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України, 2007, № 12. – С. 37-42.

## Summery

**Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V., Malec O.M.** About fluctuation of oscillator with quadratic nonlinear stiffness.

*In this work the free oscillations of the system with one degree of freedom provided by elastic force of the spring is proportional to the square of its deformation. Two forms of analytical solution of nonlinear differential equations were built. At first, the solution is expressed through elliptic cosine, and the second - in Ateb-function. A table for computing the values of these functions got and built in dimensionless coordinates schedules that simplify calculations oscillator movement in time. The formula for calculating period of oscillation in the oscillator providing initial deviation from the equilibrium position or initial velocity (momentary impulse) are obtained. The examples of calculations using known tables incomplete elliptic integral of the first kind and using a table Ateb-functions are shown.*

**Keywords:** *square-nonlinear oscillator, free vibrations, elliptic cosine, Ateb-function, approximation*

## References

1. Sokil B.I. Neliniyni kolivannya mehanichnih sistem i analitichni metodi Yih doslidzhen: Avtoref. dis. na zdob. nauk. stup. d-ra tehn. nauk. 05.02.09 / Nats. un-t «Lviv. politehnika». — Lviv, 2001. — 36 s.
2. Pukach P.Ya. Metodi analizi dinamichnih protsesiv u neliniynih neavtonomnih mehanichnih sistemah riznoyi strukturi: Avtoref. dis. na zdob. nauk. stup. d-ra tehn. nauk. 05.02.09 / Nats. un-t «Lviv. politehnika». — Lviv, 2014. — 38 s.
3. Avramov K.V. Nelineynaya dinamika uprugih sistem T.1. Modeli, metodyi, yavleniya / K.V. Avramov, Yu.V. Mihlin – Moskva-Izhevsk: Institut kompyuternyih issledovaniy, 2010. – 704 s.
4. Pukach P.Ya. Yakisni metodi doslidzhennya neliniynih kolivalnih sistem / P.Ya. Pukach – Lviv: Lvivska politehnika, 2014. – 288 s.
5. Yanke E. Spetsialnyie funktsii / E. Yanke, F. Emde, F. Lesh – M.: Nauka, 1977. – 344s.



6. Abramovits A. Spravochnik po spetsialnyim funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsam) / A. Abramovits, I. Stigan – M.: Nauka, 1979. – 832 s.
7. Gritsik V.V. Matematichni modeli algoritmiv i realizatsIya Ateb-funktsiy / V.V. Gritsik, M.A. Nazarkevich // Dopovidi Natsionalnoyi akademiyi nauk Ukrayini, 2007, № 12. – S. 37-42.