Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра «Сільськогосподарські машини та інженерія тваринництва»

Ортогональне центральне композиційне планування

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичної роботи з навчальної дисципліни
«Моделювання технологічних процесів та систем»

для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти
спеціальності 208 «Агроінженерія»

Затверджено рішенням
науково-методичної комісії
факультету мехатроніки та
інжинірингу ДБТУ
Протокол № 2 від 27.12.2023 р.

Харків – 2023

УДК 519.87(072)
О-70

Схвалено
на засіданні кафедри сільськогосподарських машин та інженерії тваринництва
Протокол № 5 від 19.12.2023 р.

О-70 Ортогональне центральне композиційне планування: методичні вказівки до виконання практичної роботи з навчальної дисципліни «Моделювання технологічних процесів та систем» для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 208 «Агроінженерія» / Державний біотехнологічний університет; уклад. Р.В. Кириченко – Харків: [б. в.], 2023. – 27 с.

До методичних вказівок за темою «Ортогональне центральне композиційне планування» включено загальні відомості, порядок виконання роботи, зміст звіту, приклад розрахунку ортогонального ЦКП та контрольні запитання для самоперевірки.

Видання призначене здобувачам другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 208 «Агроінженерія».

Рецензенти:
Р.В. Антощенков, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри мехатроніки, безпеки життєдіяльності та управління якістю Державного біотехнологічного університету.
М.Л. Шуляк, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри агроінжинірингу Сумського національного аграрного університету.

УДК 519.87(072)
Відповідальний за випуск: М.М. Крекот

ЗМІСТ

ОРТОГОНАЛЬНЕ ЦЕНТРАЛЬНЕ КОМПОЗИЦІЙНЕ ПЛАНУВАННЯ

Мета роботи

Отримати математичну модель (ММ) досліджуваного технічного засобу (ТЗ) або технологічного процесу (ТП) у вигляді рівняння множинної регресії другого порядку.

1. Загальні відомості

1.1 Розробка математичної моделі з використанням ортогонального центрального композиційного планування

Розробка математичної моделі передбачає принцип «від простого до більш складного». В імітаційній моделі у вигляді полінома цей принцип передбачає перехід від полінома першого порядку, що має вигляд:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot x_i) + \sum_{i \neq l}(b_i \cdot x_i \cdot x_i) + \dots, \qquad (1)$$

до полінома другого порядку

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot x_i) + \sum_{i \neq l}(b_i \cdot x_i \cdot x_i) + \sum_{i=1}^{n}(b_{ii} \cdot x_i^2) + \dots, \qquad (2)$$

де b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} – коефіцієнти рівняння регресії.

В тому випадку, якщо за допомогою повного чинникового (факторного) експерименту не вдається отримати адекватного математичного опису ТЗ або ТП, то переходять до центральних композиційних планів (ЦКП). Найбільшого поширення отримали ортогональний і рототабельний ЦКП. В ортогональному центральному композиційному плані (ОЦКП) до дослідів повного факторного експерименту (ПФЕ) або дробового (ДФЕ) факторного експерименту (напіврепліки) потрібно додати досліди в «зоряних точках» і дослід в центрі плану.

Число дослідів N ортогонального центрального композиційного плану визначається за наступною формулою:

$$N = N_я + N_\alpha + 1, \qquad (3)$$

де $N_я$ – число дослідів в ядрі плану;

N_α – число дослідів в «зоряних» точках.

Кількість дослідів в «зоряних» точках становить:

$$N_\alpha = 2n, \qquad (4)$$

n – число факторів.

Ядром плану є повний факторний експеримент або дробовий факторний експеримент.

Якщо число факторів $n \leq 4$, то ядром плану є повний факторний експеримент з числом дослідів в ядрі плану, що дорівнює:

$$N_я = q^n, \qquad (5)$$

де q – рівень досліду в ядрі плану.

Рівень змінюється з q = 2…4 (найчастіше q = 2).

Якщо число факторів n > 4, то ядром плану є дробовий факторний експеримент (ДФЕ) з числом дослідів в ядрі плану, що дорівнює:

$$N_я = q^{n-p}, \qquad (6)$$

де p – число генераторів плану або число взаємодій, замінених факторами, що враховуються в експерименті.

Важливими властивостями ЦКП є те, що інформація, отримана при проведенні повного або дробового факторного експерименту, не втрачається, а використовується в подальших дослідженнях.
$2n$ – це число дослідів в «зоряних» точках, що мають координати:

$$(\pm\alpha; 0,0; ...; 0);$$

$$(0; \pm\alpha; 0; ...; 0);$$

$$(0; 0; 0; ...; \pm\alpha),$$

де α – величина «зоряного плеча».

В центрі плану – один дослід. Це точка факторного простору з координатами (0; 0; 0; ...; 0).

Для зручності розрахунків і аналізу результатів переходять до нормованого масштабу факторів. Для i-го фактора:

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - x_{i,0}}{I}, \tag{7}$$

де x_i – нормоване значення;
$\tilde{x}_i$ – натуральне (фізичне) значення;
$x_{i,0}$ – основний рівень фізичного значення;
I – інтервал варіювання.

Інтервал варіювання I дорівнює:

$$I = \left|\tilde{x}_i - x_{i,0}\right|. \tag{8}$$

В результаті нормування значення верхнього рівня фактора
$x_{i,в} = +1$, значення нижнього рівня фактора $x_{i,н} = -1$.

Для нормування масштабу факторів під час визначенні коефіцієнтів регресії зручніше користуються кодованими значеннями змінних, а при виконанні обчислень – фізичними. Відповідні перетворення змінних відбуваються за формулами:

$$x_{\text{к}} = x_{\text{кн}} + (x_{\text{ф}} - x_{\text{фн}})\frac{x_{\text{кв}} - x_{\text{кн}}}{x_{\text{фв}} - x_{\text{фн}}}, \tag{9}$$

$$x_{\text{ф}} = x_{\text{фн}} + (x_{\text{к}} - x_{\text{кн}})\frac{x_{\text{фв}} - x_{\text{фн}}}{x_{\text{кв}} - x_{\text{кн}}}, \tag{10}$$

де $x_{\text{к}}, x_{\text{ф}}$ – кодоване та фізичне значення змінної;

$x_{\text{кн}}, x_{\text{кв}}, x_{\text{фн}}, x_{\text{фв}}$ – нижні та верхні значення змінних, що мають місце при виконанні експериментів.

1.2 Складання матриці планування ортогонального центрального композиційного планування

Для знаходження умов, що забезпечують ортогональність, квадратичну модель (2) можна записати у вигляді проміжної моделі:

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n}(b_i \cdot x_i) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_{ii}(x_i^2 - \beta)\right) + \sum_{i \neq l}(b_{il} \cdot x_{il} \cdot x_i \cdot x_l) + \dots, \tag{11}$$

де a_0 – фіктивний параметр, що відповідає коефіцієнту b_0.

Величина β вводиться для забезпечення ортогональності плану:

$$b_0 = a_0 - \beta\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \, . \tag{12}$$

$$\beta = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \frac{2^{n-p} + 2\alpha^2}{N}. \qquad (13)$$

Матрицю планування експерименту для двох факторів ($n = 2$) можна представити у вигляді таблиці 1. В якості ядра плану використовується ПФЕ, оскільки $n < 4$.

Число дослідів ОЦКП буде дорівнювати:

$$N = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9.$$

Таблиця 1 - Матриця ОЦКП для дворівневого досліду ($q = 2$) в ядрі плану експериментів та двох факторів

Системи дослідів	Номер досліду	x_0	x_1	x_2	x_1^2-β	x_2^2-β	$x_1 \cdot x_2$	y_1	…	y_k	$\bar{y}_i$	S_i^2	y_{ip}
Ядро плану ПФЕ	1	+1	+1	+1	1-β	1-β	+1						
	2	+1	-1	+1	1-β	1-β	-1						
	3	+1	+1	-1	1-β	1-β	-1						
	4	+1	-1	-1	1-β	1-β	+1						
Досліди в зоряних точках	5	+1	+α	0	α^2-β	-β	0						
	6	+1	-α	0	α^2-β	-β	0						
	7	+1	0	+α	-β	α^2-β	0						
	8	+1	0	-α	-β	α^2-β	0						
Дослід в центрі плану	9	+1	0	0	-β	-β	0						

Зоряне плече α можна визначити за формулою:

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{q^{n-p-2}}(\sqrt{N} - \sqrt{2^{n-p}})}. \qquad (14)$$

Значення величин α і β, що забезпечують ортогональність плану при різних значеннях n, наведені в таблиці 2

Геометрична інтерпретація ортогонального ЦКП для двох факторів наведена на рисунку 1 і являє собою квадрат.

Таблиця 2 - Параметри ортогональних ЦКП для дворівневого досліду (q = 2) в ядрі плану експериментів

n	Ядро плану	N	α	β	Елементи матриці C			
					c_0	c_1	c_2	c_3
2	2^2 (ПФЕ)	9	1,000	0,6667	0,1111	0,1667	0,5000	0,2500
3	2^3 (ПФЕ)	15	1,215	0,7300	0,6667	0,0913	0,2298	0,1250
4	2^4 (ПФЕ)	25	1,414	0,8000	0,0400	0,0500	0,1250	0,0625
5	2^{5-1} (ДФЕ)	27	1,547	0,7700	0,0371	0,0481	0,0871	0,0625
6	2^{6-1} (ДФЕ)	45	1,722	0,8430	0,0222	0,0264	0,0564	0,0313
7	2^{7-1} (ДФЕ)	79	1,885	0,9000	0,0127	0,0141	0,0389	0,0156
8	2^{8-2} (ДФЕ)	81	2,001	0,8889	0,0123	0,0139	0,0312	0,0156

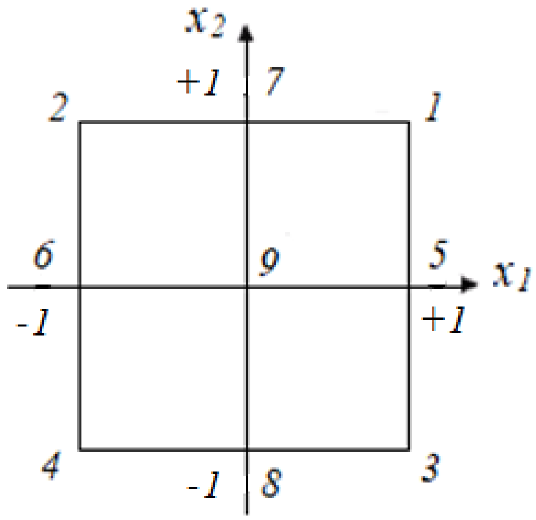


Рис. 6.1 – Геометрична інтерпретація ОЦКП для дворівневого досліду (q = 2) в ядрі плану і двох факторів:
1, 2, 3, 4 – досліди ПФЕ; 5, 6, 7, 8 – досліди в «зоряних точках»; 9 – дослід в центрі плану.

Величина «зоряного» плеча для q = 2 та n = 2 становить α =1,0. Для q = 2 та n = 3 геометричною інтерпретацією ПФЕ є куб, «зоряні точки» ОЦКП якого лежать за межами куба, оскільки вони розташовані на відстані, що перевищує значення верхнього та нижнього рівнів фактора ±1, тобто $x_{i,в}$ > +1, $x_{i,н}$ < -1 відносно центру плану, і лежать на поверхні сфери діаметром 2α (α = 1,215).

2. Порядок виконання роботи

1. Відповідно до індивідуального завдання необхідно перейти до стандартизованного масштабу факторів, скласти матрицю ортогонального ЦКП і перевірити її властивості.

2. Провести експеримент (або імітацію експерименту на ЕОМ).

3. Перевірити відтворюваність дослідів. Якщо дисперсії неоднорідні, повторити експеримент.

4. Розрахувати оцінки коефіцієнтів рівняння регресії.

5. Перевірити статистичну значущість коефіцієнтів регресії.

6. Перевірити адекватність отриманої математичної моделі (ММ).

7. Перейти до початкових фізичних змінних.

8. Записати отриману математичну одель і зробити висновки.

2.1 Порядок постановки дослідів

Для оцінки точності експерименту в кожній j-й точці факторного простору проводять k дослідів. Це так звані *паралельні досліди*. В результаті набувають значення y_{j1} , y_{j2}, ..., y_{jk}, досліджуваного параметра, для яких знаходять середнє значення:

$$\bar{y}_j = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k} y_{j,t} \ , \qquad (15)$$

де $y_{j,t}$ – досліджуваний параметр;

t – номер паралельного досліду, t = 1, 2, ..., k;

k – число паралельних дослідів.

Щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних впливом зовнішнього середовища і неконтрольованих факторів, рекомендується випадкова послідовність при постановці дослідів, яка називається *рандомізацією.* Рандомізацію дослідів можна провести за допомогою генератора випадкових чисел або таблиці випадкових чисел, а також за допомогою комп’ютера.

2.2 Перевірка відтворюваності дослідів (однорідності дисперсій)

Досвід вважається статично відтворюваним, якщо дисперсія вихідного параметра σ_y^2 однорідна (однакова) в кожній точці факторного простору. Оцінка дисперсії для кожної *y*-ї точки факторного простору визначається за формулою:

$$S_{y_j}^2 = \frac{1}{k-1}\sum_{t=1}^{k}(y_{j,t} - \bar{y}_j)^2, \qquad (16)$$

де $\bar{y}_j$ – середнє значення параметра *y* в *j*-му рядку ;

k – число паралельних дослідів;

$y_{j,t}$ – значення вихідного параметра *y* в *j*-му рядку.

Гіпотезу про відтворюваність дослідів (щодо однорідності дисперсій) перевіряють за допомогою *критерію Кохрена*. Розрахункове значення критерію Кохрена обчислюють за формулою:

$$G_{\text{р}} = \frac{\max(S_{y_j}^2)}{\sum_{t=1}^{N} S_{y_j}^2}, \qquad (17)$$

де N – число дослідів.

Критичне значення критерію Кохрена $G_{\text{кр}}$ знаходять з таблиці *G*-розподілу Кохрена за числом ступенів свободи чисельника $f_1 = k$-l та знаменника $f_2 = N$ і рівню значущості α'. Рівень значущості α' для інженерних розрахунків приймається таким, що дорівнює 0,05 або 0,1, тобто передбачає похибку обчислень в межах 5% або 10%.

Таблиці *G*-розподілу Кохрена наводяться в Додатку А. В таблиці розподілу Кохрена використовується величина $p' = 1\text{-}\alpha'$, що називається *статистичною надійністю* і показує точність, з якою можливо виконання досліджень в абсолютних величинах.

Якщо $G_р < G_{кр}$ гіпотеза про однорідність дисперсій приймається і, відповідно, відтворюваність дослідів забезпечується, а в протилежному випадку гіпотеза відкидається, і тоді експеримент потрібно повторити, змінивши умови його проведення (набір факторів, інтервал їх варіювання, точність вимірювальних приладів та ін.).

2.3 Розрахунок оцінок коефіцієнтів рівняння регресії

Оцінки коефіцієнтів рівняння регресії розраховуються за наступними формулами:

$$b_i = c_1 \sum_{j=1}^{N} \left(x_{i,j} \cdot \bar{y}_j \right), \tag{18}$$

$$b_{ii} = c_2 \sum_{j=1}^{N} \left((x_{ij}^2 - \beta) \cdot \bar{y}_j \right), \tag{19}$$

$$b_{ij} = c_3 \sum_{j=1}^{N} \left(x_{ij} \cdot x_{ij} \cdot \bar{y}_j \right), \tag{20}$$

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{y}_j \right) - \beta \sum_{j=1}^{N} \left(b_{ii} \right), \tag{21}$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \left(\bar{y}_j \right), \tag{22}$$

де c_1, c_2, c_3 – елементи дисперсійної матриці, значення яких наведені в таблиці 2, залежно від числа факторів n.

2.4 Перевірка значущості коефіцієнтів регресії

Перевірка значущості коефіцієнтів рівняння регресії проводиться за *критерієм Ст'юдента.*

Гіпотеза про значущість коефіцієнтів регресії приймається, якщо виконуються наступні нерівності:

$$
\begin{aligned}
&|a_0| > t_{\text{кр}} S_0, \\
&|b_i| > t_{\text{кр}} S_i, \\
&|b_{ii}| > t_{\text{кр}} S_{ii}, \\
&|b_{ij}| > t_{\text{кр}} S_{ij}, \\
&|b_0| > t_{\text{кр}} S_{b0},
\end{aligned}
\tag{23}
$$

де S_0, S_i, S_{ii}, S_{ij}, S_{b0} – оцінки дисперсій коефіцієнтів рівняння регресії.

Оцінки дисперсій коефіцієнтів рівняння регресії визначаються за наступними виразами (24).

Критичне значення критерію Ст'юдента $t_{\text{кр}}$ знаходять з таблиці t-розподілу Ст'юдента за числом ступенів вільності і рівню значущості α' (Додаток Б).

$$
\begin{aligned}
&\text{для } a_0 - S_0^2 = S^2 c_0, \\
&\text{для } b_i - S_i^2 = S^2 c_1, \\
&\text{для } b_{ii} - S_{ii}^2 = S^2 c_2, \\
&\text{для } b_{ij} - S_{ij}^2 = S^2 c_3, \\
&\text{для } b_0 - S_{b0}^2 = S^2 (c_0 + n\beta^2 c_2),
\end{aligned}
\tag{24}
$$

де S^2– оцінка дисперсії відтворюваності експерименту.

Число ступенів вільності $f = N(k\text{-}1)$.

Якщо нерівності (23) не виконуються, коефіцієнт регресії вважається незначущим і прирівнюється нулю. Оскільки всі коефіцієнти оцінюються незалежно, та зміна оцінки будь-якого коефіцієнта (наприклад, виключення відповідного коефіцієнта з рівняння) не призводить до зміни інших оцінок і їх дисперсій. Виключення складає коефіцієнт b_0, оскільки він пов'язаний з оцінками при квадратичних членах, тому їх виключення призводить до зміни b_0. Необхідно пам'ятати, що незначущість коефіцієнтів може бути обумовлена і невірним вибором інтервалу варіювання факторів. Тому іноді буває корисним розширити інтервал варіювання і провести новий експеримент.

2.5 Перевірка адекватності отриманої математичної моделі

Перевірка адекватності отриманого рівняння регресії експериментальним даним проводиться за допомогою *критерію Фішера*, розрахункове значення якого визначається за наступним відношенням:

$$F_{\text{р}} = \frac{S_{\text{а}}^2}{S_y^2}, \qquad (25)$$

де $S_{\text{а}}^2$ – оцінка дисперсії неадекватності;

S_y^2 – оцінка дисперсії відтворюваності експерименту.

Оцінка дисперсії неадекватності визначається за наступною формулою:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{1}{N-B}\sum\left(\bar{y}_j - y_{jp}\right)^2, \qquad (26)$$

де B – число значущих коефіцієнтів рівняння регресії;

y_{jp} – розрахункове значення функції відгуку;

$\bar{y}_j$ – експериментальне значення функції відгуку (табл. 1).

Якщо розрахункове значення критерію Фішера $F_{р}$ менше критичного значення $F_{кр}$, тобто $F_{р} < F_{кр}$, то гіпотеза про адекватність математичної моделі приймається.

Критичне значення критерію Фішера $F_{кр}$ знаходиться з таблиці F-розподілу Фішера (додаток В) за числом ступенів вільності для чисельника $f_1 = k(N\text{-}B)$, знаменника $f_2 = N(k\text{-}1)$ та рівню значущості α'.

2.6. Перехід до фізичної змінної

Для запису математичної моделі в реальних фізичних величинах проводять зворотний перехід від стандартизованного масштабу до натурального. Для математичної моделі, що являє собою рівняння регресії це можна зробити, використовуючи співвідношення (7) та (8), а для факторів – (10). Після чого записують остаточний вид моделі.

3. Зміст звіту

Звіт про виконану лабораторну роботу повинен містити:

1. Постановку задачі і мету роботи.
2. Матрицю планування експерименту.
3. Результати перевірки відтворюваності дослідів.
4. Результати розрахунків коефіцієнтів регресії, перевірку їх статистичної значущості.
5. Результати перевірки адекватності отриманої математичної моделі початковим експериментальним даним.
6. Математична модель досліджуваного об’єкту в нормованих і фізичних змінних.
7. Висновки і пропозиції про хід подальших досліджень, складені на підставі аналізу математичної моделі.

4. Приклад розрахунку ортогонального центрального композиційного планування

Припустимо, що вимагається дослідити вплив виробничих факторів (U – опорна напруга (x_1), I – струм споживання (x_2), T – кінцева температура нагріву (x_3)) на якість виробництва магнітних дисків. Номінальні значення факторів: $U_н$ = 30 В, $I_н$ = 18 А, $T_н$ = 220°С.

Складемо ортогональний ЦКП для трьох серій *m* дослідів при інтервалах варіювання для U – 3 В, I – 2 А, T – 20°С. Для стандартизації масштабів факторів умови проведення дослідів зведемо в таблиці 3.

Таблиця 3 - Умови проведення ОЦКП

Характеристика плану		Стандартний масштаб x_i	Натуральний масштаб		
			$x_1 = U$, В	$x_2 = I$, А	$x_3 = T$, °С
Нульовий рівень		0	30,0	18,0	220,0
Верхній рівень		+1	33,0	20,0	240,0
Нижній рівень		-1	27,0	16,0	200,0
«Зоряні точки»	Верхній рівень	+1,215	33,645	20,43	244,3
	Нижній рівень	-1,215	26,355	15,57	195,7

Після складання математичного плану (МП) експерименту і проведення рандомізованих дослідів занесемо отримані результати в таблицю 4, де y_j – кількісний параметр, що характеризує якість обробленої поверхні магнітних дисків.

Таблиця 4 - Приклад розрахунку ортогонального ЦКП

j	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2-β	x_2^2-β	x_3^2-β	$x_1 \cdot x_2$	$x_1 \cdot x_3$	$x_2 \cdot x_3$	$y(m_1)$	$y(m_2)$	$y(m_3)$	$\bar{y}(m_{i=1,2,3})$	$S^2_y(j)$
1	+1	-1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	+1	+1	+1	6,37	6,19	6,27	6,28	0,02
2	+1	+1	-1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	-1	-1	+1	4,00	3,59	3,87	3,82	0,13
3	+1	-1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	-1	+1	-1	2,96	3,96	3,75	3,56	0,83
4	+1	+1	+1	-1	+0,27	+0,27	+0,27	+1	-1	-1	-1,16	-0,86	-1,82	-1,28	0,72
5	+1	-1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	+1	-1	-1	5,06	4,87	4,87	4,93	0,04
6	+1	+1	-1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	-1	+1	-1	2,74	2,94	2,61	2,76	0,08
7	+1	-1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	-1	-1	+1	2,96	2,44	2,80	2,73	0,21
8	+1	+1	+1	+1	+0,27	+0,27	+0,27	+1	+1	+1	-2,46	-2,14	-2,80	-2,47	0,32
9	+1	-1,215	0	0	+0,75	-0,73	-0,73	0	0	0	4,04	4,20	4,37	4,20	0,08
10	+1	+1,215	0	0	+0,75	-0,73	-0,73	0	0	0	0,39	-0,73	0,76	0,14	1,81
11	+1	0	-1,215	0	-0,73	+0,75	-0,73	0	0	0	5,88	5,93	5,68	5,83	0,05
12	+1	0	+1,215	0	-0,73	+0,75	-0,73	0	0	0	1,41	1,14	1,07	1,21	0,10
13	+1	0	0	-1,215	-0,73	-0,73	+0,75	0	0	0	3,43	4,14	4,39	3,99	0,74
14	+1	0	0	+1,215	-0,73	-0,73	+0,75	0	0	0	2,30	3,05	2,61	2,65	0,43
15	+1	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	0	0	0	3,64	2,96	3,65	3,42	0,47
$\sum_{j=1}^{N}(x(j) \cdot y(j))$	41,77	-19,6	-20,8	-6,06	-3,74	0,26	-0,33	-5,41	-0,07	0,39	**Критерій Кохрена**				
Критерій Ст'юдента: $f' = 16$; $\alpha' = 0{,}10$; $p = 0{,}90$; $t_{кр} = 1{,}746$											**Критерій Фішера**: $f_2 = 30$; $\alpha' = 0{,}05$; $p = 0{,}95$				
b_j	2,89	-1,57	-1,69	-0,29	-0,67	0,014	0,014	-0,29	-0,04	0,125					
t_j	0,842	0,074	0,074	0,074	0,187	0,187	0,187	0,102	0,102	0,102	f_1=5	$F_р$=1,1	$F_{кр}$=2,5	**Висновок щодо ММ**: адекватна	
Висновок щодо значущості коефіцієнтів рівняння регресії:															

Результати перевірки:	зн	зн	зн	зн	зн	нз	нз	зн	зн	зн	**Зауваження:** зн – значущій; нз – незначущій
$y = 2{,}89 - 1{,}57 \cdot x_1 - 1{,}69 \cdot x_2 - 0{,}29 \cdot x_3 - 0{,}67 \cdot x_1{}^2 - 0{,}29 \cdot x_1 \cdot x_2 - 0{,}04 \cdot x_1 \cdot x_3 + 0{,}125 \cdot x_2 \cdot x_3.$ – факторний запис рівняння регресії ММ у кодованому вигляд											
$y = -43{,}03 + 4{,}81 \cdot U - 0{,}08 \cdot I - 0{,}06 \cdot T - 0{,}07 \cdot U^2 - 0{,}05 \cdot U \cdot I + 3{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot I \cdot T.$ – параметричний запис рівняння регресії ММ у декодованому (натурному) вигляді (в цьому рівнянні відсутній одна взаємодія згідно кодованого)											

Після переходу до фізичних змінних одержуємо шукану математичну модель (ММ): $y = -43{,}03 + 4{,}81 \cdot U - 0{,}08 \cdot I - 0{,}06 \cdot T - 0{,}07 \cdot U^2 - 0{,}05 \cdot U \cdot I + 3{,}12 \cdot 10^{-3} \cdot I \cdot T.$

5. Контрольні запитання для самоперевірки

1. В чому полягає сутність ортогонального ЦКП і які математичні моделі (ММ) він дозволяє побудувати?

2. В чому сутність і мета стандартизації масштабу факторів?

3. Як складається і якими властивостями володіє матриця планування (МП) ортогонального ЦКП?

4. Що таке «зоряне плече» і яким чином вибирається його значення?

5. Як визначається число дослідів ОЦКП?

6. Що є ядром плану в ОЦКП?

7. Що є геометричною інтерпретацією ОЦКП для дворівневого досліду з двох або трьохфакторним експериментом?

8. Який порядок постановки дослідів в ОЦКП?

9. Як перевірити відтворність дослідів?

10. Як розрахувати оцінки коефіцієнтів рівняння регресії?

11. Як перевірити статистичну значущість оцінок коефіцієнтів регресії?

12. Як перевірити адекватність отриманої ММ?

13. Як перейти до початкових фізичних змінних?

Додаток А. Таблиця *G*-розподілення Кохрена

G – випадкова величина, розподілена за законом Кохрена з числом ступенів вільності f_1 для чисельника та f_2 для знаменника. Таблиця містить значення $G_{кр}$ отримані з умови:

– рівень значущості $p(|G| < G_{кр}) = 0{,}05$, а довірча імовірність $\alpha' = 0{,}95$ (верхній рядок для всіх f_2);

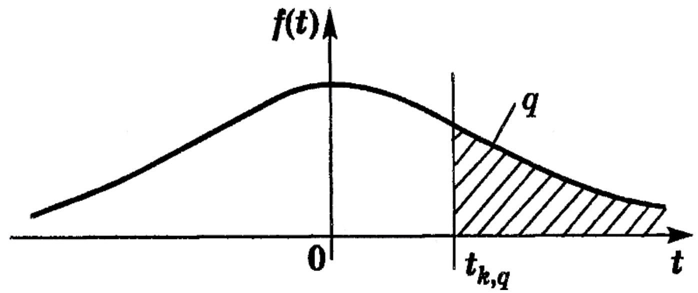
– рівень значущості $p(|G| < G_{кр}) = 0{,}01$, а довірча імовірність $\alpha' = 0{,}99$ (нижній рядок при тих самих f_2).

f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	36	144	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0,9985 0,999	0,9750 0,995	0,9392 0,99	0,9057 0,98	0,8772 0,96	0,8534 0,94	0,8332 0,92	0,8159 0,90	0,8010	0,7880 0,88	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669 0,991	0,8709 0,94	0,7977 0,88	0,7457 0,83	0,7071 0,79	0,6771 0,76	0,6530 0,71	0,6333 0,69	0,6167	0,6025 0,67	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065 0,97	0,7679 0,86	0,6841 0,78	0,6287 0,72	0,5895 0,68	0,5598 0,64	0,5365 0,61	0,5175 0,58	0,5017	0,4884 0,55	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412 0,93	0,6838 0,79	0,5981 0,70	0,5440 0,63	0,5063 0,59	0,4783 0,55	0,4564 0,52	0,4387 0,50	0,4241	0,4118 0,47	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808 0,88	0,6161 0,72	0,5321 0,63	0,4803 0,56	0,4447 0,52	0,4184 0,49	0,3980 0,46	0,3817 0,44	0,3682	0,3568 0,40	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,7271 0,84	0,5612 0,66	0,4800 0,57	0,4307 0,51	0,3974 0,47	0,3726 0,44	0,3535 0,46	0,3384 0,39	0,3259	0,3154 0,36	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798 0,79	0,5157 0,62	0,4377 0,52	0,3910 0,46	0,3595 0,45	0,3362 0,39	0,3185 0,37	0,3043 0,35	0,2926	0,2829 0,33	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
9	0,6385 0,75	0,4775 0,57	0,4027 0,40	0,3584 0,43	0,3286 0,39	0,3067 0,36	0,2901 0,34	0,2768 0,32	0,2659	0,2568 0,30	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020 0,72	0,4450 0,54	0,3733 0,45	0,3311 0,39	0,3029 0,36	0,2823 0,33	0,2666 0,31	0,2541 0,30	0,2439	0,2353 0,27	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
12	0,5410 0,65	0,3924 0,48	0,3264 0,39	0,2880 0,34	0,2624 0,31	0,2439 0,29	0,2299 0,27	0,2187 0,25	0,2098	0,2020 0,23	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,4709 0,57	0,3346 0,41	0,2758 0,33	0,2419 0,29	0,2195 0,26	0,2034 0,24	0,1911 0,22	0,1815 0,21	0,1736	0,1671 0,19	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894 0,48	0,2705 0,33	0,2205 0,27	0,1921 0,23	0,1735 0,20	0,1602 0,19	0,1501 0,17	0,1422 0,16	0,1357	0,1303 0,15	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,3434 0,42	0,2354 0,29	0,1907 0,23	0,1656 0,20	0,1493 0,18	0,1374 0,16	0,1286 0,15	0,1216 0,142	0,1160	0,1113 0,13	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,2929 0,36	0,1980 0,24	0,1593 0,19	0,1377 0,16	0,1237 0,15	0,1137 0,13	0,1061 0,123	0,1002 0,116	0,0958	0,0921 0,10	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370 0,29	0,1576 0,19	0,1259 0,15	0,1082 0,13	0,0968 0,11	0,0887 0,103	0,0827 0,095	0,0780 0,090	0,0745	0,0713 0,08	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737 0,22	0,1131 0,14	0,0895 0,11	0,0766 0,09	0,0682 0,080	0,0623 0,072	0,0583 0,067	0,0552 0,063	0,0520	0,0497 0,05	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998 0,12	0,0632 0,08	0,0495 0,06	0,0419 0,049	0,0371 0,043	0,0337 0,039	0,0312 0,036	0,0292 0,033	0,0279	0,0266 0,03	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083

Зауваження. Допускається лінійна інтерполяція за аргументом f_2 з похибкою, що не перевищує 0,01.

Додаток Б. Таблиця *t*-розподілення Ст'юдента



$t_{\alpha'}$ – випадкова величина, розподілена за законом Ст'юдента з числом ступенів вільності f, довірчою імовірністю α' та рівнем значущості p. Таблиця містить значення $t_{кр}$, отримані з умови $p(|t_{\alpha'}| < t_{\alpha', кр}) = 1-\alpha'$.

f \ α'	0,99	0,95	0,90	0,80	0,50	0,20
1	2	3	4	5	6	7
1	63,657	12,706	6,314	3,078	0,727	0,325
2	9,935	4,303	2,920	1,886	0,617	0,289
3	5,841	3,182	2,353	1,638	0,584	0,277
4	4,604	2,776	2,132	1,533	0,569	0,271
5	4,032	2,571	2,015	1,476	0,559	0,267
6	3,707	2,447	1,943	1,440	0,553	0,265
7	3,499	2,365	1,895	1,415	0,549	0,263
8	3,355	2,306	1,860	1,397	0,546	0,262
9	3,250	2,262	1,833	1,383	0,543	0,261
10	3,169	2,228	1,812	1,372	0,542	0,260
11	3,106	2,201	1,796	1,363	0,540	0,260
12	3,055	2,119	1,782	1,356	0,539	0,259
13	3,012	2,160	1,771	1,350	0,538	0,259

1	2	3	4	5	6	7
14	2,977	2,145	1,761	1,345	0,537	0,258
15	2,947	2,131	1,753	1,341	0,536	0,258
16	2,921	2,120	1,746	1,337	0,535	0,258
17	2,898	2,110	1,740	1,333		
18	2,878	2,101	1,734	1,330	0,534	0,257
19	2,861	2,093	1,729	1,328		
20	2,845	2,086	1,725	1,325	0,533	0,257
21	2,831	2,069	1,714	1,319	0,532	0,256
22	2,819	2,074	1,717	1,321		
23	2,807	2,069	1,714	1,319		
24	2,797	2,064	1,711	1,318		
25	2,787	2,060	1,708	1,316	0,531	0,256
26	2,779	2,056	1,706	1,315		
27	2,771	2,052	1,703	1,314		
28	2,763	2,048	1,701	1,313		
29	2,756	2,045	1,699	1,311		
30	2,750	2,042	1,697	1,310	0,530	0,256
40	2,704	2,021	1,684	1,303	0,529	0,255
60	2,660	2,000	1,671	1,296	0,527	0,254
100	2,617	1,980	1,658	1,289	0,526	0,254
120	2,576	1,960	1,645	1,282	0,524	0,253

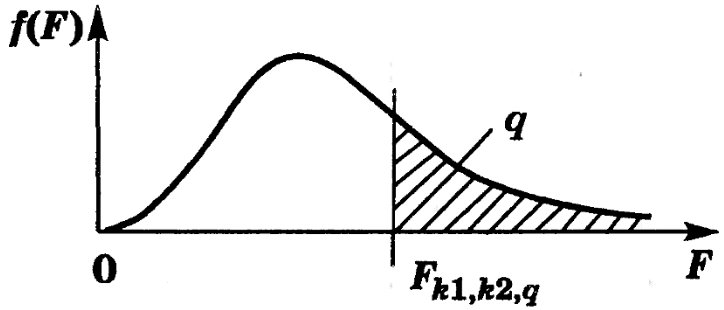
Зауваження. Допускається інтерполяція тільки за аргументом f з похибкою лінійної інтерполяції, що не перевищує 0,007.

Додаток В. Таблиця F-розподілення Фішера

F – випадкова величина, розподілена за законом Фішера з числом ступенів вільності f_1 для чисельника та f_2 для знаменника. Таблиця містить значення $F_{кр}$ отримані з умови:

– рівень значущості $p(|F| < F_{кр}) = 0{,}05$, а довірча імовірність $\alpha' = 0{,}95$ (верхній рядок для всіх f_2);

– рівень значущості $p(|F| < F_{кр}) = 0{,}01$, а довірча імовірність $\alpha' = 0{,}99$ (нижній рядок при тих самих f_2).



f_2 \ f_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	161,45	199,5 4999	215,7 5403	224,0 5625	230,16	233,99 5859	236,76	238,88	241,0 6022	241,88	244,9 6106	245,95		249,0 6235					254,3 6366
2	18,51	19,00 99,00	19,16 99,17	19,25 99,25	19,30	19,33 99,33	19,35	19,37	19,38 99,39	19,40	19,41 99,42	19,43		19,55 99,46					19,50 99,50
3	10,13	9,55 30,82	9,28 29,46	9,12 28,71	9,01	8,94 27,99	8,89	8,85	8,81 27,34	8,79	8,74 27,05	8,70		8,64 26,60					8,53 26,12
4	7,71	6,94 18,00	9,59 16,69	6,39 15,98	6,26	6,16 15,21	6,09	6,04	6,00 14,66	5,96	5,91 14,37	5,86		5,77 13,93					5,63 13,46
5	6,61	5,79 13,27	5,41 12,06	5,19 11,39	5,05	4,95 10,67	4,88	4,82	4,77 10,16	4,74	4,68 9,89	4,62		4,53 9,47					4,36 9,02
6	5,99	5,14 10,52	4,76 9,78	4,53 9,15	4,39	4,28 8,47	4,21	4,15	4,10 7,98	4,06	4,00 7,72	3,94		3,84 7,31					3,67 6,88
7	5,59	4,74 9,55	4,35 8,45	4,12 7,85	3,97	3,87 7,19	3,79	3,73	3,68 6,72	3,64	3,57 6,49	3,51		3,41 6,07					3,23 5,65

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
8	5,32	4,46 8,65	4,07 7,59	3,84 7,01	3,69	3,58 6,37	3,50	3,44	3,39 5,91	3,35	3,28 5,67	3,22		3,12 5,28					2,93 4,86
9	5,12	4,26 8,02	3,86 6,99	3,63 6,42	3,48	3,37 5,80	3,29	3,23	3,18 5,35	3,14	3,07 5,11	3,01		2,90 4,73					2,71 4,31
10	4,97	4,10 7,56	3,71 6,55	3,48 5,99	3,33	3,22 5,39	3,14	3,07	3,02 4,94	2,98	2,91 4,71	2,85		2,74 4,33					2,54 3,91
11	4,84	3,98 7,21	5,59 6,22	3,36 5,76	3,20	3,09 5,07	3,01	2,95	2,90 4,63	2,85	2,79 4,40	2,72		2,51 4,02					2,40 3,60
12	4,75	3,88 6,93	3,49 5,95	3,26 5,41	3,11	3,00 4,82	2,91	2,85	2,80 4,39	2,75	2,69 4,16	2,62		2,50 3,78					2,30 3,36
13	4,67	3,80 6,70	3,41 5,74	3,18 5,21	3,03	2,92 4,62	2,83	2,77	2,71 4,19	2,67	2,60 3,96	2,53		2,42 3,59					2,21 3,17
14	4,60	3,74 6,51	3,34 5,56	3,11 5,04	2,96	2,85 4,46	2,76	2,70	2,65 4,03	2,60	2,53 3,80	2,46		2,35 3,43					2,13 3,00
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54		2,40							
16	4,49	3,63 6,23	3,24 5,29	3,01 4,77	2,85	2,74 4,20	2,66	2,59	2,54 3,78	2,49	2,42 3,55	2,35	2,28	2,24 3,18	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01 2,75
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	4,41	3,55 6,01	3,16 5,09	2,93 4,58	2,77	2,66 4,01	2,58	2,51	2,46 360	2,41	2,34 3,37	2,27	2,19	2,15 3,00	2,11	2,06	2,02	1.97	1,92 2,57
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	4,35	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,71	2,60 3,87	2,51	2,45	2,39 3,46	2,35	2,28 3,23	2,20	2,12	2,08 2,86	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84 2,42
21	4,32	8,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	4,26	3,40 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,62	2,51 3,67	2,42	2,36	2,30 3,26	2,25	2,18 3,03	2,11	2,03	1,98 2,66	1,94	1,89	1,84	1,79	1,737 2,21

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
32		3,29 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97		2,40 343			2,19 3,02		2,07 280			1,86 2,42					1,59 1,96
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
43		3,19 5,08	2,80 4,22	2,57 3,74		2,30 320			2,08 2,80		1,96 2 58			1,75 2,20					1,45 1,70
120	3,92	3,07 4,61	2,68 3,78	2,45 3,32	2,29	2,17 2,80	2,09	2,02	1,96 2,41	1,91	1,83 2,18	1,75	1,66	1,61 1,79	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25 0
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00 1,0

Зауваження. Допускається лінійна інтерполяція за аргументом f_2 та квадратична – за f_1 з похибкою, що не перевищує 0,01.

Навчальне видання

ОРТОГОНАЛЬНЕ ЦЕНТРАЛЬНЕ КОМПОЗИЦІЙНЕ ПЛАНУВАННЯ

Методичні вказівки
до виконання практичної роботи з навчальної дисципліни
«Моделювання технологічних процесів та систем»

Укладач:

КИРИЧЕНКО Роман Васильович

Формат 60х84/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,12.
Тираж 100 пр.
Державний біотехнологічний університет.
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44.