УДК 514.748.4

М.С. Софронова, канд. фіз.-мат. наук

N-ПАРАЛЕЛЕПІПЕДИ ТА N-ПОЛІТОПИ ЯК ОБ'ЄКТИ БАГАТОВИМІРНИХ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЙНОГО ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОЕКТУВАННЯ

Узагальнюється поняття n-політопа, наводиться детальна інформація про структуру n-паралелепіпеда та n-політопа, пропонується головна ідея методу побудови опуклої оболонки (у вигляді n-політопа) скінченної множини точок в R^n*, що дозволяє вирішувати задачі, які не вимагають опису всіх підграней границі опуклої оболонки.*

Обобщается понятие n-политопа, приводится детальная информация о структуре n-параллелепипеда и n-политопа, предлагается основная идея метода построения выпуклой оболочки (в виде n-политопа) конечного множества точек в R^n*, позволяющего решать задачи, не требующие описания всех подграней границы выпуклой оболочки.*

In article the concept n-politopa is generalized, the detailed information on structure of a n-parallelepiped and n-politopa is resulted, the basic idea of a method of construction of a convex hull (in a kind n-politopa) final set of points in R^n *is offered, allowing to solve the problems which are not demanding the description of all subfaces of border of a convex hull.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. Низка задач оптимізаційного геометричного проектування [1] полягають у відшукуванні оптимального (відповідно до певного критерію) розміщення деяких геометричних об'єктів у заданих областях із дотриманням обмежень на їх взаємні положення. Можливість представлення великого числа економічних задач, пов'язаних із оптимальним розподілом ресурсів, як класу задач геометричного проектування, викликала необхідність усебічного їх вивчення і розробки ефективних методів для їх вирішення.

У силу достатньої вивченості дво- і тривимірних оптимізаційних задач, більший інтерес зараз викликають багатовимірні оптимізаційні задачі геометричного проектування, що є ще мало вивченими.

Актуальність розгляду багатовимірних задач пояснюється не лише їх теоретичною, але й практичною значущістю. До числа задач, пов'язаних із оптимальним розміщенням багатовимірних об'єктів (в основному опуклих многогранних тіл у деякій багатогранній області), можна віднести, наприклад, задачі ресурсозберігання, що виникають у різних галузях людської діяльності, задачі планування експериментів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав недостатню вивченість багатовимірних задач: об'єктами в розглянутих задачах є, в основному, n-вимірні прямокутні паралелепіпеди, що дещо спрощує підходи до їх розв'язання; запропоновані методи розв'язання багатовимірних задач оперують із невеликою кількістю об'єктів і є переважно евристичними [2-3].

Мета та завдання статті. 1. Розгляд n-вимірних об'єктів – n-вимірного паралелепіпеда (надалі n-паралелепіпеда) і опуклого n-вимірного політопа (надалі n-політопа).

2. Узагальнення поняття n-політопа.

3. Надання одного зі способів задання n-політопа.

Виклад основного матеріалу дослідження. З поняттями n-паралелепіпеда та n-політопа безпосередньо пов'язано поняття n-вимірної поліедральної множини [4] – перетин кінцевої множини замкнених напівпросторів. Зокрема, опуклі плоскі багатокутники та тривимірні багатогранники є прикладами (кінцевих) поліедральних множин.

N-вимірна поліедральна множина називається n-паралелепіпедом [5], якщо в деякій прямокутній системі координат воно задається нерівностями

$$a_i \le x_i \le b_i, i = 1,2,...,n, \tag{1}$$

де $a_i, b_i \in R^1$.

Так, 1-паралелепіпед – це відрізок, 2-паралелепіпед – прямокутник.

Частина n-паралелепіпеда (1), розташована в якій-небудь із гіперплощин $x_i = a_i$ або $x_i = b_i$, $i \in \{1,2,...,n\}$, сама є (n-1)-паралелепіпедом і називається (n-1)-вимірною гранню n-паралелепіпеда. Можна розглядати грані цих (n-1)-паралелепіпедів, грані їх граней тощо. Таким чином, формується набір n-паралелепіпедів різної розмірності k, $k \in \{1,2,...,n-1\}$. Усі вони називаються k-вимірними гранями початкового n-паралелепіпеда (1). Одновимірні грані називаються ребрами, їхні кінці – вершинами n-паралелепіпеда.

Межу n-паралелепіпеда можна обчислити за формулою [6]:

$$\mathrm{fr}P_n = \sum_{s=1}^{n} 2^s C_n^s P_{n-s} = 2C_n^1 \operatorname{int} P_{n-1} + 2^2 C_n^2 \operatorname{int} P_{n-2} + \ldots +$$

$$+ 2^{n-1} C_n^{n-1} \operatorname{int} P_1 + 2^n P_0,$$

де $\mathrm{fr}(\cdot)$ та $\operatorname{int}(\cdot)$ – відповідно межа і внутрішність точкової множини $(\cdot)$; P_0 – точка; P_1 – відрізок; P_2 – прямокутник; P_3 – тривимірний паралелепіпед тощо; C_n^s – біномні коефіцієнти, тобто $C_n^s = \frac{n(n-1)...(n-s+1)}{1\cdot 2\cdot ...\cdot s}$, $C_n^0 = 1$.

Таким чином, до складу межі P_n входять 2^n вершин, $2^{n-1}C_n^1 = n2^{n-1}$ ребер, $2^{n-2}C_n^2 = 2^{n-2}\frac{n(n-1)}{2}$ граней у вигляді прямокутників, $2^{n-3}C_n^3 = 2^{n-3}\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ тривимірних граней у вигляді паралелепіпедів тощо, і, нарешті, *2n* граней, що мають вигляд (*n*-1)–паралелепіпедів P_{n-1}.

N-політоп у математичній літературі визначається декількома способами:

– Coxeter [7] визначив *n*-політоп як узагальнювальний термін послідовності "точка, лінійний сегмент, полігон (багатокутник), поліедр (багатогранник), …", чи, точніше, як скінченну область *n*-вимірного простору утворену скінченим числом гіперплощин;

– Препарату Ф. і Шеймос М. [4] визначили *n*-політоп як скінченну *n*-вимірну поліедральну множину;

– Пападимитріу Х. і Стайглиц К. [8] додали до цього визначення умову обмеженості та непорожнечі поліедральної множини.

Синтезуючи наведені визначення, визначимо *n*-політоп як непорожню континуальну обмежену *n*-вимірну поліедральну множину, за умови, що ця множина не є підмножиною ніякого простору меншої розмірності.

Використовуючи поняття опуклої оболонки множини точок, *n*-політоп можна зобразити декількома способами [4]:

1) опуклою оболонкою скінченної множини точок. Такий підхід заснований на теоремі 1: опукла оболонка скінченної множини точок у R^n є *n*-політопом. Навпаки, кожен *n*-політоп є опуклою оболонкою деякої скінченної множини точок.

Підхід досить зручний, коли є, наприклад, лише вершини n-політопа;

2) перетином декількох замкнених напівпросторів (за умови виконання усіх обмежень у синтезованому визначенні n-політопу). Це природний спосіб зображення n-політопа у випадку, коли відповідні нерівності задані явно.

Межа n-політопа складається з граней. Кожна грань n-політопа є точковою множиною (тобто n-політопом нижчої розмірності). Якщо n -політоп T має розмірність n, то його (n-1)–вимірні грані називаються гіпергранями, (n-2)-вимірні грані – підгранями, 1-вимірні грані–- ребрами, а 0-вимірні грані – вершинами. Для 3-політопа гіперграні є опуклими багатокутниками, а підграні та ребра співпадають.

Комбінаторній природі n-політопів, і зокрема взаємозв'язку між числом граней і розмірністю, було приділено значну увагу. Так Klee V. [9] була одержана верхня оцінка числа $F(n,m)$ гіперграней n-політопа з m вершинами:

$$F(n,m)=\begin{cases} \dfrac{2m}{n} C_{m-\frac{n}{2}-1}^{\frac{n}{2}-1} & \text{для парних } n, \\ 2C_{m-\left[\frac{n}{2}\right]-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} & \text{для непарних } n, \end{cases}$$

де $[a]$ – ціла частина числа a.

Можна сказати, що $F(n,m)=O(m^{\left[\frac{n}{2}\right]})$. У таблиці наведено значення $F(n,m)$, коли $n \in \{3,4,5\}$ та $m \in \{50,100\}$.

Таблиця – **Результати обчислення деяких значень $F(n,m)$**

n \ m	**50**	**100**
3	96	196
4	1175	4850
5	2162	9506

Найпростішим прикладом n-політопа служить n-вимірний симплекс (надалі n -симплекс).

У силу достатньої складності явного задання n-політопа і враховуючи теорему 1 можна перейти від розгляду питання явного задання n-політопа до питання задання його через побудову опуклої оболонки скінченної множини точок в R^n $(n > 3)$.

Однією з особливостей відомих на сьогодні методів побудови опуклої оболонки скінченної множини точок в R^n $(n > 3)$ є необхідність повного опису її межі (графа граней). Процедура опису підграней не викликає утруднень у припущенні симпліціальності результуючого n-політопа. Помітимо, що в загальному випадку процедура опису підграней ускладнюється і істотно впливає на часову складність алгоритму.

Проте існує низка задач, у яких не потрібен опис усіх підграней межі опуклої оболонки скінченної множини точок в R^n $(n > 3)$. До таких, наприклад, належить задача, спочатку описана як "задача про плаваючі курси валют", що виникає в низці додатків – у статистиці, економіці, дослідженні операцій і тому подібне. Математична постановка цієї задачі (її ще називають "задачею про максимуми") полягає у визначенні усіх максимальних елементів деякої скінченної множини S точок з R^n для заданого відношення домінування [4].

Одним з методів побудови опуклої оболонки скінченної множини точок в R^n, що дозволяє вирішувати завдання, які не потребують опису всіх подграней межі опуклої оболонки, є метод, описаний нижче (під "побудовою опуклої оболонки" буде матися на увазі побудова її у вигляді n-політопа, наданого у вигляді перетину замкнених півпросторів).

Нехай є множина $A = \{A_1, A_2, ..., A_m\}, A_i \in R^n, i = 1,2,..., m$, $m \geq n+1$. Задано координати кожної точки $A_i(, x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}\}, i = 1,2,..., m$. Необхідно побудувати опуклу оболонку conv (A) точкової множини A, представлену у вигляді перетину замкнених півпросторів.

Основна ідея запропонованого методу включає в себе побудову на точках множини A початкової опуклої оболонки – n-симплекса S^1, і побудова послідовності опуклих оболонок S^{h+1} (n-політопів S^{h+1}), h=1,2,…,h_0–1, таких, що $S^1 \subset S^2 \subset ... \subset S^{h_0} = \mathrm{conv}(A)$.

При цьому $S^{h+1} = \mathrm{conv}(S^h \cup \{A_0\})$, де $A_0 \in A$ – точка з максимальним відхиленням від гіперплощини обраної гіперграні

n-політопа S^h. Якщо не існує жодної зовнішньої до S^{h_0} точки множини A, отже, даний n-політоп і є опуклою оболонкою цієї множини.

Процес побудови опуклої оболонки множини точок A включає в себе наступні етапи.

1. Побудова початкової опуклої оболонки – n-симплекса S^1.

2. Виключення з множини A точок, які є внутрішніми або граничними (але не є вершинами) n-політопа S^h, $h=1,2,\ldots,h_0$, $h_0 \in \mathrm{N}$.

3. Побудова набору n-симплексів на точках обраної гіперграні n-політопа S^h (вершинах S^h), $h=1,2,\ldots,h_0$, і точці A_0 – точці з максимальним відхиленням від гіперплощини обраної гіперграні. Інформація про кожний n-симплекс включає в себе список вершин і гіперплощин, що формують його межу.

4. Побудова, за допомогою отриманих у пункті 3 гіперплощин меж n-симплексов, розширеної опуклої оболонки – n-політопа $S^{h+1} = \mathrm{conv}(S^h \cup \{A_0\})$ такого, що $S^h \subset S^{h+1}, h = 1,2,\ldots,h_0 - 1$.

Процес побудови conv (A) припиняється після кінцевого числа ітерацій h_0, коли не існує жодної зовнішньої до поточного n-політопу S^{h_0} точки з А. Інформація про побудовану опуклу оболонку (n-політоп S^{h_0}) являє собою систему лінійних нерівностей, кожне з яких описує півпростір, зумовлений відповідною орієнтованою опорною гіперплощиною, а також набір точок, через які ці гіперплощини проходять (вершини n-політопа S^{h_0}).

Висновки. У даній статті узагальнюється поняття n-політопа, наводиться детальна інформація про структуру n-паралелепіпеда і n-політопа, пропонується основна ідея методу побудови опуклої оболонки скінченної множини точок в R^n, головні особливості якого полягають у наступному:

1) результатом роботи методу є побудована опукла оболонка – n-політоп, представлений у вигляді перетину замкнених півпросторів;

2) у методі не потрібно опис всіх l-граней n-політопа ($l=1,2,\ldots,n-2$), достатньо тільки знаходження опорних гіперплощин, що беруть участь у його уявленні – це істотно зменшує трудомісткість методу;

3) розроблено правило, відповідно до якого точки, що завідомо не є вершинами опуклої оболонки, виключаються з розгляду в ході роботи методу, що також позитивно впливає на його трудомісткість.

Список літератури

1. Стоян, Ю. Г. Основная задача геометрического проектирования [Текст] / Ю. Г. Стоян. – Харьков, 1983. – 36 с. (Препр./ АН УССР. Ин-т проблем машиностроения ; № 181).

2. Lins, L. An n-tet graph approach for non-guillotine packing of n-dimensional boxes into an n-container [Text] / L. Lins, S Lins, R Morabito // European Journal of Operational Research. – 2002. – № 141. – pp. 421–439.

3. Новожилова, М. В. Об одном способе поиска оптимального размещения прямоугольного гиперпараллелепипеда [Текст] / М. В. Новожилова, А. А. Черноморец. – Харьков, 1992. – 26 с. (Препринт – 365, ИПМаш АН Украины).

4. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: Введение [Текст] / Ф. Препарата, М. Шеймос. – Москва : Мир, 1989. – 478 с.

5. Ефимов, Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Текст] / Н. В. Ефимов, Э. В. Розендорн. – Москва : Наука, 1970. – 527 с.

6. Гордевский, Д. З. Популярное введение в многомерную геометрию [Текст] / Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. – Харьков, 1964. – 191 с.

7. Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry [Text] / H. S. M. Coxeter. 2nd ed. – New York : Wiley, 1969.

8. Пападимитриу, Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность [Текст] / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – Москва : Мир, 1985. – 510 с.

Отримано 30.10.2011. ХДУХТ, Харків.