

М.С. Синскоп, д-р техн. наук, проф. (ХДУХТ, Харків)
М.М. Вермійчук, асист. (ХДУХТ, Харків)

НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СТРИЖНЯ

Задача про розповсюдження тепла в тонкому однорідному стрижні $0 < x < l$, бокова поверхня якого теплоізолювана, зводиться

до розв'язання рівняння теплопровідності
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

з початковими умовами $T(x, 0) = T_0(x)$.

Відносно межових умов будемо вважати:

а) кінці $x = 0$, $x = l$ підтримуються при температурах b_1 і b_2 відповідно $T(0, t) = b_1$, $T(l, t) = b_2$;

б) кінець $x = 0$ підтримується при температурі b_1 , а на кінці $x = l$ відбувається теплообмін з середовищем, що має температуру e_2

$$T(0, t) = b_1, \quad \frac{\partial T(l, x)}{\partial x} + h_2 T(l, t) = h_2 e_2;$$

с) на кінцях стрижня відбувається теплообмін з середовищами, що мають відповідно температури e_1 , e_2

$$-\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} + h_1 T(0, t) = h_1 e_1, \quad \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} + h_2 T(l, t) = h_2 e_2.$$

Тут a , h_i ($i = 1, 2$) – задані параметри, $T_0(x)$, $b_i(t)$, $e_i(t)$ ($i = 1, 2$) – задані функції. Застосуємо до сформульованих початково-межових задач безпосередньо дискретизацію за часом шляхом заміни похідної від температури дискретним аналогом. Редуціюємо розглядувані нестационарні задачі до послідовності стаціонарних межових задач; при цьому праві частини рівняння будуть містити розв'язання на попередніх часових шарах. Вводимо розбиття часового проміжку $[0, t_0]$ на N частин з кроком $\tau = t_0 / N$ і апроксимуємо на ньому похідні за часом за допомогою різниці

$$\frac{\partial T(x, t_k)}{\partial t} = \frac{T(x, t_k) - T(x, t_{k-1})}{\tau}, \quad t_k = k\tau.$$

Одержуємо послідовність стаціонарних межових задач (значення всіх величин в момент t_k будемо позначати індексом “ k ”)

$$\frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2 \tau} T^{(k)} = -\frac{1}{a^2 \tau} T^{(k-1)}; \quad (1)$$

$$a) \quad T^{(k)}(0) = b^{(k)}, \quad T^{(k)}(l) = b^{(k)}; \quad (2)$$

$$b) \quad T^{(k)}(0) = b^{(k)}, \quad \frac{\partial T^{(k)}}{\partial x}(l) + h_2 T^{(k)}(l) = e^{(k)}; \quad (3)$$

$$c) \quad -\frac{\partial T^{(k)}(0)}{\partial x} + h_1 T^{(k)}(0) = e^{(k)}, \quad \frac{\partial T^{(k)}(l)}{\partial x} + h_2 T^{(k)}(l) = e^{(k)}. \quad (4)$$

Тут введені позначення $b_i^{(k)} = b_i(k\tau)$, $e_i^{(k)} = e_i(k\tau)$ ($i = 1, 2$),
 $u^{(k)}(x) = u(x, k\tau)$, $T^{(0)}(x) = T_0(x)$.

Структури розв'язку запишемо:

$$a) \quad \text{для задачі (1), (2): } T^{(k)} = \frac{l-x}{l} b^{(k)}_1 + \frac{x}{l} b^{(k)}_2 + x(l-x)\Phi^{(k)};$$

$$b) \quad \text{для задачі (1), (3): } T^{(k)} = b^{(k)}_1 + x\Phi^{(k)} - (x-l) \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[b^{(k)}_1 + x\Phi^{(k)} \right] \right|_l + (x-l)h_2 e^{(k)}_2;$$

$$c) \quad \text{для задачі (1), (4): } T^{(k)} = \Phi^{(k)} - \frac{x(x-l)}{l} \Phi^{(k)} + \frac{x(x-l)}{l} \left[\frac{l-x}{l} h_1 e^{(k)}_1 + \frac{x}{l} h_2 e^{(k)}_2 \right].$$

Тут $\Phi^{(k)}(x)$ - довільна функція, незалежно від вибору якої межові умови виконуються точно. Цю функцію будемо представлять розвиненням $\Phi^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i^{(k)} q_i(x)$, де $q_i(x)$ - елементи деяких

повних систем функцій; невідомі коефіцієнти $C_i^{(k)}$ будемо знаходити із умови мінімуму функціонала

$$J(T^{(k)}) = \int_0^l \left[\left(\frac{\partial T^{(k)}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{a^2 \tau} (T^{(k)})^2 \right] dx + h_1 (T^{(k)}(0))^2 + h_2 (T^{(k)}(l))^2 -$$

$$- \frac{2}{a^2 \tau} \int_0^l T^{(k-1)} T^{(k)} dx - h_1 e_1^{(k)} T^{(k)}(0) - h_2 e_2^{(k)} T^{(k)}(l),$$

що призводить поставлені задачі на кожному часовому шарі до системи рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів.