Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

Методичні вказівки до самостійної роботи

з курсу «Вища математика»

**для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський)
денної (заочної) форми навчання
за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»**

Харків 2024

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Спеціальність 131

В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський) денної (заочної) форми навчання за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»

Затверджено на засіданні кафедри фізики та математики.
Протокол №11 від 10.06.2024

Харків 2024

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський) денної (заочної) форми навчання за спеціальністю 131 «Прикладна механіка» / Укладачі В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська – Харків: ХДБУ, 2024. – 93 с.

Кафедра фізики та математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи з курсу “Вища математика”.

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольних робіт;
- виконання та складання підсумкового завдання з теми;
- виконання модульної контрольної роботи за всіма темами модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і приклад його виконання.

.

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №1

Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія.

Тема 1. Визначники і їх властивості.
Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.
Тема 3. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
Тема 4. Матричний запис системи рівнянь. Теорема Кронікера-Капеллі.
Тема 5. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.
Тема 6. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.
Тема 7. Прямокутна та полярна системи координат на площині. Відстань між двома точками.
Тема 8. Пряма на площині, її рівняння. Основні задачі.
Тема 9. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх властивості.
Тема 10. Перетворення координат. Зведення загального рівняння 2-го порядку до канонічного вигляду.
Тема 11. Рівняння поверхні у просторі. Площина. Різні види її рівнянь. Кут між площинами.
Тема 12. Пряма у просторі, різні види рівнянь прямої. Пряма та площина в просторі. Основні задачі.
Тема 13. Поверхні другого порядку.

Змістовий модуль 2. Диференціальне числення.

Тема 14. Функція та її властивості. Способи завдання, графік функції.
Тема 15. Границя функції. Визначні границі. Неперервність функції. Точки розриву функції.
Тема 16. Похідна функції.. Правила диференціювання складної функції. Таблиця похідних.
Тема 17. Похідна неявної, параметрично заданої функції. Похідні та диференціали вищих порядків.
Тема 18. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші, правило Лопіталя .
Тема 19. Знаходження екстремуму функції. Опуклість, угнутість кривої, точки перегину.
Тема 20. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функцій.

Тема 21. Функції багатьох змінних. Границя функції 2-х змінних. Неперервність у точці та області.
Тема 22. Частинні похідні. Диференціювання складної функції кількох змінних.
Тема 23. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в області.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1 Розв'язати систему лінійних рівнянь
1) методом Крамера;
2) методом Гауса;
3) за допомогою оберненої матриці.
Зробити перевірку.

Варіант №1

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант №2

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Варіант №3

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 14; \\ -3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

Варіант №4

а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7; \\ -11x_1 + 3x_2 = -19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант №5

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -17; \\ -3x_1 + 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

Варіант №6

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 18; \\ -7x_1 + 5x_2 = -31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант №7

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 17; \\ 7x_1 + 4x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант №8

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 12; \\ 9x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант №9

а) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 19; \\ 2x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант №10

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -1; \\ 8x_1 - 7x_2 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант №11

а) $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 = -19; \\ 2x_1 + 9x_2 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант №12

а) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 18; \\ 7x_1 + 2x_2 = -25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант №13

а) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 12; \\ 9x_1 - 4x_2 = -17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант №14

а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = -3; \\ -7x_1 + 9x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант №15

а) $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 = -25; \\ -9x_1 - 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант №16

а) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = -18; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14 \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

Варіант №17

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 19; \\ 7x_1 - 11x_2 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 \quad + \quad 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ \qquad x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант №18

а) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -9; \\ 2x_1 + 7x_2 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант №19

а) $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 = -17; \\ 3x_1 - 4x_2 = -18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

Варіант №20

а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 11; \\ -4x_1 + 3x_2 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант №21

а) $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 16; \\ -7x_1 - 4x_2 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант №22

а) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 17; \\ -9x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 \quad + \quad 5x_3 = 9; \\ \qquad x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

Варіант №23

а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 = 17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант №24

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 13; \\ -7x_1 - 4x_2 = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант №25

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант №26

а) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = -11; \\ -7x_1 + 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант №27

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = -6; \\ -7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 \quad + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант №28

а) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = -23; \\ -4x_1 - 7x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант №29

а) $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

Варіант №30

а) $\begin{cases} -9x_1 - 4x_2 = 19; \\ 5x_1 + 3x_2 = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Завдання 2 Дослідити систему за допомогою теореми Кронекера - Капеллі і в разі її сумісності знайти всі розв'язки.

Варіант №1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = -2; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$

Варіант №2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Варіант №3

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Варіант №4

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Варіант №5

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 5; \\ x_1 + 3x_3 = 16; \\ 5x_1 - x_3 + 3x_4 = 10; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Варіант №6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант №7

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант №8

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 20; \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант №9

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант №10

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_3 = 3; \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант №11

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 15; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 10; \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант №12

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$$

Варіант №13

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант №14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант №15

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант №16

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23; \\ x_2 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Варіант №17

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант №18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Варіант №19

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 - x_2 = 0; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$

Варіант №20

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант №21

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_3 = 16; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 x_4 = 5. \end{cases}$$

Варіант №22

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Варіант №23

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант №24

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Варіант №25

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_3 = 3; \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант №26

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6; \\ x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант №27

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4; \\ x_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Варіант №28

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Варіант №29

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 14; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Варіант №30

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Завдання 3 Задана піраміда, координати вершин якої A_1, A_2, A_3, A_4. Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди.

Номер варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)

21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Завдання 4 Задані координати вершин трикутника ABC. Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C;

3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B;

4) скласти рівнянь прямої, що проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні AC;

5) знайти площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині A.

Номер варіанта	A	B	C	Номер варіанта	A	B	C
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;-1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(1;3)	(-4;7)	29	(-3;-3)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 5 Задана піраміда, координати вершин якої A_1, A_2, A_3, A_4.

1) скласти рівняння сторони A_1A_2;

2) скласти рівняння площини A_1A_2 A_3;

3) записати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на площину A_1A_2 A_3;

4) знайти кут між ребром A_1A_4 и гранню A_1A_2 A_3.

Номер Варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0.0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Завдання 6 Привести рівняння лінії до канонічного виду, побудувати цю лінію і в залежності від отриманого результату знайти:

1) координати центру кола і його радіус;

2) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет еліпса;

3) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет гіперболи і записати рівняння її асимптот;

4) координати вершини і фокуса параболи, величину параметра, записати рівняння її директриси.

Номер варианта	Рівняння	Номер варианта	Рівняння
1	$x^2-6x-4y+29=0$	16	$2y^2+x-4y-8=0$
2	$x^2+y^2+2x-6y+1=0$	17	$-3x^2+y^2-6x-4y-11=0$
3	$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$	18	$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$
4	$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$	19	$x^2-4y^2-8y+12=0$
5	$y^2-2x+8y+10=0$	20	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$
6	$7x^2-2y^2+28x+14=0$	21	$x^2-y^2-4x+2y+2=0$
7	$2y^2+x+4y+6=0$	22	$16x^2+25y^2+64x-50y-311=0$
8	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$	23	$2x^2-8x+y+5=0$
9	$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$	24	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
10	$x^2-10x-4y-3=0$	25	$x^2+y^2-2x+6y-6=0$
11	$-x^2+3y^2+6x-12y=0$	26	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$
12	$x^2+y^2-6x-8y+9=0$	27	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
13	$2y^2+x-8y+3=0$	28	$x^2+y^2+4y-5=0$
14	$x^2-4y^2-2x-8y+13=0$	29	$4x^2-y^2-8x-6y-25=0$
15	$x^2+y^2-14x-8y+40=0$	30	$4x^2-8x+y+7=0$

Завдання 7 Задана функція $r=f(\varphi)$ на відрізку $0\le\varphi\le 2\pi$.

1) побудувати графік функції в полярній системі координат по точкам, задаючи значення φ через проміжок $\dfrac{\pi}{6}$, починаючи від $\varphi=0$;

2) записати рівняння заданої лінії в прямокутній декартовій системі координат, початок якої збігається з полюсом, а позитивний напрямок осі абсцис – з полярною віссю. За отриманим рівнянням визначити вид кривої.

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
1	$r = 2\cos\varphi - 5\sin\varphi$	16	$r = 4\cos\varphi$
2	$r = \dfrac{21}{5 - 2\cos\varphi}$	17	$r = \dfrac{5}{1 + \sin\varphi}$
3	$r = \dfrac{5}{1 + \sin\varphi}$	18	$r = \dfrac{4}{2 + 3\cos\varphi}$
4	$r = -\dfrac{3}{\cos\varphi}$	19	$r = \dfrac{6}{1 - \cos\varphi}$
5	$r = \dfrac{16}{3 - 5\cos\varphi}$	20	$r = \dfrac{15}{3 - 4\sin\varphi}$
6	$r = -5\sin\varphi$	21	$r = -6\cos\varphi$
7	$r = \dfrac{1}{3 - 3\cos\varphi}$	22	$r = \dfrac{5}{4 - 3\cos\varphi}$
8	$r = \dfrac{12}{2 - \cos\varphi}$	23	$r = \dfrac{2}{\sin\varphi}$
9	$r = \dfrac{3}{2 + \cos\varphi}$	24	$r = \dfrac{6}{3 + 2\cos\varphi}$
10	$r = -3\cos\varphi + 5\sin\varphi$	25	$r = 2\sin\varphi$
11	$r = \dfrac{1}{2 + 2\sin\varphi}$	26	$r = \dfrac{4}{1 + \cos\varphi}$
12	$r = \dfrac{2}{1 - \cos\varphi}$	27	$r = \dfrac{18}{5 - 4\sin\varphi}$
13	$r = -\dfrac{4}{\sin\varphi}$	28	$r = \dfrac{3}{2\cos\varphi}$
14	$r = \dfrac{5}{4 + 3\sin\varphi}$	29	$r = \dfrac{3}{5 + 6\sin\varphi}$
15	$r = -4\cos\varphi - 3\sin\varphi$	30	$r = 3\cos\varphi + 2\sin\varphi$

Завдання 8. Знайти границі, використовуючи еквівалентні нескінченно малі функції.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{tg(n+1)x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctgnx}{2nx^2-x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(n+1)x}-1}{tg5x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos nx-\cos x}{nx^2}$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos nx}{2x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+nx)}{2x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 nx}{5x}$

Завдання 9. Найти границі функцій (n – номер варіанта):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{nx^{n+1}-x+7}{nx^{n+2}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n-5x+6}{nx^n-x+3}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+2x-n}{3x^{n-1}+5}$
4. $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{x^2-(n+1)x+n}{x^2-n^2}$
5. $\lim\limits_{x\to n}\dfrac{\sqrt{x-n+1}-1}{n^2-x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+nx+1}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left((n+1)^{-x}+\dfrac{1}{nx}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(n+1)x+1}{nx}\right)^{nx}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{nx^2}{1-x^2}+(n+1)^{\frac{1}{x}}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{nx+1}{nx+2}\right)^{nx}$

Завдання 10. а) Дослідити на неперервність функції і побудувати їх графіки.

б) Дослідити на неперервність функції в заданих точках x_1, x_2.

Варіант № 1

а) $\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$

б) $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1,\ \ x_1=3;\ x_2=4$

Варіант № 2

а) $\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$

б) $f(x)=5^{\frac{1}{x-2}}-1,\ \ x_1=2;\ x_2=4$

Варіант № 3

а) $\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2},\ \ x_1=2;\ x_2=3$

Варіант № 4

а) $\begin{cases} x-3, & x<0 \\ x+1, & 0\le x\le 4 \\ 3+x, & x>4 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3},\ \ x_1=-2;\ x_2=-3$

Варіант № 5

а) $\begin{cases} x+2, & x \le -1 \\ x+1, & -1 < x \le 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$

б) $f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2, \ x_1 = 2; \ x_2 = 3$

Варіант № 6

а) $\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}} + 1, \ x_1 = 0; \ x_2 = 2$

Варіант № 7

а) $\begin{cases} -x, & x \le 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ x-3, & x \ge 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1, \ x_1 = 4; \ x_2 = 5$

Варіант № 8

а) $\begin{cases} 2x^2, & x \le 0 \\ x, & 0 < x \le 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$

б) $f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2, \ x_1 = 3; \ x_2 = 4$

Варіант № 9

а) $\begin{cases} -2(x+1), & x \le -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0 \\ x, & x \le 0 \end{cases}$

б) $f(x) = 6^{\frac{1}{3-x}} + 3, \ x_1 = 3; \ x_2 = 4$

Варіант № 10

а) $\begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x \le 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1, \ x_1 = 4; \ x_2 = 5$

Варіант № 11

а) $\begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+4}, \ x_1 = -5; \ x_2 = -4$

Варіант № 12

а) $\begin{cases} \cos x, & x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi \\ 2, & x \ge 2 \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{x+5}{x-2}, \ x_1 = 3; \ x_2 = 2$

Варіант № 13

а) $\begin{cases} x-1, & x \le 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \ge 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}, \ x_1 = 3; \ x_2 = 4$

Варіант № 14

а) $\begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \le x < 1 \\ -x, & x \ge 1 \end{cases}$

б) $f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3, \ x_1 = 1; \ x_2 = 2$

Варіант № 15

а) $\begin{cases} 1, & x \le 0 \\ 2^x, & 0 < x \le 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}} - 1, \ x_1 = 2; \ x_2 = 0$

Варіант № 16

а) $\begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2 + 1, & 0 \le x < 2 \\ x+1, & x \ge 2 \end{cases}$

б) $f(x) = 8^{\frac{4}{2-x}} - 1, \ x_1 = 0; \ x_2 = 2$

Варіант № 17

а) $\begin{cases} -x+2, & x\le -2 \\ x^3, & -2<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$

б) $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1,\ \ x_1=2;\ x_2=3$

Варіант № 18

а) $\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 1, & 0<x\le 2 \\ x^2-2, & x>2 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{3x}{x-4},\ \ x_1=4;\ x_2=5$

Варіант № 19

а) $\begin{cases} 3x+4, & x\le -1 \\ x^2-2, & -1<x<2 \\ x, & x\ge 2 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1},\ \ x_1=1;\ x_2=2$

Варіант № 20

а) $\begin{cases} x-1, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \\ 3, & x\ge \pi \end{cases}$

б) $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1,\ \ x_1=-2;\ x_2=-1$

Варіант № 21

а) $\begin{cases} x, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & 1<x<3 \\ -x+6, & x\ge 3 \end{cases}$

б) $f(x)=4^{\frac{3}{x-2}}+2,\ \ x_1=3;\ x_2=2$

Варіант № 22

а) $\begin{cases} -x+1, & x<-1 \\ x^2+1, & -1\le x\le 3 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$

б) $f(x)=3^{\frac{2}{1+x}}-2,\ \ x_1=0;\ x_2=-1$

Варіант № 23

а) $\begin{cases} x-1, & x<1 \\ x^2+2, & 1\le x\le 2 \\ -2x, & x>2 \end{cases}$

б) $f(x)=5^{\frac{3}{4-x}}+1,\ \ x_1=5;\ x_2=4$

Варіант № 24

а) $\begin{cases} x^3, & x<-1 \\ x-1, & -1\le x\le 3 \\ -x+5, & x>3 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2},\ \ x_1=-2;\ x_2=-1$

Варіант № 25

а) $\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ -x^2+4, & 0<x<2 \\ x-2, & x\ge 2 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3},\ \ x_1=-3;\ x_2=-2$

Варіант № 26

а) $\begin{cases} x, & x<-2 \\ -x+1, & -2\le x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3},\ \ x_1=3;\ x_2=4$

Варіант № 27

а) $\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ x^2-1, & -1<x\le 2 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$

б) $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1,\ \ x_1=1;\ x_2=2$

Варіант № 28

а) $\begin{cases} -1, & x<0 \\ \cos x, & 0\le x\le \pi \\ 1-x, & x>\pi \end{cases}$

б) $f(x)=\dfrac{4x}{x+5},\ \ x_1=-5;\ x_2=-4$

Варіант № 29

а) $\begin{cases} 2, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \le x \le 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$

б) $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1 = 3; \ x_2 = 4$

Варіант № 30

а) $\begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x^3, & 0 < x \le 2 \\ x+4, & x > 2 \end{cases}$

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}, \quad x_1 = 2; \ x_2 = 3$

Завдання 11 . Знайти похідні від заданих функцій.

Варіант № 1

1. S = $5t^3 - t^2$
2. $r(\varphi) = \varphi \sin\varphi + \cos\varphi$
3. y = $\dfrac{x^2}{\ln x}$
4. y = $arctg\sqrt{4x-1}$
5. y = $(\cos x^2)^2$
6. y = $3^{ctg\frac{1}{x}}$
7. y = $\arcsin(1-x) + \sqrt{2x - x^2}$
8. y = $\ln\ln(3 - 2x^3)$
9. y = $x^4(1 - 2x^3)^2$
10. f(t) = $t \sin 2^t$

Варіант № 2

1. y = $\arccos x^3$
2. y = $e^{\sin 2x}$
3. y = $4^x + x^4$
4. y = $\ln(x^2 + 5x + 6)$
5. y = $\dfrac{1}{(1+\cos 2x)^3}$
6. y = $5\lg^3(4x+1)$
7. y = $e^{x^2} \ln x$
8. S(t) = $\sqrt{1 - e^{4t}}$
9. y = $3\sin^2 x - \sin^3 x$
10. y = $\dfrac{1+e^x}{1-e^x}$

Варіант № 3

1. y = $x^2 \ln x$
2. y = $3^{\sin\frac{x}{4}}$
3. y = $\cos(3-4x)$
4. y = $(2x^2 - 7)^3$
5. y = $\sqrt{x^4 + 2x + 3}$
6. y = $\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$
7. y = $(x^2 - 2x + 2)e^{3x}$
8. y = $\sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$
9. y = $\dfrac{1}{arctgx}$
10. $S(t)$ = $3\sin^3 t^3$

Варіант № 4

1. y = $e^{\cos^2 x}$
2. y = $\ln\ln(x^2+1)$
3. y = $(3-2\sin x)^5$
4. y = $\frac{\pi}{x}+\ln 2$
5. y = $\sqrt{arctgx}-(\arcsin x)^3$
6. $f(t)$ = $\frac{1}{3\cos^2 t}-\frac{1}{\cos t}$
7. y = $\frac{x^5}{x^3-2}$
8. z(t) = $(\sqrt{t^3}+1)t$
9. y = 10^{xtgx}
10. y = $5\,ctg\frac{x}{5}+ctg\frac{\pi}{8}$

Варіант № 5

1. S(t) = $\frac{t^3}{(1-t)^2}$
2. y = $3\sin(3x+5)$
3. y = $(1+\cos^2 x)^4$
4. y = $\sqrt{tg\frac{x}{2}}$
5. y = $x^2\log_3 x$
6. y = 5^{2x-3}
7. y = $e^{\arcsin 2x}$
8. y = $\ln(x^2-4x)$
9. y = $\sin^2 x\sin x^2$
10. y = $5\,(arctgx+\ln(1+x^2))$

Варіант № 6

1. y = $5\,(tgx-x^2)$
2. y = $\frac{1}{e^x+1}$
3. y = $x\sqrt{x}(3\ln x-2)$
4. y = $(2x^3+5)^7$
5. y = $arctg\frac{\ln x}{3}$
6. y = $\frac{\sin x}{1+\ln\sin x}$
7. y = $\sqrt{\cos(3x-2)}$
8. S(t) = $\ln(2t^3+3t^2)$
9. y = $ctg^3\frac{x}{2}$
10. y = $e^{\sqrt{x}}-2^{\arcsin 3x}$

Варіант № 7

1. $r(\varphi)=2\cos^2\frac{\varphi}{2}$
2. y = $ctg\sqrt{x}$
3. z = $\sqrt[4]{1+\cos x^4}$
4. S(t) = $\sin 3t\cos\frac{t}{3}$
5. y = $\ln\frac{x^2}{1-x^2}$
6. y = 5^{3x+2}
7. y = $\arcsin\sqrt{\sin x}$
8. y = $(x^4+1)e^{6x}$
9. y = $3(2x^3+3)^5$
10. y = $arctg^4(2x-1)$

Варіант № 8

1. S(t) = $\left(\dfrac{t}{2t+1}\right)^{10}$
2. y = $\sqrt[3]{2+x^5}$
3. y = x^3e^{2x}
4. y = $\ln(11e^x+2)$
5. y = $arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$
6. y = $2^{\cos x^2}$
7. y = $5\sin(2-3x)$
8. y = $\arcsin\sqrt{x}$
9. z(φ) = $tg(\varphi+tg\varphi)$
10. y = $6\log_5(3x-4)$

Варіант № 9

1. z(φ) $=\sin^3 2\varphi-\cos^3 2\varphi$
2. y = $\dfrac{3+2x}{3-2x}$
3. y = $\ln\sqrt{10x-x^2}$
4. y = $e^x(x^3+3x^2)$
5. y = $(7^{2x}-3)^5$
6. y = $ctg(x+e^{\frac{x}{2}})$
7. y = $5\log_5(x^3-1)$
8. y = $6^{\arccos 3x}$
9. y = $\cos(3^x-3^{-x})$
10. y = $tg(3x+1)^3$

Варіант № 10

1. y $=\cos\left(6x-\dfrac{1}{x}\right)$
2. y $=\cos^2 x+\ln tg\dfrac{x}{2}$
3. y $=7^{\sin^3 x}$
4. y $=ctg(x\sin x)$
5. z(t) $=\dfrac{e^t}{1-e^t}$
6. y $=(1+2x)^8$
7. y $=tg\sqrt{\cos x}$
8. y $=\log_2(1-2x)$
9. y $=3e^{4x-1}$
10. y $=arcctg^3\dfrac{1}{x}$

Варіант № 11

1. y $=e^x\ln\sin x$
2. y $=5ctg(3-4x)$
3. y $=2^{tg^2x}$
4. y $=\log_5(x^2-4x)$
5. y $=\dfrac{x^2}{3x+1}$
6. y $=\sqrt{1+3tg^2x}$
7. y $=\cos(x^3-3^x)$
8. y $=e^{\sqrt{\ln x}}$
9. y $=3\arcsin 4x$
10. y $=\arccos\sqrt{1-3x}$

Варіант № 12

1. y $=\cos^2(6x+7)$
2. y $=xe^{1-\cos x}$
3. y $=\dfrac{1}{tg^8x}$
4. $f(t)=\lg(t-\cos t)$
5. $r(\varphi)=\dfrac{\varphi}{1-\varphi^2}$
6. y $=\sin^3\cos 3x$
7. y $=\dfrac{1}{4}ctg^4x$
8. y $=\arcsin\dfrac{3}{x}$
9. y $=ctg\sqrt[3]{1+x^2}$
10. y $=\sqrt{x}arctg\sqrt{x}$

Варіант № 13

1. $S(t)=\sqrt[3]{1+2tgt}$
2. $y=arcctg\sqrt{6x-1}$
3. $y=\log_3^5\cos x$
4. $y=\ln(x^3+\sin 2x)$
5. $y=\dfrac{x^2}{1+5x}$
6. $y=\dfrac{1}{2}\arcsin\sqrt{2x}$
7. $y=2^{\cos x^3}$
8. $y=\sin^4\left(\dfrac{x^2}{4}-1\right)$
9. $y=3+3e^{2x}$
10. $y=\sqrt[12]{(x^3-6x)^5}$

Варіант № 14

1. $S(t)=\dfrac{1}{4}tg^4t-\dfrac{1}{2}tg^2t$
2. $y=\ln(e^{2x}+1)-2arctge^x$
3. $y=\log_4^3(\sin 3x+1)$
4. $y=x^2ctg\dfrac{x}{4}$
5. $y=(5x^4+3)^7$
6. $y=\dfrac{\sin x}{x}$
7. $y=\sqrt{1-7^{tgx}}$
8. $r(\varphi)=2\cos\varphi+\cos 2\varphi$
9. $y=2^{tgx}$
10. $y=3e^{ctg\sqrt{x}}$

Варіант № 15

1. $y=\ln(e^{-2x}+xe^{-3x})$
2. $y=6\cos^2 x+7$
3. $y=arctg\sqrt[3]{x^2}$
4. $y=tg^3(7x-5)$
5. $r(\varphi)=\varphi^2\sqrt{\varphi^2-3}$
6. $S(t)=\dfrac{2t}{t+1}$
7. $y=\lg(x^3+3^{\ln x})$
8. $y=\dfrac{1}{\sin^2 5x}$
9. $y=3^{tg5x}$
10. $y=3e^{ctg\sqrt{x}}$

Варіант № 16

1. $y=(1+x^2)arctgx$
2. $y=(5^{\sin 3x}+ctg\dfrac{x}{3})^4$
3. $y=\arccos^2 5x$
4. $S(t)=\ln tg7t$
5. $y=\dfrac{x^3}{1-x^2}$
6. $y=x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$
7. $y=\sqrt{ctg(3x+2)}$
8. $y=e^{\cos^5\frac{x}{2}}$
9. $f(t)=\sqrt[5]{(1-t^2)^3}$
10. $y=x^{\sqrt{2}}+tg\dfrac{\pi}{4}$

Варіант № 17

1. $y = 3^{\ln x} + 3\ln x$
2. $S(t) = e^t(1-t)$
3. $y = \ln\left(\sin^3 4x + arctg\frac{x}{4}\right)$
4. $y = 7e^{-x^3}$
5. $y = \sqrt{\lg\frac{e}{x}}$
6. $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$
7. $y = (1+\cos^5 3x)^3$
8. $y = \cos\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{2}$
9. $r(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi^4 + \frac{1}{3}\varphi^3$
10. $y = \sin 2^x$

Варіант № 18

1. $y = x^3\ln(x^2+5)$
2. $y = 3^{tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$
3. $y = 3\lg^2 4x$
4. $y = \frac{1}{2}e^{3x+5}$
5. $y = \sqrt{x^2(4-x)}$
6. $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$
7. $S(t) = \frac{t^3}{t+2}$
8. $y = 2\sin\frac{x^2}{4}$
9. $y = (6\cos 7x+5)^3$
10. $y = \sqrt[4]{e^{4x-5}+2}$

Варіант № 19

1. $y = \ln\sqrt{4x^2+1}$
2. $y = \frac{1}{2}arctg 5x$
3. $y = e^{\sin^2\frac{x}{2}}$
4. $y = (5x^2-3x)^4$
5. $y = 3\log_4(2x-1)$
6. $y = \ln(1+\log_3 x)$
7. $y = \sqrt{2ctg(8x+1)}$
8. $y = 5e^{1+3x}$
9. $y = \cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$
10. $S(t) = \sin^3(2t-t^2)$

Варіант № 20

1. $y = \ln(1+\log_3 x)$
2. $y = x\arcsin\frac{x}{3}$
3. $y = 2^{tgx^2}$
4. $r(\varphi) = \frac{1+\cos 3\varphi}{\sin 2\varphi}$
5. $y = 4x + arctg^3 x$
6. $y = \frac{2x}{1-x^2}$
7. $y = 3^{ctg\sqrt{x}}$
8. $S(t) = e^{2t}\sin 3t$
9. $y = 5e^{tg\sqrt{5x}}$
10. $y = 9\arcsin\frac{x}{3}$

Варіант № 21

1. $y=\sqrt{1+x^2}\,arctgx$
2. $y=3\sin(3\ln^2 x)$
3. $y=\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x$
4. $y=7^{\ln(1-3x)}$
5. $S(t)=\sin t-t\cos t$
6. $y=\frac{2x}{1-x}$
7. $y=(\sqrt[3]{4x^2}+1)^2$
8. $y=5e^{1+3x^2}$
9. $y=x^2\cos\frac{x}{5}$
10. $y=2\log_3\cos x$

Варіант № 22

1. $r(\varphi)=\varphi\sqrt{9-\varphi^2}$
2. $y=\frac{3x^2}{1-x^3}$
3. $y=\ln tg\sqrt{2x-1}$
4. $y=3\arccos e^x$
5. $S(t)=\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}t$
6. $y=3^{ctg\frac{1}{x^2}}$
7. $y=2arctg\sqrt{x}+\ln 3$
8. $y=\ln(1+e^{4x})$
9. $y=(5^{\sin 3x}+2)^8$
10. $y=\cos\sqrt{4x+1}$

Варіант № 23

1. $y=e^x(\sin 2x+\cos 2x)$
2. $S(t)=\frac{3t}{1-t^3}$
3. $y=\sqrt{\frac{x}{2}-tg\frac{x}{2}}$
4. $y=\ln(1+e^{10x})$
5. $y=\sqrt[5]{ctg\frac{x}{3}}$
6. $y=10^{5x-4}$
7. $y=e^{\sqrt{\ln x}}$
8. $r(\varphi)=3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi$
9. $y=\sqrt[5]{(1+3x^2)^4}$
10. $y=arctg\sqrt{1+\ln(2x+3)}$

Варіант № 24

1. $S(t)=\sqrt{1+\cos^2 t^2}$
2. $y=\ln\left(3^{\frac{1}{x}}+2\right)$
3. $y=x7^{\sqrt{x}}$
4. $y=7tg\left(\frac{x}{2}-3\right)$
5. $y=\log_3 ctg\frac{x}{2}$
6. $y=\frac{x}{1+8x^2}$
7. $y=arcctg\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$
8. $y=\sqrt{e^{2x}+4e^x}$
9. $y=6\arcsin 2x$
10. $y=(2+\sin^5 x)^6$

Варіант № 25

1. $y = e^x\sqrt{1-e^{2x}}$
2. $y = \dfrac{3x^2-1}{x^3}$
3. $y = \ln(2e^{\sin x}+1)$
4. $S(t) = 5tg\dfrac{t}{5} + tg\dfrac{\pi}{16}$
5. $y = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$
6. $f(t) = (t^3+1)e^{2t}$
7. $y = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
8. $r(\varphi) = \dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$
9. $y = 2 + \lg\left(4 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$
10. $y = arctg^3(3^x+2)$

Варіант № 26

1. $y = \ln(2x + \sqrt{1+4x^2})$
2. $y = e^{2x}\cos(2^x+2)$
3. $y = (2^{\sqrt{3}} - ctg3x)$
4. $S(t) = \dfrac{\sin^2 t}{\cos 2t}$
5. $y = x^2\sqrt{1+\ln x}$
6. $f(t) = te^{\frac{2}{t}}$
7. $y = \lg^4(1-2x)$
8. $r(\varphi) = \dfrac{1-\sin\varphi}{1+\sin\varphi}$
9. $y = arctg^5\sqrt{\sin x}$
10. $y = 3tg\dfrac{x}{2} + e^{1-x^3}$

Варіант № 27

1. $y = (e^{tg2x} - \sin 2x)^3$
2. $y = \ln tg\sqrt{x^3+1}$
3. $y = e^{3x}\sqrt{1+e^{2x}}$
4. $S(t) = \sqrt[3]{(2t\sin t+1)^2}$
5. $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$
6. $y = \arccos 7x^2 + 3$
7. $r(\varphi) = \ln\cos 2\varphi + \sin\dfrac{\pi}{4}$
8. $y = 2x\,arctg^3\dfrac{x}{5}$
9. $y = \sqrt[5]{ctg\dfrac{x}{3} + 3}$
10. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$

Варіант № 28

1. $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{3x^2-1}{3x^2+1}}$
2. $y = \arcsin\sqrt{1-9x^2}$
3. $S(t) = t^2e^{-2t}$
4. $y = (3^{\cos x} - 2)^3$
5. $r(\varphi) = \ln\sin\varphi - \dfrac{1}{2}\sin^2\varphi$
6. $y = 0{,}5tg(x^{-1} - \sqrt[3]{x^2})$
7. $f(t) = 2t^3(t^2-4)^{-1}$
8. $y = e^{x^3} + \sqrt{17x-1}$
9. $y = arctg[x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}]$
10. $y = \log_2^5(3x^2+7)$

Варіант № 29

1. $y = 4^{\cos 2x} - \sqrt[3]{x^2}$
2. $y = arctg\sqrt{4x+5}$
3. $y = \ln\cos^3 x$
4. $y = (1+4x^2)arctg2x$
5. $S(t) = \left(\frac{1}{\sin t}+1\right)^{\sqrt{3}}$
6. $y = ctg\sqrt[5]{(1-x)^4}$
7. $y = \frac{1+x^3}{2-x^2}$
8. $r(\varphi) = \cos^2\varphi + \frac{\varphi}{\sin\varphi}$
9. $y = (x^2 2t+2)e^{-2t}$
10. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Варіант № 30

1. $y = \left(3^{\cos 3x} + tg\frac{\pi}{3}\right)^4$
2. $y = e^{\sqrt{\ln tg 2x}}$
3. $S(t) = \ln(e^{-t} + te^t)$
4. $y = \cos tgx - \sin 3^{\ln x}$
5. $r(\varphi) = \varphi\left(1-\sin\frac{\varphi}{5}\right)$
6. $y = \log_3^4(x^2+4x)$
7. $y = \frac{3-x^2}{x+2}$
8. $y = e^{3x}(2\cos 5x - 3\sin 5x)$
9. $f(t) = \frac{1}{2}\arcsin^5\frac{2}{x}$
10. $y = x^3(e^{\pi} - tg2x)$

Завдання 12 . Знайти похідні першого порядку від заданих функцій.

Варіант № 1

1. $y = 5^{x^2\sin^3 x} + \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$
2. $y = \sqrt[4]{3x + x\sqrt[5]{x^2}}$
3. y= $\ln arctg\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $y = (x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$
5. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$
6. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

Варіант № 2

1. $y = \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$
2. $y = \ln\sin 3x + x^2\arcsin^5 2x$
3. $y = \sqrt[5]{(1-x^2)^2}$
4. $y = \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$
5. $arctgy = x + y^2$
6. $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

Варіант № 3

1. $y = \dfrac{\sqrt{5x^3 + 1}}{4 + 5x^3}$
2. $y = (1 + ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$
3. $y = \ln^2 \cos\dfrac{2}{x^2 + 1}$
4. $y = \cos^x (3x + 1)$
5. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$
6. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Варіант № 4

1. $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^3 2x}}{1 + \cos 4x}$
2. $y = e^{tg^5 \frac{x}{3}} - 2arctg\sqrt{x}$
3. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{1 + x^2}$
4. $y = (\ln tgx)^{\sin^2 x}$
5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$
6. $\begin{cases} x = \ln(t^3 + 2) \\ y = \dfrac{t}{t^3 + 2} \end{cases}$

Варіант № 5

1. $y = x^2 tg^5 3x + \arcsin^2 \dfrac{x}{5}$
2. $y = \ln \dfrac{ctg^3 \dfrac{x}{3}}{1 + \cos^2 x}$
3. $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$
4. $y = (arctg\sqrt{3x + 1})^{x^3 + 1}$
5. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$
6. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$

Варіант № 6

1. $y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1})$
2. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln tg^3 \dfrac{x}{7}$
3. $y = (1 + \sin_3 3x)e^{arctg^2 5x}$
4. $y = (x^3 - 1)^{\cos\sqrt{x}}$
5. $x^2 \ln(1 + y^3) + y\ln(1 + x^3) = 0$
6. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

Варіант № 7

1. $y = \sin^4 (3x - 1)e^{-x^3}$
2. $y = \sqrt[4]{(1 + \cos^5 7x)^3}$
3. $y = 3tg\dfrac{x}{5} + 3^{tg^5 x}$
4. $y = \left(\dfrac{x^3}{1 + x^2}\right)^x$
5. $(y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$
6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Варіант № 8

1. $y=\ln\left(\sin^3 4x+arctg\frac{x}{4}\right)$
2. $y=\sqrt[5]{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$
3. $y=e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\arcsin^2 \ln x$
4. $y=(arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$
5. $(x^2+1)^2+(y^2+1)^2-xy=0$
6. $\begin{cases} x=3t-\sin 3t^2 \\ y=\sin^2 3t \end{cases}$

Варіант № 9

1. $y=\sqrt[7]{\frac{3x+2}{1-4x}}$
2. $y=ctg^5 xctg5x$
3. $y=\ln\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$
4. $y=(\ln^2 x)^{\cos 3x}$
5. $x^2+y^2+\arcsin y+yarctg2x=0$
6. $\begin{cases} x=\frac{4-t}{1+t} \\ y=\frac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$

Варіант № 10

1. $y=\ln^5(2x+7)-\sqrt[3]{\sin^2 3x}$
2. $y=\sqrt{xe^{2x}+2x^3}$
3. $y=3^{ctg\frac{1}{x}}-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $y=(x^3+2)^{\sqrt{tgx}}$
5. $e^{-\frac{y}{x}}+\ln y=2$
6. $\begin{cases} x=\ln(t^5+3) \\ y=\frac{t^2}{t^5+3} \end{cases}$

Варіант № 11

1. $y=tg^5 3x-e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $y=\arcsin(x^3+5)$
3. $y=x^3\ln(x^2+5)+\frac{1}{\cos^4\frac{x}{5}}$
4. $y=(x^5+5)^{\cos 2x}$
5. $x^3y^2+\sin y+(x-y)^2=0$
6. $\begin{cases} x=te^t \\ y=te^{-t} \end{cases}$

Варіант № 12

1. $y=\ln\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$
2. $y=x^3e^{-\frac{1}{x^2}}+e^{\sin^3 x}$
3. $y=\frac{2x^3-1}{\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}$
4. $y=\sin^2 x^{x^2-1}$
5. $(y^2+x)^3+(x^2-3y)^3=0$
6. $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\cos 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$

Варіант № 13

1. $y = 5^{ctg^2(5x+3)}$
2. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}e^{-3x}$
3. $y = \left(\frac{4}{3x^2} - \frac{1}{9x}\right)\sqrt{4x+x^2}$
4. $y = (\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{2}} = 5$
6. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6arctgt \end{cases}$

Варіант № 14

1. $y = \sqrt{3}arctg^2 x + \frac{1}{x} + tg\sqrt{x}$
2. $y = x^2 e^{-x^2} - 5^{1-\ln^2 3x}$
3. $y = 3arctg \ln^3 \frac{1}{x}$
4. $y = \ln(\cos(7x))^{\sin\frac{x}{2}}$
5. $y - \cos^3 y + \sin^3 x = 0$
6. $\begin{cases} x = \arccos(t^3+1) \\ y = \arcsin 5t \end{cases}$

Варіант № 15

1. $y = 2^{\arcsin 2x} + \left(1 - \arccos\frac{x}{3}\right)^3$
2. $y = e^x \cos 3x + \sqrt[7]{2x + \sqrt[5]{x^3}}$
3. $y = \frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$
4. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$
5. $\ln y + \frac{x^2}{y} = 3$
6. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t + t\cos t \end{cases}$

Варіант № 16

1. $y = 5\sin^2\frac{x}{3}ctgx$
2. $y = \ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$
3. $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\frac{x}{2}$
4. $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}$
5. $xe^y + y^2 = 10$
6. $\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases}$

Варіант № 17

1. $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x\sin x})^3}$
2. $y = 3\cos^2\frac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}$
3. $y = 5arctg(x^2 \ln x)$
4. $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$
5. $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$
6. $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{tgt} \end{cases}$

Варіант № 18

1. $y=\frac{1}{3}\arcsin(\cos^3\frac{x}{5})$
2. $y=5^{tg\frac{x}{2}}\ln x$
3. $y=\frac{e^{5x}}{1+e^{3x}}$
4. $y=\ln^3 x^{x^7}$
5. $\sin(x+\sqrt{y})=y^2+1$
6. $\begin{cases} x=t\sin t \\ y=\dfrac{t}{\cos t} \end{cases}$

Варіант № 19

1. $y=2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}+3tg^3\frac{x}{5}$
2. $y=e^{5x}\cos^2 3x+7$
3. $y=arctg^4(x\ln x)$
4. $y=(1+2^x)^{x^2+2}$
5. $2^{x+y}=x+10y$
6. $\begin{cases} x=3e^{5t} \\ y=5\ln t \end{cases}$

Варіант № 20

1. $y=5\sin 3^{\ln x}+2$
2. $y=(2x+3)e^{5x}+\frac{\ln x}{x}$
3. $y=(\ln 2)^{\sin x}-ctg^3\frac{x}{2}$
4. $y=(3+\ln^2 x)^{\sin^5 x}$
5. $4x-y^4=\cos(xy^2)$
6. $\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант № 21

1. $y=2^{\sqrt{\cos(3x+5)}}+\ln ctg\sqrt[3]{x}$
2. $y=\frac{x^5}{\cos^2 7x}-(\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$
3. $y=\sqrt[5]{\sin 10xe^{arctg\frac{1}{x}}}$
4. $y=(x^7+x)^{\sqrt{\ln x}}$
5. $x+tgy=2^x+y^2$
6. $\begin{cases} x=\sqrt{1+3t} \\ y=t^2\sin t \end{cases}$

Варіант № 22

1. $y=\frac{x}{\ln^2 x}+x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}$
2. $y=(arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$
3. $y=3\arcsin^4 3x+\sqrt[3]{\ln^2 tg\frac{x}{7}}$
4. $y=(2x+\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\arccos y+xy^2=1$
6. $\begin{cases} x=\ln^3 t \\ y=t^2+ctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант № 23

1. $y=\sqrt[5]{1+xe^{\sqrt{x}}}$
2. $y=(2x+3)^5+5^{2x+3}$
3. $y=\frac{2^x}{tg^3 x}+1$
4. $y=(e^{5x}+\cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$
5. $arctg\frac{x}{y}+\sin(xy)=y^3$
6. $\begin{cases} x=te^t \\ y=\arcsin t+\sin t \end{cases}$

Варіант № 24

1. $y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x$
2. $y = \cos 3^{x^2} + \left(x^3 + \dfrac{3}{x}\right)^5$
3. $y = tg\dfrac{x^2}{x^3+1} + 5$
4. $y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$
5. $arctgy = 2x + \sqrt{y}$
6. $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$

Варіант № 25

1. $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$
2. $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos\dfrac{x}{5}}$
3. $y = \dfrac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$
4. $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $arctgy = x \sin y$
6. $\begin{cases} x = 2t \sin t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

Варіант № 26

1. $y = x^2 (\arcsin 3x)^3$
2. $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$
3. $y = \dfrac{arctg 3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$
4. $y = (tg 7x - x^7)^{\ln^5 x}$
5. $y^3 + xy = 1$
6. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

Варіант № 27

1. $y = \sqrt[6]{x + (\sin \ln x)^3}$
2. $y = \dfrac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1 + x^2)$
3. $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$
4. $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$
5. $\sqrt{x - y^3} = 2\sin^3 x$
6. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1 \\ y = 2tgt - 3 \end{cases}$

Варіант № 28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$
2. $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \dfrac{3x}{\ln x}$
3. $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$
4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$
5. $tg(xy0 = 3\cos(x\sqrt{y})$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$

Варіант № 29

1. $y = (2 + \ln 5)^{tgx} + \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$
2. $y = \sqrt[3]{arctg\dfrac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$
3. $y = xe^{7x} + (x + e^{7x})^3$
4. $y = \left(1 + \sin\dfrac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$
5. $(x^2 + y^2) + \cos\dfrac{x+y}{x} = 5$
6. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3 \ln t \end{cases}$

Варіант № 30

1. $y = x\log_5(x^3+1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$
2. $y = \dfrac{x}{(x^3+1)^2} - arctg^3 \sin 7x$
3. $y = 2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$
4. $y = (3+\cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$
5. $\sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$
6. $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t \\ y = t\cos 3t \end{cases}$

Завдання 13 . Знайти похідні другого порядку від заданих функцій..

Варіант № 1

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$
2. $e^{xy} = xy$
3. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

Варіант № 2

1 $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2 $\ln(x+y) - arctg\dfrac{x}{y} = 0$

3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

Варіант № 3

1. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $(x+y)^2 + (x-3y)^2 = 0$
3. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

Варіант № 4

1. $y = xe^{-x}$
2. $\ln\dfrac{x}{y} - x + 2y = 0$
3. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Варіант № 5

1. $y = (1+x^2)arctgx$
2. $y\sin(x+y) - x = 0$
3. $\begin{cases} x = 2t^3 + t \\ y = \ln t \end{cases}$

Варіант № 6

1. $y = x^3 e^{-x^2}$
2. $arcctg(x+y) - x - 2y = 0$
3. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$

Варіант № 7

1. $y = \sqrt{1+x^2}\arcsin x$
2. $tg(x+2y) - 3x + y = 0$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Варіант № 8

1. $y = x^2 \ln x$
2. $y = x + arctgy$
3. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

Варіант № 9

1. $y = xe^{-\frac{1}{x}}$
2. $\sin(2x+y)+2x-3y=0$
3. $\begin{cases} x = 2\ln ctgt \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

Варіант № 10

1. $y = x\sin^2 x$
2. $e^{xy} - (x+3y) = 0$
3. $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

Варіант № 11

1. $y = e^{-x}\sin x$
2. $tg(x+y) - xy = 0$
3. $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = \dfrac{t^3}{3-t} \end{cases}$

Варіант № 12

1. $y = \arcsin^2 x$
2. $e^x - e^y = y - x$
3. $\begin{cases} x = \varphi(1-\sin\varphi) \\ y = \varphi\cos\varphi \end{cases}$

Варіант № 13

1. $y = (5x^2-1)\sin 2x$
2. $x + y = e^{x-y}$
3. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

Варіант № 14

1. $y = \ln(1-2x\cos\alpha + x^2)$
2. $x^2 + y^2 - xy = 0$
3. $\begin{cases} x = a\cos t\sqrt{2\cos 2t} \\ y = a\sin t\sqrt{2\cos 2t} \end{cases}$

Варіант № 15

1. $y = x^2 e^{2x}$
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
3. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$

Варіант № 16

1. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$
2. $x\ln y - y\ln x = 1$
3. $\begin{cases} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t \end{cases}$

Варіант № 17

1. $y = \dfrac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x\arcsin x$
2. $y + \sqrt{x} = \arcsin y$
3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\ln t \end{cases}$

Варіант № 18

1. $y = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x + 3)$
2. $x - y^2 = \cos(xy)$
3. $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Варіант № 19

1. $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$
2. $xe^y + x^2 = 10$
3. $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$

Варіант № 20

1. $y = e^{-x}\cos 3x$
2. $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0$
3. $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Варіант № 21

1. $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$
2. $xy = ctgy$
3. $\begin{cases} x = 1 + e^{3\varphi} \\ y = 3\varphi + e^{-3\varphi} \end{cases}$

Варіант № 22

1. $f(x) = arctg \ln x$
2. $x^2 - 2xy^2 + 1 = 0$
3. $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = \dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$

Варіант № 23

1. $f(x) = (3x^2 + 4)e^x$
2. $y = \cos(x + y)$
3. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{1-t} \end{cases}$

Варіант № 24

1. $f(x) = \ln(2x^2 + 7)$
2. $y^3 + x^3 - 3xy = 0$
3. $\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = arctg(2t+1) \end{cases}$

Варіант № 25

1. $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$
2. $e^y + xy = e$
3. $\begin{cases} x = 2\ln ctg\dfrac{t}{2} - 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

Варіант № 26

1. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$
2. $y^2 - 2xy + 3 = 0$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Варіант № 27

1. $y = (arctgx)^2$
2. $y = x + \ln y$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3} \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t} \end{cases}$

Варіант № 28

1. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$
2. $\cos(xy) = x$
3. $\begin{cases} x = 4tg^2\dfrac{t}{2} \\ y = 2\sin t + 3\cos t \end{cases}$

Варіант № 29

1. $f(x) = e^{2x}\sin 5x$
2. $y^3 - 3y + 3x = 1$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Варіант № 30

1. $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$
2. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ y = \dfrac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \end{cases}$

Завдання 14. Знайти границі функцій за правилом Лопіталя.

Варіант № 1

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sin(x-2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$

Варіант № 2

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$

Варіант № 3

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

Варіант № 4

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

Варіант № 5

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+2\ln x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[\sin(2x-1)tg\pi x]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

Варіант № 6

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi}{2}x}$

Варіант № 7

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi}{4}x\right)^{tg\frac{\pi}{2}x}$

Варіант № 8

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x^2)}{x^2\sin x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{1}{4-x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

Варіант № 9

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{3}{\ln(2x-2)}}$

Варіант № 10

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

Варіант № 11

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\ln(1+x^2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$

Варіант № 12

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)ctgx$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

Варіант № 13

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}tgx}{1+\cos 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)ctg\,4x$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{3x}}$

Варіант № 14

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x-x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$

Варіант № 15

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

Варіант № 16

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\,\dfrac{x}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{1}{\ln(e^{3x}-1)}}$

Варіант № 17

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{5}{1+2\ln x}}$

Варіант № 18

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{\ln\frac{x}{2}}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$

Варіант № 19

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x-\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(xctg\,3x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

Варіант № 20

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{1-\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-e^{5x})ctgx\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\sin\frac{x-1}{2}}$

Варіант № 21

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)ctgx\right]$

3. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x+e)\right]^{\frac{1}{x}}$

Варіант № 22

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}{1-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

Варіант № 23

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{3x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{tgx}}$

Варіант № 24

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1+0}[\ln x\ln(x-1)]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$

Варіант № 25

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}-arctgx\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

Варіант № 26

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+xtgx}-2}{x^2-x}$

2. $\lim\limits_{x\to +0}(x^2\ln x)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{x^2-1}}$

Варіант № 27

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln^2 x}$

Варіант № 28

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(tg\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

Варіант № 29

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 4x}{\ln\sin 5x}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(\pi-2arctgx)\ln x\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{1+5\ln x}}$

Варіант № 30

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\ln(1+2x)}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right)$

3. . $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-4}}$

Завдання 15. Знайти найбільше и найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

1. $y=\ln(x^2-2x+2), \quad [0;3]$
2. $y=\dfrac{3x}{x^2+1}, \quad [0;5]$
3. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}, \quad [-0,5;0]$
4. $y=(x+2)e^{1-x}, \quad [-2;2]$
5. $y=\ln(x^2-2x+4), \quad [-1;1,5]$
6. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}, \quad [-1;1]$
7. $y=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^3, \quad [1;2]$
8. $y=\sqrt{x-x^3}, \quad [-2;2]$
9. $y=4-e^{-x^2}, \quad [0;1]$
10. $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}, \quad [1;2]$
11. $y=xe^x, \quad [-2;0]$
12. $y=(x-2)e^x, \quad [-2;1]$
13. $y=(x-1)e^{-x}, \quad [0;3]$
14. $y=\dfrac{x}{9-x^2}, \quad [-2;2]$
15. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}, \quad [e^{-1};e]$
16. $y=e^{4x-x^2}, \quad [1;3]$
17. $y=\dfrac{x^5-8}{x^4}, \quad [-3;-1]$
18. $y=\dfrac{(e^{2x}+1)}{e^x}, \quad [-1;2]$
19. $y=x\ln x, \quad [e^{-2};1]$
20. $y=x^3e^{x+1}, \quad [-4;0]$
21. $y=x^2-2x+2(x-1)^{-1}, \quad [-1;3]$
22. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}, \quad \left[-\dfrac{4}{5};3\right]$
23. $y=\dfrac{\ln x}{x}, \quad [1;4]$
24. $y=3x^4-16x^3+2, \quad [-3;1]$
25. $y=x^5-5x^4+5x^3+1, \quad [-1;2]$
26. $y=(3-x)e^{-x}, \quad [0;5]$
27. $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x, \quad \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$
28. $y=108x-x^4, \quad [-1;4]$
29. $y=0,25x^4-6x^3+7, \quad [16;20]$
30. $y=e^{6x-x^2}, \quad [-3;3]$

Завдання 16. Провести повне дослідження функцій і побудувати їх графік.

Варіант № 1

1. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$
2. $y=\dfrac{e^x}{x}$
3. $y=x^2\sqrt{x+1}$

Варіант № 2

1. $y=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$
2. $y=\ln(2x^2+3)$
3. $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

Варіант № 3

1. $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$
2. $y=x^3e^{-x}$
3. $y=\sqrt[3]{x^2-x^3}$

Варіант № 4

1. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$
2. $y=x+2arcctgx$
3. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

Варіант № 5

1. $y=\frac{x^2}{x^2-1}$

2. $y=x-\ln(x+1)$

3. $y=\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$

Варіант № 6

1. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$

2. $y=x-2arctgx$

3. $y=(x^2-1)\sqrt{x+1}$

Варіант № 7

1. $y=\frac{x^3+16}{x}$

2. $y=\frac{1}{e^{2x}-1}$

3. $y=x\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Варіант № 8

1. $y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$

2. $y=x^2\ln x$

3. $y=-\frac{8+x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

Варіант № 9

1. $y=\frac{x^3-1}{4x^2}$

2. $y=\ln\frac{x+1}{x+2}$

3. $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$

Варіант № 10

1. $y=\frac{2}{x^2+x+1}$

2. $y=x-2\ln x$

3. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

Варіант № 11

1. $y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$

2. $y=x+\ln(x^2-4)$

3. $y=\frac{3x^2-10}{\sqrt{4x^2-1}}$

Варіант № 12

1. $y=x+\frac{x}{3x-1}$

2. $y=(x^2+1)e^x$

3. $y=x\sqrt{(x+1)^3}$

Варіант № 13

1. $y=\frac{x^3-8}{2x^2}$

2. $y=x^2e^{-x}$

3. $y=\sqrt[3]{(x+3)x^2}$

Варіант №14

1. $y=\frac{4x}{4+x^2}$

2. $y=\ln\frac{x}{x-1}$

3. $y=\frac{2x^2-9}{\sqrt{x^2-1}}$

Варіант № 15

1. $y=\sqrt[3]{1-x^2}$

2. $y=xe^{-x^2}$

3. $y=\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$

Варіант №16

1. $y=\frac{1}{2x+x^2}$

2. $y=(x+4)e^{2x}$

3. $y=\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$

Варіант № 17

1. $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$

2. $y=\ln(x^2+2x+2)$

3. $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{4x^2-3}}$

Варіант № 18

1. $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$

2. $y=x\,arctgx$

3. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2}$

Варіант № 19

1. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$

2. $y=\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$

3. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

Варіант № 20

1. $y=3\sqrt[3]{x^2}-x$

2. $y=e^{\frac{1}{2-x}}$

3. $y=\dfrac{x^2-3}{\sqrt{3x^2-2}}$

Варіант № 21

1. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

2. $y=x+e^{-x}$

3. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

Варіант № 22

1. $y=3\sqrt[3]{x^2}+2x$

2. $y=x\ln x$

3. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2-x}$

Варіант № 23

1. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

2. $y=\ln\cos x$

3. $y=\dfrac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$

Варіант № 24

1. $y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$

2. $y=\ln(1+e^{-x})$

3. $y=x^3\sqrt[3]{(x-1)^2}$

Варіант № 25

1. $y=\dfrac{8}{x^2(x-4)}$

2. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

3. $y=\sqrt[3]{x^2(3-x)}$

Варіант № 26

1. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$

2. $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$

3. $y=\dfrac{x^2+16}{\sqrt{9x^2-8}}$

Варіант № 27

1. $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

2. $y=(x^2+4)e^{-x^2}$

3. $y=\sqrt[3]{x^3-4x}$

Варіант № 28

1. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

2. $y=x\ln^2 x$

3. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$

Варіант № 29

1. $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$

2. $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$

3. $y=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$

Варіант № 30

1. $y=\dfrac{x^4+3}{x}$

2. $y=\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$

3. $y=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$

Завдання 17

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції.
2 Знайти частинні похідні другого порядку даних функції.
3 Обчислити значення частинних похідних першого порядку даної функції в даній точці.
4 Знайти повний диференціал першого порядку даної функції.

Варіант 1

1 $z=\dfrac{1}{(x-1)(y-2)}$.

2 а) $z=\cos\dfrac{y}{x}\sin\dfrac{x}{y}$;

б) $z=\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})$.

3 $z=e^{tg(x^3-2y)}$, $M(1;\dfrac{1}{2})$.

4 $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$.

Варіант 2

1 $z=\ln(4+4x-y^2)$.

2 а) $u=r^2\cos^2\varphi$;

б) $z=\dfrac{2x+3y}{x-y}$.

3 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$, $M(1;0)$.

4 $z=\sqrt{x^2-3y^3}$.

Варіант 3

1 $z=\dfrac{1}{x-2}-\ln(xy)$.

2 а) $z=\dfrac{xy-1}{x^2}$;

б) $u=arctg(x-t^2)$.

3 $z=xtg(y+1)$, $M(1;-1)$.

4 $z=\dfrac{1}{3}\sin^3(3x-2y)$.

Варіант 4

1 $z=\dfrac{3xy^2}{y^2-2x+4}$.

2 а) $z=\sin\dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^2}$;

б) $z=\ln(x^2+2y)$.

3 $z=\sqrt{xy+\dfrac{x}{y}}$, $M(2;1)$.

4 $z=\sin 3x-\cos^3 y$.

Варіант 5

1 $z = \ln x + \sqrt{y}$.

2 а) $z = (5x^3y^2 - e^{\sin 2x})^7$;

б) $s = arctg\,\dfrac{\varphi t}{\varphi + t}$.

3 $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(3;4)$.

4 $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Варіант 6

1 $z = \ln(2y + x)$.

2 а) $u = \dfrac{2x - t}{x + 2t}$;

б) $z = \arcsin(x\sqrt{y})$.

3 $z = e^{\sqrt{3y + \sin 2x}}$, $M(\dfrac{\pi}{4};0)$.

4 $z = \ln(1 + x\cos\sqrt{3}y)$.

Варіант 7

1 $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

2 а) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x + y}{xy}\right)^2}$;

б) $s = 3\cos(e^t - r)$.

3 $z = (1 + \ln\sin(xy^2))^3$, $M(\dfrac{\pi}{2};1)$.

4 $z = \sqrt[3]{2y^2 - x^3}$.

Варіант 8

1 $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(25 - x^2 - y^2)}$.

2 а) $z = y\sqrt{x} + \dfrac{x}{\sqrt{y}}$;

б) $s = \ln(\sin 3t - te^{t\varphi})$.

3 $z = \arcsin\dfrac{x + y}{xy}$, $M(3;3)$.

4 $u = r^2\cos 2\varphi$.

Варіант 9

1 $z = \sqrt{1 - x^2 + \sqrt{1 - y^2}}$.

2 а) $z = \sin^3(2x + \dfrac{y}{x})$;

б) $s = e^{x\sqrt{t}}$.

3 $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, $M(1;0)$.

4 $z = tg^8(2x - 3y^2)$.

Варіант 10

1 $z = \arccos\dfrac{x^2 + y^2}{9}$.

2 а) $z = xe^{-xy}$;

б) $u = \ln\sin(x - 2t)$.

3 $z = \dfrac{x^2y}{x - y}$, $M(2;1)$.

4 $z = \sqrt{\sin(xy^2)}$.

Варіант 11

1 $z = \ln(x^2 + y)$.

2 а) $z = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}$;

б) $s = e^{-\frac{3t}{x^2}}$.

3 $z = \dfrac{\cos(x - 2y)}{\cos(x + 2y)}$, $M(\dfrac{\pi}{4};\pi)$.

4 $p = \arcsin\dfrac{\varphi}{t}$.

Варіант 12

1 $z = \dfrac{\pi}{3}y^2\sqrt{x^2 - y^2}$.

2 а) $z = \sin^2 y + \cos^3 x$;

б) $u = e^{\frac{x}{t}}\ln t$.

3 $z = \ln\left(y + \dfrac{x}{2y}\right)$, $M(2;1)$.

4 $z = arctg(\sqrt{x + 2y})$.

Варіант 13

1 $z=\sqrt{3x}-\dfrac{5}{\sqrt{y}}$.

2 а) $z=xytg(\sin 2x+e^{y})$;

б) $z=\sqrt{arctg(x^3y^2)}$.

3 $u=\dfrac{t\cos\varphi-\varphi\cos t}{1+\sin t+\sin\varphi}$, $M(0;0)$.

4 $z=\ln(e^{x^3}-\sin^3 y)$.

Варіант 14

1 $z=\ln(\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-1)$.

2 а) $z=\sin^2(x+y)+\sin 3x-\cos^3 2y$;

б) $z=\dfrac{x^3y}{x-y}$.

3 $z=e^{\sin x-2y^3}$, $M(\pi;0)$.

4 $z=tg(xy-\ln x)$.

Варіант 15

1 $z=y+\arcsin(x+2)$.

2 а) $z=(1+x\sin 2y)^2$;

б) $s=\dfrac{\cos(x\sqrt{t})}{1-xt}$.

3 $z=\sqrt[3]{x+y^2}$, $M(4;2)$.

4 $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$.

Варіант 16

1 $z=\sqrt{x^2+y^2-4}+\ln(9-x^2-y^2)$.

2 а) $z=\dfrac{x}{y}e^{xy}$;

б) $s=\dfrac{t}{\varphi}+t\cos 3\varphi$.

3 $z=arctg\dfrac{x}{y}$, $M(2;1)$.

4 $v=\ln(x+\sqrt{x^2+t^2})$.

Варіант 17

1 $z=\sqrt{x-2y}$.

2 а) $z=arctg\sqrt{xy}$;

б) $z=t^3\ln\cos(\varphi t)$.

3 $z=\sin^2(3x+2y)$, $M(2;-3)$.

4 $z=\dfrac{4x-5y}{xy^2}$.

Варіант 18

1 $z=\dfrac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

2 а) $z=e^{\sin\sqrt{x}}(y^3+1)$; б) $z=\dfrac{\ln(2+x)}{x^2y}$.

3 $u(t;\varphi)=arctg(t-3\varphi)$, $M(3;1)$.

4 $z=2\cos^2(y-\dfrac{x}{2})$.

Варіант 19

1 $z=\ln(y-1)+\sqrt{x}$.

2 а) $z=e^{\frac{x}{y^2}}$; б) $z=\ln\sin(x-2y)$.

3 $z=2tg(x-\dfrac{y}{2})$, $M(\pi;0)$.

4 $z=x^2\cos\dfrac{y}{x}-3^{xy^2}$.

Варіант 20

1 $z=x^2arccos\dfrac{2y}{x}$.

2 а) $z=\dfrac{xy}{x^2-y}$; б) $z=\sqrt{x}\sin\dfrac{x}{y}$.

3 $z=e^{\sqrt{\cos 2x+3y}}$, $M(\dfrac{\pi}{4};0)$.

4 $r=tg(2^{\varphi}+t\arcsin\varphi)$.

Варіант 21

1 $z = \dfrac{3xy^2}{x^2 - 2y + 4}$.

2 а) $z = \dfrac{x}{3y - 2x}$;   б) $z = e^{\frac{x}{2}} \sin(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2})$.

3 $z = \ln(x + \dfrac{y}{2x})$, $M(1;2)$.

4 $u = \arccos(3t - \sqrt[3]{\varphi})$.

Варіант 22

1 $z = \sqrt{4 + 8y - x^2}$.

2 а) $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$;

б) $z = \sin^2(x + y^2) - \cos^3 y$.

3 $z = tg(x^2 y - \ln x)$, $M(1;\pi)$.

4 $r = ctg \ln(1 + \dfrac{\varphi}{t})$.

Варіант 23

1 $z = \dfrac{x^3 y}{(x+3)(y-1)}$.

2 а) $z = \ln(y\sqrt{x} + e^y)$;

б) $z = y \arcsin(y^3 + 5x^2)$.

3 $z = \dfrac{x \cos y - y \cos x}{1 + \sin x + \sin y}$, $M(1;2)$.

4 $z = \sqrt[3]{\cos(x^2 y^3)}$.

Варіант 24

1 $z = x + \sqrt{x^2 - y^2}$.

2 а) $z = \sqrt{y} \cos \dfrac{x}{y}$;

б) $z = \dfrac{x^3}{x - y^2} + arctg \dfrac{2}{x}$.

3 $z = x^2 y + y e^{\frac{x}{y}}$, $M(0;1)$.

4 $z = \sqrt{x - 5y^3}$.

Варіант 25

1 $z = \dfrac{4}{2x + y}$.

2 а) $z = e^{\frac{x^2}{y}} + x^2 y^3$;   б) $z = \dfrac{x^2 y}{x - \cos y}$.

3 $z = \sqrt{\dfrac{y}{x} + xy}$, $M(1;2)$.

4 $r = \cos 5\varphi - \sin^4 t$.

Варіант 26

1 $z = \sqrt{x - 1} + \sqrt{y}$.

2 а) $z = \ln(y - 2x^3)$;   б) $z = \dfrac{xy^2 - 2}{y^3}$.

3 $z = e^{tg(y^3 - 2x)}$, $M(\dfrac{1}{2};1)$.

4 $z = \arcsin \dfrac{2x + y}{3 - xy^2}$.

Варіант 27

1 $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + \ln(y - x^2)$.

2 а) $z = (5x^2 y^5 - e^x)^3$;   б) $z = tg \dfrac{xy}{x + y}$.

3 $z = (\ln \sin(x^2 y) + 1)^5$, $M(1;\dfrac{\pi}{2})$.

4 $v = \sqrt[7]{2t^3 \varphi - \sqrt{\varphi}}$.

Варіант 28

1 $z = \sqrt{xy} + \ln(x^2 - y)$.

2 а) $z = \log_3(\cos \dfrac{x}{2} - y e^{xy})$;

б) $u = t\sqrt{\varphi} - \dfrac{\varphi^2}{t}$.

3 $z = y tg(x + 1)$, $M(-1;1)$.

4 $z = \dfrac{1}{4} \cos^4(5x - 3y^2)$.

Варіант 29

1 $z=\sqrt{4-2x^2-4y^2}$.

2 а) $z=x\sin^3(5y-3x)$;

б) $z=\dfrac{x}{x^2-y^3+3}$.

3 $z=\ln\cos\dfrac{x}{y}, M(1;\dfrac{\pi}{4})$.

4 $z=(5x^3y^2+1)^3$.

Варіант 30

1 $z=\sqrt{\dfrac{y}{x+1}}$.

2 а) $z=\ln\cos\dfrac{y}{\sqrt{x}}$;

б) $u=e^{\frac{x}{2}}(x+y^2)$.

3 $z=tg\dfrac{x^2}{y}+y$, $M(0;1)$.

4 $r=\varphi(\ln t-\ln\varphi)$.

Завдання 18

Варіант 1

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z=\frac{\sqrt{xy}}{y-x}+\frac{1}{x+2}.$$

2 Продиференціювати складну функцію $z=e^{xy}\ln(x+y)$, де $x=t^3$, $y=1-t^3$.

3 Показати, що функція $s=\ln(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{t})$ задовольняє рівнянню $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}+\dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}=\dfrac{1}{x^2}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2-y^2-4x+2y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x-y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в замкненій області $D\{y^2\le x\le 2\}$.

Варіант 2

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\ln(9-3x-y^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=arctg\dfrac{x+1}{y}$, де $y=e^{(1+x)^2}$.

3 Показати, що функція $z=2\cos^2(x-\dfrac{t}{2})$ задовольняє рівнянню $2\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial t}=0$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^3+y^3-3x-3y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=\dfrac{xy}{2}-\dfrac{x^2y}{6}-\dfrac{xy^2}{8}$ в замкненій області $D\{x\ge 0, y\le 0, \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\le 1\}$.

Варіант 3

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = y^2 + \sqrt{xz} + \dfrac{1}{\cos z}$, де $x = t + v$, $y = \dfrac{t}{v}$, $z = tv$.

3 Показати, що функція $u = arctg(2x - t)$ задовольняє рівнянню $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$.

Варіант 4

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{\pi}{3} y^2 \sqrt{x^2 - y^2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = u^2 \ln v$, де $u = \dfrac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$.

3 Показати, що функція $u = xe^{-\frac{y}{x}}$ задовольняє рівнянню

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

4 Знайти екстремуми функції $z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^3 - 4x^2 - y^2 - 2xy$ в замкненій області $D\{y \ge x^2, y \le 4\}$.

Варіант 5

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \arcsin\dfrac{y}{x}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \dfrac{y}{x}$, де $x = e^t$, $y = \ln t$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $u = te^{-\varphi t}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2 + 18$ в замкненій області $D\{x^2 + y^2 \le 9\}$.

Варіант 6

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \sqrt{x+y}\ln(y^2 - x^2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = arctg\,\dfrac{y}{x}$, де $y = x^2$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \ln\sin(x - 2t)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le x + y \le 1\}$.

Варіант 7

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції
$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 4)(25 - x^2 - y^2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = u + v^2$, де $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \dfrac{2x - t}{x + 2t}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x - 3$ в замкненій області $D\{y \le x, y \ge 0, x \le 1\}$.

Варіант 8

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{x + y}{2x - y}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \dfrac{x}{y}$, де $x = e^{3t}$, $y = \ln(1 + t^3)$.

3 Перевірити, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = \ln tg\,\dfrac{x}{y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 - 7x^2 + xy - y^2 + 9x + 3y + 12$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + y^2 - x$ в замкненій області $D\{\dfrac{y^2}{3} + x^2 \le 1\}$.

Варіант 9

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln\dfrac{x + 1}{y - 2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, де $y = \sqrt{1 + x^2}$.

3 Перевірити, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = \ln(x^2 - 2y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = (x^2 - 4)y - 12x$ в замкненій області D, обмеженій лівою віткою параболи $y = (x-1)^2$ і прямими $y = x - 1$ і $y = 4$.

Варіант 10

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \frac{\sqrt{2x - y^2}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = tg(3x + 2y^2 - z)$, де $y = \frac{1}{x}$, $z = \sqrt{x}$.

3 Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в замкненій області $D\{x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 3\}$.

Варіант 11

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} - 1)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, де $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

3 Показати, що функція $z = arctg\frac{y}{x}$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в області D, яка являє собою трикутник, обмежений прямими $x = 1$, $y = 0$ і $x + y = 6$.

Варіант 12

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \sqrt{x(2-y)} + \ln(4 - x^2) - 3y$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2 \ln y$, де $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

3 Знайти $\partial^2 z$, якщо $z = x\sin^2(3y - 5)$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 + 6xy$ в замкненій області D, яка являє собою прямокутник з вершинами у точках $A(-3;-3)$, $B(-3;2)$, $C(1;2)$, $D(1;-3)$.

Варіант 13

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, де $x=3t^2$, $y=\sqrt{t^2+1}$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, якщо $z=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^3+y^3-3xy$ в замкненій області $D\{0\le x\le 2,-1\le y\le 2\}$.

Варіант 14

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=e^{2x^2-2y^2}$, де $x=\cos t$, $y=\sin t$.

3 Знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$, якщо $z=\ln(x^2+y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=1+3x^2+2y^3$ в замкненій області $D\{x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$.

Варіант 15

1 Знайти і зобразити область визначення функції $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}+\arccos(1-x)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$, де $x=2\cos t$, $y=2\sin t$,

$z=3$.

3 Знайти мішану похідну другого порядку функції $z=\ln(e^x+e^y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в замкненій області $D\{x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3\}$.

Варіант 16

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\ln\sqrt{x-y^2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\ln\sin\dfrac{x}{\sqrt{y}}$, де $x=2t^3$, $y=3t-1$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $z=e^{xy}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x, y) = 2x^2 - 2y^2$ в замкненій області $D\{x^2 + y^2 \le 9\}$.

Варіант 17

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 16)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = u^v$, де $u = \sin x$, $v = 2x$.

3 Обчислити значення диференціала другого порядку функції $z = arctg\,\frac{y}{x}$ у точці $M(1;2)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = xy(1 - x - y)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ в замкненій області $D\{0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4\}$.

Варіант 18

1 Знайти і зобразити область визначення функції

$$z = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2}} + \sqrt{x^2 + y^2 - 9}.$$

2 Продиференціювати складну функцію $z = arctg\,\frac{x}{y}$, де $x = u \sin v$, $y = u \cos v$.

3 Показати, що функція $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 3xy$ в замкненій області $D\{x^2 + y^2 \le 2\}$.

Варіант 19

1 Знайти і зобразити область визначення функції $z = \frac{1}{x - 2} - \ln(xy)$.

2 Продиференціювати складну функцію $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$, де $y = x^2$.

3 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \sin(2x + y)$.

4 Знайти екстремуми функції $f(x, y) = x^3 + y^3 + 9xy$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 + x^2 + 2y^2$ в замкненій області $D\{x \ge 0, y \le 0, x - y \le 1\}$.

Варіант 20

1 Знайти і зобразити область визначення функції $z = y + \arcsin(x+2)$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = e^{z-2y}$, де $y = x^2$, $z = \sin x$.

3 Показати, що функція $z = x^3 - 3xy^2$ задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^2 - 2xy + 2y^3 - y^4$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 - x - 7y$ в замкненій області $D\{x + y \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$.

Варіант 21

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(x+2) + \sqrt{y-1}$.

2 Продиференціювати складну функцію $u = v^2\omega^3 + \frac{\omega^2}{v^2}$, де $v = \cos y$, $\omega = \sin x$.

3 Показати, що функція $z = 2\cos^2(y - \frac{x}{2})$ задовольняє рівнянню $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

4 Знайти екстремуми функції $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 - x + 24y - 6x^2 + y^2$ в замкненій області $D\{x \le 1, x \le y^2\}$.

Варіант 22

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \frac{1}{(x-1)(y-2)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2y - xy^2$, де $x = p\cos\varphi$, $y = p\sin\varphi$.

3 Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, якщо $z = x^2\ln(3x + y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ в замкненій області $D\{y \ge x, y \le 1, x \ge 0\}$.

Варіант 23

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \frac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \frac{y}{x}$, де $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$.

3 Перевірити, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, якщо $z = ye^x + yx^2$.

4 Знайти екстремуми функції $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + 8y^2 - 6xy + 5$ в замкненій області $D(x \le 0, y \ge 0, x - y + 1 \ge 0\}$.

Варіант 24

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(y^2 - 2x + 4)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = xe^y$, де $y = \sin 5x$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $z = x\cos^2(3y^2 - 5)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$ в замкненій області $D(y \le 1, x \le 1, x + y \ge 1\}$.

Варіант 25

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{9 - y^2}.$$

2 Продиференціювати складну функцію $z = \frac{x^2}{y}$, де $x = u - 2v$, $y = 2u + v$.

3 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \sin(x + \cos y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = (x - y)^2 + (y - 1)^3$ в замкненій області $D(y \ge x, y \le 2, x \ge 1\}$.

Варіант 26

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \frac{1}{\sqrt{y - 2x}} + \frac{1}{\sqrt{y + 2x}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = e^{u-2v}$, де $u = \sin x$, $v = x^3 + y^2$.

3 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $z = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ в замкненій області $D(x - y \ge 0, x \ge 0, 1 \le y \le 2\}$.

Варіант 27

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, де $x = 2\sin t$, $y = \cos 2t$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = y^{\ln x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 2xy - 4x - 2y$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$ в замкненій області $D(-1 \le x \le 0, 0 \le y \le 2\}$.

Варіант 28

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{y}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = xe^y$, де $y = 2\cos^3 x$.

3 Показати, що функція $z = \dfrac{xy}{x-y}$ задовольняє рівнянню

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2}{x-y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 4y + 4$ в замкненій області $D(x + y \ge 0, y \le 1, x \le 0\}$.

Варіант 29

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \ln(x+y) + \dfrac{1}{y-2}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = x^2 y + 3$, де $x = uv^2$, $y = u^2 + v$.

3 Показати, що функція $z = xe^y + ye^x$ задовольняє рівнянню

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} + y\frac{d^3 z}{\partial x^2 \partial y}.$$

4 Знайти екстремуми функції $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ в замкненій області $D(-1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$.

Варіант 30

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \dfrac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x-2}}}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z = uv + tg\dfrac{u}{v}$, де $u = x + 2y$, $v = x - y$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = (x-1)^2 - 2y^2$ в замкненій області $D(y \le x, y \ge 0, x \le 1\}$.

Варіант 31

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{(x^2-1)(y^2-9)}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=u^2e^{uv}$, де $u=\sqrt{xy}$, $v=x+y$.

3 Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$, якщо $z=\sin^2(x+3y)$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2+y^2-2x-4\sqrt{xy}-2y+8$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^3+y^2-3x-3$ в замкненій області $D(y\le x, y\ge 0, x\le 1\}$.

Варіант 32

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\frac{1}{3x-y}+\sqrt{xy-4}$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\sqrt{\frac{x+1}{y+1}}$, де $x=-\cos t$, $y=\cos t$.

3 Знайти диференціал другого порядку функції $u=x\ln\frac{y}{x}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2x^2$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=(x-1)^2+2y^2$ в замкненій області D, яка являє собою трикутник ABC з вершинами в точках $A(1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;1)$.

Варіант 33

1 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z=\sqrt{y(x-2)}+\ln(x+1)$.

2 Продиференціювати складну функцію $z=\frac{x}{y^2}$, де $x=2u-v$, $y=3v+u$.

3 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\frac{x^2}{1-2y}$.

4 Знайти екстремуми функції $z=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$.

5 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2y$ в замкненій області $D(x^2+y^2\le 1\}$.

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1 Розв’язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$$

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв’язання.

1) Розв’яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо методом трикутників визначники: Δ- головний визначник системи; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ - додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого, другого й третього стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 2\cdot 5\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 4\cdot(-3) = -4;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot(-6) + 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 1\cdot(-3) = -4;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 2 = -4;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 5\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot(-6) - 3\cdot 4\cdot(-3) = -4,$$

тоді $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1,\ \ x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1,\ \ x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

2) Розв’яжемо систему рівнянь за допомогою оберненої матриці. Для цього запишемо систему в матричній формі: $A \cdot X = B$,

де $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(A – матриця коефіцієнтів системи, X– стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів).

Розв’язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot$, де A^{-1}– матриця, що є оберненою до матриці системи. Оскільки матриця А – квадратна та визначник матриці $\Delta = \det A = -4 \neq 0$, отже, обернена матриця A^{-1} існує та знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} - мінор, що відповідає елементу a_{ij} матриці А.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елементу матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3,$$

тоді

$$X = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ -6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічна відповідь була одержана при розв'язанні системи методом Крамера: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Виконаємо перевірку одержаного результату, підставляючи значення змінних у вихідну систему:
$$\begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2; \\ 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1; \\ 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2 = 2; \\ 1 = 1; \\ 3 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Завдання 2 Задана піраміда, координатами вершин якої є $A_1(1; -2; 1)$, $A_2(0; 0; 4)$, $A_3(1; 4; 2)$, $A_4(2; 0; 0)$. Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди (рис. 4.1).

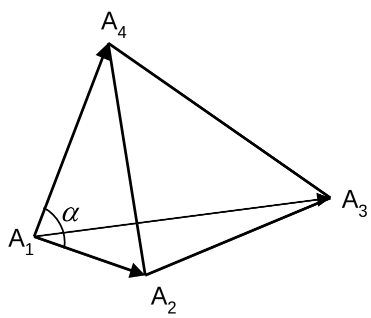

Рис. 1.1

Розв'язання.

1 Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{(x_{A_2} - x_{A_1}; y_{A_2} - y_{A_1}; z_{A_2} - z_{A_1})} = \overrightarrow{(0-1; 0-(-2); 4-1)} = \overrightarrow{(-1; 2; 3)}.$$

Тоді довжина ребра A_1A_2 піраміди буде дорівнювати модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ (одиниць).}$$

2 Позначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 через α, тоді

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overrightarrow{(1;\, 2;\, -1)}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (од).}$$

Скалярний добуток $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = 0$.

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, тобто ребра A_1A_2 і A_1A_4 перпендикулярні.

3 Координати векторів

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overrightarrow{(1;\, 2;\, -1)},\quad \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}.$$

Обчислюємо проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ за формулою:

$$np_{\overrightarrow{A_1A_4}}\, \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

4 Оскільки векторним добутком векторів є вектор, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах у якості сторін, тоді площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 1.2), тобто S = $\frac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$. Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}$.

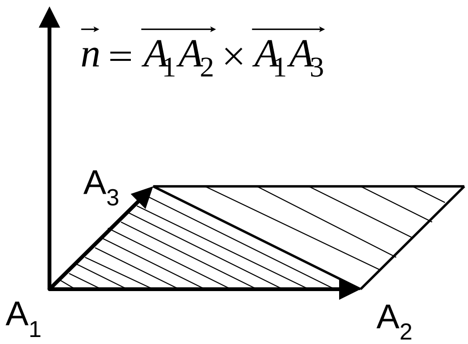

Рис. 1.2

Координати вектора $\vec{n}$ визначимо, користуючись теоремою Лапласа про розвинення визначника за елементами першого рядку.

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k},$$

тобто $\vec{n}(-16; 1; -6)$; $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{256 + 1 + 36} = \sqrt{293}$.

Таким чином, $S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.од.).

5 Мішаним добутком векторів є число, що дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах, а об'єм тетраедра дорівнює шостої частини об'єму цього паралелепіпеда (рис. 1.3).

Таким чином, об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right|.$$

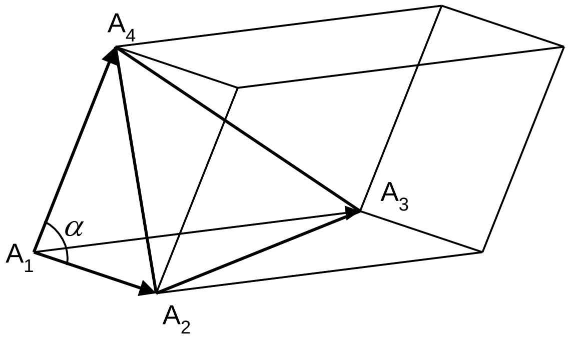

Рис. 1.3

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8;$$

$$\left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right| = |-8| = 8 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot 8 = 1\frac{1}{3} \text{ (куб.од.).}$$

Завдання 3 Задано координати вершин трикутника *ABC:* *A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C* (рис.1.4).

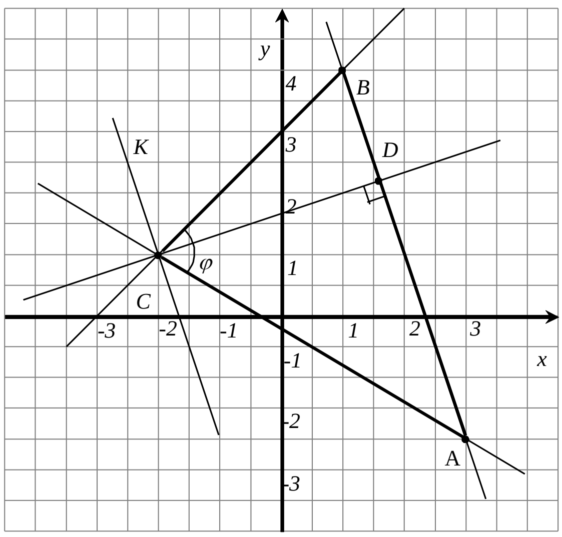

Рис. 1.4

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ маємо: $\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y-(-2)}{4-(-2)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{6}$; $\Rightarrow$ $-3(x-3)=y+2 \Rightarrow 3x+y-7=0$ – загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ – рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом, $k_{AB}=-3$.

2 Складаємо рівняння прямої $CD \perp AB$.

Із умови перпендикулярності прямих $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$ $\Rightarrow$ $k_{CD}=\dfrac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$: $y-y_0=k(x-x_0)$.

Для $C(-2;1)$ маємо: $y-1=\dfrac{1}{3}(x+2)$, т.е. $x-3y+5=0$ – загальне рівняння прямої CD.

3 Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $Ax+By+C=0$ – рівняння прямої AB.

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ (од.).}$$

4 Координати точки M – центра ваги трикутника обчислюємо як середнє арифметичне координат його вершин:

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

$$x_M=\frac{3+1-2}{3}=\frac{2}{3},\quad y_M=\frac{-2+4+1}{3}=1,\ \text{тобто } M\left(\frac{2}{3};1\right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$, $k_{AC}=\dfrac{1+2}{-2-3}=-\dfrac{3}{5}$.

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна прямій AC, також дорівнює $-\dfrac{3}{5}$.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{3}{5}$, буде мати вигляд: $y-1=-\dfrac{3}{5}(x-\dfrac{2}{3})$;

$3x+5y-7=0$ – загальне рівняння шуканої прямої.

5 Для обчислення площі трикутника знайдемо довжину сторони AB:

$$AB=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}.$$

Тоді $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\dfrac{6\sqrt{10}}{5}=12$ (кв. од.).

6 Тангенс кута φ (кута між прямими AC і BC) знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \;\Rightarrow\; tg\varphi = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\cdot\frac{3}{5}} = 4, \quad \varphi = arctg4 \approx 76^\circ.$$

Завдання 4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$, A_4 $(-1;2;1)$. Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;
2) скласти рівняння площини $A_1A_2A_3$;
3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2A_3$;
4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Для $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$ маємо: $\dfrac{x-3}{4-3} = \dfrac{y-(-4)}{1-(-4)} = \dfrac{z-2}{-3-2} \Rightarrow \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z-2}{-5}$.

2 Рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо координати заданих точок у вищенаведене рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишемо розвинення визначника за елементами першого рядку:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$25(x-3) + 3(y+4) + 8(z-2) = 0;$$

$25x + 3y + 8z - 79 = 0$ – рівняння площини $A_1A_2A_3$.

3 Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0;y_0;z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s}(m;n;p)$, має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(25;3;8)$ є напрямним вектором висоти, що опущена із вершини A_4 на площину A_1A_2 A_3, тобто $\vec{s}(m;n;\ p)=(25;3;8)$, тоді рівняння висоти має вигляд:

$$\frac{x+1}{25}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{8}\ .$$

4 Знаходимо кут між ребром A_1A_4 і гранню A_1A_2 A_3 за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+\ p^2}}\ .$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}(25;3;8)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}(m;n;\ p)=(-4;6;-1)$, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|25\cdot(-4)+3\cdot6+8\cdot(-1)|}{\sqrt{625+9+64}\cdot\sqrt{16+36+1}}=\frac{90}{\sqrt{698}\cdot\sqrt{53}}=0{,}47..$$

Завдання 5 Знайти границі функцій.

$$1\ \lim_{x\to1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\qquad 2\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$3\ \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\qquad 4\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

Розв'язання.

1 Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, матимемо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\lim_{x\to1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1/2}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

2 Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x \to \infty$:

$$1/x \to 0, \quad 1/x^3 \to 0, \quad 3/x^2 \to 0, \quad 1/x^4 \to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

3 При $x \to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty - \infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \left(\frac{o}{o}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{3}{3} = -1.$$

4 При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^∞. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \left(1^\infty\right) = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3x-4}{3x+2} - 1\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}} =$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty} -\frac{2(x+1)}{3x+2}} = e^{-2/3}.$$

Завдання 6 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо} \quad 1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y = -1$, $y = x^2 - 2$, *і* $y = 1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ *і* $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо

$$\left.\begin{aligned} &y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1\\ &\lim_{x\to-1+0} y=\lim_{x\to-1+0}\left(x^2-2\right)=-1\\ &\lim_{x\to-1-0} y=\lim_{x\to-1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{aligned}\right\}\text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} &y(1)=1^2-2=1-2=-1\\ &\lim_{x\to1+0} y=\lim_{x\to1+0}1=1\\ &\lim_{x\to1-0} y=\lim_{x\to1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{aligned}\right\}\text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки $x=1$. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ — пряма $y=1$(рис. 1.5).

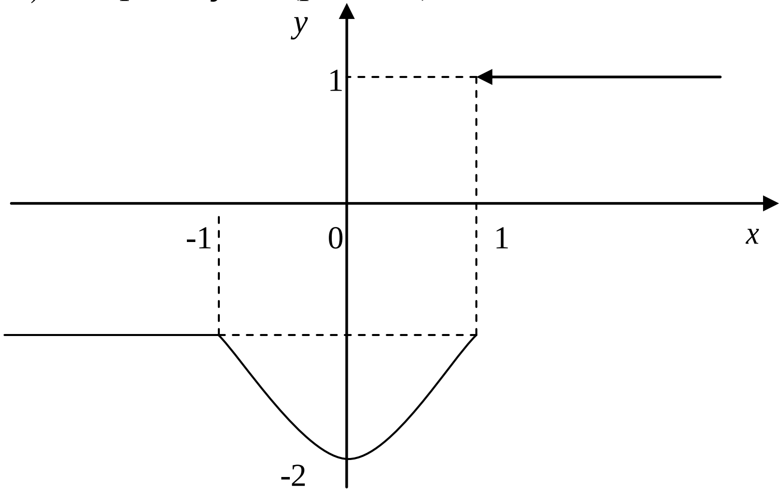

Рис. 1.5

Завдання 7 Знайти похідні першого порядку функцій.

1 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ 3 $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ 5 $y\sin(x+y)-x=0$

2 $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$ 4 $y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}}$ 6 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні функцій 1-3.

$$1\ \ y'=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{2-x^2}+\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}\right)'+\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2-x^2}.$$

2 $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \dfrac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1+x^2)' = \dfrac{2x}{3(1+x^2)}.$

3 $y' = \dfrac{(x)' \cdot \sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \dfrac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

4 Для знаходження похідної степенево-показникової функції використовуємо логарифмічне диференціювання.

$$y = (2x-3)^{\sqrt{\cos x}},$$

$$\ln y = \sqrt{\cos x} \cdot \ln(2x-3),$$

диференціюємо ліву та праву частини одержаної рівності по x:

$$\frac{y'}{y} = \left(\sqrt{\cos x}\right)' \cdot \ln(2x-3) + \sqrt{\cos x} \cdot \left(\ln(2x-3)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x) \cdot \ln(2x-3) + \sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}.$$

Тоді похідна функції має вигляд:

$$y' = ((2x-3)^{\sqrt{\cos x}}) \cdot \left(\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3} - \frac{\sin x \cdot \ln(2x-3)}{2\sqrt{\cos x}}\right).$$

5 Для знаходження похідної неявної функції $y\sin(x+y) - x = 0$ диференціюємо обидві частини рівності по x:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) \cdot (1+y') - 1 = 0.$$

Розкриваючи дужки та групуючи доданки відносно y', одержуємо:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) + y \cdot y'\cos(x+y) = 1,$$

$$y' \cdot (\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)) = 1 - y\cos(x+y),$$

$$y' = \frac{1 - y\cos(x+y)}{\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)}.$$

6 Для знаходження похідної параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

будемо використовувати формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знаходимо похідні по t:

$x'_t = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t,$

$y'_t = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$

Тоді шукана похідна буде дорівнювати: $y'_x = \dfrac{t\sin t}{t\cos t} = tgt.$

Завдання 8 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.
Розв'язання.
Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:
1 Знайти область визначення функції
2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції
3 Дослідити функцію на парність і непарність.
4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5 Знайти інтервали знакосталості функції.
6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.
7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.
8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.
9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Використовуючи запропоновану схему, маємо:
1 Знаходимо $3-x^2\neq 0,\quad x\neq\pm\sqrt{3}$;

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;
$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x\geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;
$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 1.6).

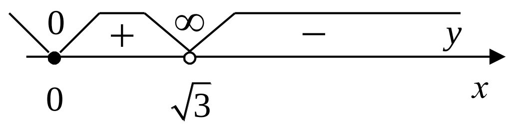

Рис. 1.6

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty.$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \left(\infty-\infty\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y = -x$ – похила асимптота.

7 $$y' = \left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)' = \frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2} = \frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2};$$

$y'(x) = 0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right) = 0$, звідки $x = 0$, $x = \pm 3$;

$y'(x) = \infty$, якщо $3 - x^2 = 0$, звідки $x = \pm\sqrt{3}$,

$y_{\max} = y(3) = \dfrac{27}{3-9} = -\dfrac{9}{2}$ (рис. 1.7).

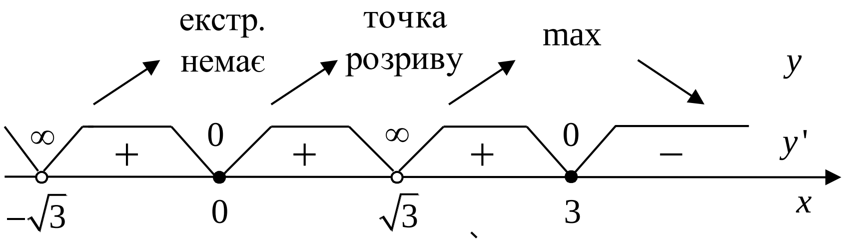

Рис. 1.7

8 $$y'' = \left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4} = \frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3} = \frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x) = 0$, якщо $x = 0$;

$y''(x) = \infty$ якщо $x = \pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину} = y(0) = 0$ (рис. 1.8).

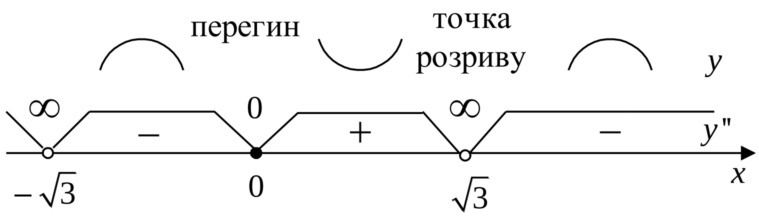

Рис. 1.8

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x = 0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0; +\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $(-\sqrt{3}; 0]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 1.9).

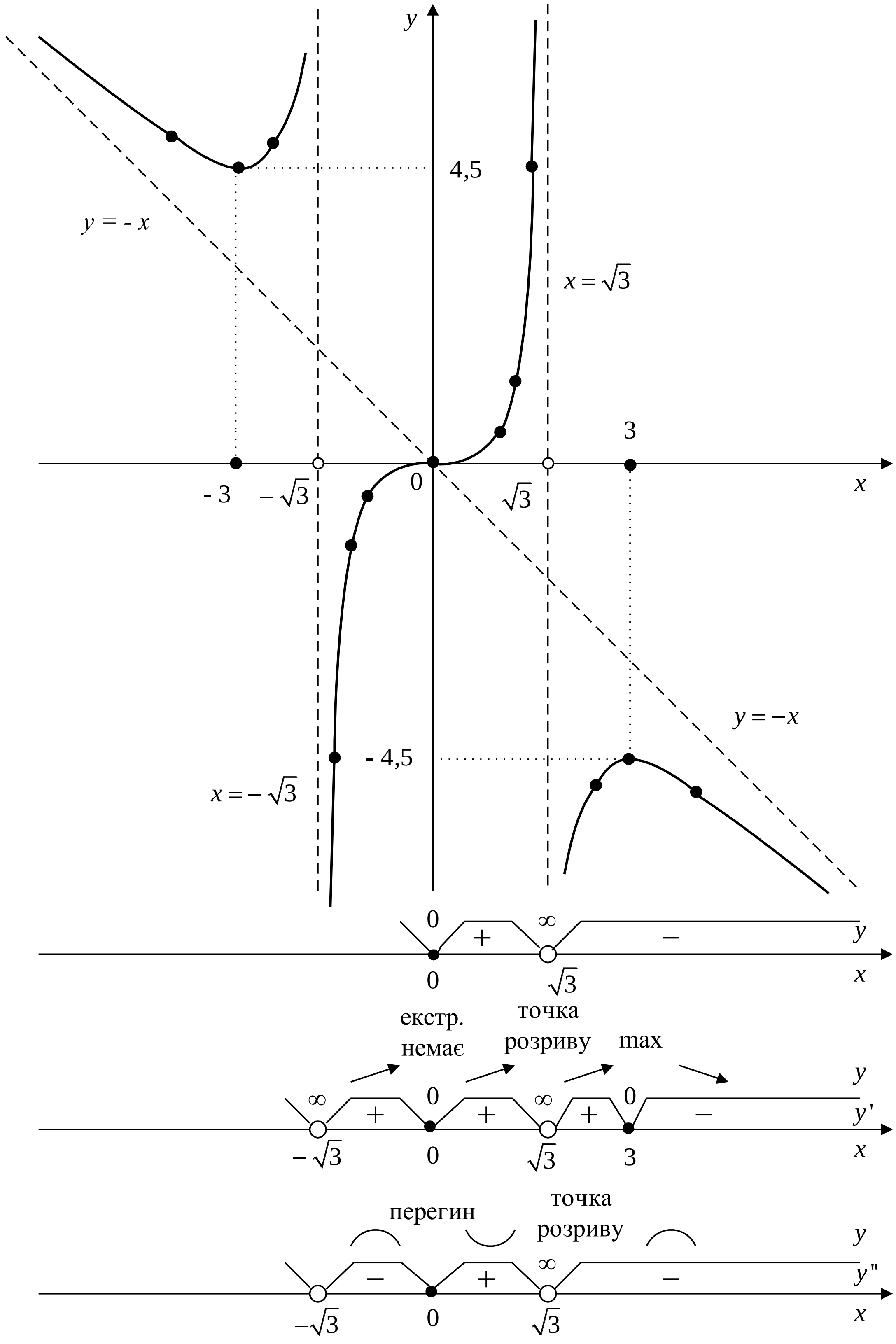

Рис. 1.9

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №2

Змістовий модуль 3. Невизначений та визначений інтеграл.

Тема 24. Первісна функції. Невизначений інтеграл.

Тема 25. Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування.

Тема 26. Основні методи інтегрування. Інтегрування підстановкою та частинами.

Тема 27. Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання.

Тема 28. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 29. Інтегрування тригонометричних виразів.

Тема 30. Інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 31. Означення та властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця.

Тема 32. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

Тема 33. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоскої фігури.

Тема 34. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання.

Тема 35. Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв'язання задач фізики.

Тема 36. Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності.

Змістовий модуль 4. Диференціальні рівняння.

Тема 37. Диференціальні рівняння першого порядку. Теорема існування і єдиності розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші.

Тема 38. Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних.

Тема 39. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Тема 40. Рівняння другого порядку. Три типа рівнянь, що припускають зниження порядку.

Тема 41. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. Властивості частинних розв'язків.

Тема 42. Визначник Вронського, його властивості. Теорема про загальний розв'язок.

Тема 43. Поняття комплексного числа. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Тема 44. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Теорема про загальний розв'язок.

Тема 45. Метод варіації довільних сталих.

Тема 46. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Тема 47. Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 19 Знайти невизначені інтеграли.

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3
1 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x dx}}{1+x^2} dx$	1 $\int \frac{dx}{(4x^2+1)\operatorname{arctg} 2x}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$
2 $\int x\cos\frac{x}{3}dx$	2 $\int xe^{3x}dx$	2 $\int x\ln(x^2+1)dx$
3 $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}dx$	3 $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)}dx$	3 $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}dx$
4 $\int \cos^2 x\sin^2 x dx$	4 $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$	4 $\int \cos x\sin 5x dx.$
5 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$	5 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$
Варіант № 4	**Варіант № 5**	**Варіант № 6**
1 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$	1 $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\cdot x^2 dx$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$
2 $\int x^2\sin 5x dx$	2 $\int (2x-1)e^{2x}dx$	2 $\int x\arccos 3x dx$
3 $\int \frac{(6x+3)dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}$	3 $\int \frac{(1-x)dx}{x^3+4x^2+4x}$	3 $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)}dx$
4 $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$	4 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$	4 $\int \cos 2x\cos^2 x dx$
5 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$	5 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx$	5 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$
Варіант № 7	**Варіант № 8**	**Варіант № 9**
1 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$	*1* $\int e^x\cos e^x dx$
2 $\int x^2\sin\frac{x}{3}dx$	2 $\int x\ln(x-5)dx$	2 $\int x\arcsin 2x dx$
3 $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$	3 $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8}dx$	3 $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-2x}$
4 $\int \cos 2x\cos\frac{x}{3}dx$	4 $\int \sin^4 x\cos^5 x dx$	4 $\int \frac{dx}{3\cos x-2\sin x}$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$	5 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$

Варіант № 10	Варіант № 11	Варіант № 12
1 $\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$	1 $\int\frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x}dx$	1 $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$
2 $\int x^2\operatorname{arctg} x dx$	2 $\int\frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$	2 $\int\left(x^2-1\right)10^{-2x}dx$
3 $\int\frac{x^2+5x+1}{x^2+4}dx$	3 $\int\frac{x^6+1}{x^3-5x^2+4x}dx$	3 $\int\frac{4x dx}{2x^2-3x+1}$
4 $\int x\sin^2 7x dx$	4 $\int\frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$	4 $\int\frac{dx}{2+3\cos^2 x}$
5 $\int\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-7x+13}}dx$	5 $\int\frac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$	5 $\int\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$
Варіант № 13	**Варіант № 14**	**Варіант № 15**
1 $\int\frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$	1 $\int\frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$	1 $\int\frac{dx}{\left(\operatorname{tg} x+1\right)\cos^2 x}$
2 $\int\ln(x^2+9)dx$	2 $\int\frac{x dx}{\cos^2 3x}$	2 $\int x^3\arcsin\frac{1}{x}dx$
3 $\int\frac{\left(x+2\right)dx}{x^3+2x^2-3x}$	3 $\int\frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)}dx$	3 $\int\frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)}dx$
4 $\int\frac{dx}{\cos x\sin^5 x}$	4 $\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$	4 $\int\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$
5 $\int\frac{3x dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int\frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$	5 $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}$
Варіант № 16	**Варіант № 17**	**Варіант № 18**
1 $\int\frac{8^{3x}dx}{3+8^{6x}}$	1 $\int\frac{dx}{x\sqrt{2-3\ln x}}$	1 $\int\sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$
2 $\int x^2\operatorname{arctg} 3x dx$	2 $\int\left(x^2-3x\right)\sin 5x dx$	2 $\int\left(x^2-1\right)\ln x dx$
3 $\int\frac{x^2+4x+1}{2x+2}dx$	3 $\int\frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)}dx$	3 $\int\frac{x^5+1}{16-x^4}dx$
4 $\int\cos\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$	4 $\int\sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{2}dx$	4 $\int\frac{dx}{3+\operatorname{tg} x}$
5 $\int\frac{x dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$	5 $\int\frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$

Варіант № 19	**Варіант № 20**	**Варіант № 21**
1 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$	1 $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$	1 $\int \sin^7 7x\cos 7xdx$
2 $\int xe^{2x+3}dx$	2 $\int x\,\mathrm{arctg}(2x+3)\,dx$	2 $\int (2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$
3 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$	3 $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+2x-3)}dx$	3 $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$
4 $\int \frac{\sin xdx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$	4 $\int \frac{dx}{2+\cos x-2\sin x}$	4 $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}$
5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$	5 $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-7x+3}}$	5 $\int \frac{\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x}+3)^3}dx$
Варіант № 22	**Варіант № 23**	**Варіант № 24**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4x^3-6}}$	1 $\int (e^{2x}+5)^3 e^{2x}dx$	1 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$
2 $\int x\cdot 5^{2x}dx$	2 $\int \ln(2x+1)\,dx$	2 $\int \mathrm{arctg}\frac{x-1}{x}dx$
3 $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$	3 $\int \frac{x^5-2x}{x^3-1}dx$	3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$
4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x-5\sin^2 x+2}$	4 $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$	4 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$
5 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$	5 $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}-4}dx$
Варіант № 25	**Варіант № 26**	**Варіант № 27**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-11x^6}}$	1 $\int x^2e^{5-3x^3}dx$	1 $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$
2 $\int \frac{\ln\mathrm{ctg}\,x}{\cos^2 x}dx$	2 $\int x\sin 3x\cos 3xdx$	2 $\int x\ln(1+x^3)\,dx$
3 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$	3 $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$	3 $\int \frac{x^2+24}{x(x^2-7x+12)}dx$
4 $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$	4 $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}dx$	4 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$
5 $\int \frac{7x-1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})^2}$	5 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$

Варіант № 28	Варіант № 29	Варіант № 30
1 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{5-3e^{4x}}}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(2-3\operatorname{ctg} x\right)}$	1 $\int \frac{\cos^2 x \sin x}{1+\cos^2 x}dx$
2 $\int \left(x+1\right)\operatorname{arctg} x dx$	2 $\int x^2 \sin\frac{x}{2}dx$	2 $\int \frac{\ln\left(2x+1\right)}{x^2}dx$
3 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3dx}{x^3-4x^2+3x}$
4 $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$	4 $\int \sin^3 2x\cos^2 2x dx$	4 $\int \frac{dx}{5\cos x-3\sin x+2}$
5 $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$	5 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{x(2+\sqrt[3]{x})}dx$

Завдання 20 Розв’язати задачі.

Варіант 1

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = x^3, y = 0, x = 2.$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, що розташована в середині круга $r \le 1$.

Варіант 2

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t-t^3 \end{cases} ; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}.$$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = \sqrt{2}\cdot e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 3

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2-2x+3$ і $y = 3x-1$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2-3) \end{cases} ; \; 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 4

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 2 - x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

Варіант 5

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \sin \varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = \frac{3}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Варіант 6

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = (x+2)^2, y = 4 - x$ і $y = 0.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r = 2a(1 + \cos\varphi).$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t), \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt{3}.$

Варіант 7

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2, \; y = x - 1.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4}, \end{cases}$ $0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

Варіант 8

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x}, y = 0, x = -\frac{1}{2}, x = 1.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2), \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Варіант 9

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = \cos 3\varphi.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = x + 4$ і $x = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = a\ln(a^2 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{a}{2}.$

Варіант 10

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2, \ xy = 8, \ x = 6$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = (x+4)^3$ і $x = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Варіант 11

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ і $y = 0.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $x + y - 2 = 0$ і $x^2 + y^2 = 4.$

3 Знайти довжину дуги лінії $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ між точками перетину її з віссю абсцис.

Варіант 12

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = tgx, \ y = ctgx, \ x = \frac{\pi}{6}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} \ 0 \le t \le 3\pi$.

Варіант 13

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$ і $y = \frac{5}{x}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

3 Знайти довжину спіралі $r = 5\varphi$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 10\pi$.

Варіант 14

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ і $y - 3 = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy = 4, \ y = 1, \ y = 2, \ x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \ 0 \le t \le 1.$

Варіант 15

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r = 4\cos 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0, x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le 1$.

Варіант 16

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \cos 2\varphi$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \dfrac{x^3}{3}$, $-2 \le x \le 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(\cos 2t + \ln tgt), \\ y = a\sin 2t, \end{cases}$ $\dfrac{\pi}{8} \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 17

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 1 - 2\sin\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

3 Знайти довжину дуги кривої $y^2 = (4 - x)^3$, що відрізана прямою $x = 0, (x \ge 0)$.

Варіант 18

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = x + 2$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $x = -1$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^4\dfrac{\varphi}{4}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Варіант 19

1 Знайти площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$ і полярною віссю.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \le x \le 2$.

Варіант 20

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $r = 2 - \cos\varphi$ і $r = \cos\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = x$, $y = \frac{x}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

Варіант 21

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена лініями $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$ і $y = 4$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.

Варіант 22

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, $0 \le x \le 3$.

Варіант 23

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sin 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, $1 \le x \le 2$.

Варіант 24

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 3\sin 3\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^3 = 4x^2$ і $y = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Варіант 25

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$ і $x = 4$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Варіант 26

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$ і $x = 0$.

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

2 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1+\cos\varphi)$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 2$.

Варіант 27

1 Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1-\cos\varphi)$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y^2 = 4x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Варіант 28

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і $y = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{2}{\pi}\ln\cos\frac{\pi x}{2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Варіант 29

1 Знайти площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1-\cos t) \end{cases}$ і віссю абсцис.

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 4 = 0$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{a\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Варіант 30

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = -x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$.

Завдання 21 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

Варіант 1

1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$.
2. $(x+2y)dx - xdy = 0$, $y(1)=1$.
3. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^x$.

Варіант 2

1. $y' = \dfrac{2x}{3y^2+1}$.
2. $3xy' = x+4y$, $y(1)=1$.
3. $y' = e^{2x} - ye^x$.

Варіант 3

1. $y' = y \cdot tgx$.
2. $xy^2y' = x^3 + y^3$, $y(1)=3$.
3. $xy' - 3y = x+1$.

Варіант 4

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$.
2. $xy' - x\cos^2\dfrac{y}{x} = y$.
3. $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.

Варіант 5

1. $y^2y' + x^2 = 1$.
2. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.
3. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.

Варіант 6

1. $y' = y^2\cos 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
2. $xy' = 2y$.
3. $x^2y' + xy + 1 = 0$.

Варіант 7

1. $y' = \dfrac{4y}{x^2-4}$.
2. $yy' + x = 0$.
3. $xydx + (x+1)dy = 0$.

Варіант 8

1. $y' = \dfrac{x^2-2}{1-y^3}$.
2. $3xy' = x+4y$.
3. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$.

Варіант 9

1. $y' = e^{x+y}$.
2. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$.
3. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \mathrm{tg}^2\,x$.

Варіант 10

1. $y \cdot y' + x = 5$.
2. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$.
3. $xy' + y = \ln x + 1$.

Варіант 11

1. $(x^2+1)y' - 4xy = 0$.
2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.
3. $x(1+x^2)dy = (y + yx^2 - x^2)dx$,

   $y|_{x=1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. $yy' = (1-3x^2)y^{-2}$.
2. $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$.
3. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$.

Варіант 13

1. $y'\,\mathrm{tg}x - y = 1$.
2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
3. $y' - 2xe^{x}y^{3} - y = 0$, $y\big|_{x=0} = 1$.

Варіант 14

1. $yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$.
2. $(x - y\cos\dfrac{y}{x})dx + x\cos\dfrac{y}{x}\cdot dy = 0$.
3. $(y' - y)x = e^{x}$, $y\big|_{x=1} = e$.

Варіант 15

1. $x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.
2. $(y + 2\sqrt{xy})dx - xdy = 0$, $y(e) = e$.
3. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Варіант 16

1. $(1+x^2)dy + ydx = 0$.
2. $xdy - ydx = x\sin^2\dfrac{y}{x}\cdot dx$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Варіант 17

1. $y' = \mathrm{tg}x\cdot\mathrm{tg}y$.
2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
3. $tds - 2sdt = t^2\ln t\cdot dt$.

Варіант 18

1. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.
2. $y = x(y' + \sqrt[x]{e^{y}})$.
3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x$, $y(\pi) = \dfrac{4}{3}$.

Варіант 19

1. $(x+1)y' = xy$.
2. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.
3. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2 - x} = 1$, $y(2) = -2\ln 2$.

Варіант 20

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.
2. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.
3. $y'\,\mathrm{ctg}\,x - y = 2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}\,x$.

Варіант 21

1. $ydx + ctg\,xdy = 0$.
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$.
3. $(\varphi^2 - 1)r' - \varphi r = \varphi^3 - \varphi$.

Варіант 22

1. $(x+1)^3dy - (y-2)^2dx = 0$.
2. $xy' - 3y = \dfrac{x^2}{y}$.
3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$, $y\big|_{x=1} = 1$.

Варіант 23

1. $xydx = -(x+1)dy$.
2. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0$, $y\big|_{x=0} = 2$.
3. $xy' - 2y = x + 1$.

Варіант 24

1. $y' - y\sin 2x = 0$.
2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 1$.

Варіант 25

1. $yy' = \dfrac{2+x}{y}$.
2. $y' = \dfrac{x+2y}{x}$.
3. $y' + (1+\dfrac{1}{x^2})y = e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 26

1. $S\,\mathrm{tg}\,t \cdot dt + dS = 0$.
2. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$, $\quad y(-1) = 2$.
3. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

Варіант 27

1. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$.
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$.
3. $y' + \dfrac{3y}{x} = 7x^3 + 2x^2$.

Варіант 28

1. $y' = y^2\cos 2x, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1,$
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$.
3. $y' + \dfrac{y}{x+1} = 3x - 1$.

Варіант 29

1. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$.
2. $(x+2y)dx - xdy = 0$.
3. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

Варіант 30

1. $(x+1)y' + xy = 0$.
2. $tx' + t\cos\dfrac{x}{t} - x + t = 0$.
3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$.

Завдання 22 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Варіант 2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$
3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

Варіант 3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

Варіант 4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

Варіант 5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Варіант 6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Варіант 7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

Варіант 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

Варіант 9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = \frac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

Варіант 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

Варіант 11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 4.$
2. $y'' + 25y = 0.$
3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Варіант 12

1. $y'' - y' - 12y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 10.$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

Варіант 13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 20.$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

Варіант 14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 4.$
2. $y'' + y' = 0.$
3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

Варіант 15

1. $y'' - y' - 20y = 0,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 8.$
2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

Варіант 16

1. $9y'' - 6y' + y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$
2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
3. $y'' - 10y' = 0.$

Варіант 17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

Варіант 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$
2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Варіант 19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0,\ y(0) - 2,\ y'(0) = 3.$
2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$
3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

Варіант 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 8.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' = 0,\ y(0)2,\ y'(0)2.$
2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$
3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

Варіант 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$
2. $81y'' - 18y' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Варіант 23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1.$
2. $100y'' - 20y' + y = 0.$
3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Варіант 24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -\frac{1}{4}.$
2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$
3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

Варіант 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1.$
2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$
3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

Варіант 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' + 49y = 0.$
3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

Варіант 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$
2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$
3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

Варіант 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5.$
2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$
3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

Варіант 29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 3.$
2. $y'' + 81y = 0.$
3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

Варіант 30

1. $5y'' - 6y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$
3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 23 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1,\ y(0) = \dfrac{29}{32},\ y'(0) = -\dfrac{3}{8}.$
2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$

Варіант 2

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14,\ y(0) = 3,\ y''(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$

Варіант 3

1. $y'' + 4y = 8x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$
2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

Варіант 4

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x},\ y(0) = \dfrac{1}{5},\ y'(0) = \dfrac{8}{5}.$
2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

Варіант 5

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x},\ y(0) = -\dfrac{1}{3},\ y'(0) = 0.$
2. $y'' + 3y' = 9x.$

Варіант 6

1. $y'' + 4y = 4\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' = x^2 - x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$

Варіант 8

1. $y'' + y = x^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$

Варіант 9

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 6{,}5.$
2. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx.$

Варіант 10

1. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$

Варіант 11

1. $y'' + y = \cos 2x,\ y(0) = -\dfrac{1}{3},\ y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$

Варіант 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$
2. $y'' + y = 4\sin x.$

Варіант 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$
2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$

Варіант 14

1. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

Варіант 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x,\ y(0) = -\dfrac{1}{10},\ y'(0) = -\dfrac{1}{9}.$
2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

Варіант 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$
2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

Варіант 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$

Варіант 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 19

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y'(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 20

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}.$
2. $y'' + 4y' = 8e^{4x}.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' = 6e^{3x}.$

Варіант 22

1. $4y'' + y' - 3y = 3x^2 + x.$
2. $y'' - y = 8e^x, y(0) = 2, y'(0) = 4.$

Варіант 23

1. $y'' + 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1.$
2. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$

Варіант 24

1. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$

Варіант 25

1. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - 8y' + 16y = 32x.$

Варіант 26

1. $y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + y' = 49 - 2x^2.$

Варіант 27

1. $y'' - 3y' = 6 - 3x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' + y = \sin x - \cos x.$

Варіант 28

1. $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 3.$

Варіант 29

1. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$

Варіант 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + y' = 49 - 24x^3.$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1 Знайти невизначені інтеграли

1 $\int \frac{dx}{(5 + 7tgx)\cos^2 x}.$

2 $\int x^2 \sin 3x dx.$

3 $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx.$

4 $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$

5 $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

Розв'язання.

1 Оскільки похідна виразу *5+7tgx* дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7*, то змінною інтегрування тут можна вважати вираз *5+7tgx*, і, таким чином, знайти інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5+7tgx}\cdot\frac{7}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{l} u = 5+7tgx \\ u_x{}' = \dfrac{7}{\cos^2 x} \end{array} \right| = = \frac{1}{7}\int \frac{1}{u}\cdot u_x{}' dx = \frac{1}{7}\ln|5+7tgx| + C.$$

2 Покладемо $u=x^2$, $dv=\sin 3x dx$. Тоді

$$du=2xdx,\ \ v=\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=\cos 3x dx$, тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C.$$

$$= \frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x + 6x\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C\ .$$

3 Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & \ \ 3=-3A, \\ x=3 & \ \ 6=12B, \\ x=1 & \ \ 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}.$ Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= -\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = -\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

4 Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, тому $\kappa=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left|\begin{matrix} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt\end{matrix}\right| = \int\frac{t^6}{t^8-t^3}12t^{11}dt =$$

$$=12\int\frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)} = 12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1} =$$

$$= \left|\begin{array}{rl} -\begin{array}{r} t^{14} \\ t^{14}-t^9 \\ \hline t^9 \end{array} & \begin{array}{|l} t^5-1 \\ \hline t^9+t^4 \end{array} \\ -\begin{array}{r} t^9-t^4 \\ \hline t^4 \end{array} & \end{array}\right| =$$

$$=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt = 12\left(\int t^9dt+\int t^4dt+\frac{1}{5}\int\frac{5t^4dt}{t^5-1}\right) =$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C = \frac{6}{5}\left(t^{10}+2t^5+2\ln\left|t^5-1\right|\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

5 Маємо інтеграл вигляду $\int\sin^m x\cos^n x dx$, де $m=5, n=4$.

Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int\cos^4 x\sin^5 x dx = \int\cos^4 x\cdot\sin^4 x\cdot\sin x dx = \int\cos^4 x(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right| = -\int t^4(1-t^2)^2 dt = -\int t^4(1-2t^2+t^4)dt =$$

$$= -\int(t^4-2t^6+t^8)dt = -\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right)+C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{2\cos^7 x}{7}+\frac{\cos^9 x}{9}\right)+C.$$

Завдання 2 Розв’язати задачі.

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ і $y=\dfrac{x^2}{2}$.

2 Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі та віддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

3 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y=t-\dfrac{t^3}{3}$.

Розв’язання.

1 Крива $y=\dfrac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи направлені вгору (рис. 2.1).

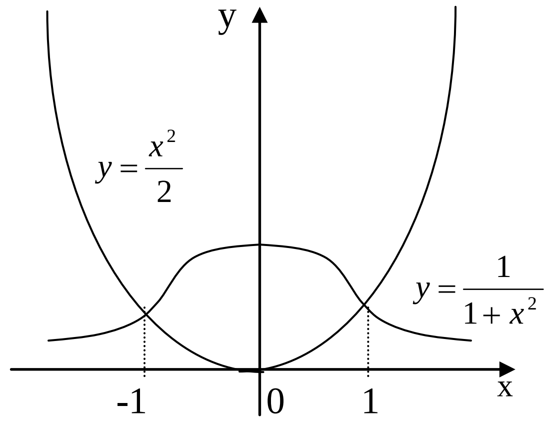

Рис. 2.1

Крива $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі Ox, а вісь Oy є її віссю симетрії, бо $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при $x=0$, а при $x\to\pm\infty$ $y\to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 2.1. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 2.1. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S=\int_a^b\left(y_в(x)-y_н(x)\right)dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв’язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y=\dfrac{1}{1+x^2}, \\ y=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$

Звідси $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, $a=-1$, $b=1$.

Враховуючи також, що $y_в = \frac{1}{1+x^2}$, а $y_н = \frac{x^2}{2}$ будемо мати

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy одержуємо

$$S = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

2 Побудуємо тіло (рис.2.2).

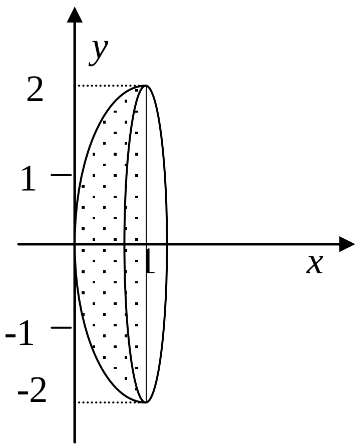

Рис. 2.2

Враховуючи, що $y_в = 2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b\left(y_в{}^2(x) - y_н{}^2(x)\right)dx$$

будемо мати $V_x = \pi\int_0^1 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^1 = 2\pi.$

3 Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2 = x\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2$.

На довжині петлі (рис.2.3) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

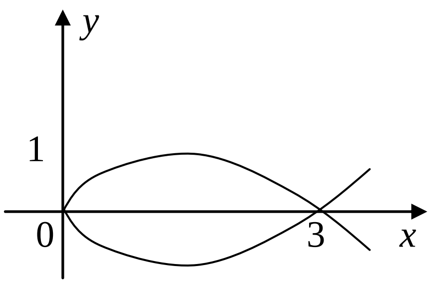

Рис. 2.3

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі Ox, обчислюємо її довжину за формулою: $L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt.$

$$L=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Зауважимо, що при добуванні квадратного кореня з виразу $\left(1+t^2\right)^2$ враховано, що $1+t^2>0$ для всіх дійсних значень t.

Завдання 3 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

1 $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

2 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3 $y'-ytgx=\sec x$, $y(0)=0$.

Розв'язання.

1 Розв`яжемо рівняння відносно y': $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$. Отримаємо рівняння типу $y'=f_1(x)f_2(y)$, оскільки $\dfrac{1-2x}{y^2}=(1-2x)\dfrac{1}{y^2}$. Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, тоді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$y^2dy=(1-2x)dx,$$

інтегруючи яке, знаходимо $\dfrac{y^3}{3}=x-x^2+C$ (загальний інтеграл)

або, розв`язавши відносно y, $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$ (загальний розв'язок).

2 Це рівняння типу $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто однорідне відносно змінних x і y диференціальне рівняння першого порядку.

Зробимо заміну $\dfrac{y}{x}=u(x)$, звідки $y = ux$, а $y'=u'x+u.$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x+u=\frac{1}{u}+u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu=\dfrac{dx}{x}$.

Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|$ або $u^2 = \ln\left|Cx^2\right|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\frac{y^2}{x^2} = \ln\left|Cx^2\right|$, а, розв`язавши відносно $y$, – загальний розв`язок рівняння $y = \pm\sqrt{\ln\left|Cx^2\right|}$.

3 Задане рівняння є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ і підставимо знайдені вирази в рівняння

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x$$

або

$$u'v + u(v' - vtgx) = \sec x.$$

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}$ – загальний розв`язок.

При x=0 і y=0 знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв`язок рівняння буде мати наступний вигляд: $y = \frac{x}{\cos x}$.

Завдання 4 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10.$

2 $y'' - 2y' + y = 0.$

3 $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Розв'язання.

1 Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$. Його корені $\kappa_1 = 1$ і $\kappa_2 = 3$ дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Диференціюючи y,

отримаємо $y' = C_1e^x + 3C_2e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

2 Складемо характеристичне рівняння $к^2 - 2к + 1 = 0$.

Оскільки $к^2 - 2к + 1 = (к-1)^2 = 0$, $к_1 = к_2 = 1$. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

3 Складемо характеристичне рівняння $к^2 + 6к + 13 = 0$. Його корені знайдемо за формулою $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, згідно з якою

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm \sqrt{4i} = -3 \pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($к_{1,2} = \alpha \pm \beta i$). Отже, $\alpha = -3$; $\beta = 2$. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Завдання 5 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $2y'' + y' - y = 2e^x$.

2 $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Розв'язання.

1 Дане рівняння є ЛНДР – 2 зі сталими коефіцієнтами й спеціальною правою частиною. Його загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Для знаходження $\bar{y}$ ЛОДР – 2, яке відповідає даному ЛНДР – 2: $2y'' + y' - y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $2к^2 + к - 1 = 0$. Його корені $к_1 = -1$ і $k_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$. Права частина $f(x) = 2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $\alpha = 1$, а $n = 0$, тому $Y = Ae^x$ бо $\alpha \neq к_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y' = Ae^x, Y'' = Ae^x$. Звідки знаходимо $A = 1$. Отже, $Y = e^x$, а загальний розв`язок вихідного рівняння

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + e^x.$$

2 Зведемо рівняння до загального вигляду: $y'' + y = -\sin 2x$.

Далі, розв'язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y = \bar{y} + Y;$$

$$y'' + y = 0; \quad k^2 + 1 = 0; \quad k_{1,2} = \pm i; \quad \alpha = 0; \beta = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Оскільки $f(x) = -\sin 2x$, то $b = 2(\pm bi = \pm 2i \neq k_{1,2})$ і тому

$$\begin{array}{r|l} 1 & Y = M\cos 2x + N\sin 2x \\ 0 & Y' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x \\ 1 & Y'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \cos 2x & M - 4M = 0; M = 0; \\ \sin 2x & N - 3N = -1; N = \dfrac{1}{3}. \end{array}$$

Отже, $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Ураховуючи початкові умови: при $x = \pi; y = y' = 1,$ отримаємо систему

$$\begin{cases} 1 = -C_1, \\ 1 = -C_2 + \dfrac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо $C_1 = -1$, $C_2 = -\frac{1}{3}$. Підставляючи числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок, одержимо шуканий частинний розв`язок

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Бібліографічний список

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М., 2005.

2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К., 2003.

3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К., 2000.

4. Овчинников П., Кропив'янський П., Полушкін С. та ін. За ред. П. Овчинникова. Вища математика. Збірник задач: У 2-х ч. Ч.2.. – К., 2004.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.1 – М., 1978.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.2 – М., 1978.

7. Каплан И.А., ПустынниковВ. И. / Под ред. Пустынникова В. И. Практикум по высшей математике. В 2-х т. Т. 1, 2. 6-е изд., М.,2006.

8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.,1986.

9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.,1985.

10. Овчинников П., Кропив'янський П. Полушкін С. та ін. / За ред. П. Овчинникова. Вища математика. Збірник задач: У 2-х ч. Ч.2. 2-ге вид., – К., 2004.

11. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. За ред. Г.Л. Кулініча. У 2 кн. Кн. 1. – К., 1994.

12. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. За ред. І.П.Васильченко. У 2 кн. Кн. 2. – К., 1994.

13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Изд. 14, М.,1998.

14. Ю.В.Боднарчук Б.В.Олійник. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К., 2010.

15. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр. — М., 2005.

16. Ильин В.А. Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М., Изд. МГУ, 1998.

17. Лавренчук В.П., Готинчан Т.І.,Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. – Чернівці, 2007.

18. Кудрявцев Л.Д. Кратний курс математического анализа М, 1989.

19. Смирнов В.И. Курс высшей математики т.1. М., 1974.

20. Математический анализ в вопросах и задачах. Под ред. Бутузова В. Ф. – М., 2001

21. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейиик. — М., 1984.

ЗМІСТ

Вступ 3
Програма модуля №1 3
Варіанти індивідуальних домашніх завдань
Завдання 1 4
Завдання 2 7
Завдання 3 10
Завдання 4 11
Завдання 5 12
Завдання 6 13
Завдання 7 13
Завдання 8 15
Завдання 9 15
Завдання 10 15
Завдання 11 18
Завдання 12 25
Завдання 13 31
Завдання 14 34
Завдання 15 37
Завдання 16 37
Завдання 17 40
Завдання 18 44
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань 54
Програма модуля №2 68
Варіанти індивідуальних домашніх завдань
Завдання 19 69
Завдання 20 72
Завдання 21 78
Завдання 22 80
Завдання 23 82
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань 83
Бібліографічний список 92

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський) денної (заочної) форми навчання за спеціальністю 131 «Прикладна механіка».

Укладачі: Гаєвська Вікторія Олексіївна, Лисянська Ганна Володимирівна

За редакцією авторів

Формат 60х84 1/16.
Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. –4,6

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, ул. Алчевських, 44