Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

Методичні вказівки до практичних занять

з курсу «Вища математика»

**для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський)
денної (заочної) форми навчання
за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»**

Харків 2024

Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ
БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**

Спеціальність 131

В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська

Методичні вказівки до практичних занять

з курсу «Вища математика»

**для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський)
денної (заочної) форми навчання
за спеціальністю 131 «Прикладна механіка»**

Затверджено на засіданні кафедри
фізики та математики.
Протокол №11 від 10.06.2024

Харків 2024

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища математика» для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський) денної (заочної) форми навчання за спеціальністю 131 «Прикладна механіка» / Укладачі В.О.Гаєвська, Г.В.Лисянська – Харків: ХДБУ, 2024. – 177 с.

Кафедра фізики та математики

ВСТУП

Основна мета методичних вказівок — надати допомогу студентам у вивченні теоретичного матеріалу курсу «Вища математика», оволодіти навичками та прийомами розв'язування задач та прикладів.

Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладання його на лекційних заняттях. Методичні вказівки містять: програму кожного модуля, навчальний матеріал для проведення практичних занять, задачі для виконання домашніх завдань, зміст теоретичного матеріалу, що потрібно вивчити перед кожним практичним заняттям, бібліографічний список, а також додатки у вигляді таблиць функцій та параметрів.

Методичні вказівки доцільно використовувати як для роботи в аудиторії, так і для індивідуальної самостійної роботи.

ПРОГРАМА МОДУЛЯ 1

Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра. Аналітична геометрія.

Тема 1. Визначники і їх властивості.
Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.
Тема 3. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.
Тема 4. Матричний запис системи рівнянь. Теорема Кронікера-Капеллі.
Тема 5. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.
Тема 6. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.
Тема 7. Прямокутна та полярна системи координат на площині. Відстань між двома точками.
Тема 8. Пряма на площині, її рівняння. Основні задачі.
Тема 9. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх властивості.
Тема 10. Перетворення координат. Зведення загального рівняння 2-го порядку до канонічного вигляду.
Тема 11. Рівняння поверхні у просторі. Площина. Різні види її рівнянь. Кут між площинами.
Тема 12. Пряма у просторі, різні види рівнянь прямої. Пряма та площина в просторі. Основні задачі.
Тема 13. Поверхні другого порядку.

Змістовий модуль 2. Диференціальне числення.

Тема 14. Функція та її властивості. Способи завдання, графік функції.
Тема 15. Границя функції. Визначні границі. Неперервність функції. Точки розриву функції.
Тема 16. Похідна функції.. Правила диференціювання складної функції. Таблиця похідних.
Тема 17. Похідна неявної, параметрично заданої функції. Похідні та диференціали вищих порядків.
Тема 18. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші, правило Лопіталя .

Тема 19. Знаходження екстремуму функції. Опуклість, угнутість кривої, точки перегину.
Тема 20. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функцій.
Тема 21. Функції багатьох змінних. Границя функції 2-х змінних. Неперервність у точці та області.
Тема 22. Частинні похідні. Диференціювання складної функції кількох змінних.
Тема 23. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в області.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Визначники і їх властивості. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера. Матриці та дії над ними. Обернена матриця. Матричний запис системи рівнянь. Теорема Кронікера-Капеллі.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix}$$

Розв'язання. Використовуючи правило обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} cos\alpha & -sin\alpha \\ sin\alpha & cos\alpha \end{vmatrix} = cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1.$$

Приклад 2 Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

Розв'язання. Після обчислення визначника одержимо $2x^2 - 12x < 14$ або $x^2 - 6x - 7 < 0$. Розкладемо ліву частину одержаної нерівності на множники: $(x+1)(x-7)<0$. Для одержання розв'язків цієї нерівності застосуємо метод інтервалів (рис.1.1).

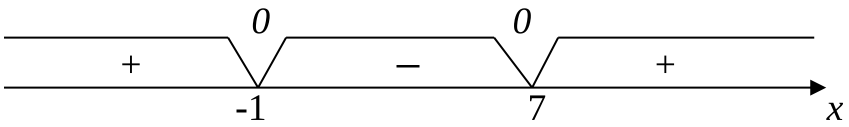


Рис.1.1

Таким чином, розв'язок нерівності: $x \in (-1;7)$.

Приклад 3 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: Згідно з означенням визначника третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60 + 0 - 5 - 0 - 0 + 32 = 87.$$

Приклад 4 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$ методом Крамера.

Розв'язання. Для розв'язання системи за правилом Крамера обчислюємо головний та додаткові визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 16 = 31, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 23 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 69 + 24 = 93, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 60 - 184 = -124.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{93}{31} = 3, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{-124}{31} = -4.$

Приклад 5 Знайти матрицю

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи правила множення матриць на число та додавання матриць, знаходимо

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}_{3\times2} \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} 10+12 & 4-15 \\ 6-3 & 14-3 \\ -8-6 & 10+0 \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

Приклад 6 Знайти добуток *A B*, якщо $A = (3\ 2)$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриця *A* має розмір *1×2*, матриця *B* має розмір *2×1*, тому добуток *A B* існує і в матрицею розміру *1×1*.

$$AB = (3 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3\cdot1 + 2\cdot(-1)) = (1).$$

Приклад 7 Знайти добуток *ABC*, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Задані матриці мають розмір 2×2, тому їх можна перемножити, причому одержимо матрицю того самого розміру. Помножимо спочатку *A* на *B*:

$$AB = \begin{pmatrix} 4\cdot(-28) + 3\cdot38 & 4\cdot93 + 3\cdot(-126) \\ 7\cdot(-28) + 5\cdot38 & 7\cdot93 + 5\cdot(-126) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

Тепер помножимо одержану матрицю на матрицю С:

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot7 + (-6)\cdot2 & 2\cdot3 + (-6)\cdot1 \\ -6\cdot7 + 21\cdot2 & (-6)\cdot3 + 21\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8 Знайти матрицю $C = B - 2A^T$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо, $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}.$

Тоді $C - B - 2A^T = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}_{3x2} - 2\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}.$

Приклад 9 Установити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

Розв'язання. Для розв'язання системи за правилом Крамера потрібно обчислити головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4$$

Оскільки $-4 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Обчислимо додаткові визначники системи:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

Перевірка: $\begin{cases} 3\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2, \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1, \\ 5\cdot 1 - 6\cdot 1 + 4\cdot 1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases}$

Приклад 10. Дослідити сумісність систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -0{,}5 \end{cases}$$

Розв'язання. Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з чотирма невідомими. Для перевірки умови *r(A)* = *r(Ã)* теореми Кронекера-Капеллі знайдемо ранги основної та розширеної матриць заданої системи, застосовуючи до матриць елементарні перетворення.

Розширену матрицю одержуємо шляхом дописування до основної матриці системи стовпця вільних членів.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & -0{,}5 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -1{,}5 \end{array}\right)$$

Еквівалентну матрицю отримали шляхом множення елементів першого рядка на (-1) та додавання до елементів другого та третього рядків. Тепер елементи другого рядка помножимо на $\left(-\frac{3}{2}\right)$ і додамо до елементів третього рядка, а потім поміняємо місцями другий та третій стовпчики.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

З останнього запису випливає, що *r(Ã) = 2* та *r(A) = 2* , тобто *r(A) = r(Ã)*, а це означає, що задана система рівнянь є сумісною.

Приклад 11 Знайти розв'язок системи за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. У матричній формі дану систему можна записати таким

чином: $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1}$, або коротко $AX = C$,

звідки $X = A^{-1}C$, де A^{-1} –матриця, обернена до матриці A.

Обернена матриця A^{-1} існує, бо $\Delta = \det A = -8 \neq 0$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+1) = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -5 & 3\end{vmatrix}=-12+5=-7,$$

$$A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-1)=-5,$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -4\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-10+4=-6.$$

За формулою знаходження оберненої матриці одержуємо:

$$A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо шуканий розв’язок

$$X=AC^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -7\\ 2 & 1 & -5\\ 4 & -2 & -6\end{pmatrix}_{3\times3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}_{3\times1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2+6+7\\ 2+2+5\\ 4-4+6\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11\\ 9\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/8\\ -9/8\\ -3/4\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=-11/8$; $x_2=-9/8$; $x_3=-3/4$;

Домашнє завдання

Теорія. Основні поняття векторної алгебри. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Добутки векторів та їх застосування. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами. [1], с. 123–169.

Вправи

1 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -5 & 2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}3 & 6\\ 5 & 10\end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix}a+1 & в-c\\ a^2+a & aв-ac\end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 18; б) 10; в) 0; г) 0.

2 Розв’язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix}3x & -1\\ x & 2x-3\end{vmatrix}=\frac{3}{2}$; б) $\begin{vmatrix}4\sin x & 1\\ 1 & \cos x\end{vmatrix}=0$; в) $\begin{vmatrix}\cos 8x & -\sin 5x\\ \sin 8x & \cos 5x\end{vmatrix}=0$.

Відповідь: а) $x_1=-\frac{1}{6}$; $x_2=\frac{3}{2}$;

б) $x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n, \quad n\in Z$;

в) $x=\frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n\in Z$.

3 Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0;$ б) $\begin{vmatrix} 2x-3 & -1 \\ 7 & 2x \end{vmatrix} \le 11.$

Відповідь: а) $x > 3$; б) $-0{,}5 \le x \le 2$.

4 Установити, що система має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

а) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=y=z=1$; б)) $x=1,\ y=3,\ z=5$.

5 Знайти матрицю $D = 2A + BC - A^2$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}.$

6 Знайти союзну матрицю для матриці $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$

Відповідь: $\hat{A}=\begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

7 Знайти матрицю, обернену до матриці

$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$ і перевірити, що $AA^{-1}=A^{-1}A=E.$

Відповідь: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -11 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$

8 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3=5, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=4, \\ 2x_1-3x_2+5x_3=1 \end{cases}$ матричним способом.

Відповідь: x_1=2, x_2=1, x_3=0.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Поняття вектора. Лінійні операції над векторами. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів. Прямокутна та полярна системи координат на площині.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити довжину вектора $\vec{a}=\{6;\ 3;\ -2\}$ і його напрямні косинуси.

Розв'язання. Використовуючи формули $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$,

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\cos\beta=\frac{a_y}{\left|\vec{\alpha}\right|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}};\quad \cos\gamma=\frac{a_\lambda}{\left|\vec{a}\right|}=\frac{a_\lambda}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

одержимо:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{49}=7;\ \cos\alpha=\frac{6}{7};\ \cos\beta=\frac{3}{7};\ \cos\gamma=-\frac{2}{7}.$$

Приклад 2 Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a}=\{3;$ -1;4}, якщо його початок збігається з точкою $M(1;\ 2;\ -3)$.

Розв'язання. Нехай точка N має координати x, y, z. Тоді за формулами $\vec{a}=MN=\{\ x_N-1;\ \ y_N-2;\ \ z_N+3\}$, а за умовою $\vec{a}=\{3;\ -1;4\ \}$.

Отже, $x_N-1=3;\ \ y_N-2=-1;\ \ z_N+3=4;$

Звідки $x_N=4;\ \ y_N=1;\ \ z_N=1.$

Таким чином, $N(4;1;1)$ - шукана точка.

Приклад 3 Знайти орт вектора $\vec{a}=\{6;\ -2;\ -3\}$.

Розв'язання. Відомо, що орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ має напрям вектора $\vec{a}$ і довжину, що дорівнює одиниці. Тому $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\left(\dfrac{a_x}{|\vec{a}|};\dfrac{a_y}{|\vec{a}|};\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}\right).$

За формулою обчислення модуля вектора знаходимо:

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{49}=7.$$

Отже, $\vec{a}^0=\dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\cdot\vec{a}=\{\dfrac{6}{7};\ \dfrac{2}{7};\ -\dfrac{3}{7}\}.$

Приклад 4 Обчислити модулі суми і різниці векторів $\vec{a}=\{3;\ -5;8\}$ і $\vec{b}=\{-1;\ 1;-4\}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$:

$\vec{a}+\vec{b}=\{3-1;\ -5+1;\ 8-4\}=\{2;\ -4;\ 4\}$, $\vec{a}-\vec{b}=\{3+1;\ -5-1;\ 8+4\}=\{\ 4;\ -6;\ 12\}$.

Далі за формулою обчислення модуля вектора матимемо:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \sqrt{2^2+(-4)^2+4} = \sqrt{36} = 6\,; \qquad \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{4^2+(-6)^2+12} = \sqrt{196} = 14.$$

Таким чином, модуль суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 6, а модуль їх різниці дорівнює 14.

Приклад 5 Дано сили $\vec{F_1}$ { 3; -4; 2 }, $\vec{F_2}$ = { 2; 3; -5 }, $\vec{F_3}$ = { -3; -2; 4 }, що прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки M_1 = (5; 3; -7) в точку M_2 = (4; $-1; -4$).

Розв’язання. Механічна інтерпретація скалярного добутку двох векторів полягає у тому, що робота A сталої сили $\vec{F}$ на прямолінійній ділянці шляху $\vec{S}$, дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення, тобто $A = \vec{F}\cdot\vec{S}$.

Для розв'язання задачі знайдемо спочатку рівнодійну цих сил:

$$\vec{F} = \vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3} = \{\ 3+2–3;\ –4+3–2;\ 2–5+4\ \}=\{2;\ –3;\ 1\}\ .$$

Вектор переміщення $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = \{4;\ –3;\ -1–3;\ –4+7\}=\{–1;\ –4;\ 3\}$. Тоді одержимо: $A = \vec{F}\cdot\vec{S} = 2\cdot(-1)+(-3)\cdot(-4)+1\cdot 3 = -2+12+3 = 13$.

Приклад 6 Дано вершини чотирикутника $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$. Довести, що його діагоналі АС і BD взаємно перпендикулярні.

Розв’язання. Розглянемо вектори діагоналей $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$:

$\vec{AC} = \{–4;\ –1;\ 1+2;\ 1–2\ \}=\{–5;\ 3;\ –1\}$, $\vec{BD} = \{–5;\ –I;\ –5–4;\ 3–0\ \}=\{–6;\ –9;\ 3\}$,

Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$.

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (-5)\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3 = 0\,.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, тоді вони взаємно перпендикулярні, отже, взаємно перпендикулярні й діагоналі чотирикутника.

Приклад 7 Дано вершини трикутника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;1)$, $C(3;1;1)$. Обчислити його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$ (рис.2.1).

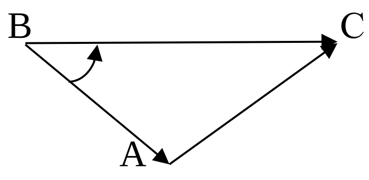


Рис. 2.1

Тоді $\hat{B} = \left(\vec{BA}, \hat{\ } \vec{BC}\right)$. Оскільки

$\vec{BA}$ ={-1;+4; -2+2; 4-0}={3; 0; 4},

$\vec{BA}$ ={-1;+4; -2+2; 4-0}={3; 0; 4},

$\vec{BC}$ ={3;+4; -2+2; 1-0 }={7;0; 1}, то

$$\cos\hat{B} = \frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}} = \frac{21+4}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}} = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\hat{B} = 45^0$.

Приклад 8 Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$. Обчислити $np_{\tilde{n}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Розв'язання. За формулою обчислення проекції вектора на вектор одержуємо: $np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{c}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)}{|c|}$.

Знайдемо спочатку координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$. Оскільки $\vec{a}$ ={3; –6; –1}, $\vec{b}$ ={1;4; –5}, $\vec{a}+\vec{b}$ ={3+1; –6+4; –1; –5}={4; –2; –6}.

Далі, використовуючи вище зазначену формулу, одержимо:

$$np_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \frac{3\cdot 4+(-4)\cdot 2+12\cdot(-6)}{\sqrt{9+16+144}} = 4.$$

Приклад 9 Дано вершини трикутника $A(-1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок (рис.2.2).

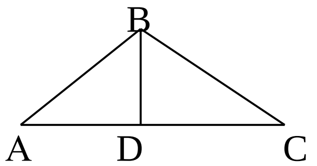


Рис.2.2

Із елементарної математики відомо, що $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AC\cdot BD$. Отже, шукана висота $BD = \dfrac{2S}{AC}$.

Для знаходження величин, що входять до цієї формули, скористаємося засобами векторної алгебри. Для цього розглянемо вектори

$\vec{AB}$ ={4;–5; 0) і $\vec{AC}$ ={0;4; -3}. Тоді $AC = \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{16+9} = 5$, а $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$.

Оскільки:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$=15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k}$ ={15;12; 16}, то $\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{225+144+256} = \sqrt{625} = 25.$

Отже, $2S_{\Delta ABC} = 25$

Таким чином, шукана висота $BD = \dfrac{25}{5} = 5$.

Приклад 10 Сила $\vec{F}=\{2;-4;\ 5\}$ прикладена до точки $A(4;-2;3)$. Знайти момент цієї сили відносно точки $B(5;-6;2)$.

Розв'язання. За формулою обчислення моменту сили відносно точки маємо: $\vec{M}=\vec{BA}\times\vec{F}$.

Ураховуючи, що $\vec{BA}=\{4;–3;\ –2–2;\ 3+1\}=\{1;\ –4;\ 4\}$, $\vec{F}=\{2;\ –4;\ 5\}$, одержимо

$$\vec{M}=\vec{BA}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 4\\ 2 & -4 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 4\\ -4 & 5\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -5\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & -4\\ 2 & -4\end{vmatrix}\vec{k}=-4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}.$$

Приклад 11 Обчислити мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}=\{1;\ –1;3\}$, $\vec{b}=\{–2;2;1\}$, $\vec{c}=\{3–2;1;4\}$.

Розв’язання. Згідно з формулою обчислення мішаного добутку трьох векторів маємо:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7.$$

Приклад 12 Установити, чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}=\{2;\ –3;1\}$, $\vec{b}=\{1;\ –1;3\}$, $\vec{c}=\{1;9;\ –11\}$,

2) $\vec{a}=\{3;\ –2;1\}$, $\vec{b}=\{2;1;2\}$, $\vec{c}=\{3;\ –1;\ –2\}$.

Розв’язання.

1) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -9\end{vmatrix}=0.$$

Отже, вектори компланарні, оскільки їх мішаний добуток дорівнює нулю.

2) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

Таким чином, вектори не компланарні, оскільки їх мішаний добуток відмінний від нуля.

Приклад 13 Обчислити об’єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв’язання. Відомо, що об’єм тетраедра V дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда V. Отже, достатньо обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

Знайдемо вектори $\vec{AB} = \{3;6;3\}$, $\vec{AC} = \{1;3;-2\}$, $\vec{AD} = \{2;2;2\}$. Таким чином, їх мішаний добуток

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Звідки, $V_n = |-18| = 18$ куб. од. Тепер знайдемо об'єм тетраедра:

$$V_{тетр.} = \frac{1}{6}V_n = \frac{1}{6}\cdot 18 = 3 \text{ куб. од.}$$

Приклад 14 Дано вершини тетраедра $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(5;-4;8)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини D.

Розв'язання. Зробимо схематичний рисунок 2.3.

Відомо, що об'єм тетраедра V обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}S_{осі}\,H ,$$

де $S_{осн}$ - площа основи; H - висота.

Отже, $H = \dfrac{3V}{S_{осі}}$.

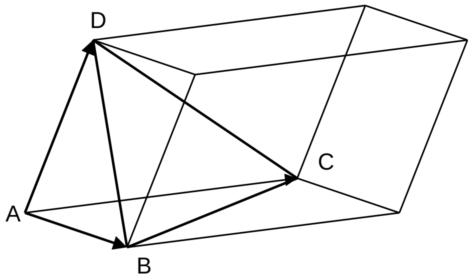


Рис.2.3

Таким чином, щоб знайти висоту тетраедра, необхідно знайти його об'єм і площу основи. Об'єм обчислюємо, як у прикладі 13.

Маємо: $\vec{AB} = \{\ 2;\ -2;\ -3\}$, $\vec{AC} = \{\ 4;\ \ 0;\ \ 6\}$, $\vec{AD} = \{\ -7;\ -7;\ \ 7\}$.

$$\vec{AB}\,\vec{AC}\,\vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 308.$$

Отже, $V = \dfrac{308}{36} = \dfrac{154}{3}$ куб. од. Площа основи $S_{осі} = \dfrac{1}{2}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|$ (площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$).

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{\kappa} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{\kappa}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{\kappa},$$

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{(-12)^2 + (24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

Таким чином, $S_{осі} = \dfrac{1}{2}\cdot 28 = 14$ куб. од. і шукана висота $H = \dfrac{3\frac{154}{3}}{14} = 11.$

Приклад 15 Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней від яких до точок $M_1(-3:0)$ і $M_2(3:0)$ дорівнює 50.

Розв'язання. Нехай $M(x:y)$ - довільна точка шуканої лінії. За умовою $MM_1^2 + MM_2^2 = 50$, або в координатній формі

$$\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 = 50,$$

звідки $x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 50$, або $x^2 + y^2 = 16$. Одержали рівняння кола.

Приклад 16 Установити, яка лінія визначаються в полярних координатах рівнянням $r = 4\cos\varphi$ і побудувати її.

Розв'язання. Щоб побудувати криву, задану рівнянням $r = 4\cos\varphi$, складемо таблицю значень φ і r (таблиця 2.1):

Таблиця 2.1

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
r	4	$2\sqrt{3}$	2	0	—	—	—	0	2	4

За данними таблиці побудуємо криву (рис. 2.4).

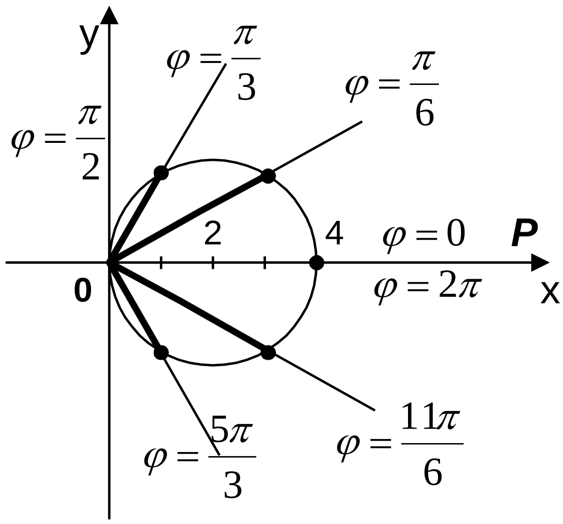


Рис. 2.4

Зазначимо, що функція $\cos\varphi$ – парна, тому крива буде симметричною відносно полярної осі.

Одержана крива є коло з діаметром $2R = 4$, який збігається з полярною віссю.

Щоб переконатися в цьому, переведемо рівняння $r = 4\cos\varphi$ в прямокутну декартову систему координат. Для цього помножимо обидві частини рівняння на r.
Тоді $r^2 = 4r\cos\varphi$.

Враховуючи формули переходу від полярної системи координат до декартової, одержуємо:

$$x^2 + y^2 = 4x, \text{ або } (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Таким чином, дійсно маємо рівняння кола з центром у точці $0_1(2:0)$ і радіуса 2 одиниці (див. рис. 2.4).

Домашнє завдання

Теорія Системи координат на площині та їх перетворення. Лінії на площині та їх рівняння. [1], с. 36 – 110.

Вправи

1 Відомі дві координати вектора: $a_x = 4$; $a_y = -12$. Знайти його третю координату a_z, якщо $\left|\vec{a}\right| = 13$

Відповідь: $a_z = \pm 3$.

2 Знайти початок вектора $\vec{a}$ $=\{2;\ -3;\ -1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $M\ (1; -1; 2)$.

Відповідь: $(-1; 2; 3)$.

3 Знайти орт вектора $\vec{a}$ $=\{2; -3; -1\}$.

Відповідь: $\vec{a}^{\,0}$ $=\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}\}$;

4 Вектор утворює з осями $0x$ і $0y$ кути 40 і 80°. Знайти кут, який утворює цей вектор з віссю $0x$.

Відповідь: 128°.

5 Побудувати паралелограм на векторах $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$. Знайти його діагоналі.

Відповідь: $\vec{OC} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$; $OC = \sqrt{6}$; $\vec{AB} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$; $AB = 3\sqrt{2}$.

6 Відомі три послідовні вершини паралелограма $A\,(1; -2; 3)$, $B\,(3; 2; 1)$; $C\,(6; 4; 4)$. Знайти його четверту вершину.

Відповідь: $D(4, 0, 6)$.

7 Побудувати вектор $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$; знайти його довжину і напрям.

Відповідь: $\left|\vec{a}\right| = 7$, $\cos\alpha = \frac{2}{7}$, $\cos\beta = \frac{3}{7}$, $\cos\gamma = \frac{6}{7}$.

8 Обчислити роботу, яку виконує сила $\vec{F}$ $=\{3; -2; -5\}$, коли її точка прикладання, пересуваючись прямолінійно, переміщається із точки $A(2; -3; 5)$ в точку $B(3; -2; -1)$.

Відповідь: 31.

9 Визначити, при якому значенні α вектори

$\vec{a} = \alpha\,\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $\alpha = -6$.

10 Дано вектори $\vec{a}$ $=\{1; -3; 4\}$, $\vec{b}$ $=\{3; -4; 2\}$, $\vec{c}$ $=\{-1; 1; 4\}$. Обчислити $np_{\vec{b}+\vec{c}}\,\vec{a}$.

Відповідь: 5.

11 Дано вектори $\vec{a}$ ={3;-1;-2}, $\vec{b}$ ={1;2;-1}. Знайти координати вектора $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$.

Відповідь: {10; 2:14}.

12 Дано вершини трикутника $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$, $C(1;-2;1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

Відповідь: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

13 Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=-\vec{k}-\vec{j}$ і $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

Відповідь: $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{5}$, $S=\sqrt{6}$.

14 Установити, чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, якщо $\vec{a}$ ={2;-1;2}, $\vec{b}$ ={1;2;-3}, $\vec{c}$ ={3;-4;7}.

Відповідь: компланарні.

15 Довести, що точки $A(1;2;-1)$, $B(0;1;5)$, $C(-1;2;1)$, $D(2;1;3)$ належать одній площині .

16 Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках

$$A(2;-1;1),\ B(5;5;4),\ C(3;2;-1),\ D(4;1;3)$$

Відповідь: 3 куб. од.

17 Побудувати паралелепіпед на векторах $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+5\vec{\kappa}$ і обчислити його об'єм.

Відповідь: $V=51$.

18 Скласти рівняння траєкторії точки, яка в кожний момент руху рівновіддалена від точок $A(5;-2)$ і $B(-3;-2)$.

Відповідь: $x-1=0$.

19 Установити, яка лінія визначається рівнянням $r=10\sin\varphi$ і побудувати її.

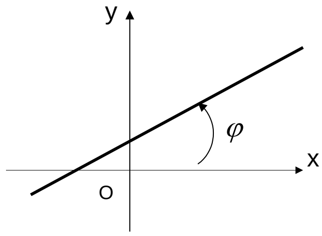
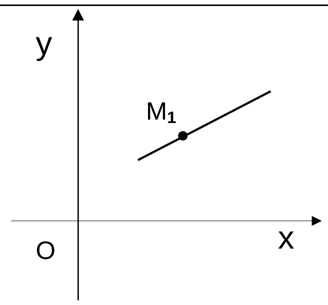
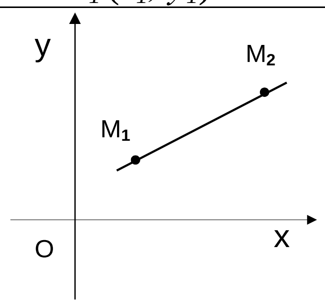
Відповідь: коло з центром $\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$ і радіуса 5.

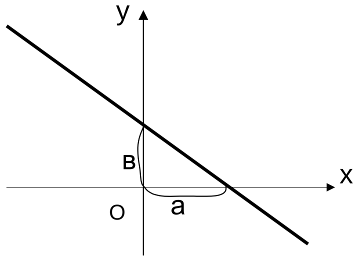
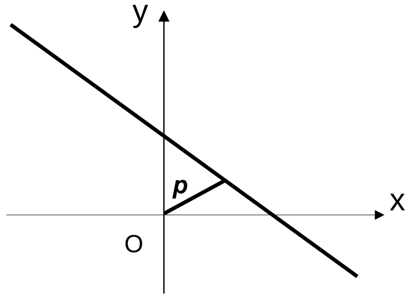
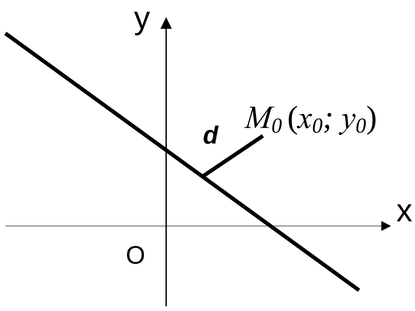
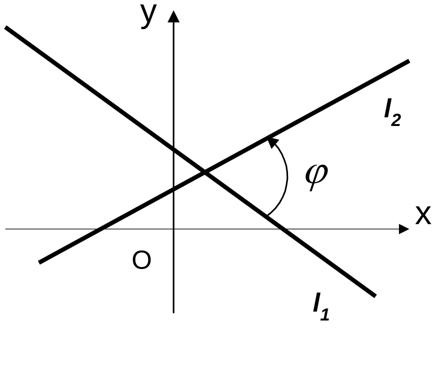
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

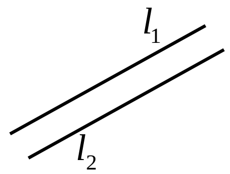
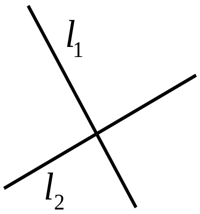
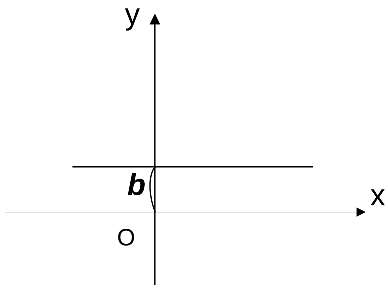
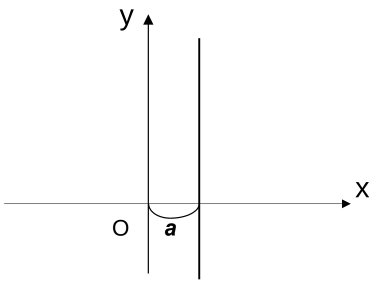
Системи координат на площині та їх перетворення. Лінії на площині та їх рівняння.

Наведемо основні формули та означення, що викладено на лекції, для наочності при розв'язанні прикладів.

Таблиця 3.1 **Пряма лінія та її рівняння**

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	2	3	4
1	Рівняння прямої з кутовим кое-фіцієнтом	 $k = tg\varphi$ - кутовий коефіцієнт (φ - кут нахилу прямої до додатного нап-рямку осі *Ox*), b - відрізок, який пряма відтинає на осі O*y*.	$y = kx + b$
2	Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданому напрямі	 $M_1(x_1; y_1) \in l$	$y - y_0 = k(x - x_0)$
3	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	 $M_1(x_1; y_1) \in l$ $M_2(x_2; y_2) \in l$ $k = tg\varphi = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

4	Рівняння прямої у відрізках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$ де a і b - довжини відрізків, які пряма відтинає на осях координат;
5	Загальне рівняння прямої	$к=-\frac{A}{B}$ $в=-\frac{C}{B}$	$Ax+By+C=0.$
6	Нормальне рівняння прямої		$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ або $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$
7	Відстань від точки до прямої	 $M_0(x_0; y_0)$	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
8	Кут між двома прямими		$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$ якщо рівняння прямих задані у вигляді $y=kx+b$, або $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, якщо рівняння прямих задані у вигляді $Ax+By+C=0.$

9	Умова паралельності двох прямих	 $l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:$ $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\kappa_1=\kappa_2$, або $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}\neq\dfrac{C_1}{C_2}$
10	Умова перпендику-лярності двох прямих	 $l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:$ $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\kappa_1\cdot\kappa_2=-1$, або $A_1A_2+B_1B_2=0$.
11	Умова збіжності двох прямих	$l_1:\ A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:$ $A_2x+B_2y+C_2=0$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.
12	Рівняння прямої, яка проходить через початок координат		$y=kx$, або $Ax+By=0$.
13	Рівняння прямої, що паралельна осі абсцис		$y=в$, або $By+C=0$.
14	Рівняння прямої, що паралельна осі ординат		$x=a$, або $Ax+C=0$.
15	Рівняння осі абсцис		$y=0$.
16	Рівняння осі ординат		$x=0$.

Криві другого порядку

Коло

Колом називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра) (рис. 3.1).

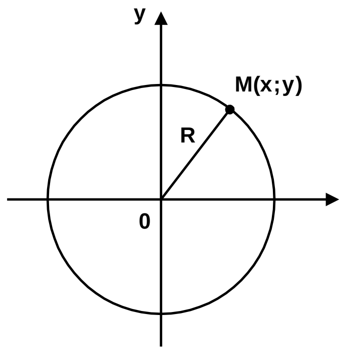


Рис. 3.1 а)

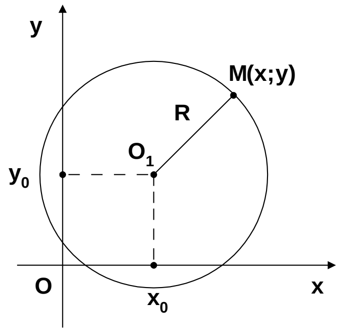


Рис. 3.1 б)

Якщо центр кола точка $O\ (0; 0)$, а радіус R, тоді його рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad \text{(рис.3.1 а).}$$

Рівняння кола з центром в точці $O_1(x_0; y_0)$ і радіуса R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad \text{(рис. 3.1 б).}$$

Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$, $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ - вершини еліпса, $MF_1 = r_1$, $MF_2 = r_2$ - фокальні радіуси (рис. 3.2).

а) $r_1 + r_2 = 2a$;

$A_1A_2 = 2a$ – велика вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – мала вісь;

$OA_1 = a$ – велика піввісь;

$OB_1 = b$ – мала піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(c; 0)$ і $F_2(-c; 0)$;

$c^2 = a^2 - b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет ($\varepsilon < 1$, бо $c < a$).

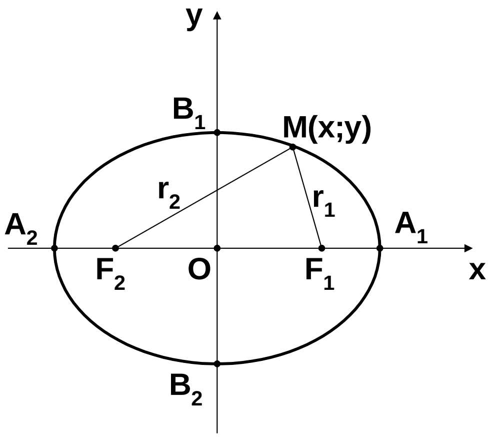


Рис. 3.2 а)

б) $r_1 + r_2 = 2b$;

$A_1A_2 = 2a$ – мала вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – велика вісь;

$OA_1 = a$ – мала піввісь;

$OB_1 = b$ – велика піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$;

$c^2 = b^2 - a^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$ - ексцентриситет ($\varepsilon < 1$, бо $c < b$).

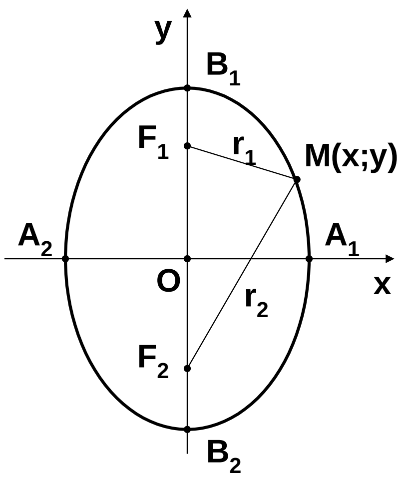


Рис. 3.2 б)

Зазначимо, що фокуси еліпса завжди знаходяться на його великій осі. При $a = b$ одержимо $x^2 + y^2 = a^2$ - рівняння кола.

Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала (рис. 3.3).

Канонічне рівняння гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ або $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$.

а) для гіперболи $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$r_1 - r_2 = \pm 2a$;

Точки $A_1(a; 0)$, $A_2(-a; 0)$ - вершини;

$A_1A_2 = 2a$ – дійсна вісь;

$B_1B_2 = 2b$ – уявна вісь;

$OA_1 = a$ – дійсна піввісь;

$OB_1 = b$ – уявна піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(c; 0)$ і $F_2(-c; 0)$;

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - ексцентриситет ($\varepsilon > 1$, бо $c > a$).

б) для гіперболи $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

$r_1 - r_2 = \pm 2b$;

Точки $B_1(0; b)$, $B_2(0; -b)$ - вершини;

$B_1B_2 = 2b$ – дійсна вісь;

$A_1A_2 = 2a$ – уявна вісь;

$OB_1 = b$ – дійсна піввісь;

$OA_1 = a$ – уявна піввісь;

$F_1F_2 = 2c$ - відстань між фокусами $F_1(0; c)$ і $F_2(0; -c)$;

$c^2 = a^2 + b^2$; $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$ - ексцентриситет ($\varepsilon > 1$, бо $c > b$).

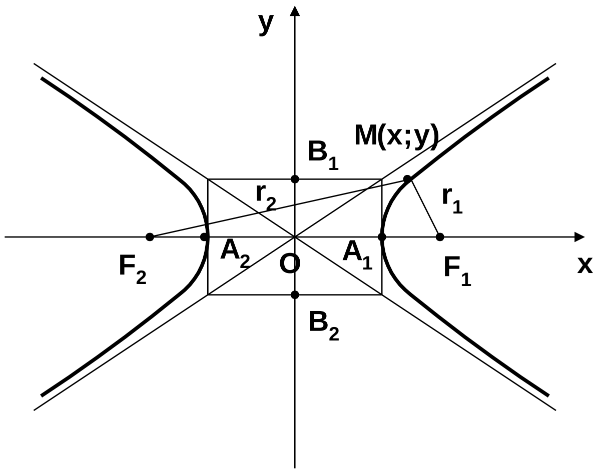


Рис. 3.3 а)

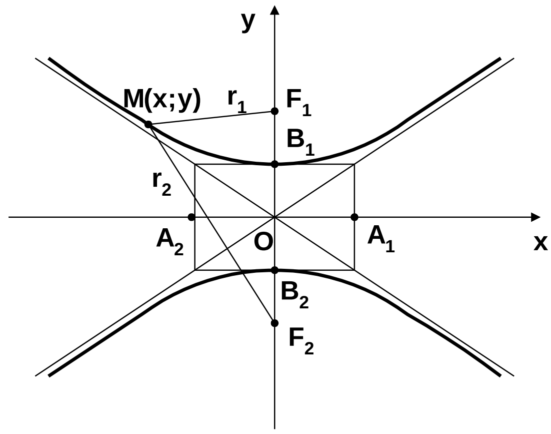


Рис. 3.3 б)

Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm \dfrac{b}{a} x$.

Слід зазначити, що фокуси гіперболи завжди знаходяться на її дійсній осі. Гіперболу, в якої $a = b$, називають рівнобічною і її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$ або $y^2 - x^2 = a^2$.

Парабола

Параболою називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи $y^2 = \pm 2px$ або $x^2 = \pm 2py$,

де p – відстань від фокуса до директриси.

Точка $O(0;0)$ - вершина параболи, $MF = r$ - фокальний радіус, d - відстань від точки $M(x;y)$ до директриси (рис. 3.4).

За означенням параболи $r = d$.

Для парабол $y^2 = \pm 2px$ рівняння директрис $x = \mp \dfrac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(\pm \dfrac{p}{2}; 0\right)$ (рис. 3.4 а), б)).

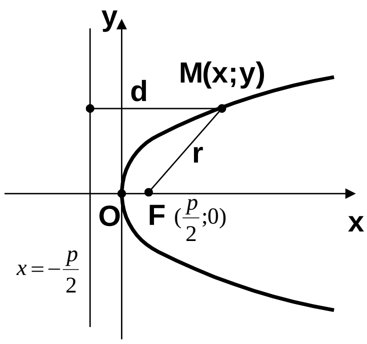


Рис. 3.4 а)

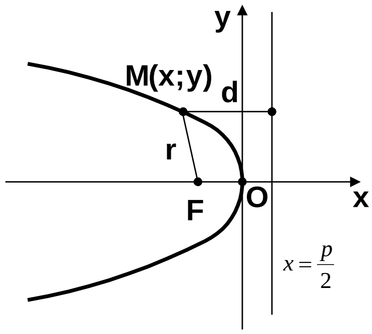


Рис. 3.4 б)

Для парабол $x^2 = \pm 2py$ рівняння директрис $y = \mp \dfrac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(0; \pm \dfrac{p}{2}\right)$ (рис.3.4 в), г)).

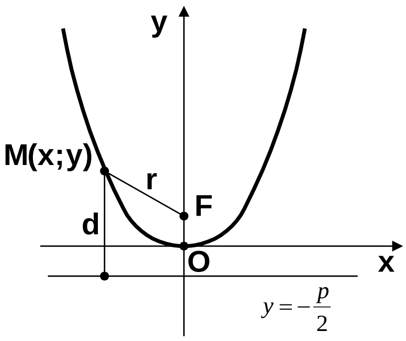


Рис. 3.4 в)

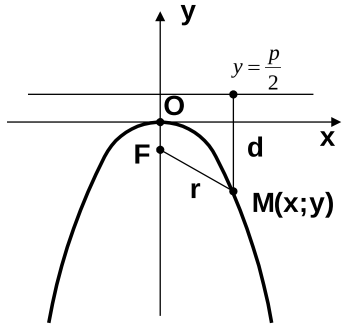


Рис. 3.4 г)

Фокус параболи завжди знаходиться на її осі симетрії.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ перпендикулярно до даної прямої $2x+3y+4=0$ (l_1).

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої l у вигляді:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Оскільки за умовою задачі $l\perp l_1$, $kk_1=-1$, звідки $k=\frac{3}{2}$. Ураховуючи також, що $x=2$, $y=1$ остаточно матимемо:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \text{ або } 3x-2y-4=0 \text{ рівняння прямої } l.$$

Приклад 2 Визначити за яких значень m, n прямі $mx+8y+n=0$ і $2x+my-1=0$ 1) паралельні, 2) збігаються, 3) перпендикулярні?

Розв'язання. Згідно з умовою паралельності прямих $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$.

Розв'язуючи рівняння $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}$, одержимо $m=\pm4$. Тоді при $m=4$ з нерівності $\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$ маємо $n\neq-2$, а при $m=-4$ $n\neq-2$. Таким чином, задані прямі паралельні, якщо $m=4$, $n\neq-2$ або $m=-4$, $n\neq2$.

Якщо прямі збігаються, тоді $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}=\frac{n}{-1}$,

звідки одержуємо, що $m=4$, $n=-2$ або $m=-4$, $n=2$. Прямі перпендикулярні, якщо $2m+8m=0$, звідки $m=0$. При цьому n може набувати довільних значень.

Приклад 3 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи кожний відрізок від початку координат.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

За умовою $|a| = |b|$. Тоді , якщо $ab > 0$, то рівняння прямої $x + y = a$, якщо $ab < 0$, то рівняння набуде вигляду $x - y = a$. Точка $M(2;3)$ належить кожній з цих прямих, тому її координати задовольняють кожному рівнянню. Підставляючи в рівняння $x + y = a$, замість змінних координат , координати точки M, одержимо 2+3=a, звідки a=5. Отже, рівняння шуканої прямої в цьому випадку буде $x + y = 5$ або $x + y - 5 = 0$. При x=2 і y=3 з рівняння $x - y = a$ маємо $2 - 3 = a$, звідки $a = -1$. Таким чином, у цьому випадку рівняння шуканої прямої буде $x - y + 1 = 0$.

Зазначимо, що коли $a = b = 0$, записати рівняння шуканої прямої у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ не можна, бо це рівняння втрачає значення. У цьому випадку рівняння прямої треба шукати у вигляді $y = kx$ або $Ax + By = 0$, бо умова $a = b = 0$ означає, що пряма проходить через початок координат. Отже, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через початок координат, і враховуючи, що точка M належить цій прямій, матимемо ще одне рівняння шуканої прямої: $y = kx,\quad 3 = 2k,\quad k = \frac{3}{2},\quad y = \frac{3}{2}x,\quad 3x - 2y = 0$.

Таким чином умові задачі задовольняють три прямі:

$$x + y - 5 = 0,\quad x - y + 1 = 0,\quad 3x - 2y = 0.$$

Приклад 4 Задані координати вершин трикутника *ABC*: *A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;
2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини *C*;
3) обчислити довжину висоти *CD*;
4) знайти площу трикутника;
5) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A* (рис. 3.5).

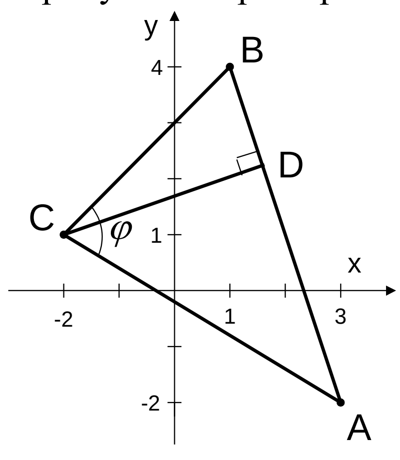


Рис. 3.5

Розв'язання. 1) Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Для $A(3;-2), B(1;4)$ маємо: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}$; $\quad \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}$;
$-3(x-3)=y+2$; $3x+y-7=0$ - загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом , $k_{AB}=-3$.

2) Складемо рівняння прямої $CD \perp AB$. З умови перпендикулярності прямих $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}} \quad \Rightarrow \quad k_{CD}=\frac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку $C(x_0;y_0)$: $y-y_0=k(x-x_0)$. Для $C(-2;1)$ маємо: $y-1=\frac{1}{3}(x+2)$, тобто $x-3y+5=0$ - загальне рівняння прямої CD.

3) Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою: $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $Ax+By+C=0$ - рівняння прямої AB. $d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$ (од.).

4) Площа трикутника дорівнює половині добутку довжини сторони на довжину висоти, яка опущена на цю сторону: $S_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot h_a$, тобто $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD$.

Довжину сторони AB знайдемо за формулою

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

$AB=\sqrt{(1-3)^2+(4-(-2))^2}=\sqrt{(-2)^2+(6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. Тоді

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{6\sqrt{10}}{5}=12$ (кв. од.)

5) Тангенс кута φ - кута між прямими AC і BC знайдемо за формулою

$$tg\varphi=\frac{k_{BC}-k_{AC}}{1+k_{BC}\cdot k_{AC}}$$

$$k_{AC}=-\frac{3}{5};\quad k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-4}{-2-1}=1 \;\Rightarrow\; tg\varphi=\frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\cdot\frac{3}{5}}=4,\quad \varphi=arctg4\approx 76^\circ.$$

Приклад 5 Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x-12y-65=0$ і $5x-12y+26=0$. Обчислити його площу.

Розв'язання. Для обчислення площі квадрата треба знайти довжину його сторони. Для цього досить знайти відстань між паралельними прямими $5x-12y-65=0,5x-12y+26=0$, на яких розташовані дві сторони квадрату. (умову паралельності цих прямих перевіряти самостійно). Знайдемо на одній з цих прямих, наприклад, на прямій $5x-12y-65=0$, координати будь-якої точки. Для цього покладемо $y=0$. Тоді $5x-65=0$, звідки $x=13$. Таким чином, точка $M(13;0)$ належить прямій $5x-12y-65=0$. Після цього задача зводиться до знаходження відстані від точки M до прямої $5x-12y+26=0$. За формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ маємо $d=\frac{|5\cdot 13-12\cdot 0+26|}{\sqrt{25+144}}=7$. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 7 , а його площа $S=7^2=49$ кв. од.

Приклад 6 Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. За умовою *AB* – діаметр кола. це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка *AB*. За формулами ділення відрізка навпіл:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-1}{2}=1;$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4.$$

Тобто $C(1;4)$- центр кола. Тепер ясно, що рівняння кола треба шукати у вигляді $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат координати точки *A* або *B* (кожна з них належить колу) і враховуючи, що $x_0=1$, $y_0=4$, матимемо: $(3-1)^2+(2-4)^2=R^2$, звідки $R^2=8$.

Отже, рівняння шуканого кола $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

Приклад 7 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою $2a=20$**,** $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Тоді $a=10$, а згідно з формулою $\varepsilon=\frac{c}{a}$: $c=a\cdot\varepsilon=10\cdot\frac{3}{5}=6$. Тепер із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо: $b^2=100-36=64$. Підставляючи значення $a^2=100$ і $b^2=64$ в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. Це і є рівняння шуканого еліпса.

Приклад 8 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою фокуси еліпса лежать на осі ординат, тому його мала вісь $2a=16$**,** а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$. Отже, $a=8$, $c=\frac{3}{5}b$.

Із співвідношення $a^2 = b^2 - c^2$ маємо: $64 = b^2 - \frac{9}{25}b^2$ або $64 = \frac{16}{25}b^2$, звідки $b^2 = 100$. Таким чином, рівняння шуканого еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Приклад 9 Скласти найпростіше рівняння еліпса, в якого відстані одного з фокусів від кінців великої осі дорівнюють 5 і 1.

Розв'язання. Нехай $A_1A_2 = 2a$ - велика вісь еліпса, F_1 - один з його фокусів (рис. 3.6). За умовою $A_2F_1 = 5$, $F_1A_1 = 1$. Тоді $A_2A_1 = A_2F_1 + F_1A_1 = 5 + 1 = 6$. Отже, $2a = 6$, звідки $a = OA_1 = 3$, $OF_1 = OA_1 - F_1A_1 = 3 - 1 = 2$, тобто $c = 2$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ маємо: $b^2 = 9 - 4 = 5$. Підставляючи значення $b^2 = 5$ і $a^2 = 9$ в канонічне рівняння еліпса, одержуємо: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$. Це і є рівняння шуканого еліпса.

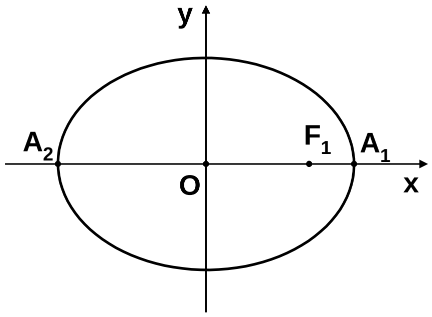


Рис. 3.6

Приклад 10 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння гіперболи у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметри a і b знайдемо з системи: $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$

Із першого рівняння системи: $b = \frac{4}{3}a$. Підставляючи цей вираз у друге рівняння системи, одержуємо: $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 100$, звідки $a^2 = 36$. Тоді $b^2 = 100 - 36 = 64$ і шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Приклад 11 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси гіперболи розташовані на осі ординат, тому її рівняння буде мати вигляд: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Параметри a и b визначаються із системи: $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$

Враховуючи, що $c = 5$, маємо: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3. \end{cases}$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$

Приклад 12 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо вона проходить через точку $M_1(-5;3)$ і її ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Підставляючи в це рівняння замість змінних координат x і y координати точки M_1 (бо вона належить гіперболі), одержуємо: $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1.$ За умовою $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, звідки $c = a\sqrt{2}$. Тоді із співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$ матимемо $b^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$.

Таким чином, для знаходження невідомих параметрів a і b гіперболи маємо систему: $\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \\ b^2 = a^2. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $a^2 = b^2 = 16$.

Отже, шукане рівняння гіперболи $x^2 - y^2 = 16$.

Приклад 13 Скласти найпростіше рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей, якщо вона перетинає вісь Oy і проходить через точки $M_1\left(24;5\sqrt{5}\right)$ і $M_2(0;5)$. Знайти фокуси цієї гіперболи.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.
Оскільки точки M_1 і M_2 належать гіперболі, їх координати задовольняють

рівнянню гіперболи. Підставляючи координати даних точок у це рівняння, одержуємо: $\begin{cases} \dfrac{125}{b^2} - \dfrac{576}{a^2} = 1, \\ \dfrac{25}{b^2} = 1. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $b^2 = 25,\ a^2 = 144$.

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1$. Із співвідношення $c^2 = a^2 + b^2$ знаходимо c: $c = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Фокуси гіперболи розташовані на осі Oy, тому $F_1(0;13)$, $F_2(0;-13)$.

Приклад 14 Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходяться в початку координат, якщо вона симетрично розташована відносно осі Ox і проходить через точку $M_1(-1;3)$.

Розв'язання. Оскільки вершина параболи знаходиться в точці $O(0;0)$, а вісь Ox є віссю симетрії, то рівняння параболи треба шукати у вигляді $y^2 = 2px$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M_1(-5;3)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $3^2 = 2p(-1)$, звідки $2p = -9$.

Отже, шукане рівняння параболи $y^2 = -9x$.

Приклад 15 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy, якщо вона проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої і кола, для чого розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = 0, \\ y_2 = -4; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Отже, $O(0;0)$ і $M(4;-4)$ - шукані точки перетину.

Рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через початок координат, має вигляд $x^2 = 2py$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M(4;-4)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $4^2 = 2p(-4)$, звідки $2p = -4$.

Таким чином, шукане рівняння параболі набуде вигляду $x^2 = -4y$.

Домашнє завдання

Теорія Рівняння поверхні та лінії у просторі. Рівняння площини у просторі. Площина. Основні задачі. Рівняння прямої лінії у просторі. Пряма лінія у просторі. Основні задачі. Пряма і площина у просторі. Основні задачі. [1], с. 169 – 215.

Вправи

1 Дано середини сторін трикутника: $M_1(2;1), M_2(5;3), M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

Відповідь : $7x-2y-12=0; 5x+y-28=0; 2x-3y-18=0$.

2 Скласти рівняння прямої якщо точка $P(2;3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

Відповідь : $2x+3y-13=0$

3 Знайти точку Q, яка симетрична точці P відносно прямої $2x-3y-3=0$.

Відповідь : $Q(11;-11)$.

4 Дано вершини трикутника: $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$.

Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B.

Відповідь: $4x+y-3=0$

5 Визначити, за яких значень m,n прямі $mx-2y-1=0, \quad 6x-4y-n=0$ 1) мають одну спільну точку; 2) паралельні; 3)збігаються.

Відповідь: 1) $m \neq 3$; 2) $m=3, n \neq 2$; 3) $m=3, n=2$.

6 Пряма $3x-4y-12=0$ відтинає від координатного кута трикутник. Обчислити його площу.

Відповідь: 6 кв. од.

7 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3;-4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини кожний відрізок вважається напрямленим від початку координат.

Відповідь: $x+y+4=0$.

8 Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна сторона якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Обчислити площу цього квадрату.

Відповідь: 5кв. од.

9 Знайти кут між двома прямими: а) $y=-2x; \quad 3x-y+5=0$;

б) $4x+2y-5=0; 6x+3y+1=0$

Відповідь: а) $\alpha=135^0$ б) $\alpha=0$. Дані прямі паралельні.

10 Через точку перетину прямих $x-y+4=0$ і $4x+2y-19=0$ проведено пряму паралельно до прямої $2x-3y+6=0$. Скласти її рівняння.

Відповідь: $12x-18y+83=0$.

11 Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $M_1(2;6)$, а його центр знаходиться у точці $C(-1;2)$.

Відповідь: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

12 Коло дотикається до осі Ox в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Скласти його рівняння.

Відповідь: $x^2+y^2+4y=0$.

13 Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$.

Відповідь: $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

14 Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, а його центр знаходиться у точці $C(6;-8)$.

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

15 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ і його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

16 Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17 Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси знаходяться у точках $(\pm12;0)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

18 Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

Відповідь: 16 кв.од.

19 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$, а відстань між вершинами дорівнює 48.

Відповідь: $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$.

20 Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи $16x^2-9y^2=144$.

Відповідь: $a=3$, $b=4$, $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$.

21 Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ і прямою $9x+2y-24=0$.

Відповідь: 12 кв.од.

22 Обчислити ексцентриситет рівносторонньої гіперболи.

Відповідь: $\sqrt{2}$.

23 Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon=1{,}4$.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

24 Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $9x^2+25y^2-225-0$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon=2$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

25 Фокус параболи має координати $F(-6;0)$, а рівняння директриси $x-6=0$. Скласти рівняння параболи.

Відповідь: $y^2=-24x$.

26 Скласти найпростіше рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці перетину прямої $2x-5y-8=0$ з віссю абсцис. Побудувати цю параболу.

Відповідь: $y^2=16x$.

27 Скласти рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через точки $O(0;0)$ і $M(5;3)$.

Відповідь: $y^2=1{,}8x$.

28 Парабола, симетрична відносно осі Oy, проходить через точку $M(6;3)$ і початок координат. Скласти її рівняння.

Відповідь: $x^2=12y$.

29 На параболі $y^2=6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

Відповідь: $M_1(1;4)$, $M_2(1;-4)$.

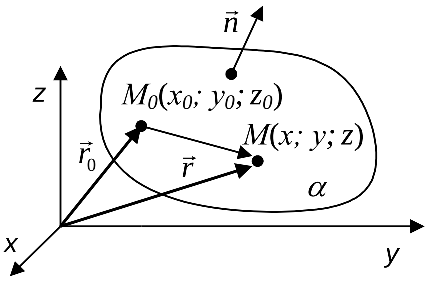
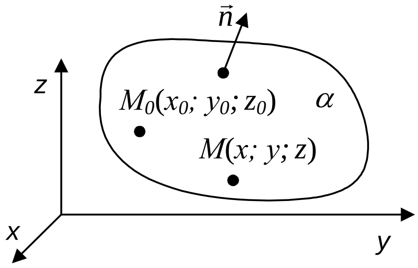
30 Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y-x=0$ і кола x^2+y^2+8x-0 і симетрична відносно осі абсцис.

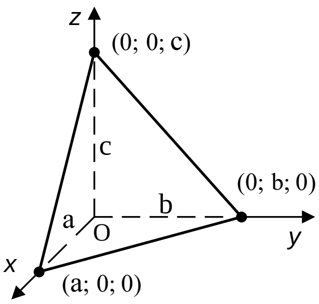
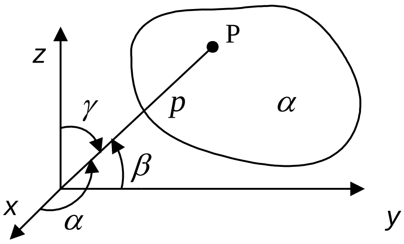
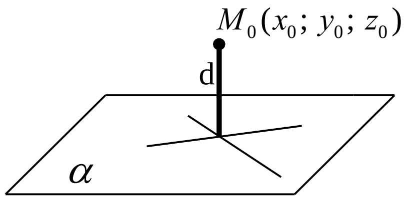
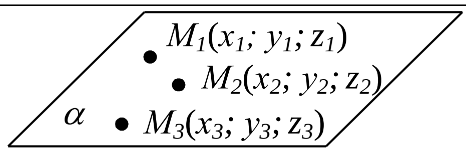
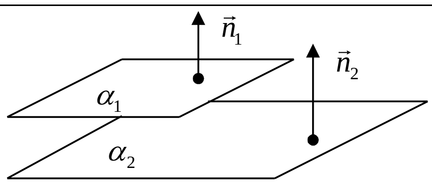
Відповідь: $y^2=-4x$, $x=1$.

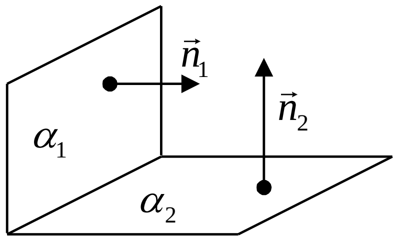
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Рівняння поверхні та лінії у просторі. Рівняння площини у просторі. Площина. Пряма лінія у просторі. Пряма і площина у просторі. Основні задачі.

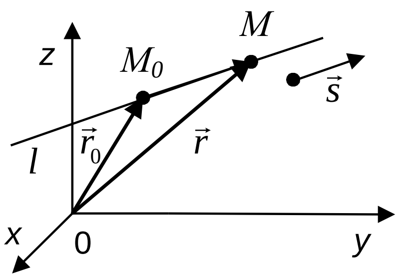
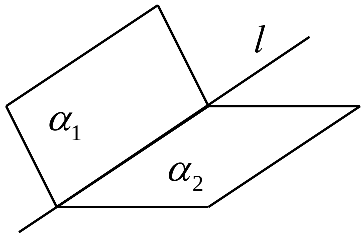
Таблиця 4.1 Площина

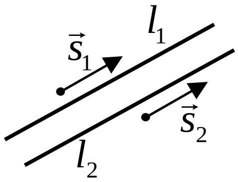
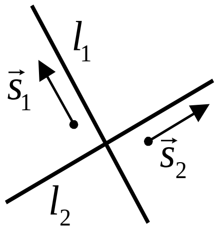
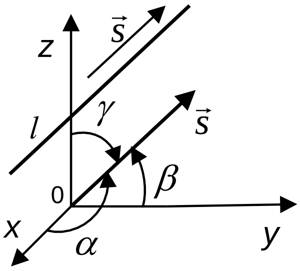
№ п/п	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Векторне рівняння площини	 $\vec{n}=\{A;B;C\}\perp\alpha$ $\vec{r}_0=\{x_0;y_0;z_0\}$ $\vec{r}=\{x;y;z\}$	$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$
2	Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі (в'язка площин)	 $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)\in\alpha$ $\vec{n}=\{A;B;C\}\perp\alpha$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
3	Загальне рівняння площини	$A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$	$Ax+By+Cz+D=0$
4	Рівняння площини, яка проходить через початок координат	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$
5	Рівняння площини, яка паралельна а) осі Ox б) осі Oy в) осі Oz	$A=0,\ D\neq 0$ $B=0,\ D\neq 0$ $C=0,\ D\neq 0$	$By+Cz+D=0$ $Ax+Cz+D=0$ $Ax+By+D=0$
6	Рівняння площини, яка проходить через а) вісь Ox б) вісь Oy в) вісь Oz	$A=0,\ D=0$ $B=0,\ D=0$ $C=0,\ D=0$	$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$

7	Рівняння площини, яка паралельна а) площині yOz б) площині xOz в) площині xOy	$B=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ B=0,\ D\neq 0$	$Ax+D=0$ $By+D=0$ $Cz+D=0$
8	Рівняння координатних площин: а) площини yOz б) площини xOz в) площини xOy	$B=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ B=0,\ D=0$	$x=0$ $y=0$ $z=0$
9	Рівняння площини у відрізках		$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$
10	Нормальне рівняння площини	 $OP\perp\alpha$, $\lvert OP\rvert = p$	$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\cos\beta +$ $+ z\cdot\cos\gamma - p = 0$ або $\dfrac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$
11	Відстань від точки до площини	 $Ax+By+Cz=0\quad(\alpha)$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
12	Рівняння площини, яка проходить через три задані точки		$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
13	Кут між двома площинами	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\phi=\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
14	Умова паралельності двох площин	 $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

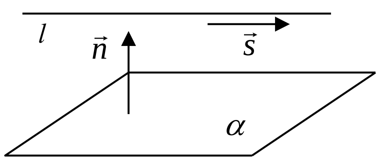
15	Умова перпендикуляр-ності двох площин	 $\alpha_1 \perp \alpha_2 \;\Rightarrow\; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$	$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
16	Рівняння в'язки площин, які проходять через лінію перетину двох даних площин	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 +$ $+ \lambda\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0$

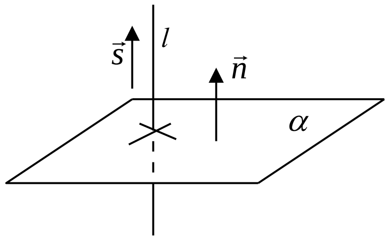
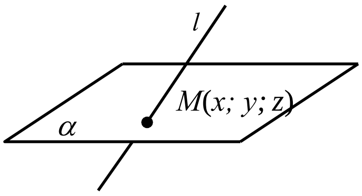
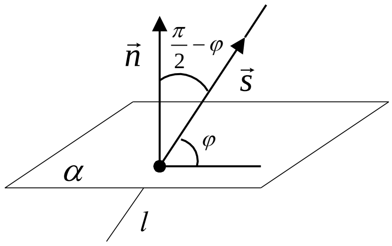
Таблиця 4.2 Пряма лінія у просторі

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Векторне рівняння прямої	 $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$	$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$
2	Параметричні рівняння прямої	$M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$ t – параметр	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$
3	Канонічні рівняння прямої	$M_0(x_0;\, y_0;\, z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$	$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$
4	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$M_1(x_1;\, y_1;\, z_1) \in l$ $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2) \in l$	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
5	Загальні рівняння прямої		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

6	Кут між двома прямими	$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$	$\cos\varphi=\pm\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$
7	Умова паралельності двох прямих	 $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$	$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$
8	Умова перпендику-лярності двох прямих	 $\vec{s}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$ $\vec{s}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$ $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$	$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$
9	Напрямні косинуси прямої	 $\vec{s}=\{m;n;p\}$	$\cos\alpha=\frac{s_x}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\beta=\frac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\gamma=\frac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Таблиця 4.3 Пряма і площина у просторі

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Умова паралельності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{s}$	$Am+Bn+Cp=0$

2	Умова перпендикулярності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha\perp l\Rightarrow\vec{n}\parallel\vec{s}$	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$
3	Точка перетину прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $l\cap\alpha=M(x;y;z)$	$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\\ Ax+By+Cz+D=0\end{cases}$
4	Кут між прямою і площиною	 $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{s}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert\cdot\lvert\vec{s}\rvert}$ $\sin\varphi=\frac{\lvert Am+Bn+Cp\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Точка P (2; -1; -1) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини .

Розв'язання. За умовою точка P належить шуканій площині, тому її рівняння шукатимемо у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Відомо також, що $OP\perp\alpha$. Отже, вектор $\overrightarrow{OP}$ можна вважати нормальним вектором $\vec{n}=\{A;B;C\}$ площини α. Оскільки $\overrightarrow{OP}=\vec{n}=\{2;-1;-1\}$, бо координати точки O (0; 0; 0), підставляючи його координати і координати точки P в рівняння площини, одержимо $2(x-2)-(y+1)-(z+1)=0$ або $2x-y-z-6=0$. Це і є шукане рівняння.

Приклад 2 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 (3; -2; -7) паралельно до площини $2x-3z+5=0$ (α_1).

Розв'язання. Точка M_1 належить шуканій площині α, тому її рівняння має вигляд $A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0$ (α).

За умовою площини паралельні, тому їх нормальні вектори колінеарні, а з умови колінеарності векторів одержуємо $\frac{A}{2}=\frac{B}{0}=\frac{C}{-3}$. А це означає, що вектор $\vec{n}_1=\{2;0;-3\}$ можна вважати нормальним вектором площини α. Таким чином, рівняння цієї площини $2(x-3)+0(y+2)-3(z+7)=0$ або $2x-3z-27=0$.

Цю задачу можна розв‘язати інакше: якщо площини паралельні, то їх рівняння можна перетворити так, що вони відрізнятимуться лише вільними членами. Тоді рівняння площин, паралельних даній площині, матиме вигляд: $2x-3z+D=0$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат *x* і *y* координати точки M_1 (3; –2; –7), через яку проходить площина, одержуємо рівняння $2\cdot 3-3\cdot(-7)+D=0$, звідки $D=-27$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуде вигляду $2x-3z-27=0$.

Приклад 3 Визначити, за яких значень l і m площини $2x+ly+3z-5=0$ (α_1) і $mx-6y-6z+2=0$ (α_2) будуть паралельні.

Розв'язання. За умовою паралельності двох площин маємо: $\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6}$, бо $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{2;l;3\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{m;-6;-6\}$.

Розв‘язуючи рівняння $\frac{2}{m}=\frac{3}{-6}$, одержуємо $m=\frac{2\cdot(-6)}{3}=-4$.

Із рівняння $\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6}$ маємо $l=3$.

Таким чином, при $l=3$ і $m=-4$ площини (α_1) і (α_2) будуть паралельні.

Приклад 4 Визначити, за яких значень l площини $5x+y-3z-2=0$ (α_1) і $2x+ly-3z+1=0$ (α_2) будуть перпендикулярні.

Розв'язання. $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{5;1;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_1), $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{2;l;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_2).

Згідно з умовою перпендикулярності двох площин, маємо $5\cdot 2+1\cdot l+(-3)\cdot(-3)=0$, звідки $l=-19$.

Отже, при $l=-19$ площини (α_1) і (α_2) будуть перпендикулярні.

Приклад 5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;3)$ паралельно до площини xOy.

Розв'язання. Шукана площина паралельна площині xOy, а тому її рівняння $Cz+D=0$. Підставляючи в це рівняння координати точки M_1(бо вона належить їй), одержимо $C\cdot 3+D=0$, звідки $D=-3C$. Тепер рівняння шуканої площини набуде вигляду $Cz-3C=0$ або $C(z-3)=3$. Оскільки $C\neq 0$, $z-3=0$. Це і є шукане рівняння.

Приклад 6 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M_1(1;4;-3)$.

Розв'язання. Рівняння площини, яка проходить через вісь *Oy***,** має вигляд $Ax+Cz=0$. Оскільки точка M_1 належить цій площині, її координати задовольняють цьому рівнянню і тому $A\cdot 1+C\cdot(-3)=0$, звідки $A=3C$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуває вигляду $3Cx+Cz=0$, або $C(3x+z)=0$. Оскільки $C\neq 0$, то $3x+z=0$ – шукане рівняння.

Приклад 7 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $y=0$ (α_1) і $2x-z+1=0$ (α_2).

Розв'язання. Точка M_1 належіть шуканій площині α, а тому маємо: $A(x-2)-B(y+1)+C(z-1)=0$.

За умовою $\alpha\perp\alpha_1\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{n_1}=\{0;1;0\}$, $\alpha\perp\alpha_2\Rightarrow\vec{n}\perp\overrightarrow{n_2}=\{2;0;-1\}$, а це означає, що $\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{k}$.

Оскільки $\vec{n}=\{A;B;C\}=\{-1;0;-2\}$, то рівняння шуканої площини $-(x-2)-2(z-1)=0$, або $x+2z-4=0$.

Приклад 8 Обчислити відстань d від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через три точки : $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Розв'язання. Складаємо рівняння площини, яка проходить через три точки: $\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-1\\ -2-1 & 1+1 & 3-1\\ 4-1 & -5+1 & -2-1\end{vmatrix}=0$ або $\begin{vmatrix}x-1 & y+1 & z-1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -4 & -3\end{vmatrix}=0$.

Розкривши визначник по елементам першого рядка, одержимо:

$$2(x-1)-3(y+1)+6(z-1)=0 \text{ або } 2x-3y+6z-11=0.$$

Тепер за формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що $x_0=-1$, $y_0=1$, $z_0=-2$, $A=2$, $B=-3$, $C=6$, $D=-11$, маємо:

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{28}{7}=4.$$

Приклад 9 Обчислити відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$ (α_1) і $4x-6y+12z+21=0$ (α_2).

Розв'язання. Знайдемо на одній із площин, наприклад, на площині α_1, довільну точку. Для цього в рівнянні α_1 покладемо $y=z=0$. Тоді $2x-14=0$, звідки $x=7$. Отже, знайдено точку $M_0(7;0;0)$, яка належить площині α_1. Тепер задача зводиться до знаходження відстані від точки M_0 до площини α_2. За формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що $A=4$, $B=-6$, $C=12$, $D=21$, $x_0=7$, $y_0=0$, $z_0=0$, маємо:

$$d=\frac{|4\cdot 7-6\cdot 0+12\cdot 0+21|}{\sqrt{16+36+144}}=\frac{49}{14}=3{,}5.$$

Приклад 10 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях від нуля відрізки однакової величини (вважати кожний відрізок напрямленим з початку координат).

Розв'язання. Шукаємо рівняння площини у відрізках, тобто у вигляді $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Оскільки за умовою $a=b=c$, рівняння площини набуде вигляду $x+y+z=a$. Точка M_1 належить площині, тому її координати задовольняють рівнянню $x+y+z=a$. Підставляючи в це рівняння координати мочки M_1, одержуємо $2-3-4=a$, звідки $a=-5$. Отже, рівняння шуканої площини $x+y+z+5=0$.

Приклад 11 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;5\}$.

Розв'язання. Використовуючи канонічні рівняння і враховуючи, що $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=-3$, $m=2$, $n=-3$, $p=5$, одержуємо $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$.

Це і є шукане рівняння.

Приклад 12 Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1; -1; -3) паралельно до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{0}$.

Розв'язання. Використовуючи параметричні рівняння і враховуючи, що напрямний вектор $\vec{s}=\{2;5;0\}$ даної прямої є також і напрямним вектором шуканої прямої, матимемо: $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1+5t, \\ z=-3. \end{cases}$

Приклад 13 Довести, що прямі $(l_1)\begin{cases} x = 2t+1, \\ y = 3t-2, \\ z = -6t+1 \end{cases}$ і $(l_2)\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$

паралельні.

Розв'язання. Маємо $\vec{s}_1 = \{2;\,3;-6\}$ - напрямний вектор прямої l_1 і

$\vec{s} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_2 = \{3;\,2;\,2\}$ - напрямний вектор прямої l_2.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$: $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 - 6\cdot 2 = 0$. Оскільки $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$, $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$. Звідси випливає, що $l_1 \perp l_2$. Таким чином, доведено, що дані прямі перпендикулярні.

Приклад 14 Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} x = 4+2t, \\ y = -3-t, \\ z = 5-2t. \end{cases}$

Розв'язання. Напрямним вектором даної прямої є вектор $\vec{s} = \{2;-1;-2\}$
.
Використовуючи формули для знаходження напрямних косинусів прямої, одержимо:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3};\ \ \cos\beta = -\frac{1}{3};\ \ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 15 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно до двох даних прямих:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}\ (l_1) \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}\ (l_2).$$

Розв'язання. Рівняння прямої l шукатимемо у вигляді $\dfrac{x-2}{m} = \dfrac{y+3}{n} = \dfrac{z-5}{p}$.

Оскільки $l \perp l_1$ і $l \perp l_2$,$\vec{s} \perp \vec{s}_1 = \{-1;\,2;\,2\}$ і $\vec{s} \perp \vec{s}_2 = \{6;\,3;-2\}$, звідки випливає, що напрямним вектором шуканої прямої можна вважати вектор $\vec{s} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 15\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_3 = \{2;-2;\,3\}$.

Отже, вважаючи, що $m = 2,\ n = -2.\ p = 3$, рівняння шуканої прямої набуде вигляду $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-5}{3}$.

Приклад 16 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;-1;-3)$, $M_2(3;1;-5)$. Знайти її напрямні косинуси.

Розв'язання. Використовуючи рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки, одержимо $\frac{x-2}{3-2}=\frac{y+1}{1+1}=\frac{z+3}{-5+3}$ або $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+3}{-2}$. Напрямний вектор цієї прямої $\vec{s}=\{m;n;p\}=\{1;2;-2\}$.

Тепер знаходимо:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3};\ \cos\beta=\frac{2}{3};\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}.$$

Приклад 17 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

Розв'язання. Запишемо канонічні рівняння прямої , яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$:

$$\frac{x-2}{m}=\frac{y+3}{n}=\frac{z+5}{p}.$$

Невідомі параметри m, n, знайдемо з умови перпендикулярності прямої і площини. Оскільки $l\perp\alpha$, то $\vec{s}\parallel\vec{n}$, а це означає, що нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(6;-3;-5)$ можна вважати і напрямним вектором шуканої прямої. Отже, $\vec{s}=(m;n;p)=(6;-3;-5)$. Підставляючи координати вектора $\vec{s}=(m;n;p)=(6;-3;-5)$ у рівняння прямої, одержуємо:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}.$$

Приклад 18 За якого значення n пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y-6z+2=0$?

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(3;n;-2)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(1;-3;6)$. За умовою паралельності прямої і площини: $3\cdot 1+n\cdot(-3)+(-2)\cdot 6=0$, звідки $n=-3$. Таким чином, при $n=-3$ пряма і площина будуть паралельні.

Приклад 19 За яких значень m і C пряма $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини $3x-2y+Cz+1=0$?

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(m;4;-3)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(3;-2;C)$. За умовою перпендикулярності прямої і площини: $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$. Розв'язуючи рівняння $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}$, одержуємо $m=-6$. Із рівняння $\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$ знаходимо, що $C=1,5$. Таким чином, при $m=-6$ і $C=1,5$ пряма і площина будуть перпендикулярні.

Приклад 20 Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в параметричній формі

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t.$$

Звідси $x=t+1,\ y=-2t-1,\ z=6t$.

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t, \\ 2x+3y+z-1=0. \end{cases}$

Підставляючи вирази для x, y, z в останнє рівняння системи, одержуємо

$$2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0,\ \text{або}\ 2t-2=0,\ \text{звідки}\ t=1.$$

Із рівняння прямої при $t=1$ знаходимо координати точок перетину:

$$x=1+1=2,\quad y=-2\cdot1-1=-3,\quad z=6\cdot1=6.$$

Таким чином, шуканою точкою перетину прямої і площини є точка *M(2; –3;6).*

Приклад 21 Знайти проекцію точки *P(5;2;–1)* на площину $2x-y+3z+23=0$.

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що точка Р не належить площині (пропонуємо переконатися в цьому самостійно). І, тому задача зводиться до знаходження перпендикуляра, опущеного з точки Р на задану площину (рис.4.1). Використовуючи параметричні рівняння прямої у просторі і враховуючи, що нормальний вектор площини $\vec{n}=(2;-1;3)$ є і одночасно нормальним вектором прямої PP_1: $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=2-t, \\ z=-1+3t. \end{cases}$

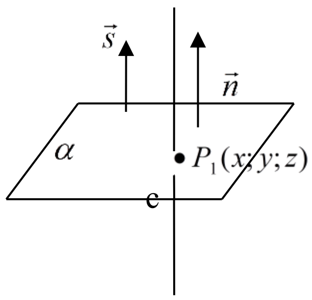


Рис. 4.1

Тепер знайдемо точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини $2x+3y+z-1=0$, розв'язуючи систему $\begin{cases} x=5+2t, \\ y=2-t, \\ z=-1+3t, \\ 2x-y+3z+23=0. \end{cases}$

Підставляючи вирази для x, y, z в останнє рівняння системи, одержуємо $2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0$. Або $2t-2=0$, звідки $t=-2$.

При $t=-2$ одержуємо:

$x=5-4=1, \quad y=2-(-2)=4, \quad z=-1+3\cdot(-2)=-7.$

Отже, проекцією точки P на площину є точка P_1(1;4;-7).

Приклад 22 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_0(2;-3;4) паралельно прямим $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ і $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$.

Розв'язання Згідно з рівняння площини запишемо у вигляді

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0.$$

Через те, що $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_1=(1;2;8)$ і $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_2=(4;0;2)$, то $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}$, і тому рівняння шуканої площини набуде вигляду *4(x-2)+30(y+3)+8(z-4)=0*, або *2x+15y-4z+57=0.*

Зауважимо, що нормальним вектором шуканої прямої можна було б вважати і вектор $\vec{n}_1=(2;15;-4)$, який є паралельний вектору $\vec{n}=(4;30;-8)$.

Приклад 23 Знайти кут між прямою $\begin{cases}x-y-8=0,\\ 2x+z-14=0\end{cases}$ і площиною *4x-2y-2z+7=0.*

Розв'язання. За формулою знаходження кута між площиною та прямою у просторі знаходимо:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Оскільки нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(4;-2;-2)$ і напрямний вектор прямої $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}$,

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot(-1)-2\cdot(-1)-2\cdot 2|}{\sqrt{16+4+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi=30^\circ$.

Домашнє завдання

Теорія Функція. Основні властивості функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції. [2], с. 211 –292.

Вправи

1 Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Oy відрізок $b=5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=\{3;-2;4\}$.

Відповідь: $3x-2y+4z+10=0$.

2 Дано точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(4;-2;-1)$. Скласти рівняння площини, проведеної через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Відповідь: $2x-y-4z+7=0$.

3 Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $x-2y+z-3=0$.

Відповідь: $x-2y+z=0$.

4 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-1;2)$ паралельно площині $2x-3y+z-5=0$.

Відповідь: $2x-3y+z-7=0$.

5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;0;1)$ і $M_2(1;2;-3)$ перпендикулярно до площини $x-y+z-1=0$.

Відповідь: $x+2y+z-2=0$.

6 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-1;1)$ і перпендикулярно до площин $2x-y+z-1=0$ і $x+2y-z+1=0$.

Відповідь: $x-3y-5z+1=0$.

7 Знайти відстань між паралельними площинами $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z-5=0$.

Відповідь: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

8 Знайти гострий кут між площинами $11x-8y-7z+5=0$ і $7x+2y-8z-3=0$.

Відповідь: $\varphi=45^\circ$.

9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{3;-1;-4\}$.

Відповідь: $9x-y+7z-40=0$.

10 Показати, що площини $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z+3=0$ паралельні.

11 Показати, що площини $x+2y-5z+1=0$ і $3x-4y-z-2=0$ перпендикулярні.

12 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-5;2;-1)$ паралельно до площини YOZ.

Відповідь: $x+5=0$.

13 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(4;-1;2)$.

Відповідь: $2y+z=0$.

14 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;1)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно до осі Oy.

Відповідь: $x-z-1=0$.

15 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-2;3)$ перпендикулярно до осі Oz.

Відповідь: $z-3=0$.

16 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-2;6)$ і $M_2(5;-4;-2)$ і відтинає на осях Ox і Oy відмінні від нуля відрізки однакової величини.

Відповідь: $4x+4y+z-2=0$.

17 Скласти рівняння площин, які проходять через точку $M_1(4;3;2)$ і відтинають на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

Відповідь: $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$.

18 Знайти відстань від точки $M_1(2;3;-1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

Відповідь: $d=4$.

19 Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$ і $2x-3y+6z+28=0$.

Відповідь: $d=6$.

20 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-2;4;1)$, $M_2(0;2;-1)$, $M_3(2;0;-1)$

Відповідь: $x+y-2=0$.

21 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;3;0)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

Відповідь: $\dfrac{x+4}{1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z}{5}$.

22 Знайти кут між прямою $\begin{cases} x=2z-1, \\ y=-2z+1 \end{cases}$ і прямою, яка проходить через початок координат і через точку з координатами $(1;-1;-1)$.

Відповідь: $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

23 Показати, що пряма $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x=z+1, \\ y=1-z. \end{cases}$

24 Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

Відповідь: $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+3}{-7}$.

25 Довести паралельність прямих $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

26 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;0;2)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Відповідь: $\frac{x+4}{-2}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{-5}$.

27 Скласти канонічні рівняння діагоналей паралелограма, три вершини якого знаходяться в точках $A(2;4;6)$, $B(-3;5;4)$, $C(8;-6;2)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{0}$.

28 Довести, що пряма $\begin{cases} x=2-3t, \\ y=1-4t, \\ z=-5+4t \end{cases}$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0.$

29 Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$, $x+y-z+2=0;$

б) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0;$

в) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0.$

Відповідь: а) M(4;-5;1);

б) пряма паралельна площині;

в) пряма лежить на площині.

30 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Відповідь: $x+2y+3z=0.$

31 За якого значення C пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-2=0. \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$?

Відповідь: C=-2.

32 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку $M_0(2;-2;1)$ і пряму $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+2, \\ z=3t-3. \end{cases}$

Відповідь: $4x+6y+5z-1=0.$

33 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(3;1;\ -2)$ і точку перетину прямої $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ і площини $2x-3y-5z-3=0.$

Відповідь: $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}.$

34 Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (2;3;-1) на площину $4x+5y-2z+3=0.$

Відповідь: $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-3}{5}=\dfrac{z+1}{-2}.$

35 Скласти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z+1}{4};\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-5}=\dfrac{z+2}{4}.$

Відповідь: $7x+y-4z-9=0.$

36 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+2}{2}$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z-4=0.$

Відповідь: $8x-5y-z-4=0.$

37 Знайти проекцію точки $M(3;-1;1)$ на площину $x+2y+3z-30=0.$

Відповідь: $M_1(5;5;5).$

38 Знайти проекцію точки $P(5;-6;7)$ на пряму
$x=7-2t;\ y=-1+3t;\ z=4+t.$

Відповідь: $P_1(9;\ -2;3).$

39 За яких значень n і A пряма $x=3+2t;\quad y=-5;\quad z=-5+nt;$ перпендикулярна до площини $Ax-2y+3z-5=0.$

Відповідь: A=1, $n=-4$.

40 Знайти кут між прямою $x=8-2t;\ \ y=7-2t;\ \ z=9+4t;$ і площиною 6 $x-3y-3z+1=0.$

Відповідь: $\varphi=30^{\circ}.$

41 Знайти точку, симетричну точці P (2;-4;5) відносно прямої $\begin{cases} x=1-3t, \\ y=-3+t, \\ z=3-4t. \end{cases}$

Відповідь: $P_1(-12;\ 2;-15).$

42 Знайти синус кута між прямою $\begin{cases} x+y+z-4=0, \\ 2x-4y+3z-1=0 \end{cases}$ і площиною

$x+y+3z-1=0.$

Відповідь: $\sin\varphi=\dfrac{6}{\sqrt{418}}.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Границя функції. Визначні границі.
Неперервність функції. Точки розриву функції.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти область визначення функцій :

а) $y = \dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$, б) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, в) $y = \arccos\dfrac{1-2x}{4}$.

Розв'язання.

а) Функція визначена для всіх значень x, крім тих, за яких знаменник $x^2 - 3x + 2$ дробу $\dfrac{2}{x^2 - 3x + 2}$ перетворюється на 0. Розв'язавши рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$ знаходимо $x_1 = 1,\ x_2 = 2$. Тому областю визначення даної функції є сукупність усіх дійсних чисел, крім 1 та 2, тобто $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

б) Корені парного степеня існують лише для невід'ємних чисел. Тому область визначення даної функції можна розглядати як сукупність усіх значень x, що задовольняють нерівності $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Розв'яжемо сказану нерівність методом інтервалів. Для цього знайдемо корені рівняння $x^2 - 4x + 3 = 0$. За теоремою Вієта $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Ці точки поділяють всю числову вісь на інтервали: $(-\infty;1),\ \ (1;3),\ \ (3;+\infty)$.

Для зручності позначимо ліву частину нерівності через y і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.1):

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3);\ \ y(0) = 3 > 0;\ \ y(2) = -1 < 0;\ \ y(4) = 3 > 0 .$$

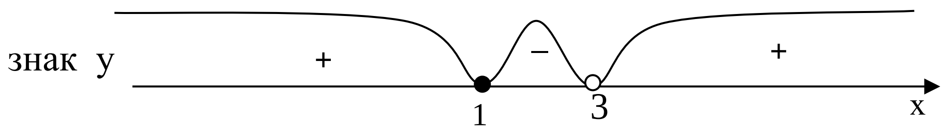


Рис.5.1

Таким чином, область визначення даної функції:

$$D(y) = (-\infty;1] \cup [3;+\infty) .$$

в) Позначимо $\dfrac{1-2x}{4} = t$. Відомо, що функція $y = \arccos t$ визначена при $-1 \leq t \leq 1$. Отже, задана буде визначена для всіх значень x, що задовольняють нерівності: $-1 \leq \dfrac{1-2x}{4} \leq 1$. Розв'язуючи цю нерівність, одержимо: $-4 \leq 1 - 2x \leq 4$, або $-5 \leq -2x \leq 5$, звідки $\dfrac{5}{2} \geq x \geq -\dfrac{3}{2}$. Отже, область визначення даної функції $D(y) = \left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Приклад 2 Знайти інтервали знакосталості функції $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує в точках, де $x^2-3x+2=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=2$. Функція дорівнює нулю при $x=0$. Відкладемо одержані значення x на числовій прямій і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.2):

$$y(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-1)(x-2)};\ y(-1)<0,\ y(0,5)>0,\ y(1,5)<0,\ y(3)>0.$$

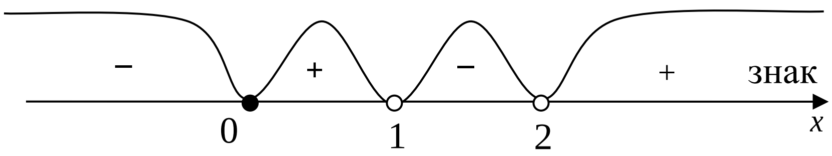


Рис.5.2

Отже, $y<0$ для $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ і $y>0$ для $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$.

Приклад 3 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

Розв'язання. Функція, границю якої треба знайти, елементарна, тому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0^3-3\cdot 0+1}{0-4}+1=\frac{3}{4}.$$

Приклад 4 Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

Розв'язання. Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу. Тоді

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x^4+x^2=1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{0}{9+3+1}=\frac{0}{13}=0.$$

Приклад 5 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{1-x}$.

Розв'язання. Границя знаменника дорівнює нулю, тому теорему 6 безпосередньо застосувати не можна, тому що ділення на нуль неможливе. Якщо $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$, то $1-x$ є величина нескінченно мала, а обернена до неї

$\dfrac{1}{1-x}$ – нескінченно велика. Отже, умовно можна записати, що $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$.

Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

Для розкриття цієї невизначеності користуються такими методами:

а) розкладають чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі;

б) переносять ірраціональність з чисельника у знаменник або із знаменника в чисельник, а іноді за необхідністю – і те і друге, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі;

в) використовують першу чудову границю

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\ell im_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;$$

г) використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

Нагадаємо, що коли $\ell im_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1,$ то $\alpha\, і\, \beta-$ еквівалентні нескінченно малі величини при $x\to x_{0,}$ тобто $\alpha\sim\beta$.

При $x\to 0$ *sin x~x, tg x~x, arsin x~x, arctg x~x,* $\ell n(1+x)$*~x,* ℓ^x-1*~x.*

Зауважимо, що в таких випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являє собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то при обчисленні границі, взагалі кажучи, не можна заміняти окремі додатки еквівалентними функціями. Така заміна може призвести до неправильного результату.

Приклад 6 Знайти $\ell im_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Розв'язання. При $x\to 1$ чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо: $x^2-2x+1=(x-1)^2,\quad x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$

Тоді

$$\ell im_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\ell im_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

Слід зазначити, скорочення дробу на $x-1$ було законним тому, що при знаходженні границі в точці $x=1$ значення цієї функції у точці $x=1$ не беремо до уваги, тобто *x*, прямуючи до одиниці і, отже, на нуль ми не скорочували.

Приклад 7 Знайти $\ell im_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$ а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$ де x_1 і x_2- корені рівняння $ax^2+bx+c=0,$ маємо: $8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$

$$6x^2-5x+1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\ell im_{x\to 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)}{(2x-1)(3x-1)}=\ell im_{x\to 1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

Приклад 8 Знайти $\ell im_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо визначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Звільнимося від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник $\sqrt{x-1}+2.$ Після скороченого дробу на нескінченно малий множник і використання теорем про границі, одержимо:

$$\ell im_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\ell im_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\ell im_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 9 Знайти $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник у точці $x=0$ мають границю, яка дорівнює нулю. Застосувати теорему про границю частки не можна. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)$.

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\ell im_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\ell im_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 10 Знайти $\ell im_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\ell im_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При $x\to 0$ $\sin 3x \sim 3x$, тому

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\ell im_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\ell im_{x\to 0}3=3.$$

Приклад 11 Знайти $\ell im_{x\to 0}\dfrac{tg 2x}{tg 5x}$.

Розв'язання. Через те що при $x\to 0$ $tg 5x \sim 5x$ $і$ $tg 2x\sim 2x$,

$$\ell im_{x\to 0}\frac{tg 2x}{tg 5x}=\frac{0}{0}=\ell im_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Приклад 12 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$ і при $x\to 0$

$\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}$, матимемо $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\dfrac{x^2}{4}}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 13 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник цього дробу при $x=0$ перетворюється на нуль. Тому застосувати теорему про границю дробу не можна. Перетворимо дріб, додавши чисельник у вигляді добутку:

$$\frac{tg\ x-\sin x}{x^3}=\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^{3}\cdot\cos x}=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}.$$

Тепер знаходимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3\cdot\cos}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1, a\sin\dfrac{2x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}$ при $x\to 0$. Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\ x-\sin x}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

Слід зауважити, що в цьому прикладі при заміні $tgx\ на\ x$, $\sin x\, на\, x$ одержали $\dfrac{0}{x^3}$, а це означало, що границя функції дорівнює нулю, а це не вірно.

Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$

Для розкриття цієї невизначеності заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищу, що входить до них степінь x, і потім переходять до границі.

Приклад 14 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Розв'язання. Ні чисельник , ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Знаходимо

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$ $1/x\to 0$, $1/x^3\to 0$, $3/x^2\to 0$, $1/x^4\to 0$, то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Приклад 15 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник необмежено збільшується (одержуємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). Поділивши чисельник і знаменник на x^4, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}} = \frac{1-0}{0-0+0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

а це означає, що границя функції не існує.

Слід зауважити, що запис $\frac{1}{0}=\infty$ є чисто умовним. Його треба розуміти так: $\frac{I}{н.м.в.} = н.в.в.$, тобто величина, обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

Приклад 16 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^2, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-1/x^2}{2+1/x^2} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Далі при обчисленні границь можна користуватись таким правилом: якщо чисельник і знаменник дробу - многочлени і $x\to\infty$, то границя дробу дорівнює:

I) відношенню коефіцієнтів при старшій степені змінної, якщо многочлени однакової степені;

2) нулю, якщо степінь многочленна чисельника нижча за степінь многочленна знаменника;

3) нескінченності, якщо степінь многочленна чисельника вища за степінь многочленна знаменника.

Приклад 17 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$.

Розв'язання. Оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові і $x\to\infty$, шукана границя дорівнює відношення коефіцієнтів при старшій степені x, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-3}{3}=-1.$$

Розкриття невизначеності виду $\infty-\infty$

Невизначеність такого виду розкривається одним з двох шляхів:

I) зведенням дробів до спільного знаменника, в результаті чого приходимо або до невизначеності $\frac{o}{o}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$;

2) перенесенням ірраціональності з чисельника в знаменник.

Приклад 18 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

Розв'язання. При $x\to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Приклад 19 Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Помноживши і поділивши дану функцію на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$, одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6x-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+6/x}{\sqrt{1-5/x+6/x^2}+1}=-5/2.$$

Розкриття невизначеності виду $0 \cdot \infty$

Шляхом заміни змінної або за допомогою алгебраїчних перетворень функції невизначеність $0 \cdot \infty$ зводиться або до невизначеності $\frac{0}{0}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$.

Слід зауважити, що множення можна замінити діленням на обернену величину і тому $0 \cdot \infty$ можна розглядати як $\frac{0}{\infty^{-1}} = \frac{0}{0}$ або як $\frac{\infty}{0^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$ (як уже зазначалося, ці записи чисто умовні).

Приклад 20 Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \cdot ctg \frac{x}{3} \right)$.

Розв'язання. При $x \to 0$ одержуємо невизначеність виду $0 \cdot \infty$ Записавши в іншому вигляді дану функцію і використавши теореми про границі, матимемо:

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot ctg \frac{x}{3} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{tg\, x/3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x/3} = 3.$$

При розв'язанні цього прикладу прийнято до уваги, що при $x \to 0$ $tg \frac{x}{3} \sim \frac{x}{3}$.

Приклад 21 Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \left[(1 - x) tg \frac{\pi x}{2} \right]$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $0 \cdot \infty$.

Покладемо $1 - x = z$. Звідси випливає, що $z \to 0$, оскільки $x \to 1$.

Тоді, виконуючи відповідні перетворення функції і переходячи до границі, знаходимо

$$\lim_{x \to 1} \left[(1 - x) tg \frac{\pi x}{2} \right] = (0 \cdot \infty) = \lim_{z \to 0} \left[z \cdot tg \frac{\pi(1 - z)}{2} \right] =$$

$$\lim_{z \to 0} \left[z tg \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2} \right) \right] = \lim_{z \to 0} \left(z \cdot ctg \frac{\pi z}{2} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{tg \frac{\pi z}{2}} = = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

Розкриття невизначеності виду 1^{∞}

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу чудову границю

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \to \infty} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2{,}71828\ldots$$

Зазначимо, що число e ірраціональне. Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом і позначають $\ln x \equiv \log_e x$.

Приклад 22 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{m\,x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність 1^{∞}. Виконуючи елементарні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, одержуємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}\cdot mx}=e^{km}.$$

Приклад 23 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^{∞}. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Приклад 24 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^{2}\sqrt{x}\right)^{1/2x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(1+tg^{2}\sqrt{x}\right)^{1/2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+tg^{2}\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{tg^{2}\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^{2}\sqrt{x}}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{tg^{2}\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^{2}\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{1/2}.$$

При розв'язанні прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg^{2}\sqrt{x}\sim\left(\sqrt{x}\right)^{2}=x$.

Приклад 25 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

Розв'язання. У результаті підстановки граничного значення x маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Використавши формули потенціювання і другу чудову границю, одержимо

$$\ell im_{x\to 0}\frac{\ell n(a+x)-\ell na}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\ell im_{x\to 0}\frac{\ell n\frac{a+x}{a}}{x}=\ell im_{x\to 0}\ell n\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}=$$

$$=\ell n\,\ell im_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/x}=\ell n\,\ell im_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ell ne^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

Приклад 26 Установити, чи функція $y=2^{1/x}$ неперервною або розривною для $x=3$ і $x=0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x=3$ маємо: $y(3)=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}$;

$$\ell im_{x\to 3+0}y=\ell im_{x\to 3+0}2^{1/x}=2^{\frac{1}{3+0}}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2};\quad \ell im_{x\to 3-0}y=\lim_{x\to 3-0}2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{3-0}}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x=3$ виконується, отже, в точці $x=3$ функція неперервна. Проведемо аналогічні міркування при $x\to 0: y(0)=2^{1/0}$ не існує, бо ділення на нуль не можливо. $\ell im_{x\to +0}y=\ell im_{x\to +0}2^{1/x}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty$,

$$\ell im_{x\to -0}y=\ell im_{x\to -0}2^{1/x}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Умова неперервності при $x=0$ не виконується, отже, в точці $x=0$ функція розривна (має нескінчений розрив).

Приклад 27 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y=\begin{cases}-1, & \text{якщо}\quad x<1,\\ x^2-2, & \text{якщо}\quad 1\le x\le 1,\\ 1, & \text{якщо}\quad x>1.\end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1,\quad y=x^2-2,\quad i\quad y=1$
є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною тільки в тих точках, де зміняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ з $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо:

$$\left.\begin{aligned}&y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1\\ &\ell im_{x\to -1+0}y=\ell im_{x\to -1+0}(x^2-2)=-1\\ &\ell im_{x\to -1-0}y=\ell im_{x\to -1-0}(x^2-2)=-1\end{aligned}\right\}\text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=1^2-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1+0} y=\lim\limits_{x\to 1+0} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to 1-0} y=\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ — пряма $y=1$ (рис. 5.3).

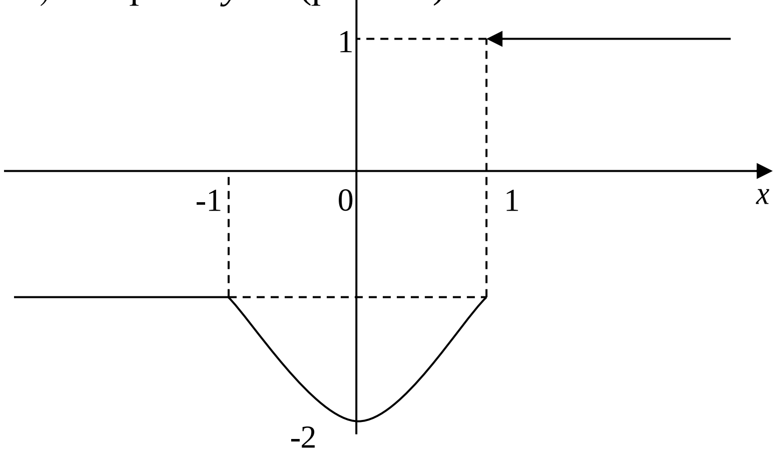


Рис. 5.3

Приклад 28 Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ і дослідити характер розриву.

Розв'язання. Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Оскільки $x^2-4=0$ при $x=\pm 2$, задана функція має дві точки розриву: $x=-2$ і $x=2$.

Досліджуємо характер розриву функції в цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -2+0} y=\lim_{x\to -2+0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{-2}{-0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to -2-0} y=\lim_{x\to -2-0}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to -2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{-2}{+0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 2+0} y=\lim_{x\to 2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{2}{+0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 2-0} y=\lim_{x\to 2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)}=\frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{2}{-0}=-\infty.$$

Таким чином, в точках $x=-2$ і $x=2$ функція має нескінченний розрив або розрив другого роду.

Слід зазначити, що функція $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ непарна, а тому достатньо було б дослідити характер розриву лише в точці $x=2$.

Домашнє завдання

Теорія Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Диференціал функції.
[2], с. 305 –340.

Вправи

1 Знайти область визначення функцій:

а) $y=\frac{1}{x^2+1}$. Відповідь: вся числова вісь .

б) $y=1-\sqrt{1-x^2}$. Відповідь: [–1;1].

в) $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$. Відповідь: $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

г) $y=\arcsin\frac{x}{2}$. Відповідь: $[-4\,;\,4\ ]$.

2 Знайти корені функцій і інтервали знакосталості, якщо а) $y=x^2-5x+6$, б) $y=|x|$.

Відповідь: а) $y=0$ при $x=2$ і $x=3$; $y>0$ при $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; $y<0$ при $x\in(2;3)$, б) $y=0$ при $x=0$; $y>0$ при $x\neq 0$.

3 Знайди область визначення функцій.

а) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\frac{3-2x}{5}$. Відповідь: $[-1\,;3\ ]$.

б) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$. Відповідь: $(3/2;\,2)\bigcup(2;+\infty)$.

в) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$. Відповідь: $x=1$.

4 Знайти границі

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$.
Відповідь: 9.

4.2 $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.
Відповідь: $-\frac{2}{5}$.

4.3 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.
Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4.4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.
Відповідь: 0.

4.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$.
Відповідь: e^2 .

4.18 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.
Відповідь: 0,5.

4.19 $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.
Відповідь: - $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.20 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.
Відповідь: -2,5.

4.5 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{56}$.

4.6 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: 0.

4.7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

4.8 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$.

Відповідь: 0.

4.9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

Відповідь: $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

4.10 $\lim\limits_{x\to\pi/2} \left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) tg\, x\right]$

Відповідь: 1.

4.11 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Відповідь: e^6.

4.12 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{2}$

Відповідь: e^2.

4.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ell n(1+kx)}{x}$

Відповідь: *k*.

4.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$

Відповідь:-2.

4.21 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

Відповідь: -2.

4.22 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right)$.

Відповідь: -4.

4.23 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

Відповідь: 1.

4.24 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Відповідь: -2.

4.25 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\sin x}$.

Відповідь: 3.

4.26 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{3}$.

4.27 $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

4.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

Відповідь: 4.

4.29 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot ctg 5x)$.

Відповідь: $\dfrac{3}{5}$.

4.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+5}-x\right)$.

Відповідь: 0.

4.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$

Відповідь: - 9.

4.31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\cdot\sin 3x}{x^2+x^3}$.

Відповідь: 24.

4.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$

Відповідь: 5.

4.32 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2 x\right)^{3ctg^2 x}$.

Відповідь: e^3.

5 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції $y=\begin{cases} e^x, \text{ якщо } x<0, \\ x, \text{ якщо } x\ge 0. \end{cases}$

Відповідь: $x = 0$ – точка розриву першого роду.

6 Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$ і установити характер розриву.

Відповідь: $x = 3$ – точка розриву другого роду; $x = -1$ – точка усувного розриву.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Диференціал функції.

Основні правила диференціювання функцій

$$(C)'=0 \qquad (C=const);$$

$$(u+v-z)'=u'+v'+z';$$

$$(uv)'=u'v+uv';$$

$$(Cu)'=Cu';$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v+v'\cdot u}{v^2}, \quad v\ne 0;$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{Cv'}{v^2}, \quad v\ne 0;$$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \text{ або } \frac{dy}{dx}=\frac{df(u)}{du}\cdot\frac{du(x)}{dx}, \text{ якщо } y=f(u),$$

де $u=\varphi(x)$ – правило диференціювання окладної функції.

Таблиця 6.1 – Таблиця похідних

$y=f(x)$	$y=f(u)$, де $u=\varphi(x)$, тобто $y=f(\varphi(x))$
$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$	$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\cdot u'$
$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$
$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	$(au)'=a^u\ln a\cdot u';\ 0<a\neq 1$
$\left(e^x\right)'=e^x$	$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\dfrac{1}{u\ln a}\cdot u',\ 0<a\neq 1$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$	$(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(arcctgx)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y=3x^2-4x$.

Розв’язання. Для даної функції маємо

1) $y+\Delta y=3(x+\Delta x)^2-4(x+\Delta x)=3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-4x-4\cdot\Delta x$;

2) $\Delta y=(3x^2+6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-4x-4\cdot\Delta x)-(3x^2-4x)=6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-4\cdot\Delta x$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{6x\cdot\Delta x+3(\Delta x)^2-4\cdot\Delta x}{\Delta x}=6x-4+3\cdot\Delta x$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(6x-4+3\cdot\Delta x\right)=6x-4$.

Таким чином, $y'=6x-4$.

Приклад 2 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=5x^2-3x+2$ у точці з абсцисою $x=1$.

Розв'язання. За умовою задачі $x_0=1$. Тоді $f(x_0)=f(1)=5\cdot 1^2-3\cdot 1+2=4$. Знайдемо похідну функції $y=5x^2-3x+2$ у точці $x_0=1$. Вона дорівнює

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5\left(1+\Delta x\right)^2-3\left(1+\Delta x\right)+2\right)-\left(5\cdot 1^2-3\cdot 1+2\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(7+5\cdot\Delta x\right)=7.$$

Рівняння шуканої дотичної і нормалі мають відповідно вигляд:

$$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right) \qquad \text{і} \qquad y-f\left(x_0\right)=-\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x-x_0\right)$$

У нашому прикладі: $y-4=7\left(x-1\right)$ і $y-4=-\dfrac{1}{7}\left(x-1\right)$, або

$$7x-y-3=0 \qquad \text{і} \qquad x+7y-29=0.$$

Приклад 3 $y=2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила диференціювання та таблицю похідних, знаходимо: $y'=\left(2\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt[4]{3}\right)'=2\left(\sqrt{x}\right)'-\left(\dfrac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt[4]{3}\right)'=$

$$=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)'+0=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}+1}{x^2}.$$

Прилад 4 $f(z)=\dfrac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Знайти $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Потрібно знайти значення похідної при $z=\dfrac{1}{4}$. Для цього спочатку знайдемо $f'(z)$, а потім обчислимо її значення при заданому значенні аргументу. Попередньо виконаємо тотожні перетворення $f(z)$:

$$f(z)=2z^2-3+z^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z}.$$

Згідно з правилами диференціювання та таблицею похідних

$$f'(z)=\left(2z^2\right)'-\left(3\right)'+\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)'-\left(\frac{1}{z}\right)'=4z-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{z^2}.$$

При $z=\frac{1}{4}$ $f'\left(\frac{1}{4}\right)=4\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1-4+16=13.$

Приклад 5 Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y=\frac{4}{15}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x=1$?

Розв'язання. Знаходимо похідну $y'=\frac{4}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$. При $x=1$ $y'(1)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$, тобто $tg\alpha=1$, звідки $\alpha=45^\circ$.

Приклад 6 Точка рухається по прямій так, що її відстань від початкового пункту через *t* секунд дорівнює $S=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$;

а) в які моменти точка була в початковому пункті?

б) в які моменти її швидкість дорівнювала нулю?

Розв'язання. Виходячи із механічного тлумачення похідної, маємо:

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right)'=t^3-12t^2+32t=t\left(t^2-12t+32\right)=t(t-4)(t-8).$$

Розв'язуючи рівняння $v(t)=0$, тобто $t(t-4)(t-8)=0$, знаходимо $t_1=0,\ t_2=4$ і $t_3=8$.

Точка буде в початковому пункті тоді, коли $S(t)=0$. Оскільки $S(t)=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2=\frac{1}{4}t^2\left(t^2-16t+64\right)=\frac{1}{4}t^2(t-8)^2$, то розв'язуючи рівняння $\frac{1}{4}t^2(t-8)^2=0$, знаходимо $t_1=0$ і $t_2=8$.

Таким чином, точка була в початковому пункті при $t_1=0$ і $t_2=8$, а її швидкість дорівнювала нулю при $t_1=0$, $t_2=4$. і $t_3=8$.

Приклад 7 Тіло масою 3 кг рухається прямолінійно за законом

$$S=1+t+t^2,$$

де *S* виражено в сантиметрах, *t* – в секундах. Обчислити кінетичну енергію тіла $\left(T=\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 секунд після початку руху.

Розв'язання. $v(t)=S'(t)=(1+t+t^2)'=1+2t.$ Через 5 секунд після початку руху швидкість тіла дорівнюватиме $v(5)=11$.

Його кінетична енергія $T(5)=\dfrac{3\cdot 121}{2}=181{,}5\cdot 10^3$ ерг.

Приклад 8 Знайти похідну функції $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. Подавши функцію у вигляді $y=e^u,\ u=\sqrt{v},\ v=\ln x$ і скориставшись правилом диференціювання складної функції, знайдемо

$$y'_x=y'_u u'_v v'_x=\left(e^u\right)'_u\left(\sqrt{v}\right)'_v\left(\ln x\right)'_x=e^u\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{x}=e^{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Приклад 9 Знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}=\left(\ln\sin\dfrac{x+3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y'=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{x+3}{4}}\cdot\cos\frac{x+3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{ctg\,\dfrac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\dfrac{x+3}{4}}}.$$

Приклад 10 Знайти похідну функції $y=x^3\,arctgx^3$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію як добуток і складну функцію, знаходимо

$$y'=\left(x^3\right)'arctgx^3+x^3\left(arctgx^3\right)'=3x^2arctgx^3+x^3\frac{1}{1+(x^3)^2}3x^2==3x^2\left(\frac{x^3}{1+x^6}+arctg\,x^3\right).$$

Приклад 11 Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи, що y є функцією від x. Одержимо $3x^2+3y^2y'-3a\left(y+xy'\right)=0.$ Для знаходження y' визначаємо такі перетворення: $x^2+y^2y'-a\left(y+xy'\right)=0;$

$x^2+y^2y'-ay-axy'=0;$ $\quad\left(y^2-ax\right)y'=ay-x^2,$ $\quad$ звідки $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}.$

Приклад 12 Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції $2y\ln y=x.$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x, одержимо

$$2\left(y'\cdot\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\right)=1.$$

Після спрощення матимемо $y'\cdot\ln y+y\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{2};$ $\quad y'\left(\ln y+1\right)=\dfrac{1}{2}$;

$$y'=\frac{1}{2\left(1+\ln y\right)}.$$

Приклад 13 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - arctg\, t. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо $x_t^{'} = \dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t = \dfrac{2t}{1+t^2}$; $\quad y_t^{'} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2} = \dfrac{1+t^2-1}{1+t^2} = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Підставляючи знайдені вирази для $x_t^{'}$ і $y_t^{'}$ до формули $y'_x = \dfrac{y'_t}{y'_x}$, знаходимо

$$y_x^{'} = \frac{t^2}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t} = \frac{t}{2}\,.$$

Приклад 14 Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ проведених в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. При $t = \dfrac{\pi}{4}$ маємо $x\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos^3\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin^3\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Отже, $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ – точка, яка належить астроїді, дотичної і нормалі.

За формулою знаходження похідної функції, заданої параметрично, маємо: $y_x^{'} = \dfrac{y_t^{'}}{x_t^{'}} = \dfrac{(\sqrt{2}\sin^3 t)'_t}{(\sqrt{2}\cos^3 t)'_t} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{2\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)}} = -tg\, t.$

При $t = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad f'(x_0) = y_x^{'}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\dfrac{\pi}{4} = -1.$

Таким чином, рівняння дотичної набуває вигляд

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ або } x + y - 1 = 0,$$

а рівнянням нормалі буде мати наступний вигляд:

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \text{ або } x - y = 0.$$

Приклад 15 Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання

$$y = (x^2+1)^{\sin x}.$$

Розв'язання. Задача функція є степенево-показниковою, оскільки і основа степеня (x^2+1), і показник степеня $\sin x$ є функціями від x. За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції маємо:

$$y' = \sin x\cdot(x^2+1)^{\sin x-1}\cdot 2x + (x^2+1)^{\sin x}\ln(x^2+1)\cdot\cos x =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left(\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x\ln(x^2+1)\right).$$

Приклад 16 Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язання. За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції знаходимо

$$y' = \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = x^{\frac{1}{x}-2} - x^{\frac{1}{x}-2} \ln x = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

Приклад 17 Знайти диференціал функції $S = \frac{1}{1-t^2}$.

Розв'язання. За формулою $dy = y'dx = f'(x)dx$, маємо:

$$dS = \left(\frac{1}{1-t^2} \right)' dt = -\frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2} dt = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Приклад 18 Знайти диференціал функції $y = tg^2 x$.

Розв'язання. $dy = \left(tg^2 x\right)' dx = y = 2tgx \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{2tgx}{\cos^2 x} dx$.

Приклад 19 Знайти диференціал функції $y = 5^{\ln tgx}$.

Розв'язання.

$$dy = \left(5^{\ln tgx}\right)' dx = = 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} dx = 5^{\ln tgx} \frac{2\ln 5}{\sin 2x} dx.$$

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

Приклад 20 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

Розв'язання. При $x \to 0$ чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

Приклад 21 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$.

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Після застосування правила Лопіталя і алгебраїчних перетворень одержимо:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}. = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^2 - 1}{3x^2 \left(1 + x^2\right)} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=-2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=-2\cdot 1\cdot 1=-2.$$

Прилад 23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя тричі, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Приклад 24 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\infty-\infty$. Правило Лопіталя застосовувати неможна. Тому виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$.

Тепер після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. За правилом Лопіталя знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Приклад 25 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Розв'язання. Після елементарних перетворень дограничної функції знаходимо границю

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x3)}{-2x^{-3}}=e^{+\infty}=\infty.$$

Домашнє завдання

Теорія Основні теореми диференціального числення. Дослідження функції за допомогою похідної. [2], с. 401 – 417.

Вправи

Продиференціювати задані функції.

1 $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

2 $y=\sqrt{x}\left(x^3-\sqrt{x}+1\right).$ Відповідь: $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

3 $u=\dfrac{v^5}{v^3-2}.$ Відповідь: $\dfrac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}.$

4 $z=\dfrac{1}{t^2+t+1}.$ Відповідь: $-\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}.$

5 $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi.$ Відповідь: $\varphi\cos\varphi.$

6 $S=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{1+\cos t}.$

7 $y=\left(x^2-2x+3\right)\cdot e^x.$ Відповідь: $e^x\left(x^2+1\right).$

8 $y=x^3-3^x.$ Відповідь: $3x^2-3^x\ln 3.$

9 $y=e\left(\cos x+\sin x\right).$ Відповідь: $2e^x\cos x.$

10 $y=x^2\log_3 x.$ Відповідь: $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}.$

11 $y=\dfrac{1}{\ln x}.$ Відповідь: $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}.$

12 $f(x)=3x-2\sqrt{x}.$ Знайти $f'(1);$ $f'(4);$ $f'(a^2).$

Відповідь: $f'(1)=2;$ $f'(4)=2{,}5;$ $f(a^2)=3-\dfrac{1}{|a|}.$

13 $\rho\left(\varphi\right)=\dfrac{\varphi}{1-\varphi^2}.$ Знайти $\rho'\left(2\right)$ і $\rho'\left(0\right).$ Відповідь: $\rho'(2)=\dfrac{5}{9};$ $\rho'(0)=1.$

14 $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^2}.$ Знайти $f'(-1);$ $f'(2);$ $f'\left(\dfrac{1}{a}\right).$

Відповідь: $f'(-1)=-8;$ $f'(2)=\dfrac{19}{16};$ $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2.$

15 Скласти рівняння дотичних до лінії $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис. Відповідь: $y=2x-2;$ $y=2x+2.$

16 Скласти рівняння нормалі до лінії $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точці з абсцисою $x=3.$ Відповідь: $27x-3y-79=0.$

17 Тіло рухається вздовж прямої за законом $S=5t^3+1$, де шлях S визначається в метрах, а час t - в секундах. Якою була швидкість тіла через 2 секунди після початку руху

Відповідь: $v=60$ м/с.

Знайти похідну складних функцій.

18 $u(t)=\left(t^2+t+2\right)^{\frac{3}{2}}$. Відповідь: $\frac{3}{2}(2t+1)\sqrt{t^2+t+2.}$

19 $y=3\sin(3x+5)$. Відповідь: $9\cos(3x+5)$.

20 $y=\cos^3 4x$. Відповідь: $-12\cos^2 4x\sin 4x$.

21 $y=\sin^2(\cos 3x)$. Відповідь: $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

22 $y=\arcsin\frac{2}{x}$. Відповідь: $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

23 $y=arctg^2\frac{1}{x}$. Відповідь: $-\frac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

24 $y=\sqrt{\ln x}$. Відповідь: $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

25 $y=\ln\left(x^2-4x\right)$. Відповідь: $\frac{2x-4}{x^2-4x}$.

26 $y=10^{2x-3}$. Відповідь: $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.

27 $y=\sin e^{x^2+3x-2}$. Відповідь: $\cos e^{x^2+3x-2}\cdot e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

28 $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$. Відповідь: $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

29 $y=\lg(x-\cos x)$. Відповідь: $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$.

30 $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$. Відповідь: $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

31 $y=\ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$. Відповідь: $\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}+ctgx$.

32 $y=e^{\arcsin 2x}$. Відповідь: $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.

33 $y=\left(2x^2-7\right)^5$. Відповідь: $20x(2x^2-7)^4$.

34 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. Відповідь: $-\sin 4x$.

35 $y=\frac{1}{(1+\sin 2x)^3}$. Відповідь: $-\frac{6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$.

36 $y = -ctg^3 x + 3ctgx + 3x.$ Відповідь: $3ctg^4 x.$

37 $y = \ln \frac{ae^x}{bx^2 + c}.$ Відповідь: $\frac{bx^2 - 2bx + c}{bx^2 + c}.$

Знайти похідні від заданих функцій.

38 $y^3 - 3y + 2ax = 0.$ Відповідь: $\frac{2a}{3(1 - y^2)}.$

39 $\cos(xy) = x.$ Відповідь: $-\frac{1 + y\sin(xy)}{x\sin(xy)}.$

40 $y = 1 + xe^y.$ Відповідь: $\frac{e^y}{2 - y}.$

41 $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ x = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$ Відповідь: -1.

Вказівка: $x = \frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t}; \quad y = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}.$

42 $y = x^{\sin x}.$ Відповідь: $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$

43 $y = 2x^{\sqrt{x}}.$ Відповідь: $x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}\left(2 + \ln x\right).$

44 Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії

$x = 2\ln ctg\, t + 1,\; y = tg\, t + ctg\, t$ в точці, для якої $t = \frac{\pi}{4}.$ Відповідь: $y = 2,\; x = 1.$

Знайти диференціали заданих функцій.

45 $y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$ Відповідь: $-\frac{6x^2 dx}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$

46 $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}.$ Відповідь: $-2^{-\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

47 $y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}.$ Відповідь: $\sqrt{49 - x^2}\,dx.$

48 Обчислити границі за правилом Лопіталя.

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 3x}.$ Відповідь: 1.

2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{-\sin x}}{\cos x \cdot \sin x}.$ Відповідь: 3.

3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln x}{1 + 2\ln\sin x}.$ Відповідь: 0,5.

4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$. Відповідь: -1.

5) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$. Відповідь: - 0,5.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$. Відповідь: 0.

7) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. Відповідь: 1.

8) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$. Відповідь: $\frac{3}{e}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

Знаходження екстремуму функції.
Опуклість, угнутість кривої, точки перегину.
Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функцій.
Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти асимптоти кривої $y=\frac{x^2+5x+3}{x-2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує при $x=2$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2} y=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5x+3}{x-2}=\infty$, то пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою.

Для знаходження похилих асимптот обчислимо коефіцієнти k і b: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3}{x(x-2)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1$, оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові;

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x-2}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3-x^2+2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=7.$$

Підставляючи значення $k=1$ і $b=7$ в рівняння $y=kx+b$, одержимо $y=x+7$. Таким чином, пряма $y=x+7$ – похила асимптота кривої.

Прилад 2 Знайти екстремуми функції $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційована в інтервалі $(-\infty; +\infty)$. $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x+1)(x-3)$.
Знайдемо критичні точки: $y'(x) = 0$, якщо $x = -1$ і $x = 3$; $y'(x) \neq \infty$.
В інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$ похідна $y'(x)$ додатна, бо $y'(-2) > 0$ і $y'(-4) > 0$, а в інтервалі $(-1; 3)$ вона від'ємна, бо $y'(0) < 0$.

Визначимо, які із критичних точок є екстремальними (рис. 7.1).

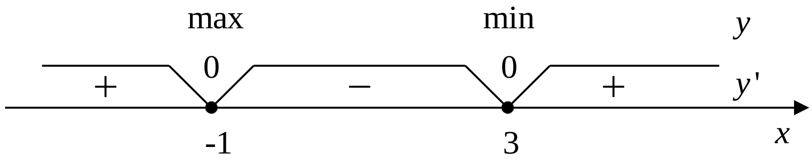


Рис.7.1

Обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:

$$y_{\max} = y(-1) = -2 - 6 + 18 + 7 = 17, \quad y_{\min} = y(3) = 54 - 54 - 54 + 7 = -47.$$

Приклад 3 Знайти екстремум функції $y = x - \ln(1 + x^2)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, бо $1 + x^2 > 0$ для будь-яких x. $x > 0$. Її похідна $y'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x}{1+x^2} = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$, отже, функція зростає, екстремумів немає.

Приклад 4 Знайти найбільше і найменше значення функції $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку $[-2; 2]$.

Розв'язання. Знаходимо $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$. Знаходимо критичні точки першого роду: $y'(x) = 0$, якщо $x = 0$, $x = 1$ і $x = -1$; $y'(x) \neq \infty$. Відзначимо, що всі знайдені точки належать відрізку $[-2; 2]$.

Обчислимо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку:
$y(-2) = 13$, $y(-1) = 4$, $y(0) = 5$, $y(1) = 4$, $y(2) = 13$. Із одержаних значень вибираємо найбільше і найменше: $y_{нм} = 4$, $y_{нб} = 13$.

Приклад 5 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x \in (0;1) \cup (1; +\infty)$.

Знаходимо $y' = \dfrac{\ln x - x \cdot \dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$;

$$y''=\frac{\frac{1}{x}\ln^2 x-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln x-1)}{\left(\ln^2 x\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x\cdot(\ln x-2\ln x+2)}{\ln^4 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

$y'(x)=0$, якщо $\ln x-1=0$, звідки $x=e$ – стаціонарна точка. Обчислюючи значення другої похідної при $x=e$, маємо $y''(e)=e^{-1}>0$. Отже, $(e;e)$ - точка мінімуму.

Приклад 6 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y=x^3-5x^2+3x-5$.

Розв'язання. Діятимемо за правилом знаходження інтервалів опуклості і вгнутості та точок перегину графіка функції:

1 задана функція визначена для всіх $x\in R$.

2 $y'(x)=3x^2-10x+3$;

3 $y''(x)=6x-10=2(3x-5)$;

4 $y''(x)=0$, якщо $3x-5=0$, тобто $x=\frac{5}{3}$; $y''(x)\neq\infty$;

5 для $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ $y''(x)<0$, бо, наприклад, $y''(0)=-10<0$, а для $x\in\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ $y''(x)>0$, оскільки, наприклад, $y''(4)=14>0$, отже, в інтервалі $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ крива є опуклою, а в інтервалі $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ – вгнутою;

6 в точці $x=\frac{5}{3}$ друга похідна даної функції дорівнює нулю і при переході через точку змінює знак, а це означає, що $x=\frac{5}{3}$ є абсцисою точки перегину кривої;

7 обчислюючи значення функції $y=x^3-5x^2+3x-5$ при $x=\frac{5}{3}$, одержимо: $y\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{250}{27}$. Таким чином, $M\left(\frac{5}{3};-\frac{250}{27}\right)$ – точка перегину графіка даної функції.

Приклад 7 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, оскільки $1+x^2>0$ для всіх $x\in R$. Диференціюючи її двічі, одержимо: $y'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$,

$y''(x)=2\dfrac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$. Друга похідна існує на всій числовій осі і обертається в нуль при $x=-1$ і $x=1$. Ці точки розділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ і $(1;+\infty)$ (рис.7.2), в кожному з яких похідна $y''(x)$ зберігає знак. Визначаючи знак другої похідної в довільно взятій точці кожного інтервалу, одержимо: $y''(-2)<0$, $y''(0)>0$, $y''(2)<0$. При визначенні знака другої похідної слід враховувати, що знаменник $\left(1+x^2\right)^2>0$ при всіх значеннях $x\in R$.

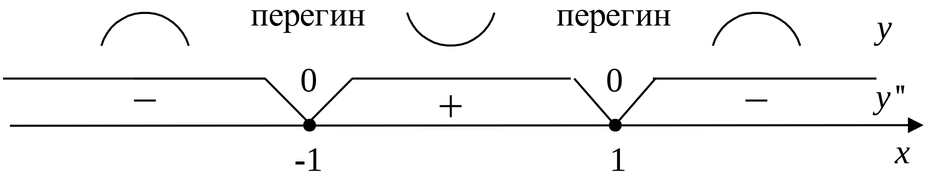


Рис. 7.2

Обчислюючи значення функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$ при $x=\pm1$, знаходимо: $y(-1)=y(1)=\ln 2$. Таким чином, графік функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$ є опуклим в інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ і вгнутим в інтервалі $(-1;1)$. Крива має дві точки перегину: $(-1;\ln 2)$ і $(1;\ln 2)$.

Приклад 8 Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

Розв'язання. 1 $x^2-1\neq 0$, $x\neq\pm1$; $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2 $x=-1$ і $x=1$ – точки розриву;
$(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ і $(1;+\infty)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y(x)$. Отже, задана функція є парною. Її графік розташований симетрично відносно осі Oy, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x\geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm1$;
$y<0$ в інтервалі $(0;1)$ і $y>0$ в інтервалі $(1;+\infty)$ (рис. 7.3).

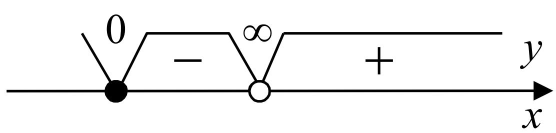


Рис. 7.3

6 $x=1$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(1+0)^2}{(1+0-1)(1+0+1)}=\frac{1}{+0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to \sqrt{3}-0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(1-0)^2}{(1-0-1)(1-0+1)}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, $x=1$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x\cdot\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1.$$

Отже, пряма $y=1$ – горизонтальна асимптота.

7 $$y'=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x=0$; $y'(x)=\infty$, якщо $x=\pm1$, $y_{\max}=y(0)=0$ (рис. 7.4).

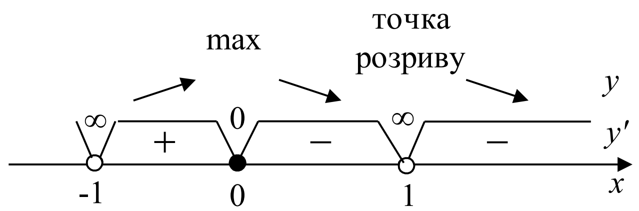


Рис. 7.4

8 $$y''=\left(\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\left(\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\frac{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=-2\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

$y''(x)\neq 0$; $y''(x)=\infty$ при $x=\pm1$ (рис. 7.5).

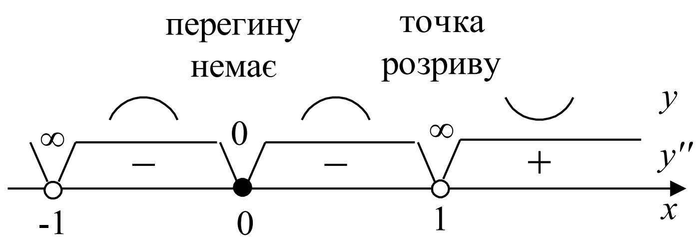


Рис. 7.5

9 Будуємо графік функції (рис. 7.6) за результатами дослідження і додатковими точками $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$, $y(1{,}5)=1{,}8$, $y(2)=\frac{4}{3}$.

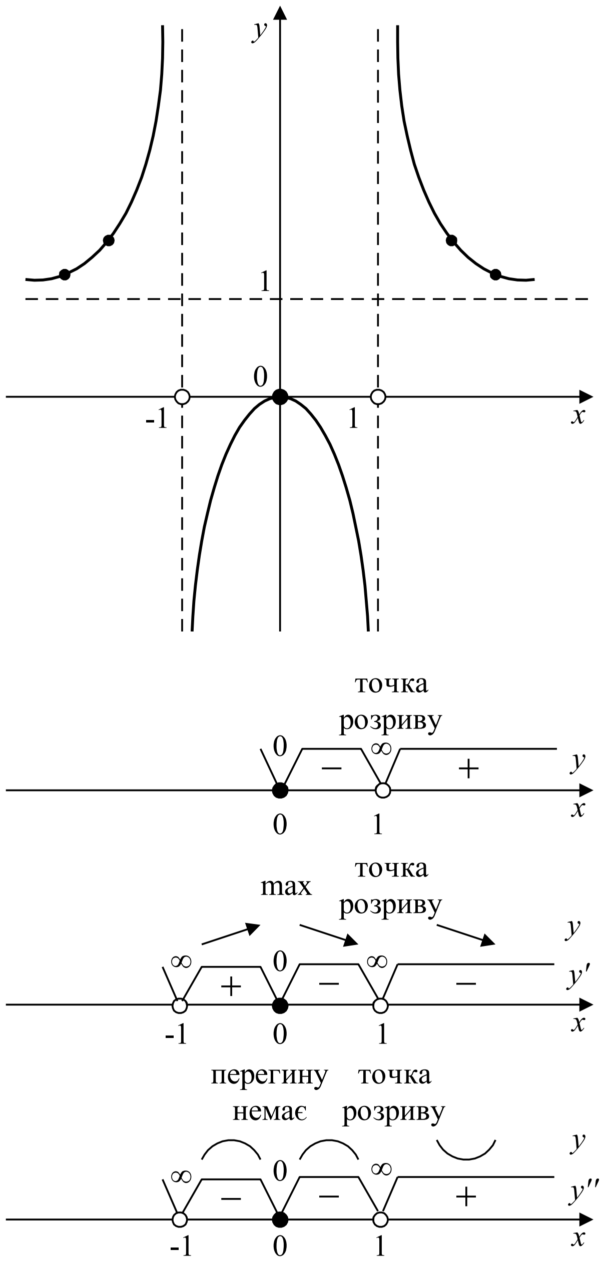


Рис. 7.6

Домашнє завдання

Теорія Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних. Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт. [2], с. 340 – 356, 423 – 431.

Вправи

1 Знайти асимптоти заданих кривих.

1) $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$. Відповідь: $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

.

2) $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 5}$. Відповідь: $y = 3$.

3) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. Відповідь: $x=0$, $y=x$.

2 Показати, що функція $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ зростає в будь-якому інтервалі, який не містить точку $x=0$.

3 Знайти інтервали монотонності функції $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь: в інтервалах $(0;1)$ і $(1;e)$ функція спадає, а в інтервалі $(e;+\infty)$ функція зростає.

4 Знайти екстремуми функції $y=2x^3-3x^2$.

Відповідь: $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(1)=-1$.

5 Знайти екстремуми функції $y=x-\ln(1-x)$.

Відповідь: $y_{\min}=y(0)=0$.

6 Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на відрізку $[-1;2]$.

Відповідь: $y_{нм}$ = -10, $y_{нб}$ = 2.

7 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь: $y_{\max}=y(2)=\dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}=y(0)=0$.

8 Показати, що графік функції $y=\ln\left(x^2-1\right)$ всюди опуклий.

9 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $y=x^4(12\ln x-7)$.

Відповідь: в інтервалі $(0;1)$ крива опукла, а в інтервалі $(1;+\infty)$ – вгнута. Точка перегину $(1;-7)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

Означення функції багатьох змінних.
Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних.
Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Знайти і зобразити геометрично область існування функції $z=\ln\left(y^2-4x+8\right)$.

Розв'язання. Логарифм визначений для додатних значень його аргументу, тому $y^2-4x+8>0$, звідки $y^2>4(x-2)$. Ніяких інших обмежень на змінні x і y не дано.

Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межу, тобто графік функції $y^2 = 4(x-2)$.

Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці $O(2;0)$ і віссю симетрії Ox (рис. 8.1).

Парабола поділила всю площину на дві частини – внутрішню і зовнішню по відношенню до параболи.

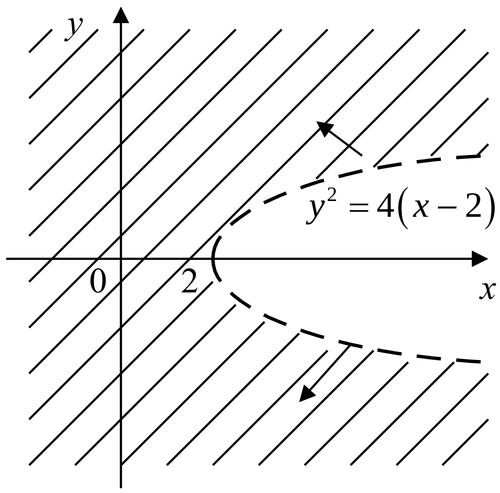


Рис. 8.1

Для точок однієї з цих частин виконується нерівність $y^2 > 4(x-2)$, а для другої - $y^2 < 4(x-2)$. На самій параболі $y^2 = 4(x-2)$. Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові $y^2 > 4(x-2)$, досить перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки , яка не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O(0;0)$ знаходиться зовні від параболи і задовольняє потрібній умові $0 > 4(0-2)$.

Отже, областю існування даної функції є множина точок площини xOy, які знаходяться зовні від параболи. Сама парабола в область існування функції не входить, бо для точок параболи $y^2 - 4x + 8 = 0$, а логарифм нуля не визначений.

Приклад 2 Знайти точки розриву функції $f(x;y) = \dfrac{3}{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Задана функція невизначена, а отже і розривна там, де її знаменник обертається в нуль, тобто в точках, для яких $4 - x^2 - y^2 = 0$. Таким чином, задана функція розривна в кожній точці кола $x^2 + y^2 = 4$ (лінія розриву).

Приклад 3 Дослідити на неперервність функцію $z = \dfrac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$.

Розв'язання. Функція z неперервна як відношення двох многочленів в усіх точках, де $y^2 - 2x \neq 0$. Точки розриву розташовані на параболі $y^2 = 2x$. При наближені точки $M(x;y)$ до будь-якої точки цієї параболи задана функція z нескінченно зростає.

Приклад 4 Знайти частинні похідні функції $z = x^2 - 3xy + 4y^2$.

Розв'язання. Як уже визначалося, функцію кількох змінних можна диференціювати за будь-якою змінною, вважаючи всі інші сталими, і за тими самими правилами і формулами, що і функцію однієї змінної. Тому, припустивши, що y є сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції

по x: $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(x^2-3xy+4y^2\right)_x'=\left(x^2\right)_x'-\left(3xy\right)_x'+\left(4y^2\right)_x'=2x-3y\left(x\right)_x'+0=$
$=2x-3y\cdot 1=2x-3y$.

Припускаючи тепер, що x залишається сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(x^2-3xy+4y^2\right)_y'=\left(x^2\right)_y'-\left(3xy\right)_y'+\left(4y^2\right)_y'=0-3x\cdot 1+8y=-3x+8y.$$

Прилад 5 Обчислити $f_x'\left(2;1\right)$ і $f_y'\left(2;1\right)$, якщо $f\left(x;y\right)=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні від даної функції в точці $\left(x;y\right)$: $f_x'\left(x;y\right)=\frac{\partial f\left(x;y\right)}{\partial x}\underset{y=const}{=}\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\left(y+\frac{1}{y}\right)$;

$$f_y'\left(x;y\right)=\frac{\partial f\left(x;y\right)}{\partial y}\underset{x=const}{=}\frac{1}{2\sqrt{xy+\frac{x}{y}}}\cdot\left(x-\frac{x}{y^2}\right).$$

Обчислимо тепер їх значення в точці $\left(2;1\right)$, тобто при $x=2$, $y=1$:

$$f_x'\left(2;1\right)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}\cdot\left(1+1\right)=\frac{1}{2};\qquad f_y'\left(2;1\right)=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}}=\frac{1}{2\sqrt{2+2}}\cdot\left(2-2\right)=0.$$

Отже, $f_x'\left(2;1\right)=\frac{1}{2}$ і $f_y'\left(2;1\right)=0$ – шукані значення частинних похідних заданої функції в заданій точці.

Приклад 6 Показати, що функція $z=y\ln\left(x^2-y^2\right)$ задовольняє рівнянню $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

Розв'язання. Знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot 2x=\frac{2xy}{x^2-y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\ln\left(x^2-y^2\right)+y\cdot\frac{1}{x^2-y^2}\cdot\left(-2y\right)=\ln\left(x^2-y^2\right)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}.$$

Підставляючи вирази частинних похідних в ліву частину рівняння , отримаємо тотожність: $\frac{1}{x}\cdot\frac{2xy}{x^2-y^2}+\frac{1}{y}\left(\ln\left(x^2-y^2\right)-\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right)=$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{\ln\left(x^2-y^2\right)}{y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{1}{y}\ln\left(x^2-y^2\right)=\frac{z}{y^2}.$$

Отже, функція z задовольняє даному рівнянню.

Приклад 7 Знайти частинні диференціали функції $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$ по кожній із незалежних змінних.

Розв'язання. Задана функція z залежить від двох змінних x і y. Отже, можна знайти два її частинних диференціали $d_x z$ і $d_y z$. Згідно з означенням $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4\right)'_x = y^3 - 6xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4\right)'_y = 3xy^2 - 6x^2y + 8y^3.$$

Підставляючи вирази частинних похідних у формули частинних диференціалів, остаточно дістанемо

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx = \left(y^3 - 6xy^2\right)dx; \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy = \left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3\right)dy.$$

Приклад 8 Знайти повний диференціал функції $S = x^2 \ln t$

Розв'язання. Задана функція S залежить від двох змінних x і t, тому

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial t}dt.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial S}{\partial x} = \left(x^2 \ln t\right)'_x = 2x\ln t$; $\frac{\partial S}{\partial t} = \left(x^2 \ln t\right)'_t = x^2 \cdot \frac{1}{t}$, шуканий диференціал $dS = 2x\ln t dx + \frac{x^2}{t}dt$.

Приклад 9 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \left(x^2 + y\right)^5$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[\left(x^2 + y\right)^5\right]'_x = 5\left(x^2 + y\right)^4\left(x^2 + y\right)'_x = 5\left(x^2 + y\right)^4 2x = 10x\left(x^2 + y\right)^4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[\left(x^2 + y\right)^5\right]'_y = 5\left(x^2 + y\right)^4\left(x^2 + y\right)'_y = 5\left(x^2 + y\right)^4 \cdot 1 = 5\left(x^2 + y\right)^4.$$

Диференціюючи кожну із одержаних похідних (функцій) по x і по y, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[10x\left(x^2 + y\right)^4\right]'_x = 10\left(\left(x^2 + y\right)^4 + 4x\left(x^2 + y\right)^3 \cdot 2x\right) = 10\left(x^2 + y\right)^3\left(x^2 + y + 8x^2\right) =$$

$$= 10\left(x^2 + y\right)^3\left(9x^2 + y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[10x\left(x^2 + y\right)^4\right]'_y = 10x \cdot 4\left(x^2 + y\right)^3 \cdot 1 = 40x\left(x^2 + y\right)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[5\left(x^2 + y\right)^4\right]'_x = 5 \cdot 4\left(x^2 + y\right)^3 \cdot 2x = 40x\left(x^2 + y\right)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[5\left(x^2 + y\right)^4\right]'_y = 5 \cdot 4\left(x^2 + y\right)^3 \cdot 1 = 20x\left(x^2 + y\right)^3.$$

Приклад 10 $z = e^x\left(\cos y + x\sin y\right)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^x\left(\cos y + x\sin y\right)\right)'_x = e^x\left(\cos y + x\sin y\right) + e^x\left(0 + \sin y\right) = e^x\left(\cos y + x\sin y + \sin y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^x\left(\cos y + x\sin y\right)\right)'_y = e^x\left(-\sin y + x\cos y\right).$$ Тепер маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left[e^x\left(\cos y + x\sin y + \sin y\right)\right]'_y = e^x\left(-\sin y + x\cos y + \cos y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left[e^x\left(-\sin y + x\cos y\right)\right]'_x = e^x\left(-\sin y + x\cos y\right) + e^x\left(0 + \cos y\right) =$$

$$= e^x\left(-\sin y + x\cos y + \cos y\right).$$

Порівнюючи між собою результати для $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, бачимо, що вони однакові. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад 11 $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Показати, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію u таким чином:

$$u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right).$$ Тепер знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + y^2}\cdot 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + y^2}\cdot 2y = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right)'_x = -\frac{x^2 + y^2 - x\cdot 2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)'_x = -\frac{x^2 + y^2 - y\cdot 2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ у задане рівняння, будемо мати $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} + \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{0}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = 0$.

Отже, якщо $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Приклад 12 Знайти d^2z, якщо $z = e^x \cos y$.

Розв'язання. Скористаємось формулою для знаходження повного диференціала другого порядку функції двох змінних, згідно з якою

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 .$$

Ураховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^x \cos y\right)_x' = e^x \cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^x \cos y\right)_y' = e^x \sin y$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y$, будемо мати

$$d^2z = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dxdy - e^x \cos y dy^2 .$$

Приклад 13 Знайти екстремуми функції $f(x; y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 3(x^2 + y^2 - 10)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18 = 6(xy - 3)$.

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо після елементарних перетворень систему $\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ 2xy = 6 \end{cases}$.

Додаючи і віднімаючи почленно рівняння цієї системі, матимемо

$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases}$, або $\begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (x-y)^2 = 4 \end{cases}$, звідки $\begin{cases} x + y = \pm 4 \\ x - y = \pm 2 \end{cases}$.

Розв'язуючи останню систему, рівносильну даній, знаходимо стаціонарні точки: $M_1(3;1)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;-3)$, $M_4(-3;-1)$.

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо визначник $\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x \cdot 6y \\ 6y \cdot 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2)$.

Переконуємося, що

1) $\Delta(M_1) = 36(9-1) = 288 > 0$, $A_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6 \cdot 3 = 18 > 0$, отже $M_1(3;1)$ - точка мінімуму;

2) $\Delta(M_2) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_2 екстремуму немає;

3) $\Delta(M_3) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4)=36(9-1)=288>0$, $A_4=\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_4}=6(-3)=-18<0$, отже M_4 - точка максимуму.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: у точці $M_1(3;1)$ - мінімум, $z_{\min}=f(3;1)=-72$; у точці $M_4(-3;-1)$ максимум; $z_{\max}=f(-3;-1)=72$.

Приклад 14 Знайти екстремум функції $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$.

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційовна скрізь, крім $x=0$ і $y=0$. Тому подальші дослідження будемо виконувати за умов $x\neq 0$ і $y\neq 0$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y-\frac{1}{x^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x+2y-\frac{1}{y^2}.$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+y-\dfrac{1}{x^2}=0,\\ x+2y-\dfrac{1}{y^2}=0,\end{cases}\quad \text{або}\quad \begin{cases}2x^3+x^2y-1=0,\\ xy^2+2y^3-1=0.\end{cases}$$

з якої знаходимо стаціонарні точки даної функції. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, одержуємо:

$$2(x^3-y^3)+xy(x-y)=0\Leftrightarrow (x-y)(2x^2+3xy+2y^2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+2\right)=0,\quad \text{бо } y\neq 0.$$

З останньої рівності випливає, або $x-y=0$, або $2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+3\dfrac{x}{y}+2=0$. Але останнє рівняння дійсних розв'язків не має, бо $D=b^2-4ac=9-16<0$. Отже, $x=y$. Тоді із першого рівняння системи маємо: $2x^3+x^3-1=0$, звідки $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Таким чином, $x=y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, тобто $M\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - стаціонарна точка.

Перевіримо, чи є екстремум у точці M з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо спочатку другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2+\frac{2}{x^3},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+\frac{2}{y^3}.$$

Підставляючи в частинні похідні другого порядку координати стаціонарної точки $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, одержимо

$$A = 2 + 2\cdot 3 = 8, \quad B = 1, \quad C = 2 + 2\cdot 3 = 8.$$

Обчислюючи далі визначник

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 1 = 63 > 0$$

і враховуючи, що $A = 8 > 0$, робимо висновок: $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - точка локального мінімуму, причому $z_{\min} = z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{3}\cdot 3$.

Приклад 15 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$.

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$ знаходимо одну критичну точку O(0;0), в який значення функції дорівнює нулю.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції z на межі, тобто на колі $x^2 + y^2 = 4$. Оскільки на колі змінні x і y зв'язані співвідношенням $x^2 + y^2 = 4$, то для точок кола функцію $z = x^2 - y^2$ можна подати як функцію однієї змінної x: $z = z(x) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$, причому $-2 \le x \le 2$.

Отже, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі $x^2 + y^2 = 4$ зведено до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної $z = 2x^2 - 4$ на відрізку (-2;2). Знаходимо критичні точки цієї функції на інтервалі (-2;2) і обчислюємо значення функції у цих точках і на кінцях відрізка: $z' = 4x = 0$ при $x = 0$ (критична точка); $z(0) = -4$; $z(-2) = z(2) = 2\cdot 4 - 4 = 4$. Таким чином, функція має найбільше значення, яке дорівнює 4, і найменше значення, яке дорівнює –4.

Отже, найбільшого значення функція $z = x^2 - y^2$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$ набуває у точках $M_1(-2;0)$ і $M_2(2;0)$ кола $x^2 + y^2 = 4$ і найменшого – у точках $M_3(0;2)$ і $M_4(0;-2)$ цього самого кола.

Домашнє завдання

Теорія Первісна. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. [2], с. 444 –449.

Вправи

1 Знайти область визначення наведених функцій і зобразити її геометрично.

1) $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

Відповідь: $x^2+y^2\geq 1$ – частина площини зовні одиничного кола з центром в початку координат, включаючи і саме коло.

2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Відповідь: внутрішня частина кола $x^2+y^2<1$ (без межі).

3) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

Відповідь: частина площини між двома параболами $y^2=x$ і $y^2=-x$, включаючи межу за винятком точки $O(0;0)$.

2 Дослідити наступні функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі існують.

1) $z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$. Відповідь: $x^2+y^2=4$.

2) $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$.

Відповідь: функція неперервна в області визначення. Лінія розриву – коло $x^2+y^2=9$.

3 Знайти частинні похідні першого порядку наступних функцій.

1) $z=x^3y-y^3x$. Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$.

2) $z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=30xy\left(5x^2y-y^3+7\right)^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=3\left(5x^2y-y^3+7\right)^2\left(5x^2-3y^2\right)$.

3) $z=\ln\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

4 Показати, що функція $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$ задовольняє рівнянню $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{y}$.

5 Знайти частинні диференціали функції $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

Відповідь: $d_x z = \dfrac{y\left(y^2 - x^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx, \quad d_y z = \dfrac{x\left(x^2 - y^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy$.

6 Знайти повні диференціали наступних функцій:

1) $z = x^2 + \sin y$. Відповідь: $dz = 2xdx + \cos ydy$.

2) $z = x \cdot 2^y$. Відповідь: $dz = 2^y dx + x2^y \ln 2dy$.

3) $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$. Відповідь: $dz = \dfrac{ydx - xdy}{y\sqrt{y^2 - x^2}}$.

4) $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$. Довести, що $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$ і що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$.

7 Знайти повний диференціал другого порядку функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7.$$

Відповідь: $2\left(dx^2 - dxdy + dy^2\right)$.

8 Знайти $d^2 z$, якщо $z = x \ln \dfrac{y}{x}$. Відповідь: $-\dfrac{dx^2}{x} + 2\dfrac{dxdy}{y} - x\dfrac{dy^2}{y^2}$.

9 Знайти точки екстремуму функції $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

Відповідь: (2;-2).

10 Знайти екстремуми функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Відповідь: у точці (0;0) немає екстремуму. У точці (1;1) - мінімум.

11 Знайти найбільше і найменше значення функції $z = e^{-x^2 - y^2}(2x^2 + 3y^2)$ в колі $x^2 + y^2 \le 4$.

Відповідь: $z_{нб} = \dfrac{3}{e}$ у точках (0;±1); $z_{нм} = 0$ у точці (0;0).

ПРОГРАМА МОДУЛЯ 2

Змістовий модуль 3. Невизначений та визначений інтеграл.

Тема 24. Первісна функції. Невизначений інтеграл.

Тема 25.Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування.

Тема 26. Основні методи інтегрування. Інтегрування підстановкою та частинами.

Тема 27. Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання.

Тема 28. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 29. Інтегрування тригонометричних виразів.

Тема 30. Інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 31. Означення та властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця.

Тема 32. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

Тема 33. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоскої фігури.

Тема 34. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання.

Тема 35. Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв'язання задач фізики.

Тема 36. Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності.

Змістовий модуль 4. Диференціальні рівняння.

Тема 37. Диференціальні рівняння першого порядку. Теорема існування і єдиності розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші.

Тема 38. Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних.

Тема 39. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Тема 40. Рівняння другого порядку. Три типа рівнянь, що припускають зниження порядку.

Тема 41. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. Властивості частинних розв'язків.

Тема 42. Визначник Вронського, його властивості. Теорема про загальний розв'язок.

Тема 43. Поняття комплексного числа. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Тема 44. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Теорема про загальний розв'язок.

Тема 45. Метод варіації довільних сталих.

Тема 46. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Тема 47. Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9
Первісна функції. Невизначений інтеграл.
Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування.

Розв’язання прикладів

Таблиця невизначених інтегралів

$$\int O du = \int O u'_x dx = C . \qquad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C . \qquad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \qquad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C . \qquad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C . \qquad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C . \qquad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C . \qquad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C . \qquad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C . \qquad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C . \qquad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C . \qquad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C . \qquad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C . \qquad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C . \qquad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C . \qquad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C . \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C . \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C . \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C . \qquad (19)$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+A}}=\int\frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2+A}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right|+C. \qquad (20)$$

$$\int\sqrt{u^2+A}du=\int\sqrt{u^2+A}\cdot u'_x dx=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+A}+\frac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right|+C. \qquad (21)$$

$$\int\sqrt{a^2-u^2}du=\int\sqrt{a^2-u^2}\cdot u'_x dx=\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a}+C,\ (a>0). \qquad (22)$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx.$

Розв`язання. Помічаємо, що $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}\right)^3+1.$ Тоді

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left[\left(\sqrt{x}\right)^3+1\right]dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C.$$

Приклад 2 Знайти $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2dx$.

Розв'язання. Виконаємо тотожні перетворення $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2=1-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}$.

$$\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int dx-2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4}=\int dx-2\int x^{-2}dx+\int x^{-4}dx=x-2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C=$$

$$=x-2\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-3}}{-3}+C=x+2x^{-1}-\frac{x^{-3}}{3}+C=x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^xdx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

Приклад 4 Знайти $\int\frac{dx}{x^2\left(1+x^2\right)}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{1\cdot dx}{x^2\left(1+x^2\right)}=\int\frac{1+x^2-x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int\frac{dx}{x^2}-\int\frac{dx}{x^2+1}==-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}x+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int \frac{dx}{x^2-7}$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^2-7} = \left| \begin{array}{c} a^2=7,\ a=\sqrt{7} \\ u^2=x^2,\ u=x,\ du=dx \end{array} \right| dx = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right| + C$.

Приклад 6 Знайти $\int ctg^2 x dx$.

Розв'язання. $ctg^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

$$\int ctg^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -ctg\ x - x + C$$

Приклад 7 Знайти $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$

Розв`язання. Оскільки $1+cos2x=2cos^2x$, то

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2} tgx + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}(tgx + x) + C.$$

Приклад 8 Знайти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв`язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 9 Знайти $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}} dx.$

Розв`язання. Маємо $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}} dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx.$

Оскільки $\left(7-\cos^2 x\right)'=-2\cos x(-\sin x)=\sin 2x,$ то в якості змінної інтегрування маємо вираз $7–cos^2x$. Відносно цієї змінної одержимо інтеграл від степеневої функції, тобто

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx=\frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2\right)^2}+C.$$

Приклад 10 Знайти $\int\frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}$.

Розв`язання. Оскільки похідна виразу $5+7tgx$ дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником 7, то змінною інтегрування тут можна вважати вираз $5+7tgx$, і, таким чином, знайти інтеграл за формулою (6):

$$\int\frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}=\frac{1}{7}\int\frac{1}{5+7tgx}\cdot\frac{7}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{l}u=5+7tgx\\ u_x{}'=\frac{7}{\cos^2 x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{7}\int\frac{1}{u}\cdot u_x{}'dx=\frac{1}{7}\ln\left|5+7tgx\right|+C.$$

Приклад 11 Знайти $\int\frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx.$

Розв`язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int\frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{arctg2x}\cdot\frac{2}{1+4x^2}dx,$$

але $\frac{2}{1+4x^2}=\left(arctg2x\right)'$, і тому, вважаючи змінною інтегрування функцію *arctg2x*, інтеграл знаходимо за формулою (8):

$$\int\frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx=\frac{1}{2}e^{arctg2x}+C.$$

Приклад 12 Знайти $\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}-3}}$.

Розв'язання. Покладемо $x^6=t$. Тоді $6x^5dx=dt$ і

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}-3}}=\frac{1}{6}\int\frac{6x^5dx}{\sqrt{(x^6)^2-3}}=\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-3}}=\frac{1}{6}\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right|+C.$$

За допомогою вказаної підстановки даний інтеграл зведений до табличного (формула 20). Повертаючись до початкової змінної, остаточно будемо мати $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}-3}\right|+C$.

Приклад 13 Знайти $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$.

Розв'язання. Розділивши чисельник і знаменник підінтегрального виразу на cos^2x, одержимо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3+4tg^2x} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3}{4}+tg^2x}.$$

Оскільки $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$, то доцільно покласти $tgx=t$. Тоді

$$\int \frac{dx}{3\cos^2+4\sin^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}+t^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}}+C = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}}+C.$$

Домашнє завдання

Теорія Інтегрування підстановкою та частинами [5], с. 341-343, 346 –349.

Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. Відповідь: $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$.

2 $\int \sqrt[5]{x^3+2}\cdot x^2dx$. Відповідь: $\frac{5}{18}\sqrt[5]{\left(x^3+2\right)^6}+C$.

3 $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$. Відповідь: $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$.

4 $\int \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\cos x}+C$.

5 $\int \cos^3 x\sin 2xdx$. Відповідь: $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$.

6 $\int \sin(2x-3)dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$.

7 $\int \cos(1-2x)dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$.

8 $\int e^x\sin e^xdx$. Відповідь: $C-cose^x$.

9 $\int \frac{dx}{2x-1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

10 $\int ctg(2x+1)dx.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$.

11 $\int e^{-3x+1}dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$.

12 $\int e^{-x^3}\cdot x^2dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.

13 $\int \frac{dx}{x\ln x}$. Відповідь: $\ln|\ln x|+C$.

14 $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{3}arctg3x+C$.

15 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$.

16 $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$. Відповідь: $\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C$.

17 $\int \frac{xdx}{x^4+1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2+C$.

18 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$.

19 $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. Відповідь: $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

20 $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$.

21 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx.$ Відповідь: $e^x+e^{-x}+C.$

22 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$.

23 $\int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$.

24 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ Відповідь: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

25 $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx.$ Відповідь: $x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$.

26 $\int\left(2^{3x-1}+\frac{3}{\cos^2 7x}-2ctg(x+5)\right)dx.$.

Відповідь: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+\frac{3}{7}tg7x-2\ln\left|\sin(x+5)\right|+C$.

27 $\int\frac{2x^2-8}{16-x^4}dx.$ Відповідь: $-arctg\frac{x}{2}+C$.

28 $\int\frac{\cos 2xdx}{\cos x-\sin x}.$ Відповідь: $\sin x-\cos x+C$.

29 $\int e^x\left(2^x+3^x\right)dx.$ Відповідь: $e^x\left(\frac{2^x}{1+\ln 2}+\frac{3^x}{1+\ln 3}\right)+C$.

30 $\int\frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10

Основні методи інтегрування. Інтегрування підстановкою та частинами.

Формулу $\int f(x)dx=\int F(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, де $x=\varphi(t)$ – диференційована функція, називають **формулою заміни змінної** у невизначеному інтегралі. Функцію $x=\varphi(t)$ слід вибирати так, щоб вираз під інтегралом став зручним для інтегрування.

Формулу $\int udv=uv-\int vdu$ називають **формулою інтегрування частинами** у невизначеному інтегралі. Цей метод використовується для інтегрування функцій виду $\ln x$, $\arcsin x$, $\cos\ln x$ і т.д., деяких ірраціональних функцій: $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2\pm a^2}$ і т.д. та добутків різнойменних функцій: $x\cdot arctgx$, $x\cdot\sin x$, $x\cdot\ln x$, $e^x\cdot\cos x$, $x^2\cdot e^x$ тощо.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Покладемо $x+1=t^2$. Звідси $x=t^2-1$, а $dx=2tdt$ і

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{t}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{1+t}=2t-2\ln\left|t+1\right|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C.$$

Розв\`язати даний приклад можна інакше. Нехай $1+\sqrt{x+1}=t$. Звідси $x=(t-1)^2-1$, а $dx=2(t-1)dt$ і

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int\frac{2(t-1)dt}{t}=2\int\frac{t-1}{t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=$$

$$=2t-2\ln\left|t\right|+C=2(1+\sqrt{x+1})-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+C.$$

Одержані результати відрізняються сталим доданком 2. Однак, обидва вони правильні, в чому можна легко переконатися шляхом їх диференціювання.

Приклад 2 Знайти $\int \sqrt{2x+1} \cdot x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод підстановки:

$$\int \sqrt{2x+1} \cdot x dx = \left| \, 2x+1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2} \, \right| = \int \sqrt{t} \cdot \frac{t-1}{2} \cdot \frac{1}{2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(t\sqrt{t} - \sqrt{t} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\int t^{1\frac{1}{2}} dt - \int t^{\frac{1}{2}} dt \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{t^{2\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{t^{1\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{10} t^2 \sqrt{t} - \frac{1}{6} t\sqrt{t} + C = \frac{1}{10} (2x+1)^2 \sqrt{2x+1} - \frac{1}{6} (2x+1) \sqrt{2x+1} + C.$$

Приклад 3 Знайти $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод підстановки:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \left| \, t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \, \right| = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt =$$

$$= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = 2 \left(t - \ln |1+t| \right) + C = 2 \left(\sqrt{x} - \ln |1+\sqrt{x}| \right) + C.$$

Приклад 4 Знайти $\int \frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}$.

Розв\`язання. Виконаємо підстановку $e^z+1=t^2$. Продиференціювавши обидві частини рівності, одержимо $e^z dz = 2tdt$. Звідси $dz = \frac{2tdt}{e^z} = \frac{2tdt}{t^2-1}$. Тоді

$$\int \frac{dz}{\sqrt{e^z+1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2-1} = 2 \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{e^z+1}-1}{\sqrt{e^z+1}+1} \right| + C.$$

Приклад 5 Знайти інтеграл $\int x \sin x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами

$$\int x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{matrix} \right| = -x \cos x - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Приклад 6 Знайти $\int x^2 e^x dx$.

Розв'язання. Застосуємо метод інтегрування частинами:

$$\int x^2e^xdx=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^xdx & v=e^x \end{vmatrix}=x^2e^x-\int 2xe^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^xdx & v=e^x \end{vmatrix}=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=$$

$$=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C.$$

Приклад 7 Знайти $\int x^2\ln xdx.$

Розв'язання. Поклавши $u(x)=lnx$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу інтегрування частинами $\int udv=uv-\int vdu$, одержуємо

$$\int x^2\ln xdx=\begin{vmatrix} u=\ln x; & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^2dx; & v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C\,.$$

Приклад 8 Знайти $\int x^2\sin 3xdx.$

Розв'язання. Покладемо $u=x^2,dv=sin3xdx$. Тоді

$$du=2xdx,\quad v=\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}\int\sin 3xd(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування ачтинами знаходимо

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=cos3xdx$, тоді

$$du=dx,v=\int\cos 3xdx=\frac{1}{3}\int\cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right)+C.$$

$$=\frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x+6x\sin 3x+2\cos 3x\right)+C\,.$$

Приклад 9 Знайти $\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx.$

Розв'язання. Застосувавши формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx=\begin{vmatrix} u=x^2-3x+4; & du=(2x-3)dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\int e^{5x}dx=\dfrac{1}{5}e^{5x} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\int(2x-3)e^{5x}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=2x-3; & du=2dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{125}e^{5x}\left(25x^2-75x+100-10x+15+2\right)+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-85x+117\right)e^{5x}+C.$$

Приклад 10 Знайти $\int xarctgxdx.$

Розв'язання. Із формули інтегрування частинами

$$\int xarctgxdx=\frac{1}{2}\int arctgxd(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int x^2darctgx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-x+arctgx\right)+C\,.$$

Приклад 12 Знайти $\int e^x\cos xdx$.

Розв'язання. Для цієї підінтегральної функції метод інтегрування частинами застосуємо двічі:

$$\int e^x\cos xdx=\begin{vmatrix} u=\cos x & du=-\sin xdx \\ dv=e^x dx & v=e^x\end{vmatrix}=e^x\cos x+\int e^x\sin xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\sin x & du=\cos xdx \\ dv=e^x dx & v=e^x\end{vmatrix}=e^x\cos x+\left(e^x\sin x-\int e^x\cos xdx\right)=$$

$$e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\cos xdx\,;$$

$$\int e^x\cos xdx+\int e^x\cos xdx=e^x\cos x+e^x\sin x+C$$

$$2\int e^x\cos xdx=e^x\cos x+e^x\sin x+C$$

$$\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}\left(e^x\cos x+e^x\sin x\right)+C.$$

Приклад 11 Знайти $\int\arcsin xdx$.

Розв'язання.

$$\int\arcsin xdx=\begin{vmatrix} u=\arcsin x & du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx & v=x\end{vmatrix}=x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$

$$=\left|t=1-x^2\Rightarrow dt=-2xdx\Rightarrow xdx=-\frac{dt}{2}\right|=x\arcsin x+\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=x\arcsin x+\sqrt{t}+C=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Домашнє завдання

Теорія Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання. Інтегрування раціональних дробів. [5]с. 349 – 360.

Вправи

Знайти інтеграли, підібравши відповідну підстановку:

1 $\int\left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{8}\left(e^{2x}+5\right)^4+C$.

2 $\int\frac{dx}{x\sin^2\ln x}.$ Відповідь: $-ctg\ln x+C.$

3 $\int\frac{\sin x dx}{\cos^5 x}.$ Відповідь: $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

4 $\int\frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}.$ Відповідь: $-2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$.

5 $\int\frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}.$ Відповідь: $-\frac{2}{15}\left(32+8x+3x^2\right)\sqrt{2-x}+C$.

6 $\int\frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx.$ Відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{\left(\ln|x|\right)^3}-6\sqrt{\ln|x|}+C$.

7 $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}.$ Відповідь: $\ln|\ln\ln x|+C$.

8 $\int e^{e^x+x}dx.$ Відповідь: $e^{e^x}+C$.

9 $\int\frac{x^3 dx}{\left(6x^4+5\right)^5}.$ Відповідь: $-\frac{1}{96\left(6x^4+5\right)^4}+C$.

10 $\int\sqrt{2\sin x-1}\cos x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{\left(2\sin x-1\right)^3}+C$.

11 $\int 3^{x^2}x dx.$ Відповідь: $\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C$.

12 $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}tg^3 x+C$.

13 $\int z^2\sqrt{1+2z^3}dz.$ Відповідь: $\frac{1}{9}\sqrt{\left(1+2z^3\right)^3}+C$.

14 $\int 2e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}d\varphi.$ Відповідь: $-4e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}+C$.

15 $\int\cos\left(\frac{1}{2}t+3\right)dt.$ Відповідь: $2\sin\left(\frac{1}{2}t+3\right)+C$.

Знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами.

16 $\int xe^{-x}dx.$ Відповідь: $C-(x+1)e^{-x}.$

17 $\int x3^x dx.$ Відповідь: $\frac{3^x}{\ln^2 3}\left(x\ln 3-1\right)+C$.

18 $\int x\cos^2 x dx.$ Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

19 $\int \ln(x^2+1)dx.$ Відповідь: $x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx+C$.

20 $\int \frac{\lg x}{x^3}dx.$ Відповідь: $C-\frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right).$

21 $\int \ln^2 x dx.$ Відповідь: *x(ln²x-2lnx+2)+C.*

22 $\int \arccos x dx.$ Відповідь: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

23 $\int e^x\cos\frac{x}{3}dx.$ Відповідь: $0{,}3e^x\left(\sin\frac{x}{3}+3\cos\frac{x}{3}\right)+C$.

24 $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}.$ Відповідь: $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}arctgx.$

25 $\int arctg\sqrt{x}dx.$ Відповідь: $xarctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C$.

26 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$ Відповідь: $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C$.

27 $\int (2x+3)\sin 5x dx.$ Відповідь: $-\frac{2x+3}{5}\cos 5x+\frac{2}{25}\sin 5x+C$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11

Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання. Інтегрування раціональних дробів. Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int\frac{dx}{3x+2}.$

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу I типу. Покладемо *3x+2=t*, тоді *3dx=dt* і тому

$$\int\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C.$$

Розв`язання цього ж прикладу можна записати ще й таким чином:

$$\int\frac{dx}{3x+2}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3x+2)}{3x+2}=\frac{1}{3}\ln|3x+2|+C.$$

Приклад 2 Знайти $\int \frac{dx}{(1-2x)^7}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки $d(1-2x) = (1-2x)'dx = -2dx$ і $\frac{1}{(1-2x)^7} = (1-2x)^{-7}$, то

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^7} = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7}(-2)dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7} d(1-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12(1-2x)^6} + C.$$

Приклад 3 Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де *A=0, B=1,* $b^2 - 4ac = -64 < 0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \begin{vmatrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} arctg\frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} arctg\frac{2x+1}{2} + C.$$

Приклад 4 Знайти $\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де *A=-8, B=7,* $D=b^2-4ac=-20 < 0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник *7-8x* подамо у вигляді

$$7-8x = -2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx = \int \frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx = -2\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx + 3\int \frac{dx}{2x^2-2x+3} =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2 - x + \frac{3}{2}} = -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(\ x - \frac{1}{2}\ )^2 + (\ \frac{3}{2} - \frac{1}{4}\ )} =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} = -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{\sqrt{5}} arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

Тут $\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ знайдений за формулою (6) таблиці інтегралів, вважаючи $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого x, а $\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ - за формулою (17), вважаючи $u=x-\frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2=\frac{5}{4}$.

Приклад 5 Знайти $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx.$

Розв'язання. Маємо

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}dx=\left|\begin{matrix} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int \frac{t-\frac{1}{2}-1}{t^2-\frac{25}{4}}dt=$$

$$=\int \frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\cdot \frac{1}{2\cdot \frac{5}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-6\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)(x-3)\right|-\frac{3}{10}\ln|x-2|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|-\frac{3}{10}\ln|x-2|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C=\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 6 Знайти $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{l|l}
-\;x^5+x^4-8 & x^3-4x \\
\;\;\;\underline{x^5-4x^3} & \overline{x^2+x+4} \text{ (ціла частина)} \\
\quad -\;x^4+4x^3-8 & \\
\quad\;\;\;\underline{x^4-4x^2} & \\
\qquad -\;4x^3+4x^2-8 & \\
\qquad\;\;\;\underline{4x^3-16x} & \\
\qquad\qquad 4x^2+16x-8 \text{ (остача).} &
\end{array}$$

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2B-2C=4, \\ x^0 & -4A=-2. \end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Слід відзначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int \frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Приклад 7 Знайти $\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}.$ Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Приклад 8 Знайти $\int \frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Його знаменник $(x^2+3)(x^2+1)$ не має дійсних коренів, а оскільки його множники x^2+3 і x^2+1 другого степеня і не повторюються, то розкладання даного правильного дробу на найпростіші має вигляд: $\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$3x^2+4x+11=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$$

або

$$3x^2+4x+11=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, будемо мати

$$\begin{array}{r|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=3, \\ x & A+3C=4, \\ x^0 & B+3D=11. \end{array}$$

Звідси, розв'язуючи систему, знаходимо $A=-2$, $B=-1$, $C=2$, $D=4$.

Отже, $\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)} = \frac{-2x-1}{x^2+3} + \frac{2x+4}{x^2+1}$

і шуканий інтеграл $\int \frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{-2x-1}{x^2+3} + \frac{2x+4}{x^2+1}\right)dx =$

$$= -\int\frac{2xdx}{x^2+3} - \int\frac{dx}{x^2+3} + \int\frac{2xdx}{x^2+1} + 4\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\ln\left(x^2+3\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + \ln\left(x^2+1\right) + 4arctgx + C.$$

Домашнє завдання

Теорія Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональніх функцій. [5], с. 360 – 370.

Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$ Відповідь: $\frac{x}{4} + \ln|x| - \frac{7}{16}\ln|2x-1| - \frac{9}{16}\ln|2x+1| + C.$

2 $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}.$ Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + C.$

3 $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

4 $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx.$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$

5 $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}.$ Відповідь: $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$

6 $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C.$

7 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}.$ Відповідь: $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C.$

8 $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C.$

9 $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx.$ Відповідь: $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$

10 $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx.$ Відповідь: $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

11 $\int \frac{dx}{x(1+x^2)(4+x^2)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$

12 $\int \frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C.$

13 $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx.$ Відповідь: $\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

14 $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x(x-2)}+C.$

15 $\int \frac{dx}{x^3-8}.$ Відповідь: $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$

16 $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx.$ Відповідь: $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-arctg\frac{x}{2}+C.$

17 $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx.$ Відповідь: $3x+\ln|x|+2arctgx+C.$

18 $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x+3}dx.$ Відповідь: $\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+C.$

19 $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+3x+4}.$ Відповідь: $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12

Інтегрування тригонометричних виразів. Інтегрування ірраціональних функцій.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від *sinx* і *cosx*. Тому, зробивши підстановку $tg\frac{x}{2}=t,$ одержимо

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=\int\frac{2dt}{2t^2-8t+8}=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t-2}+C=\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C.$$

Приклад 2 Знайти $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx.$

Розв'язання. $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}\cos xdx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}\cos xdx=$

$$=\left|\begin{array}{c}\sin x=t^5 \\ \cos xdx=5t^4dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^{10}}{t^4}5t^4dt=5\int\left(1-t^{10}\right)dt=5\left(t-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=$$

$$=5\sqrt[5]{\sin x}-\frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11}x}+C.$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}$. Якщо у виразі $\frac{1}{2\sin^2 x\cos x}$ замінити *cosx* на -*cosx*, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку *sinx*=*t*. Тоді *x*=*arcsint*, $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ і

$$\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

Приклад 4 Знайти $\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $4-3cos^2x+5sin^2x=4(cos^2x+sin^2x)-$ $-3cos2x+5sin^2x=cos^2x+9sin^2x$, одержимо

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+9tg^2 x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} tgx=t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{1+9t^2}=\int\frac{dt}{1+(3t)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{3dt}{1+(3t)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}arctg3t+C=\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx.$

Розв'язання. Застосувавши формулу перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, згідно з якою

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

будемо мати $\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}dx=$

$$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C.$$

Приклад 6 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=3$, $n_2=2$, тому $\kappa=6$. Використовуючи підстановку $2x+1=t^6$, звідки $x=\frac{1}{2}(t^6-1)\cdot dx=3t^5dt$, одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 7 Знайти $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий зведеться до табличного інтеграла (19) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена:

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}-2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Приклад 8 Знайти $\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{5(x+1)-2}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}-2\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x+1=\frac{1}{t}\\ x=\frac{1}{t}-1\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}-2\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-4\left(\frac{1}{t}-1\right)+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1-\frac{4}{t}+4+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{\sqrt{10t^2-6t+1}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{100}}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|t-\frac{3}{10}+\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}\right|+C=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{10}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{6}{10}*\frac{1}{x+1}+\frac{1}{10}}\right|+C=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{7-3x+\sqrt{10(x^2-4x+5)}}{10(x+1)}\right|+C.$$

Приклад 9 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Для знаходження заданого інтегралу робимо підстановку *x=2 tgt*. Звідси

$$dx=\frac{2dt}{\cos^2 t},\sqrt{(4+x^2)^3}=\sqrt{(4+4tg^2t)^3}=\sqrt{4^3(1+tg^2t)^3}=8\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}=\frac{8}{\cos^3 t}.$$

Тоді шуканий інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\int\frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\frac{8}{\cos^3 t}}dt=\frac{1}{4}\int\cos t dt=\frac{1}{4}\sin t+C.$

Оскільки $\sin t=tgt\cdot\cos t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$, то остаточно

одержимо $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C$.

Приклад 10 Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x=\frac{3}{\cos t}$, тоді

$$dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt, \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9} = \sqrt{9\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)} = 3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = 3\frac{\sin t}{\cos t} = 3tgt$$

і $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3\sin t}{\cos t}}dt = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C.$$

Оскільки $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, то шуканий інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C .$$

Зауважимо, що заданий інтеграл можна знайти і за допомогою підстановки $x = \frac{1}{t}$.

Домашнє завдання

Теорія Означення та властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі. [5], с. 379 – 403.

Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx.$ Відповідь: $2tg\frac{x}{2} - x + C$.

2 $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ Відповідь: $C - ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x$.

3 $\int \sin 2x \sin 5x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C$.

4 $\int \sin^4 x dx.$ Відповідь: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

5 $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$ Відповідь: $\ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$.

6 $\int ctg^4 x dx.$ Відповідь: $x - \frac{1}{3}ctg^3 x + ctgx + C$.

7 $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctg(2tg\frac{x}{2}) + C$.

8 $\int \frac{dx}{1+tgx}.$ Відповідь: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$.

9 $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$ Відповідь: $\ln(2+\cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right) + C$.

10 $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tgx) + C$.

11 $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$. Відповідь: $\frac{1}{2} tgx + \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2} tgx) + C$.

12 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$. Відповідь: $\ln|\sin x| - \sin x + C$.

13 $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx.$ Відповідь: $\frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \sin x + C$.

14 $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx.$ Відповідь: $-\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{3}{11} \cos^{\frac{11}{3}} x + C$.

15 $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. Відповідь: $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 5}{tg\frac{x}{2} - 3}\right| + C$.

16 $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$. Відповідь: $\frac{1}{2} \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4} tg^2 \frac{x}{2} + C$.

17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$. Відповідь: $arctg(tgx - 2) + C$.

18 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4} tg^4 \frac{x}{2} + tg \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$.

19 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \ln\left|\frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}}\right| + C$.

20 $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$. Відповідь: $-arctg(\cos 2x) + C$.

21 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$ Відповідь: $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$.

22 $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx.$ Відповідь: $2arctg\sqrt{x} + C$.

23 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x} - 1)}$. Відповідь: $3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x} - 1\right| + C$.

24 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$. Відповідь: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|1 + \sqrt[4]{x}\right| + C$.

25 $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx.$ Відповідь: $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2 + 6x + 2} + \frac{13}{9}\ln\left|3x + 1 + \sqrt{9x^2 + 6x + 2}\right| + C$.

26 $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

27 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right|+C$.

28 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$. Відповідь: $-2arctg\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C$.

29 $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. Відповідь: $-\frac{1}{15}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x+15x^2}}{2x-3}\right|+C$.

30 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$. Відповідь: $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right)+C$.

31 $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. Відповідь: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C$.

32 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Відповідь: $8\arcsin\frac{x}{4}-\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2}+C$.

33 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$. Відповідь: C-$\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13

Означення та властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Обчислити $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

Розв’язання.

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy=\int_4^9 \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}+1}dy=\int_4^9(\sqrt{y}-1)dy=\int_4^9\sqrt{y}dy-\int_4^9 dy=$$

$$=\left.\left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}-y\right)\right|_4^9=\frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}}-9-\frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}+4=18-9-\frac{16}{3}+4=\frac{23}{3}.$$

Приклад 2 Обчислити $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Після елементарних перетворень підінтегральної функції будемо мати

$$\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int\limits_0^{16} \frac{(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}dx = \int\limits_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int\limits_0^{16}\sqrt{x+9}dx + \int\limits_0^{16}\sqrt{x}dx\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16} =$$

$$= \frac{2}{27}\left((x+9)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16} = \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{27}(125+64-27) = 12.$$

Приклад 3 Обчислити $\int\limits_2^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_2^{3} \frac{dx}{2x^2+3x-2} = \frac{1}{2}\int\limits_2^{3} \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-1} = \frac{1}{2}\int\limits_2^{3} \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right|\Bigg|_2^{3} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+2}\right|\Bigg|_2^{3} = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}.$$

Приклад 4 Обчислити $\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x+x^3}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x+x^3} = \int\limits_1^{2} \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^{2} \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int\limits_1^{2} \frac{dx}{x} - \int\limits_1^{2} \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \ln x\Bigg|_1^{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Bigg|_1^{2} = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 5 + \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Приклад 5 Обчислити $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx.$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $t = \sqrt{e^x - 1}$. Тоді $t^2 = e^x - 1$, $2tdt = e^x dx$, $dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2+1}$.

Якщо $x=0$, то $t=\sqrt{e^0-1}=0$. Якщо $x=ln2$, то $t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$. Отже,

$$\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=2\int\limits_0^1\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int\limits_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int\limits_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2(t-arctgt)\Big|_0^1=2(1-arctg1+arctg0)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\pi}{2}.$$

Приклад 6 Обчислити $\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\left|\begin{array}{c} x^2-1=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ xdx=tdt \\ 1-1=t^2, t_н=0 \\ 4-1=t^2, t_в=\sqrt{3}\end{array}\right|=\int\limits_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\cdot xdx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{t^2+1}=$$

$$=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=(t-arctgt)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\sqrt{3}-arctg\sqrt{3}+arctg0=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 7 Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}.$

Розв'язання.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=\left|\begin{array}{c} t=tg\dfrac{x}{2} \\ x=2arctgt \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_н=tg0=0 \\ t_в=tg\dfrac{\pi}{4}=1\end{array}\right|=\int\limits_0^1\frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\limits_0^1\frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{3+t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}}-arctg0\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Приклад 8 Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Розв'язання. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \left| \begin{array}{c} x = tgt \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = 1+tg^2 t = \dfrac{1}{\cos^2 t} \\ tgt = 0, t_н = arctg0 = 0 \\ tgt = 1, t_в = arctg1 = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 t \cdot \dfrac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\dfrac{1}{\cos^2 t}\right)^3} =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{32}.$$

Приклад 9 Обчислити $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Розв'язання. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{1}{t}; dx = -\dfrac{dt}{t^2} \\ 1 = \dfrac{1}{t}, t_н = 1 \\ 3 = \dfrac{1}{t}, t_в = \dfrac{1}{3} \end{array} \right| = \int\limits_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\dfrac{dt}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{5}{t}+1}} =$

$$= -\int\limits_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = \ln\left|t + \frac{5}{2} + \sqrt{t^2+5t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^1 =$$

$$= \ln\left(\frac{7}{2} + \sqrt{7}\right) - \ln\left(\frac{17}{6} + \sqrt{\frac{25}{9}}\right) = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

Приклад 10 Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання. Покладемо $u=x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Тоді $du=dx$, $v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx.$

Оскільки $u=x$, $v=-ctgx$, $u'=1$ і $v'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ неперервні на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$,

то враховуючи формулу $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ будемо мати:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4} + \ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)\pi}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 11 Обчислити $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx.$

Розв'язання. Враховуючи, що *u=ln(x+1)*, *dv=dx* за формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі, одержимо

$$\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(x+1); du=\dfrac{dx}{x+1} \\ dv=dx; v=x \end{matrix} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= (e-1)\ln e - \int\limits_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx = e-1-\int\limits_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = e-1-(x-\ln(x+1))\Big|_0^{e-1} =$$

$$= e-1-(e-1-\ln e+\ln 1) = e-1-e+1+1 = 1.$$

Приклад 12 Обчислити $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx.$

Розв'язання. Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \left| \begin{matrix} u=e^{2x}; du=2e^{2x}dx \\ dv=\cos xdx; v=\sin x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\sin xdx =$$

$$= e^{\pi} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx = \left| \begin{matrix} u=e^{2x}; du=2e^{2x}dx \\ dv=\sin xdx; v=-\cos x \end{matrix} \right| = e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx \right) =$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx.$$

Розв`язуючи далі одержане рівняння відносно невідомого інтеграла, знаходимо $5\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} - 2.$

Звідси остаточно одержимо $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \dfrac{e^{\pi} - 2}{5}.$

Домашнє завдання

Теорія Геометричне застосування визначених інтегралів. Обчислення площі плоскої фігури. [5], с. 428 – 432.

Вправи

Обчислити інтеграли:

1 $\int_{2}^{-13} \dfrac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}.$ Відповідь: $-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

2 $\int_{0}^{1} \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx.$ Відповідь: $\dfrac{1}{5}(e-1)^5$.

3 $\int_{0}^{1} \dfrac{xdx}{(x^2+1)^2}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{4}$.

4 $\int_{1}^{e} \dfrac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}$.

5 $\int_{1}^{2} e^{\frac{1}{x}} \dfrac{dx}{x^2}.$ Відповідь: $e - \sqrt{e}$.

6 $\int_{0}^{1} \dfrac{dx}{x^2+4x+5}.$ Відповідь: $arctg\dfrac{1}{7}$.

7 $\int_{-0,5}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ Відповідь: $\dfrac{\pi}{6}$.

8 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$ Відповідь: $\dfrac{2}{7}$.

9 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x+\varphi_0)dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2\omega}$.

10 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx.$ Відповідь: $\frac{4}{3}$.

11 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$ Відповідь: *2.*

12 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin(2t-\frac{\pi}{4})dt.$ Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

13 $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}$.

14 $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^4}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

15 $\int\limits_{0}^{1} e^{x+e^x}dx.$ Відповідь: e^e-e.

16 $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^x dx}{e^x+1}.$ Відповідь: ln(e+1).

17 $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx.$ Відповідь: *1-cos1.*

18 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{2}(\ln 3-1)$.

19 $\int\limits_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}.$ Відповідь: $\frac{32}{3}$.

20 $\int\limits_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$ Відповідь: $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi.$

21 $\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}.$ Відповідь: $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right).$

22 $\int\limits_{0}^{-\ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx.$ Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3}).$

23 $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx.$ Відповідь: $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}.$

24 $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx.$ Відповідь: $\frac{8}{15}.$

25 $\int\limits_{0}^{\sqrt[4]{2}}\frac{x^{15}dx}{\left(1+x^8\right)^{\frac{2}{5}}}.$ Відповідь: $\frac{5}{192}\left(5+7\sqrt[5]{125}\right).$

26 $\int\limits_{0}^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx.$ Відповідь: $4-\pi.$

27 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2\cos x+3}.$ Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}}.$

28 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{6dx}{6+\sin^2 x}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}.$

Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

29 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cos x dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}-1.$

30 $\int\limits_{1}^{2}x\log_2 x dx.$ Відповідь: $2-\frac{3}{4\ln 2}.$

31 $\int\limits_{1}^{e}\ln^3 x dx.$ Відповідь: *6-2e*.

32 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$ Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}.$

33 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}xtg^2 x dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln 2.$

34 $\int\limits_{1}^{2}\frac{\ln x}{x^5}dx.$ Відповідь: $\frac{15-4\ln 2}{256}.$

35 $\int\limits_{1}^{\sqrt{e^\pi}}\cos\ln x dx.$ Відповідь: $\frac{\sqrt{e^\pi}-1}{2}.$

36 $\int\limits_0^1 xarctgxdx.$ Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}.$

37 $\int\limits_0^1 x^3e^{2x}dx.$ Відповідь: $\frac{e^2+3}{8}.$

38 $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx.$ Відповідь: $\pi\sqrt{2}-4.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 14

Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоскої фігури.

Приклад 1 Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y=f(x)=x^2-2x+2,\ x=-1,\ x=2$ і відрізком $[-1;2]$ осі Ox.

Розв'язання. Ця плоска фігура являє собою криволінійну трапецію (рис. 14.1), тому її площу обчислюють за формулою $S=\int\limits_a^b f(x)dx$:

$$S=\int\limits_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2}-x^2\Bigg|_{-1}^{2}+2x\Bigg|_{-1}^{2}=6.$$

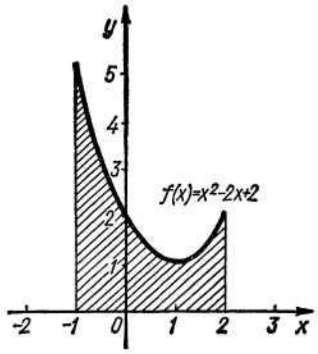


Рис. 14.1

Приклад 2 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-1$ і віссю Ox.

Розв'язання. Графік функції $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x\in[-1;0]$ лежить під віссю Ox (рис. 14.2), тому для обчислення площі даної плоскої фігури застосовуємо формулу $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$

: $S=-\int\limits_{-1}^{0}\sqrt[3]{x}dx=-\frac{3}{4}x^{4/3}\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{3}{4}.$

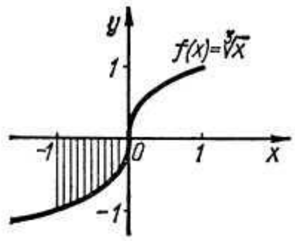


Рис. 14.2

Приклад 3 Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої відрізком $\left[-\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ осі Ox, графіком функції $f(x)=\cos x$, відрізками прямих $x=-\frac{5\pi}{6}$ і $x=\pi$

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $\cos x = 0$, дістанемо, що графік функції $y = \cos x$ на відрізку $\left[-\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ перетинає вісь Ох у точках $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ (рис. 14.1).

Отже, за формулою $S = \int_a^b |f(x)|dx$

$$S = \int_{-5\pi/6}^{\pi} |cosx| dx = -\int_{-5\pi/6}^{-\pi/2} \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = -\sin x \Big|_{-5\pi/6}^{-\pi/2} + \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7}{2}$$

.

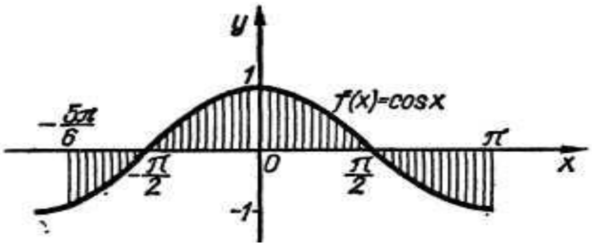


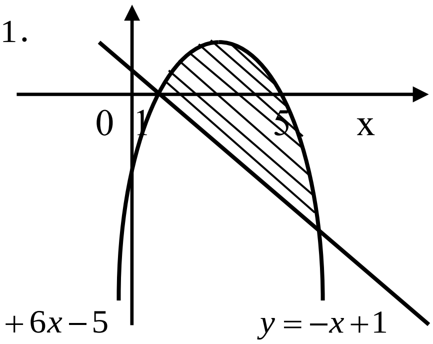
Рис. 14.3

Приклад 4 Обчислити площу фігури обмежену лініями $y = -x^2 + 6x - 5$ та $y = -x + 1$.

Розв'язання. Застосуємо формулу площи плоскої фігури у випадку декартових координат: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx; \quad f_2(x) > f_1(x)$.

Тут $f_2(x)$ – це парабола $y = -x^2 + 6x - 5$, а $f_1(x)$ – це пряма $y = -x + 1$.

Будуємо параболу $y = -x^2 + 6x - 5$ і пряму $y = -x + 1$.



$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3$

x	0	1
y	1	0

$y_0 = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$

$Ox : y = 0$

$-x^2 + 6x - 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(-5) = 16$

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2(-1)} = 5$

$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2(-1)} = 1$

$Oy : x = 0 \Rightarrow y = c = -5$

Знайдемо точки перетину графіків функцій:

$-x + 1 = -x^2 + 6x - 5$

$-x + 1 + x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 6$

Обчислюємо площу фігури за допомогою визначеного інтегралу:

$$S=\int_1^6(-x^2+6x-5-(-x+1))\,dx=\int_1^6(-x^2+6x-5-+x-1)\,dx=\int_1^6(-x^2+7x-6)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^6=\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{7\cdot6^2}{2}-6\cdot6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{7\cdot1^2}{2}-6\cdot1\right)=$$

$$=-72+126-36+\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6=132-108+\frac{2-21}{6}=24-3\frac{1}{6}=20\frac{5}{6}\;(\hat{e}\hat{a}.\hat{\imath}\ddot{a}\,.)$$

Приклад 5 Обчислити площу фігури, обмежену лініями $r=\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$ (рис. 14.5).

Розв'язання. З урахуванням симетрії фігури шукана площа може бути знайдена за формулою площі фігури, яка задана в полярній системі координат: $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2d\varphi$:

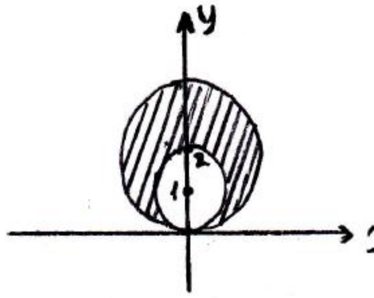


Рис. 14.5

$$S=2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(2\sin\varphi)^2\,d\varphi-2\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}(\sin\varphi)^2\,d\varphi=\int_0^{\pi/2}4\sin^2\varphi d\varphi-\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi d\varphi=4\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos2\varphi)}{2}d\varphi-$$

$$-\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\cos\varphi)}{2}d\varphi=2\int_0^{\pi/2}(1-\cos2\varphi)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\int_0^{\pi/2}(1-\cos2\varphi)d\varphi=\frac{3}{2}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin2\varphi\right)\Big\|_0^{\pi/2}=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin2\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\frac{3\pi}{4}$$

Приклад 6 Обчислити площу фігури, що обмежена лініями $x=3t^2$, $y=3t-t^3$, $t_1=0$, $t_2=1$.

Розв'язання. Скористаємося формулою: площі плоскої фігури у випадку параметричного задання ліній:

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt=\int_0^1\left(3t-t^3\right)6tdt=\int_0^1\left(18t^2-6t^4\right)dt=\left(18\frac{t^3}{3}-6\frac{t^5}{5}\right)\Big\|_0^1=\left(6t^3-6\frac{t^5}{5}\right)\Big\|_0^1=$$

$$=6\cdot1^3-\frac{6}{5}\cdot1^5=6-\frac{6}{5}=\frac{30-6}{5}=\frac{24}{5}$$

Домашнє завдання

Теорія Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання. [5], с. 432 – 441.

Вправи

1 Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2 Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис і лінією $y = x - x^2\sqrt{x}$.

Вказівка. Побудуйте лінію $y = x - x^2\sqrt{x}$, надаючи аргументу x значень від 0 до 1.

Відповідь: $\frac{3}{14}$.

3 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-x}$, $y=e^x$ і прямою $x=1$.

Відповідь: $e+\frac{1}{e}-2$.

4 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осей координат. При зміні аргументу x на чверті площі від 0 до a параметр t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Відповідь: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5 Обчислити площу петлі лінії $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осі Ox. Обчисліть половину площі за формулою (41г), змінюючи параметр t від 0 до $\sqrt{3}$, і результат подвойте.

Відповідь: $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

6 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = a\cos 5\varphi$.

Вказівка. Фігура являє собою п`ятипелюсткову троянду. На площі половини пелюстка кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{10}$.

Відповідь: $\frac{a^2\pi}{4}$.

7 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = tg\varphi$ $(a > 0)$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Вказівка. Досить побудувати частину лінії $r = tg\varphi$, змінюючи φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{8}a^2(4-\pi)$.

8 Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = 2(1-\cos\varphi)$ і колом $r=4$.

Відповідь: 10π.

9 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-2x}$, $y=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ і $x=1$.

Відповідь: $\dfrac{e^3-1}{2e^2}$.

10 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x=12\cos t+5\sin t, \\ y=5\cos t-12\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

Відповідь: 169π.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 15

Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання.

Приклад 1 Обчислити об'єм тіла, що одержується при обертанні кривої $y=\sqrt{x}$ навколо осі Ox на відрізку $[0\,;4]$ (рис. 15.1).

Розв'язання. $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

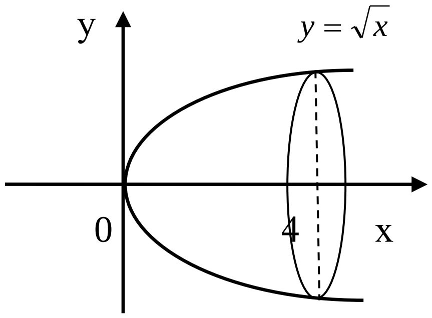


Рис. 15.1

$$V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{x}\right)^2dx=\pi\int\limits_0^4 xdx=$$
$$=\frac{\pi x^2}{2}\bigg|_0^4=\pi\left(\frac{4^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)=$$
$$=\pi(8-0)=8\pi\,(куб.од.)$$

Приклад 2 Нехай фігура, обмежена прямими $y=\frac{3}{4}x$, x=4 і віссю Ox, обертається навколо осі Ox. Одержане тіло обертання – конус. Знайти його об'єм.

Розв'язання. Межами інтегрування являються абсциси точок перетину прямих $y=\frac{3}{4}x$ і x=4 з віссю Ox. Знаходимо системи $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x, \\ y=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases}$ Отже, $a=0, b=4$ Далі знаходимо $V=\int\limits_0^4\pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2dx=\frac{9}{16}\pi\frac{x^3}{3}\bigg|_0^4=\frac{9}{4^2}\frac{4^3}{3}\pi=12\pi$

Розв'яжемо цю задачу за допомогою формули знаходження об'єму кругового конуса. Маємо $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Знаходимо радіус основи. З рівняння $y=\frac{3}{4}x$ при x=4 → R=3

Висота конуса h=4. Таким чином, $V=\frac{1}{3}\pi R^2 h=\frac{1}{3}\pi 3^2 4=12\pi$.

Приклад 3 Знайти довжину кардіоїди, полярне рівняння якої: $r=a(1+\cos\theta)$.

Розв'язання. Оскільки функція $r=a(1+\cos\theta)$ є 2π-періодичною, вся крива буде отримана, коли θ пробігає всі значення на будь-якому відрізку довжини 2π, наприклад, нехай $\theta\in[0,2\pi]$.

Оскільки кардіоїда — крива, симетрична відносно полярної осі, то при обчисленні можна знайти довжину лише половини кривої, яка відповідає $\theta\in[0,\pi]$, а потім результат подвоїти. Для обчислення скористаємося формулою

$$l=\int_{\theta_0}^{\Theta}\sqrt{(r'(\theta))^2+r^2(\theta)}d\theta,\ r'=-a\sin\theta .$$

$$l=2l_{OA}=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2(\theta)+(r'(\theta))^2}d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}d\theta=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}d\theta=$$

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos\theta}d\theta=2\sqrt{2}a\int_0^{\pi}\sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}d\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi}=8a.$$

Приклад 4 Обчислити довжину дуги лінії $y=lnx$ від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції: $y'=\frac{1}{x}$.

Тоді $1+(y'(x))^2=1+\frac{1}{x^2}=\frac{1+x^2}{x^2}$.

За формулою обчислення довжини дуги маємо:

$$L=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\cdot xdx=\left|\begin{array}{c}1+x^2=z^2\\ x^2=z^2-1\\ 2xdx=2zdz\\ z_н=\sqrt{1+3}=2\\ z_в=\sqrt{1+8}=3\end{array}\right|=$$

$$=\int_2^3\frac{z}{z^2-1}\cdot zdz=\int_2^3\frac{z^2}{z^2-1}dz=\int_2^3\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz=\int_2^3\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz=$$

$$=\left(z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)\Bigg|_2^3 = 3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 5 Обчислити довжину дуги евольвенти кола *x=R(cost+tsint), y=R(sint-tcost)* від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Розв'язання. Обчислюємо похідні

$$x_t' = R(-\sin t+\sin t+t\cos t) = Rt\cos t$$

і

$$y_t' = R(\cos t-\cos t+t\sin t) = Rt\sin t.$$

Тоді

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2 = R^2t^2\cos^2 t+R^2t^2\sin^2 t = R^2t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right) = R^2t^2.$$

Довжину дуги евольвенти кола обчислюємо за формулою обчислення довжини дуги лінії, заданої в параметричній формі, одержуємо:

$$L=\int_0^\pi \sqrt{R^2t^2}\,dt = R\int_0^\pi t\,dt = R\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi^2 R}{2}.$$

Приклад 6 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r=2a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Поверхня обертання показана на рис. 15.2.

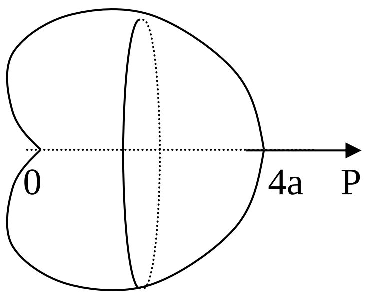


Рис.15.2

Враховуючи, що $r_\varphi' = -2a\sin\varphi$,

$$r^2+(r')^2 = 4a^2(1+\cos\varphi)^2+(-2a\sin\varphi)^2 =$$

$$=4a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=4a^2(2+2\cos\varphi)=8a^2(1+\cos\varphi)=16a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

і $0\le\varphi\le\pi$, за формулою обчислення площі поверхні обертання маємо

$$S_{n.o.} = 2\pi\int_0^\pi 2a(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi=$$

$$=16\pi a^2\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 64\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$=-128\pi a^2\cdot\left.\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^{\pi} = -\frac{128}{5}\pi a^2(0-1) = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

Тут враховано, що $\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$, бо для $0\le\varphi\le\pi$ $\cos\frac{\varphi}{2}$ набуває невід'ємних значень.

Таким чином, шукана площа поверхні обертання дорівнює $\frac{128}{5}\pi a^2$.

Домашнє завдання

Теорія Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв'язання задач фізики. [5], с. 441 – 448.

Вправи

1 Фігура, обмежена дугами парабол $y^2=x$ і $x^2=y$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: $0{,}3\pi$.

2 Обчислити об'єм тіла, яке одержуємо від обертання навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y=\sin x$, яка відповідає півперіоду, і віссю абсцис.

Відповідь: $2\pi^2$.

3 Обчислити об'єм тіла, яке утворюється в результаті обертання навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2 \end{cases}$ і $y=4$.

Відповідь: 8π.

4 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

Відповідь: 24π.

5 Фігура, обмежена лініями $y^2=(x+4)^3$ і $x=0$, обертається навколо осі Ox. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: 64π.

6 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y^2+x-4=0$ і $x=0$.

Відповідь: $\frac{512}{15}\pi$.

7 Обчислити довжину дуги лінії $y=\ln\left(1-x^2\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\ln 3-0{,}5$.

8 Обчислити довжину дуги лінії $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ від $x_1=a$ до $x_2=в$.

Відповідь: $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

9 Обчислити довжину дуги кривої $y=1-\ln\sin x$ від $x_1=\frac{\pi}{3}$ до $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln 3$.

10 Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=3$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(e^6-e^{-6}\right)$.

11 Обчислити довжину дуги лінії $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Відповідь: $\frac{\pi^3}{3}$.

12 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=1$.

Відповідь: $\sqrt{2}(e-1)$.

13 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

Відповідь: *48*.

14 Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi=1$ від $\varphi_1=\frac{3}{4}$ до $\varphi_2=\frac{4}{3}$.

Відповідь: $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

15 Обчислити довжину дуги кривої $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Відповідь: $\frac{3\pi a}{2}$.

16 Обчислити довжину дуги кардіоїди $r=2(1-\cos\varphi)$, яка розташована всередині кола $r=1$.

Відповідь: $16-8\sqrt{3}$.

17 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y–x^3=0$ навколо осі абсцис від $x_1=0$ до $x_2=a$.

Відповідь: $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{\left(1+a^4\right)^3}-1\right)$.

28 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{t}{3}\left(t^2-3\right) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\sqrt{3}$.

Відповідь: 3π.

19 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Відповідь: $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

20 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=\frac{1}{3}x^3$ від $x_1=-2$ до $x_2=2$.

Відповідь: $\frac{2}{9}\pi\left(17\sqrt{17}-1\right)$.

21 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y^2=4+x$ від вершини до точки з абсцисою $x=2$.

Відповідь: $\frac{62}{3}\pi$.

22 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кардіоїди $\begin{cases} x=a\left(2\cos t-\cos 2t\right), \\ y=a\left(2\sin t-\sin 2t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

23 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=a\left(t-\sin t\right), \\ y=a\left(1-\cos t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{64}{3}\pi a^2$.

24 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{12}{5}\pi a^2$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 16

Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв'язання задач фізики.

Приклад 1 Знайти статичні моменти відносно осей ОХ і ОУ трикутника, обмеженого прямими: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$.

Розв'язання. Застосуємо формули $M_x=\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b f(x)\left|f(x)\right|dx$ і $M_y=\int\limits_a^b x\left|f(x)\right|dx$.

Розглянута плоска фігура обмежена: $y=f(x)=b\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$, $x=0$, $x=a$.

$$M_x=\frac{1}{2}\int\limits_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right)\left|b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right|dx=\left[\begin{array}{l} b>0\Rightarrow |b|=b; \\ \textit{оскільки}\, 0\le x\le a, \\ 0\le\dfrac{x}{a}\le 1\Rightarrow 0\le 1-\dfrac{x}{a}\Rightarrow \\ \left|1-\dfrac{x}{a}\right|=1-\dfrac{x}{a} \end{array}\right]=\frac{b^2}{2}\int\limits_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=$$

$$=\frac{b^2}{2a^2}\int\limits_0^a\left(a^2-2ax+x^2\right)dx=\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2x-ax^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab^2}{6};$$

$$M_y=\int\limits_0^a x\left|b\left(1-\frac{x}{a}\right)\right|dx=\frac{a^2b}{6}.$$

.

Координати центру ваги $(\bar{x},\bar{y})$ криволінійної трапеції $a\le x\le b$, $a\le y\le f(x)$ обчислюються відповідно до формул:

$$\bar{x}=\frac{\int\limits_a^b xf(x)dx}{S},\quad \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int\limits_a^b f^2(x)dx}{S},$$

де S — площа фігури: $S=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Приклад 2 Знайти центр ваги дуги півкола $x^2+y^2=a^2$ ($y\ge 0$).

Розв'язання. Застосуємо формули $\bar{x}=\dfrac{\int\limits_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$ і $\bar{y}=\dfrac{\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}{\int\limits_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx}$.

Розглянута крива визначається явно рівнянням: $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $-a\le x\le a$.

У цьому випадку $y'=\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Тоді

$$\bar{x}=\frac{\int_{-a}^{a}x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx}{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx}=\frac{\int_{-a}^{a}x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx}{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}dx}=\frac{\int_{-a}^{a}x\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx}{\int_{-a}^{a}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-x^2}}dx}=\frac{\int_{-a}^{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\textit{підінтегральна функція чисельника}\\ \textit{є непарною, тому } \int_{-a}^{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=0\end{array}\right]=0;$$

$$\bar{y}=\frac{\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx}{\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}dx}=\frac{\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}{\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx}=\frac{2a}{\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_{-a}^{a}}=\frac{2a}{\pi}.$$

Приклад 3 Знайти центр мас фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$ та колом $x^2+y^2=9$, що знаходиться у першій чверті координатної площини.

Розв'язання. Побудуємо дуги кола радіуса 3 з центром у початку координат та еліпса з цим же центром та півосями 3 та 2, розташовані у першій чверті, які разом з координатними осями обмежують задану фігуру.

Спочатку за формулами $\begin{cases}M_x=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx,\\ M_y=\displaystyle\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.\end{cases}$ знаходимо статичні моменти даної фігури:

$$M_y=\int_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx=\int_0^3 x\left(\sqrt{9-x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right)dx=\frac{1}{3}\int_0^3 x\sqrt{9-x^2}\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,d\left(9-x^2\right)=-\frac{1}{9}\left(9-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^3=3;$$

$$M_x=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_a^b\left(f^2{}_2(x)-f^2{}_1(x)\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^3\left(\left(9-x^2\right)-\frac{4}{9}\left(9-x^2\right)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\limits_0^3\left(5-\frac{5}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(5x-\frac{5x^3}{27}\right)\Bigg|_0^3=5.$$

Далі знайдемо координати центра мас фігури за формулами:

$$x_0=\frac{M_y}{S},\ y_0=\frac{M_x}{S},$$

де S – площа даної фігури.

Площу криволінійної трапеції знайдемо як різницю площі чверті круга радіуса 3, та чверті еліпса з півосями a=3, b=2 (площа еліпса з півосями a, b дорівнює πab):

$$\text{S}=\frac{9\pi}{4}-\frac{3\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Таким чином, отримуємо координата центра мас:

$$x_{0.}=\frac{M_y}{S}=\frac{4}{\pi},\ y_0=\frac{M_x}{S}=\frac{20}{3\pi}.$$

Приклад 4 Тіло рухається прямолінійно з швидкістю $\upsilon(t)=(3t^2+4t+1)$ м/с. Знайти шлях, пройдений тілом за перші 3 с.

Розв'язання. За формулою $S=\int\limits_{T_1}^{T_2}\upsilon(t)dt$ дістанемо

$$S=\int\limits_0^3(3t^2+4t+1)dt=(t^3+2t^2+t)\Bigg|_0^3=48(м).$$

Приклад 5 Сила пружності пружини, розтягнутої на 0,05м, дорівнює 3Н. Яку роботу треба виконати, щоб розтягти пружину на ці 0,05м?

Розв'язання. Застосуємо формулу $A=\int\limits_a^b F(x)dx$.

За законом Гука сила *F*, яка розтягує або стискає пружину, пропорційна цьому розтягу або стиску, тобто $F=kx$, де x – величина розтягу або стиску, k - коефіцієнт пропорційності. З умови випливає, що $3=k\cdot 0{,}05$, тобто k=*60*, отже, *F=60x*.

$$A=\int\limits_0^{0,05}60xdx=30x^2\Bigg|_0^{0,05}=0{,}075(\text{Дж}).$$

Приклад 6 Електричний заряд e_1, розташований у початку координат, відштовхує заряд e_2 з точки $(x_1;0)$ у точку $(x_2;0)$.Знайти роботу A сили відштовхування F.

Розв'язання. Відомо, що електричні заряди відштовхуються з силою $F=\frac{e_1\cdot e_2}{r^3}$, де e_1 та e_2 – величини зарядів, r – відстань між ними.

Диференціал роботи сили F на переміщенні dx дорівнює :

$$dA = F(x)dx = \frac{e_1 e_2}{x^2}dx.$$

Звідси знаходимо:

$$A = e_1 e_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -e_1 e_2 \left.\frac{1}{x}\right|_{x_1}^{x_2} = e_1 e_2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right).$$

Приклад 7 Акваріум має форму прямокутного паралелепіпеда. Знайти силу тиску води (густина води 1000 кг/м^3), яка наповнює акваріум, на одну з його вертикальних стінок, розміри якої 0,4 х 0,7 м.

Розв'язання. Щоб знайти силу тиску, скористаємось формулою

$$P = g\int_a^b \rho \cdot x \cdot f(x)dx.$$

Візьмемо систему координат так, щоб осі *Oy* і *Ox* відповідно містила верхню основу і бічну сторону вертикальної стіни акваріума.

Стінка має форму прямокутника, тому $f(x) = 0{,}7,\ x \in [0;0{,}4]$. Оскільки межі інтегрування $a=0$ і $b=0{,}4$, то дістанемо

$$P = g\int_0^{0,4} 1000 \cdot 0{,}7 \cdot x dx = 700g \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{0,4} = 56g.$$

Враховуючи, що $g = 9{,}8$ м/с^2 , маємо $P \approx 548{,}8H$.

Приклад 8 Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою $f(t) = (1+t)e^{3t}$.

Розв'язання. Скористуємося формулою $u = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. Обсяг виробленої продукції дорівнює: $u = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt$.

Використаємо метод інтегрування частинами:

$$U = \int_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \left| \begin{matrix} u = 1+t, & du = dt \\ d\upsilon = e^{3t}dt, & \upsilon = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t} \end{matrix} \right| = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|$$

$$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}(e^{12} - 1) = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5\,(ум.од.)$$

Приклад 9 Чисті інвестиції задано функцією $f(t) = 7000\sqrt{t}$.

Визначити: а) приріст капіталу за три роки;

б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складає 50000.

Розв'язання. а) Скористаємося формулою для обчислення приросту ΔK:

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Поклавши t_1=0; t_2=3:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_{0_1}^{3} 7000\sqrt{t}dt = 7000\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_0^3 = 7000\frac{2}{3}\sqrt{3^3} = 24248{,}71.$$

б) Позначимо шукану тривалість часу через Т, тоді $\Delta K = \int_0^T f(t)dt$.

Підставляємо $\Delta K = 50000$ і $f(t) = 7000\sqrt{t}$.

$$50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t}dt; \quad \int_0^T 7000\sqrt{t}dt = 7000\frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_0^T = 7000\frac{2}{3}T^{3/2};$$

$$50000 = 7000\frac{2}{3}T^{3/2}; \quad T^{3/2} = \frac{50000\cdot 3}{7000\cdot 2} = 10{,}71;$$

$$T = (10{,}71)^{3/2} = 4{,}86(\textit{року}).$$

Домашнє завдання

Теорія Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності. [5], с. 403 – 411.

Вправи

1 Обчислити шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за інтервал часу від t_1 до t_2; а) $v(t) = 5t - 3, t_1 = 0, t_2 = 3.$

б) $v(t) = 1 - 3t, t_1 = 2, t_2 = 5.$

2 Сила в 1Н стискає пружину на 1 см. Обчислити роботу при стисканні пружини на 10 см.

3 При розтягуванні пружини на 0, 02 м потрібно прикласти силу в 40Н. Обчислити роботу при стисканні пружини на 0,05м.

4 Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції х змінюється від 0 до 3 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

5 Обчислити координати центра ваги кардіоїди $r = a(1 + \cos\varphi)$ від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 17

Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності.

Невласні інтеграли поділяють на два класи:

1 Інтеграли з нескінченими межами $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ від функції $f(x)$, яка усюди визначена і неперервна.

2 Інтеграли від необмежених або розривних функцій $f(x)$ на замкнутому відрізку $[a, b]$

Дослідження невласних інтегралів виконують шляхом використання граничного переходу до визначеного інтегралу:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx; \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

Якщо указані границі існують (є скінченими числами), то невласний інтеграл, який дорівнює своїй границі називають *збіжним*.

Якщо якась границя не існує або дорівнює нескінченості, то невласний інтеграл називають *розбіжним*.

Приклад 1 Обчислити інтеграл $\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Цей інтеграл є невласним інтегралом першого роду. Згідно з його означенням, маємо

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$$

Відповідь: інтеграл збіжний, дорівнює 1.

Приклад 2 Обчислити інтеграл $\int_{0}^{\infty} e^x dx$ або встановити його розбіжність

Розв'язання. Підінтегральна функція всюди на проміжку інтегрування визначена і неперервна, тому цей інтеграл є невласним першого роду.

$$\int_{0}^{\infty} e^x dx = \lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^x dx = \lim_{a\to\infty} e^x\Big|_{0}^{a} = \lim_{a\to\infty}(e^a - e^0) = e^{\infty} - 1 = \infty.$$

Відповідь: інтеграл розбіжний.

Приклад 3 Обчислити інтеграл $\int_{0}^{\infty} 2^{-x} dx$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. $\int_{0}^{\infty} 2^{-x} dx =$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} 2^{-x} dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln 2}(-2^{-x})\Big|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln 2}(1-\frac{1}{2^b}) = \frac{1}{\ln 2} \approx 1.4.$$

Приклад 4 Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ або встановити його розбіжність

Розв'язання. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$

Обчислимо перший інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to-\infty} arctgx\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(arctg0-arctga)=\frac{\pi}{2};$$

Обчислимо другий інтеграл

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty} arctgx\Big|_0^b=\lim_{b\to\infty}(arctgb-arctg0)=\frac{\pi}{2};$$

Відповідь: інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$ збіжний

Приклад 5 Обчислити інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Неправильне розв'язання: $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}=-1-\left(-\frac{1}{-1}\right)=-2\cdot$

Правильне розв'язання: $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)\Rightarrow\ \Rightarrow x=0\in[-1;\ 1]$ — точка розриву 2-го роду функції $f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ — невласний.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon_1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon_2}^{1}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1\right)+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty+\infty=+\infty\Rightarrow$$ інтеграл розбіжний.

Приклад 6 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^8+7}}$.

Розв'язання. Оскільки $\forall x\in[1;+\infty)\ \ 0<\frac{x}{\sqrt{x^8+7}}<\frac{1}{x^3}$, а інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ є збіжним, то за ознакою збіжності даний інтеграл є збіжним.

Покажемо, що інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ є збіжним:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{dx}{x^3}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Приклад 7 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання. Для підінтегральної функції можна записати нерівність $\frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ є розбіжним, тому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2+\ln x}{\sqrt{x}} dx$ також є розбіжним.

Покажемо, що інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ є збіжним:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{x}\right)\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(2\sqrt{b}+2\right) = \infty.$$

Домашнє завдання

Теорія Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Задача Коші. [3], с. 5 – 20.

Вправи

Обчислити невласні інтеграли або довести їх розбіжність:

1) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; 2) $\int\limits_9^{\infty} \frac{1}{4-x^2} dx$; 3) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\ln x}$; 4) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 18

Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Задача Коші.

Приклад 1 Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx}{x+1}$.

Розв'язання. Наведене рівняння – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними ($f(y)=y$, $g(x) = -\frac{x}{x+1}$ і тому неперервність функції $g(x)$ порушується при $x = -1$). Відокремимо змінні й виконаємо інтегрування.

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|, \quad C \neq 0$$

(вибір довільної сталої у вигляді $\ln|C|$ пов'язаний лише із зручностями для подальшого потенціювання). Оскільки $-x = \ln e^{-x}$ і сума логарифмів дорівнює логарифму добутку, то

$$\ln|y| = \ln(|C||x+1|e^{-x}) \Leftrightarrow y = C(x+1)e^{-x}.$$

При відокремленні змінних (в результаті ділення на y) був загублений розв'язок $y \equiv 0$. Зауважимо, що цей (нульовий) розв'язок визначається при $C = 0$. Отже, будь-який розв'язок заданого диференціального рівняння визначається за формулою $y = C(x+1)e^{-x}$, де C – довільна стала.

Приклад 2 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0.$$

Розв'язання. Маємо $M_1(x) = 1,\ N_1(y) = \left(1+y^2\right),\ M_2(x) = x\left(1+x^2\right),\ N_2(y) = y$. Поділивши обидві частини рівності на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними: $\dfrac{y}{1+y^2}dy - \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$. Оскільки $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді: $\dfrac{y}{1+y^2}dy - \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}\right)dx = 0$.

Отже $\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}dy - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right] - \ln x = c$.

Позначимо $c = \ln c_1$ та отримаємо $(1+x^2)(1+y^2) = c_1 x^2$.

Очевидно, що $x = 0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

Приклад 3 Знайти загальний розв'язок рівняння $\left(1+e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно y': $y' = \dfrac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}$.

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Підставимо $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}, \qquad y^2\,dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

Звідси маємо

$\displaystyle\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2} \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C \Rightarrow y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв'язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$.

Приклад 4 Знайти частинний інтеграл рівняння $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}}$, якщо $y\big|_{x=1} = 9$.

Розв'язання. Так як $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 3\sqrt{x} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (тут $f(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y}},\ g(x) = 3\sqrt{x}$).

Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо $\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx$.

Інтегруємо дане рівняння:

$\int\sqrt{y}\,dy = 3\int\sqrt{x}\,dx \quad\Rightarrow\quad \int y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx \quad\Rightarrow\quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, звідки знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C$, або $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C$.

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 9$ при $x = 1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C: $9^{\frac{3}{2}} = 3\cdot 1^{\frac{3}{2}} + C, \quad 27 = 3 + C, \quad C = 24$.

Підставивши знайдене значення $C = 24$ у формулу $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24$.

Приклад 5 Знайти частинний інтеграл рівняння $y\sqrt{1+x^2}\,y' + x\sqrt{1+y^2} = 0$, якщо $y\big|_{x=\sqrt{3}} = 0$.

Розв’язання. Розв’яжемо задане рівняння відносно y': $y' = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$.

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (тут $f(y) = \frac{\sqrt{1+y^2}}{y}$, $g(x) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$). Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні $\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Звідси маємо $\int\frac{ydy}{\sqrt{1+y^2}} = -\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$, $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + C$, або $\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}$.

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 0$ коли $x = \sqrt{3}$. Тому, підставляючи вказані значення y та x у $\sqrt{1+y^2} = C - \sqrt{1+x^2}$, знаходимо сталу C:

$$\sqrt{1+0^2} = C - \sqrt{1+3}, \quad 1 + 2 = C, \quad C = 3.$$

Отже, частинний інтеграл заданого рівняння має вигляд $\sqrt{1+y^2} = 3 - \sqrt{1+x^2}$.

Домашнє завдання

Теорія Рівняння, однорідні відносно змінних. [3], с. 20 – 27.

Вправи

Знайти загальний розв`язок (інтеграл) диференціальних рівнянь.

1 $xyy' = 1 - x^2$ Відповідь: $x^2 + y^2 = \ln Cx^2.$

2 $y'tgx - y = a.$ Відповідь: $y = C\,sinx - a.$

3 $y' = 10^{x+y}.$ Відповідь: $10^x + 10^{-y} = C.$

4 $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; y(0) = 1.$ Відповідь: $y = \frac{1+x}{1-x}.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 19

Рівняння, однорідні відносно змінних.

Приклад 1 Знайти загальний розв`язок рівняння $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Розв`язання. Це рівняння типу $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто однорідне відносно змінних x і y. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u(x)$, звідки $y=ux$, а $y' = u'x + u$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \frac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln C$ або $u^2 = \ln\left|Cx^2\right|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\frac{y^2}{x^2} = \ln\left|Cx^2\right|$, а розв`язавши відносно $y$, загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln\left|Cx^2\right|}.$$

Приклад 2 Знайти загальний розв`язок рівняння $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

**Розв`язання.** Розв`язавши рівняння відносно y', отримаємо $u' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, тобто рівняння типу $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо підстановку $\frac{y}{x} = u(x)$. Тоді $y = ux$, а $y' = u'x + u.$ Виконуючи низку перетворень, будемо мати: $u'x + u = u\ln u;$

$$x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1);$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln u - 1 = Cx,$$

$$u = e^{Cx+1};$$

$$\frac{y}{x} = e^{Cx+1};$$

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Це і є шуканий розв`язок.

Приклад 3 Знайти загальний розв`язок рівняння $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

**Розв`язання.** Об`єднаємо доданки, які містять dy в одну групу, а ті, що містять dx - в іншу, одержуємо: $(x-y)dy - ydx = 0$. Наявність множника $x - y$ перед dy дає можливість стверджувати, що відокремити змінні в даному рівнянні неможливо.

Розділивши обидві частини отриманого рівняння на xdy, будемо мати

$$\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,$$

звідки $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ і рівняння набуло вигляду $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Далі треба діяти як у попередніх прикладах. Але неважко помітити, що дане рівняння набуде простішого вигляду, якщо розв'язати його відносно $\dfrac{dx}{dy}$, а саме $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{x}{y}-1$. Тоді, застосувавши підстановку $\dfrac{x}{y}=u(y)$, звідки $x=yu$, а $\dfrac{dx}{dy}=u+y\dfrac{du}{dy}$, будемо мати:

$$u+y\frac{du}{dy}=u-1;$$

$$y\frac{du}{dy}=-1;$$

$$du=-\frac{dy}{y};$$

$$u=-\ln|u|-\ln C;$$

$$u=-\ln|Cy|;$$

$$\frac{x}{y}=-\ln|Cy|;$$

$$\frac{x}{y}+\ln|Cy|=0 \quad \text{(загальний інтеграл).}$$

Зауважимо, що розв`язати отримане рівняння відносно y неможливо.

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок заданого диференціального рівняння $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$.

Розв'язання. Праву частину даного рівняння $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}$ можна надати у вигляді: $f(x,y)=\dfrac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)$.

Остаточно маємо $y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$. Застосуємо підстановку $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=\frac{1+u^2}{2}\Rightarrow u'x=\frac{1+u^2}{2}-u\Rightarrow u'x=\frac{u^2-2u+1}{2}\Rightarrow u'x=\frac{(u-1)^2}{2}\Rightarrow u'=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}.$$

Диференціальне рівняння $u'=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв’яжемо його: $\frac{du}{dx}=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{2du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow\frac{-2}{u-1}=\ln|x|+\ln C\Rightarrow\frac{-2}{u-1}=\ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u=\frac{y}{x}$: $\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=\ln C|x|\Rightarrow\frac{-2x}{y-x}=\ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y=x-\frac{2x}{\ln C|x|}$.

Приклад 5 Знайти загальний інтеграл $\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0$.

Розв’язання. Запишемо рівняння у вигляді $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$:

$\left(2\sqrt{xy}-x\right)dy=-y\,dx\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$. Остаточно маємо $y'=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$.

Праву частину рівняння $y'=\frac{-y}{2\sqrt{xy}-x}$ надамо у вигляді $f(x,y)=\frac{-\frac{y}{x}}{2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}-1}$.

Остаточно отримаємо $y'=\frac{-\frac{y}{x}}{2\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}-1}$. Застосуємо підстановку $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1}\Rightarrow u'x=\frac{-u}{2\sqrt{u}-1}-u\Rightarrow u'x=\frac{-u-2u\sqrt{u}+u}{2\sqrt{u}-1}\Rightarrow u'x=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\Rightarrow$$

$$u'=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{-2u\sqrt{u}}{2\sqrt{u}-1}\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{2\sqrt{u}-1}{-2u\sqrt{u}}du=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\int\frac{2\sqrt{u}}{-2u\sqrt{u}}du+\int\frac{du}{2u\sqrt{u}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow-\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}du=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow-\ln|u|-\frac{1}{\sqrt{u}}=\ln C|x|\Rightarrow$$

$$\frac{-1}{\sqrt{u}}=\ln C|x\cdot u|\Rightarrow-\sqrt{\frac{x}{y}}=\ln C\left|x\cdot\frac{y}{x}\right|.$$

З останньої рівності знаходимо загальний інтеграл $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln C|y|=0$.

Домашнє завдання

Теорія Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі. [3], с. 27 –34.

Вправи

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь:

1 $y' = \dfrac{y}{x} + 5\cos^2\dfrac{y}{x}$ Відповідь: $\operatorname{tg}\dfrac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$

2 $xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2}$ Відповідь: $y = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{C}$

3 $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$, якщо $y(1) = 1$ Відповідь: $y = xe^{1-x}$

4 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$. Відповідь: $arctg\dfrac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 20

Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Приклад 1 Розв’язати рівняння $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$. Відповідь надати у вигляді загального розв’язку.

Розв’язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку виду $y' + p(x)y = q(x)$. Його розв’язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння: $u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = 2x^3 \Rightarrow u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3$.

Виберемо функцію v таким чином, щоб $v' - \frac{2v}{x} = 0$. Знаходимо v:

$v' = \frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = 2\ln|x| \Rightarrow \ln|v| = \ln x^2$, звідки $v = x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв’язків рівняння $v' - \frac{2v}{x} = 0$, то тут після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C = 0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$ або $u' = \frac{2x^3}{x^2}$. Знаходимо u:

$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \int du = \int 2x\,dx \Rightarrow u = 2\cdot\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow u = x^2 + C$.

За формулою $y = uv$ знаходимо загальний розв’язок заданого диференціального рівняння – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$.

Приклад 2 Розв'язати рівняння $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$. Відповідь надати у вигляді загального розв'язку.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді $y' = u'v + uv'$. Після підстановки у рівняння отримаємо: $u'v + uv' + uv\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x \;\Rightarrow\; u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}\,x) = \cos^2 x$.

Виберемо функцію v так, щоб $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$. Знаходимо v:

$v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln|\cos x|$, звідки $v = \cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}\,x) = \cos^2 x$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$u' \cdot \cos x = \cos^2 x \;\Rightarrow\; u' = \frac{\cos^2 x}{\cos x} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = \cos x \;\Rightarrow\; du = \cos x\,dx \;\Rightarrow\; \int du = \int \cos x\,dx$, звідки $u = \sin x + C$.

Розв'язок рівняння шукали у вигляді $y = uv$, тому маємо $y = (\sin x + C)\cos x$.

Приклад 3 Розв'язати рівняння $x^2 y' + 5xy + 4 = 0$. Відповідь надати у вигляді загального розв'язку.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $y' + p(x)y = q(x)$. Таким чином отримаємо $y' + \frac{5xy}{x^2} = -\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; y' + \frac{5y}{x} = -\frac{4}{x^2}$.

Отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Після підстановки у рівняння $y = uv$ та $y' = u'v + uv'$ отримаємо:

$u'v + uv' + \frac{5uv}{x} = -\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}$.

Виберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{5v}{x} = 0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{dx} = -\frac{5v}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v} = -5\frac{dx}{x}$ $\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v} = -5\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|v| = -5\ln|x| \;\Rightarrow\; \ln|v| = \ln\frac{1}{|x^5|}$, звідки $v = \frac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v + u\left(v' + \frac{5v}{x}\right) = -\frac{4}{x^2}$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; u' = -\frac{4}{x^2}\cdot x^5 \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = -4x^3 \;\Rightarrow$ $du = -4x^3 dx \;\Rightarrow\; \int du = -4\int x^3 dx \;\Rightarrow\; u = -4\cdot\frac{x^4}{4} + C \;\Rightarrow\; u = -x^4 + C$.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y = uv = \frac{C - x^4}{x^5}$.

Приклад 4 Розв'язати задачу Коші для рівняння $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y|_{x=0} = 2$. Відповідь надати у вигляді частинного розв'язку.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y = uv$. Після підстановки у рівняння $y = uv$ та $y' = u'v + uv'$ отримаємо:

$$u'v+uv'-\frac{2x}{x^2+1}uv=x\sqrt{x^2+1}\;\Rightarrow\;u'v+u\left(v'-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'-\frac{2xv}{x^2+1}=0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{dx}=\frac{2xv}{x^2+1}\;\Rightarrow$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx\;\Rightarrow\;\ln|v|=\ln\left|x^2+1\right|\;\Rightarrow\;v=x^2+1.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v+u\left(v'-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'\left(x^2+1\right)=x\sqrt{x^2+1}\;\Rightarrow\;u'=x\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1}\;\Rightarrow\;\frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\;\Rightarrow\;du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

$$\int du=\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx\;\Rightarrow\;u=\sqrt{x^2+1}+C.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y=uv=\left(\sqrt{x^2+1}+C\right)\cdot\left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y=2$ при $x=0$. Тоді отримаємо $2=(1+C)\cdot 1\;\Rightarrow\;C=1$.

Отже, частинний розв'язок має вигляд $y=\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(x^2+1\right)$ або $y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+x^2+1$.

Приклад 5 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+xy=3xy^3$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку виду $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, де $\alpha\in R$, причому $\alpha\neq 0$ і $\alpha\neq 1$. Це рівняння Бернуллі.

Зробимо заміну $y=uv$, $y'=u'v+uv'$. Після підстановки у рівняння $y=uv$ та $y'=u'v+uv'$ отримаємо: $u'v+uv'+xuv=3x(uv)^3\;\Rightarrow\;u'v+u(v'+xv)=3x\cdot(vu)^3$.

Виберемо функцію v так, щоб $v'+xv=0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx}=-xv\;\Rightarrow\;\frac{dv}{v}=-xdx\;\Rightarrow\;\int\frac{dv}{v}=-\int xdx\;\Rightarrow\;\ln|v|=-\frac{x^2}{2}\;\Rightarrow\;v=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи v в рівняння $u'v+u(v'+xv)=3x\cdot(vu)^3$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'e^{-\frac{x^2}{2}}=3xu^3\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^3\;\Rightarrow\;\frac{du}{dx}=3xe^{-x^2}u^3\;\Rightarrow\;\frac{du}{u^3}=3xe^{-x^2}dx$.

$$\int\frac{du}{u^3}=3\int xe^{-x^2}dx.$$

1) $\int\frac{du}{u^3}=\int u^{-3}du=-\frac{u^{-2}}{2}+C=-\frac{1}{2u^2}+C_1$; 2) $\int xe^{-x^2}dx=\begin{vmatrix}t=-x^2\\ dt=-2xdx\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\int e^t dt=-\frac{1}{2}e^t+C=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C_2$.

Отже, $-\frac{1}{2u^2}+C_1=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C_2\;\Rightarrow\;\frac{1}{u^2}=\frac{3}{e^{x^2}}+C$, де $C=2C_1-2C_2\;\Rightarrow\;\frac{1}{u^2}=3e^{-x^2}+C\;\Rightarrow$

$$u^2=\frac{e^{x^2}}{3+Ce^{x^2}}\;\Rightarrow\;u=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}.$$

Загальний розв'язок має вигляд $y=uv=\pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ або $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}$.

Приклад 6 Розв’язати рівняння $x^2y^2\frac{dy}{dx}+xy^3=a^2$, де a – стала.

Розв’язання. З’ясуємо тип рівняння $x^2y^2y'+xy^3=a^2$. Так як $y'=\frac{dy}{dx}$ то $x^2y^2y'+xy^3=a^2 \Rightarrow y^2y'+\frac{xy^3}{x^2}=\frac{a^2}{x^2} \Rightarrow y'+\frac{y}{x}=\frac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$. Після підстановки у рівняння $y=uv$ та $y'=u'v+uv'$ отримаємо: $u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2} \Rightarrow u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}$.

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\frac{v}{x}=0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \Rightarrow v=\frac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}$, отримуємо рівняння для знаходження u: $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{x^2\cdot u^2\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{u^2} \Rightarrow u^2du=a^2xdx$.

$\int u^2du=a^2\int x\,dx \Rightarrow \frac{u^3}{3}=a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \Rightarrow u=\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}$.

Отже, загальний розв’язок має вигляд $y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}$ або $y^3=\frac{3}{2}\frac{a^2}{x}+\frac{C}{x^3}$.

Домашнє завдання

Теорія Рівняння другого порядку. Три типи рівнянь, що припускають зниження порядку. [3], с. 48 –55.

Вправи

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь:

1 $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=\sin x$. Відповідь: $y=(C+x)\sin x$.

2 $(x^2+1)y'+4xy=3$. Відповідь: $y=\frac{x^3+3x+C}{x^2+1}$.

3 $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}$, якщо $y(0)=0$. Відповідь: $y=\frac{x}{\cos x}$.

4 $(1-x^2)y'+xy=1$, якщо $y(0)=1$. Відповідь: $y=x+\sqrt{1-x^2}$.

5 $y'-\frac{1}{x}y=-y^2$. Відповідь: $y=\frac{2x}{x^2+C}$.

6) $y'+2xy=2y^3x^3$. Відповідь: $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 21

Рівняння другого порядку.
Три типи рівнянь, що припускають зниження порядку.

Диференціальні рівняння другого порядку	Тип рівняння	$F(x,y,y',y'')=0$ або $y''=f(x,y,y')$
Рівняння виду $y''=f(x)$	(I)	Інтегрують послідовно два рази. $y(x)=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2$
Рівняння виду $y''=f(x,y')$	(II)	Знизити порядок такого рівняння можна заміною $y'=z(x)$,тоді $y''=z'(x)$. Отримаємо рівняння першого порядку $z'=f(x,z)$.
Рівняння виду $y''=f(y,y')$	(III)	Знизити порядок такого рівняння можна заміною $y'=z(y)$, тоді $y''=z'_y\cdot z$. Отримаємо рівняння першого порядку $z'_y\cdot z=f(y,z)$.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння $y''=12x^2-6x+8$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (I). Послідовно два рази інтегруємо рівняння $y''=12x^2-6x+8$:

$y'=\int\left(12x^2-6x+8\right)dx=12\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+8x+C_1=4x^3-3x^2+8x+C_1$. Отже, $y'=4x^3-3x^2+8x+C_1$.

Знайдемо загальний розв'язок

$$y=\int\left(4x^3-3x^2+8x+C_1\right)dx=4\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+8\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2=x^4-x^3+4x^2+C_1x+C_2.$$

Остаточно отримали загальний розв'язок $y=x^4-x^3+4x^2+C_1x+C_2$.

Приклад 2 Розв'язати задачу Коші для рівняння $y''=\sin 5x$, якщо $y|_{x=0}=2$, $y'|_{x=0}=-1$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння. Це рівняння виду (I). Послідовно два рази інтегруємо рівняння $y''=\sin 5x$:

$y'=\int\sin 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\sin 5x\,d(5x)=-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1$. Отримали $y'=-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1$. Далі зайдемо загальний розв'язок: $y=\int\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+C_1\right)dx=-\frac{1}{25}\sin 5x+C_1x+C_2$.

Остаточно маємо $y=-\frac{1}{25}\sin 5x+C_1x+C_2$ - загальний розв'язок.

Знайдемо розв'язок задачі Коші з умовами $y|_{x=0}=2$ і $y'|_{x=0}=-1$:

$$\begin{cases}2=y(0)=-\frac{1}{25}\sin 0+C_1\cdot 0+C_2\\ -1=y'(0)=-\frac{1}{5}\cos 0+C_1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=2\\ -\frac{1}{5}+C_1=-1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=2\\ C_1=-1+\frac{1}{5}=-\frac{4}{5}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_2=2\\ C_1=-\frac{4}{5}.\end{cases}.$$

Отже, остаточно маємо $y=-\frac{1}{25}\sin 5x-\frac{4}{5}x+2$.

Приклад 3 Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{1}{x^6}$, якщо $y\big|_{x=-1} = \frac{1}{4}$, $y'\big|_{x=-1} = 4$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (II). Зробимо заміну $y' = z(x)$. Тоді $y'' = z'(x)$. Отримаємо рівняння $z' = -\frac{4}{x}z + \frac{1}{x^6}$. Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуємо його за методом Бернуллі: $z = u(x)\cdot v(x)$, $z' = u'v + uv'$. Тоді $u'v + uv' + \frac{4}{x}uv = \frac{1}{x^6} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{4}{x}v\right) = \frac{1}{x^6}$.

Виберемо функцію v так, $v' + \frac{4}{x}v = 0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{dx} = -\frac{4}{x}v \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{4}{x}dx$.
$\int\frac{dv}{v} = -4\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -4\ln|x| \Rightarrow \ln|v| = \ln\frac{1}{x^4} \Rightarrow v = \frac{1}{x^4}$.

Підставляючи функцію v в рівняння $u'v + u\left(v' + \frac{4}{x}v\right) = \frac{1}{x^6}$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^6} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{x^2}$.
$\int udu = \int\frac{dx}{x^2} \Rightarrow u = -\frac{1}{x} + C_1$.

Тоді $z = u\cdot v = \frac{1}{x^4}\cdot\left(-\frac{1}{x} + C_1\right) = \frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}$.

Але $z = y'$. Тому маємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5} \Rightarrow dy = \left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx$.
$y = \int\left(\frac{C_1}{x^4} - \frac{1}{x^5}\right)dx = C_1\int x^{-4}dx - \int x^{-5}dx = C_1\cdot\frac{x^{-3}}{-3} - \frac{x^{-4}}{-4} + C_2 = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$.

Маємо загальний розв'язок рівняння $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{C_1}{3x^3} + C_2$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y\big|_{x=-1} = \frac{1}{4}$, $y'\big|_{x=-1} = 4$:

$$\begin{cases} y(-1) = \frac{1}{4} + \frac{C_1}{3} + C_2 = \frac{1}{4} \\ y'(-1) = C_1 + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + C_2 = 0 \\ C_1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = -1 \end{cases}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} - 1$.

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок рівняння $y''x\ln x = y'$.

Розв'язання. Дане рівняння запишемо у вигляді $y'' = \frac{y'}{x\ln x}$ і отримаємо рівняння виду (II). Зробимо заміну $y' = z$. Тоді $y'' = z'$. Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними $z' = \frac{z}{x\ln x}$. Розв'язуємо його: $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x\ln x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x\ln x}$.
$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(\ln x)}{\ln x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln|C_1\ln x| \Rightarrow z = C_1\ln x$. Але $z = y'$. Тому маємо $\frac{dy}{dx} = C_1\ln x \Rightarrow dy = C_1\ln x\,dx$.
$\int dy = C_1\int\ln x\,dx$. З останнього знайдемо загальний розв'язок рівняння $y = C_1x(\ln x - 1) + C_2$.

Приклад 5 Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' = -\dfrac{2}{y^5}$, якщо $y\big|_{x=-1} = 1$, $y'\big|_{x=-1} = 1$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду (III). Зробимо заміну $y' = z(y)$, $y'' = zz'_y$. Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними: $zz'_y = -\dfrac{2}{y^5}$.

Розв'яжемо його: $z\dfrac{dz}{dy} = -\dfrac{2}{y^5} \Rightarrow zdz = -\dfrac{2}{y^5}dy$.

$\int zdz = -2\int y^{-5}dy \Rightarrow \dfrac{z^2}{2} = -2\dfrac{y^{-4}}{-4} + C_1 \Rightarrow z^2 = y^{-4} + 2C_1 \Rightarrow z^2 = \dfrac{1}{y^4} + 2C_1 \Rightarrow (y')^2 = \dfrac{1}{y^4} + 2C_1$.

Так як потрібно знайти тільки такий частинний розв'язок, який задовольняє задані початкові умови, то можливо одразу знайти C_1 (підставляючи в отриману рівність умови $y\big|_{x=-1} = 1$, $y'\big|_{x=-1} = 1$): $1 = 1 + 2C_1 \Rightarrow C_1 = 0$. Тому маємо $(y')^2 = \dfrac{1}{y^4}$, звідки $y' = \dfrac{1}{y^2}$ (врахували початкову умову $y'\big|_{x=-1} = 1$).

Розв'язуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{y^2} \Rightarrow y^2dy = dx$. $\int y^2dy = \int dx \Rightarrow \dfrac{y^3}{3} = x + C_2 \Rightarrow y^3 = 3x + 3C_2$. Підставляємо початкову умову $y\big|_{x=-1} = 1$ і знаходимо: $1^3 = 3\cdot(-1) + 3C_2 \Rightarrow 3C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = \dfrac{4}{3}$. Тоді $y^3 = 3x + 4$.

Остаточно маємо частинний розв'язок $y = \sqrt[3]{3x+4}$.

Приклад 6 Знайти загальний інтеграл рівняння $y''(1+y) - 5(y')^2 = 0$.

Розв'язання. Якщо записати це рівняння у вигляді $y'' = \dfrac{5(y')^2}{(1+y)}$, то видно, що це рівняння виду (III). Зробимо заміну $y' = z(y)$, $y'' = zz'_y$. Дістанемо рівняння $zz'_y(1+y) - 5z^2 = 0$. Виносимо спільний множник z за дужки: $z\left(z'_y(1+y) - 5z\right) = 0$.

Можливі два випадки:

1) $z = 0$, тоді $y' = 0$, $y = \text{const}$.

2) $z'_y(1+y) - 5z = 0$. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його:

$(1+y)\dfrac{dz}{dy} = 5z \Rightarrow \dfrac{dz}{z} = \dfrac{5dy}{y+1}$.

$\int\dfrac{dz}{z} = 5\int\dfrac{dy}{y+1} \Rightarrow \ln|z| = 5\ln|y+1| + \ln C_1 \Rightarrow \ln|z| = \ln\left|C_1\cdot(y+1)^5\right| \Rightarrow z = C_1(y+1)^5 \Rightarrow y' = C_1(y+1)^5$.

$y' = C_1(y+1)^5$ - диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'язуємо його: $\dfrac{dy}{dx} = C_1(y+1)^5 \Rightarrow \dfrac{dy}{(y+1)^5} = C_1dx$.

$\int(y+1)^{-5}dy = C_1\int dx \Rightarrow \dfrac{(y+1)^{-4}}{-4} = C_1x + C_2 \Rightarrow \dfrac{1}{4(y+1)^4} = C_1x + C_2 \Rightarrow (y+1)^4 = \dfrac{1}{C_1x + C_2}$.

Зауважимо, що розв'язок $y = \text{const}$ можна отримати при $C_1 = 0$.

Домашнє завдання

Теорія Поняття комплексного числа. [5], с. 218 –228.

Вправи

1 $y'' = 120x^4 + 4$, якщо $y(1) = -10$, $y'(1) = 3$. Відповідь: $y = 4x^6 + 2x^2 - 25x + 9$.

2 $y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Відповідь: $y = \arcsin x + C_1 x + C_2$.

3 $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Відповідь: $y = -\ln|\cos x| + C_1 x + C_2$.

4 $2xy'' - y' = 0$, якщо $y(4) = 10$, $y'(4) = 3$. Відповідь: $y = \sqrt{x^3} + 2$.

5 $yy'' - (y')^2 - y^2 y' = 0$. Відповідь: $\dfrac{y}{y + C_1} = e^{C_1(x + C_2)}$.

6 $y'' + \dfrac{y'}{x} = x^2$. Відповідь: $y = \dfrac{x^4}{16} + C_1 \ln x + C_2$.

7 $3yy'' + (y')^2 = 0$. Відповідь: $y = (C_1 x + C_2)^{\frac{3}{4}}$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 22

Поняття комплексного числа.

Під комплексним числом будемо розуміти вираз $x + yi$, де x, y - дійсні числа, i - так звана уявна одиниця, що визначається рівністю $i = \sqrt{-1}$ або $i^2 = -1$. Далі будемо позначати комплексне число $x + yi$ буквою z. Зазначену форму комплексного числа $z = x + yi$ називають алгебраїчною.

Число x прийнято називати дійсною частиною, а y – уявною частиною комплексного числа $z = x + yi$. Комплексне число, в якому дійсна частина $x = 0$, тобто число yi, називають суто уявним.

Комплексні числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ і $z_2 = x_2 + y_2 i$ вважаються рівними між собою тоді і тільки тоді, коли рівні між собою їх дійсні та уявні частини. Тобто з рівності $x_1 + y_1 i = x_2 + y_2 i$ безпосередньо випливає, що $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$. Зокрема, $x + yi = 0$ рівнозначне $x = 0$ і $y = 0$.

Слід зазначити, що порівняння нерівних комплексних чисел неможливе. Не можна, наприклад, сказати, яке з двох чисел більше: $2 + 3i$ чи $5 - 7i$, $2i$ чи $4i$ і т. ін.

Два комплексних числа, $z = x + yi$ і $\overline{z} = x - yi$, що відрізняються одне від одного тільки знаком при уявній частині, називають спряженими. Число, спряжене з комплексним числом z, позначають символом $\overline{z}$. Наприклад, комплексне число $z = 5 + 3i$ спряжене з комплексним числом $\overline{z} = 5 - 3i$. Дійсне число x, очевидно, є спряженим самому собі.

Комплексні числа $x + yi$ і $-x - yi$ називають протилежними.

Додавання, віднімання, множення та піднесення до степеня комплексних чисел, поданих в алгебраїчній формі, виконуються за правилами дій над многочленами. При цьому слід враховувати, що $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = -i$ і т. ін.

Очевидно, що за будь-якого натурального n:

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i; \quad i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

Віднімання, ділення та добування кореня виконуються як дії, обернені відповідно до додавання, множення та піднесення до степеня.

Зазначимо, що сума й добуток спряжених комплексних чисел є дійсні числа. Справді: $(x+yi)+(x-yi)=2x;$

$$(x+yi)+(x-yi)=x^2+y^2.$$

Комплексне число $z = x + yi$ визначається парою дійсних чисел (x, y), тому його зручно зобразити точкою $M\,(x, y)$ площини $x0y$ або радіусом-вектором точки M: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 22.1).

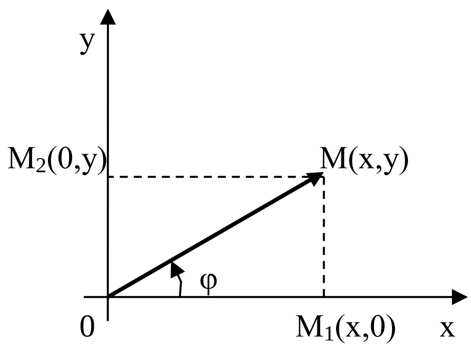


Рис. 22.1

Між множиною комплексних чисел і сукупністю точок (або векторів, що виходять з початку координат) площини існує взаємно однозначна відповідність: кожному комплексному числу відповідає одна, і тільки одна, точка площини (або радіус-вектор), і навпаки.

Зазначимо, що дійсні числа, і тільки вони, зображуються точками осі абсцис $0x$, тому цю вісь називають дійсною. Суто уявні числа yi, і тільки вони, зображуються точками осі ординат $0y$,тому цю вісь називають уявною.

Число $z = x + yi$ можна однозначно визначити не тільки прямокутними координатами x і y, а й полярними r і φ, тобто довжиною вектора $\vec{r}$ і кутом φ, який утворює вектор $\vec{r}$ з додатним напрямком осі $0x$.

У цьому випадку з трикутника OMM_1 (рис. 22.1) маємо:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi; \end{cases} \tag{22.1}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \le r < \infty,$$

$$\varphi = arctg\,\frac{y}{x}, \qquad 0 \le \varphi < 2\pi. \tag{22.2}$$

Невід'ємне число r називають модулем комплексного числа z і позначають символом $|z|$. Кут φ називають аргументом комплексного числа z і позначають $\arg z$. Таким чином, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Застосувавши формули (1.1) до будь-якого відмінного від нуля комплексного числа $z = x + yi$, дістанемо:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (22.3)$$

Ця форма комплексного числа називається тригонометричною. Згідно з формулою (1.3) та Формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (22.4)$$

можна одержати так звану показникову форму комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$.

Наприклад, $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

Замінюючи у формулі (1.4) φ на $(-\varphi)$, одержимо:

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi\ . \qquad (22.5)$$

Тоді з рівностей (1.4) і (1.5) випливає:

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (22.6)$$

Формули (1.6) використовуються для вираження степенів $\cos\varphi$ i $\sin\varphi$, а також їх добутків через синус і косинус кратних дуг.

Слід зауважити, що додавати й віднімати комплексні числа простіше і зручніше, коли вони подані в алгебраїчній формі, а множити, ділити, підносити до степеня і добувати корінь простіше і зручніше, коли комплексні числа подані в тригонометричній і показниковій формах.

Якщо $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, а $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]; \qquad (22.7)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]; \qquad (22.8)$$

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi); \qquad (22.9)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n}\right); \qquad (22.10)$$

$\kappa = 0, 1, 2, ..., \quad n - 1.$

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, а $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2\, e^{(\varphi_1 + \varphi_2)i};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{(\phi_1 - \phi_2)i};$$

$$z^n = \left(re^{i\phi}\right)^n = r^n e^{in\phi};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\varphi + 2\kappa\pi}{n} i}, \quad \kappa = 0, 1, ..., \quad n - 1.$$

Формули (22.9) і (22.10) називають формулами Муавра. За їх допомогою можна виводити тригонометричні формули для синусів і косинусів кратних кутів.

Так, розкладаючи ліву частину рівності (22.9) за формулою бінома Ньютона

$$\left(x+a\right)^m = m\cdot a\cdot x^m + \frac{m\left(m-1\right)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \dots + \frac{m\left(m-1\right)\dots\left(m-n+1\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}a^nx^{m-n} + \ldots + a^m$$

і прирівнюючи дійсні та уявні частини, одержимо формули для $\sin n\varphi$ і $\cos n\varphi$ через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$. Наприклад, при $n=3$ маємо

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

Використовуючи тепер умову рівності двох комплексних чисел, одержимо :

$$\cos^3\varphi = \cos^3\varphi\cdot 3\cos\varphi\sin^2\varphi,\ \sin 3\varphi = -\sin^3\varphi + 3\cos^2\varphi + \sin\varphi.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\left(3+5i\right)\left(4-i\right)$.

Розв'язання. За правилом множення двох многочленів

$\left(3+5i\right)\left(4-i\right) = 12+20i-3i-5i^2 = 12+5+\left(20-3\right)i = 17+17i$. Тут враховано, що $i^2=-1$.

Приклад 2 Обчислити $\frac{3-i}{4+5i}$.

Розв'язання. Помножимо чисельник і знаменник на число $4-5i$, спряжене знаменнику, і виконаємо відповідні дії. Тоді

$$\frac{3-i}{4+5i} = \frac{\left(3-i\right)\left(4-5i\right)}{\left(4+5i\right)\left(4-5i\right)} = \frac{12-4i-15i+5i^2}{16+25} = \frac{7-19i}{41} = \frac{7}{41} - \frac{19}{41}i.$$

Приклад 3 Знайти $\left(4-7i\right)^3$.

Розв'язання. Використовуючи формулу куба різниці двох чисел, одержимо $\left(4-7i\right)^3 = 64-3\cdot 16\cdot 7i + 3\cdot 4\cdot 49i^2 - 343i^3 = 64-336i+588i^2-343i^3 =$ $64-336i+588-343i = -524+7i,$ оскільки $i^2=-1$, а $i^3=i^2\cdot i=-i.$

Приклад 4 Подати в тригонометричній формі число $z = 1 - i$.

Розв'язання. За формулами (1.2) $r=\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x}$.

Маємо $x=1,\ y=-1$, тому $r=\sqrt{1^2+\left(-1^2\right)^2}=\sqrt{2}$,

$\varphi = arctg\left(\frac{-1}{1}\right) = arctg\left(-1\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$, через те що φ - кут четвертої чверті, бо $x=1>0$ і $y=-1<0$. Згідно з формулою (22.3), одержимо:

$$z = 1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Примітка: дане число в тригонометричній функції можна записати ще й так: $z=1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, бо $\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, а $\sin\frac{7\pi}{4} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$.

Приклад 5 Установити, чи рівні між собою комплексні числа $\sqrt{3}+i$ і $\left(2\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Запишемо число $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ в алгебраїчній формі. Для цього за формулами (22.1) знайдемо значення x та y:

$$x=2\cos\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},\quad y=2\sin\frac{\pi}{6}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Таким чином, $2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$.

Отже, дані комплексні числа рівні між собою.

Зауваження. Можна було б число $\sqrt{3}+i$ подати в тригонометричній формі і переконатися в тому, що воно дорівнює числу $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 6 Знайти добуток комплексних чисел

$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ і $z_2=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Згідно з формулою (22.7), маємо:

$$z_1z_2=2\cdot 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=6\left(0+i\right)=6i.$$

Приклад 7 Знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1=4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$,

$z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. На підставі формули (22.8) дістанемо:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{4}{2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}-5\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2(0+i)=2i.$$

Приклад 8 Обчислити $(1+i)^6$.

Розв'язання. Подамо число $z=1+i$ в тригонометричній формі:

$z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Тоді за формулою (22.9):

$$(1+i)^6=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^6=\sqrt{2^6}\left(\cos\frac{6\pi}{4}+i\sin\frac{6\pi}{4}\right)=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$$

$$=8(0-i)=-8i$$

Зауважимо, що застосування безпосередньо формули бінома Ньютона призвело б до значно складніших обчислень.

Приклад 9 Знайти $\sqrt{-5-12\,i}$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{-5-12\,i} = x+iy$. Тоді $-5-12i = (x+iy)^2$, або $-5-12i = x^2 - y^2 + 2xyi$. Звідси $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5, \\ 2xy = -12. \end{cases}$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $x = 2, \quad y = -3$ або $x = -2, \quad y = 3$. Тому $z_1 = 2-3i, \quad z_2 = -2+3i$.

Отже, $\sqrt{-5-12\,i} = \pm(2-3i)$.

Як бачимо, добування кореня (навіть квадратного) з комплексного числа в алгебраїчній формі – операція досить складна. Тому, як уже зазначалося раніше, спочатку треба записати комплексне число в тригонометричній формі, а потім виконати цю дію.

Приклад 10 Знайти всі значення $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Розв'язання. Подамо комплексне число $z = -2+2i$ в тригонометричній формі. За формулами (1.2) $r = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$\varphi = arctg\left(\dfrac{-2}{2}\right) = arctg(-1) = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$, через те що φ - кут другої чверті, бо $x = -2 < 0$ і $y = 2 > 0$.

За формулою (22.10):

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\kappa\pi}{3}\right)$$

$\kappa = 0, 1, 2$.

При $\kappa = 0$: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i$.

При $\kappa = 1$: $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right) = -1{,}366 + 0{,}365i$.

При $\kappa = 2$: $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right) = 0{,}366 - 1{,}366i$.

Отже, кубічний корінь з комплексного числа $-2+2i$ має три різних значення: $1+i$; $\quad -1{,}366+0{,}365i$; $\quad 0{,}336-1{,}366i$.

Приклад 11 Подати через степені $\sin\varphi$ і $\cos\varphi$ вирази $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$.

Розв'язання. За формулою (1.9) при $r = 1$ одержимо

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Нехай $n = 2$. Тоді $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$,

або $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$.

Прирівнюючи дійсні та уявні частини цієї рівності, остаточно одержимо вже відомі формули тригонометрії:

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi,$$
$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi.$$

Домашнє завдання

Теорія Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. [3], с. 65 –69.

Вправи

1 Знайти дійсні значення x і y з рівнянь:

а) $(2x-13i)+(7y+2xi)=-17+3yi$; *б)* $\left(\frac{3}{4}x-2yi\right)-\left(\frac{1}{3}y+6xi\right)=21i$.

Відповідь: *а)* $x=2$, $y=-3$; *б)* $x=-2$, $y=-4{,}5$.

2 Знайти комплексне число z з рівняння $(2-3i)z=-1-5i$.

Відповідь: $1-i$.

3 Довести рівність $\frac{2+i}{3-i}=\frac{13+4i}{17-9i}$.

4 Подати в алгебраїчній формі число $4\left(cos30^0+i\sin 30^0\right)$.

Відповідь: $2\sqrt{3}+2i$.

5 Подати в тригонометричній формі числа: а) $-\sqrt{3-1}$; *б)* 3; *в)* $5i$.

Відповідь: *а)* $2\left(cos\frac{7\pi}{6}+\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; *б)* $3(cos0+i\sin 0)$; *в)* $5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

6 Піднести до куба число $z=2\left(\cos 20^0+i\sin 20^0\right)$.

Відповідь: $4+4\sqrt{3}i$

7 Піднести до 20-го степеня число $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Відповідь: $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

8 Скласти квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, коренями якого є числа $x_1=5-i$; $x_2=5+i$.

Відповідь: $x^2-10x+26=0$.

9 Знайти всі значення коренів: *а)* $\sqrt[4]{i}$; *б)* $\sqrt[3]{1}$; *в)* $\sqrt{16\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)}$; *г)* $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$.

Відповідь: *а)* $z_1=\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}$; $z_2=\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}$;

$z_3=\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}$; $z_4=\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}$;

б) $z_1=1$; $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

в) $z_1 = 2\sqrt{3+2i}; \quad z_2 = -2\sqrt{3-2i};$

г) $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right); \quad z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right);$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9} + i\sin\frac{17\pi}{9}\right).$

10 Знайти модуль и аргумент комплексного числа $(1+3i)\cdot(2-i)$.

Відповідь: $r = 5\sqrt{2}; \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$

11 За якого дійсного значення α число $3i^3 - 2\alpha i^2 + (1-\alpha)i + 5$

а) дійсне; б) суто уявне; в) дорівнює нулю?

Відповідь: *а) -2; б) -2,5; в)*$\varnothing$.

12 Подати в показниковій формі числа: *а) -2; б) i; в)* $-1-\sqrt{3}i$

Відповідь*: а)* $2e^{\pi i}$; *б)* $e^{\frac{\pi i}{2}}$; *в)* $2e^{\frac{4\pi}{3}}$.

13 Подавши числа $z_1 = \sqrt{3}+i$ *і* $z_2 = 1-i$ в показниковій формі, знайти:

а) z_1^6; *б)* $z_1 z_2$; *в)* $\frac{z_1}{z_2}$; *г)* $\sqrt[3]{z_2}$.

Відповідь: *а)* $64e^{\pi i}$; *б)* $2\sqrt{2}e^{\frac{23\pi}{12}}$; *в)* $\sqrt{2}e^{-\frac{19\pi}{12}}$; *г)* $\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\frac{k\pi}{4}+2k\pi}{10}}$,(к=0,1,2,3,4).

14 Виразити $\cos^3\gamma$ через косинуси кратних кутів.

Відповідь: $\frac{1}{4}(\cos 3\gamma + 3\cos\gamma)$.

Вказівка: на підставі формули (1.6) $\cos^3\gamma = \left(\frac{e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}}{2}\right)^3$. Після виконання дій у правій частині цієї рівності, повернутися до тригонометричних функцій.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 23

Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Рівняння	$y'' + py' + qy = 0$, де p і q - сталі		
Характеристичне рівняння	$k^2 + pk + q = 0$		
Корені характеристичного рівняння	$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2 = k$	$k_{1,2} = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$
Фундаментальна система частинних розв\`язків	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$
Загальний розв\`язок	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x +$ $+ C_2 \sin \beta x)$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння виду $y'' + py' + qy = 0$. Запишемо його характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Розв'яжемо його: $D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0$, тоді $k_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ і $k_2 = \frac{5+3}{2} = 4$.

Маємо перший випадок (корені дійсні та різні). Тому за формулою $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ загальний розв'язок диференціального рівняння – $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$.

Приклад 2 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Його характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 8k + 16 = 0$, або $(k+4)^2 = 0$. Тому $k_1 = k_2 = -4$, тобто маємо другий випадок. Тоді за формулою $y = (C_1 + C_2 x) e^{kx}$ записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x)$.

Приклад 3 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Розв'язання. Записуємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 10 = 0$. Розв'язуємо його: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$, $k_2 = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. Це третій випадок. При цьому $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Тому за формулою $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 25y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 25 = 0$. Розв'язуємо його: $k^2 = -25$, $k = \pm\sqrt{-25} = \pm 5i$. Тоді $k_1 = -5i$, а $k_2 = 5i$. Маємо третій випадок. При цьому $\alpha = 0$, $\beta = 5$. Тому за формулою $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$ загальний розв'язок заданого диференціального рівняння такий: $y = e^{0x}(C_1\cos 5x + C_2\sin 5x) = C_1\cos 5x + C_2\sin 5x$.

Приклад 5 Знайти частинний розв`язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, який задовольняє даним початковим умовам $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 7$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння для заданого диференціального рівняння має вигляд $k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0$. Його корені $k_1 = k_2 = k = 1$ дійсні та рівні. Тоді за формулою $y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$ записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = e^x(C_1 + C_2x)$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y|_{x=0} = 2$, $y'|_{x=0} = 7$. Знайдемо похідну:

$$y' = \left(e^x(C_1 + C_2x)\right)' = \left(e^x\right)'(C_1 + C_2x) + e^x\cdot(C_1 + C_2x)' == e^x(C_1 + C_2x) + e^x\cdot C_2 = e^x(C_1 + C_2x + C_2)$$
,

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = 2 \\ y'(0) = C_1 + C_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 5. \end{cases}$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^x(2 + 5x)$.

Приклад 6 Знайти частинний розв`язок рівняння $y'' - y' - 6y = 0$, якщо $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 4$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - k - 6 = 0$ має дійсні корені $k_1 = -2$, $k_2 = 3$. Тоді за формулою $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ записуємо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння: $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}$.

Знайдемо частинний розв'язок. З умови задачі Коші $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = 4$. Знайдемо похідну загального розв'язку: $y' = -2C_1e^{-2x} + 3C_2e^{3x}$. Підставляємо умови Коші і отримаємо систему
$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 3 \\ y'(0) = -2C_1 + 3C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ -2(3 - C_2) + 3C_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 - C_2 \\ 5C_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}.$$

Отже, маємо частинний розв'язок $y = e^{-2x} + 2e^{3x}$.

Приклад 7 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 16y = 0$.
Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (k-4)(k+4) = 0$ має дійсні корені $k_1 = -4$ і $k_2 = 4$. Тоді за формулою $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ записуємо загальний розв'язок диференціального рівняння: $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$.

Приклад 8 Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 5 = 0$. Розв'язуємо його: $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$. Тоді: $k_1 = \frac{4 - \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 - 2i}{2} = 2 - i$, $k_2 = \frac{4 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 + 2i}{2} = 2 + i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені. При цьому $\alpha = 2$ і $\beta = 1$. Тоді за формулою $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ записуємо загальний розв'язок рівняння: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Домашнє завдання

Теорія Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих. [3], с. 72 –79.

Вправи

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь:

1 $y'' - 9y' = 0$. Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{9x}$.

2 $y'' + 3y' + 2y = 0$. Відповідь: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

3 $y'' - 4y' + 29y = 0$. Відповідь: $y = e^{2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

4 $y'' + 6y' + 34y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$. Відповідь: $y = e^{-3x}(3\cos 5x + 2\sin 5x)$.

5 $y'' - 12y' + 36y = 0$, якщо $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$. Відповідь: $y = e^{6x}(2 - 5x)$.

6 $y'' + 5y' - 6y = 0$, якщо $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$. Відповідь: $y = e^{-6x} + 2e^{x}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 24

Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих.

Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) $y'' + py' + qy = f(x)$ (*p, q* – дійсні числа, *f(x)* – неперервна функція) дорівнює сумі будь - якого частинного розв'язку Y цього рівняння і загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$. Отже, функція $y = Y + \bar{y}$ є загальним розв'язком ЛНДР.

Існує загальний метод знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, який називається методом варіації довільних сталих, або методом Лагранжа, за яким частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд: $Y = y_2 \int \frac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2(x) f(x)}{W} dx$,

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$, а $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ – визначник Вронського.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$; звідки $k^2 = -1$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-1}; k_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x) = \cos x; y_2(x) = \sin x$, а $\bar{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Щоб за формулою $Y = y_2\int\dfrac{y_1(x)f(x)}{W}dx - y_1\int\dfrac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$: $\quad W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0$.

Тоді

$$Y(x) = \sin x\int\frac{\cos x \cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx - \cos x\int\frac{\sin x\cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx = \sin x\int\cos x\sin^{-3} x dx - \cos x\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \sin x\left(\frac{\sin^{-2} x}{-2}\right) - \cos x(-ctgx) = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-1 + 2\cos^2 x}{2\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y} + Y : y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{\cos 2x}{2\sin x}$.

Приклад 2 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \bar{y}$ Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 1 = 0$; звідки $(k-1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = k = 1$. Корені дійсні та рівні. Тоді фундаментальна системо розв'язків має вигляд $y_1 = e^{kx} = e^x$, $y_2 = xe^{kx} = xe^x$. За формулою $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ записуємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 xe^x$.

Обчислимо визначник Вронського:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x+xe^x \end{vmatrix}=e^x(e^x+xe^x)-xe^xe^x=e^{2x}\neq 0.$$

Тоді $Y(x)=xe^x\int\frac{e^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx-e^x\int\frac{xe^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx=xe^x\int\frac{1}{x}dx-e^x\int dx=xe^x\ln|x|-e^x x$.

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо у вигляді: $y=\bar{y}+Y=C_1e^x+C_2xe^x+xe^x\ln|x|-xe^x$ або $y=C_1e^x+C_3xe^x+xe^x\ln|x|$, де $C_3=C_2-1$.

Приклад 3 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y''-y'=\frac{e^x}{1+e^x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y=Y+\bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''-y'=0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2-k=0$; запишемо його у вигляді $k(k-1)=0$, звідки $k_1=0$; $k_2=1$. Маємо випадок дійсних та різних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{k_1x},\ \ y_2(x)=e^{k_2x}$. Отже, $y_1(x)=e^{0x}=1;\ \ y_2(x)=e^{1x}=e^x$, а $\bar{y}=C_1+C_2e^x$.

Щоб за формулою $Y=y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}:\qquad W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}=e^x-0=e^x\neq 0.$$

Тоді

$$Y(x)=e^x\int\frac{1\cdot\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx-1\cdot\int\frac{e^x\cdot\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx=e^x\int\frac{1}{1+e^x}dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=e^x\int\frac{1}{1+e^x}dx-\ln\left(1+e^x\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=1+e^x \\ du=e^xdx \\ dx=\dfrac{du}{u-1} \end{vmatrix}=e^x\int\frac{du}{(u-1)u}-\ln(1+e^x)=-e^x\int\frac{u-1-u}{(u-1)u}du-\ln(1+e^x)=-e^x\int\frac{1}{u}du+e^x\int\frac{1}{u-1}du-\ln(1+e^x)=$$

$$=-e^x\ln|u|+e^x\ln|u-1|-\ln(1+e^x)=e^x\ln\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x).$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1+C_2e^x+e^x\ln\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

Приклад 4 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y=tgx$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y=Y+\bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''+y=0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2+1=0$; звідки $k^2=-1$, $k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}; k_{1,2}=\alpha\pm i\beta=\pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x)=\cos x; y_2(x)=\sin x$, а $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Щоб за формулою $Y=y_2\int\dfrac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\dfrac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$: $\quad W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0$.

Тоді

$$Y(x)=\sin x\int\frac{\cos x\cdot tgx}{1}dx-\cos x\int\frac{\sin x\cdot tgx}{1}dx=\sin x\int\cos x\cdot tgxdx-\cos x\int\sin x\cdot tgxdx=$$

$$=\sin x\int\cos x\cdot tgxdx-\cos x\int\sin x\cdot tgxdx=\sin x\int\sin x\cdot dx-\cos x\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\sin x\cos x-\cos x\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=$$

$$=-\sin x\cos x-\cos x\int\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)dx=-\sin x\cos x-\cos x\left(\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x\right)=\cos x\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

Приклад 5 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y=Y+\bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''-y'=0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2-k=0$; запишемо його у вигляді $k(k-1)=0$, звідки $k_1=0$; $k_2=1$. Маємо випадок дійсних та різних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{k_1x},\quad y_2(x)=e^{k_2x}$. Отже, $y_1(x)=e^{0x}=1;\quad y_2(x)=e^{1x}=e^x$, а $\bar{y}=C_1+C_2e^x$.

Щоб за формулою $Y=y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$: $W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x\\ 0 & e^x\end{vmatrix}=e^x-0=e^x\neq 0$.

Тоді

$$Y(x)=e^x\int\frac{1\cdot e^{2x}\cos e^x}{e^x}dx-1\cdot\int\frac{e^x\cdot e^{2x}\cos e^x}{e^x}dx=e^x\int e^x\cos e^xdx-\int e^{2x}\cos e^xdx=e^x\sin e^x-$$

$$-\int e^x\cos e^xe^xdx=\begin{vmatrix} u=e^x & du=e^xdx\\ dv=\cos e^xe^xdx & v=\sin e^x\end{vmatrix}=e^x\sin e^x-\left(e^x\sin e^x-\int\sin e^xe^xdx\right)=$$

$$=e^x\sin e^x-\left(e^x\sin e^x+\cos e^x\right)=-\cos e^x$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y:\ y=C_1+C_2e^x-\cos e^x$.

Домашнє завдання

Теорія Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною. [3], с. 79 –84.

Вправи

Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівнянь:

1 $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x^2+1}$. Відповідь: $y=\left(C_1+C_2x-\ln\sqrt{1+x^2}+xarctgx\right)e^x$.

2 $y''+y=ctgx$. Відповідь: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$.

3 $y''+y=\frac{1}{\cos x}$. Відповідь: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|$.

4 $y''-4y'+5y=\frac{e^x}{\cos x}$. Відповідь: $y=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x+x\sin x+\cos x\ln|\cos x|\right)$.

5 $y''+y'=\frac{1}{1+e^x}$. Відповідь: $y=C_1+C_2e^{-x}+x-\left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 25

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Наведемо таблицю найпростіших правих частин *f(x)* рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ та відповідних видів частинних розв'язків *Y*.

Вид правої частини рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$	Вид частинного розв'язку *Y*
$f(x)=P_n(x)$ (багаточлен *n*-го степеню)	$Y = x^s Q_n(x)$, де $S = \begin{cases} 0, якщо\, k_1 \neq 0 \neq k_2 \\ 1, якщо\, k_1 = 0 \neq k_2 \end{cases}$ $Q_n(x)$ – багаточлен *n*-го степеню, коефіцієнти якого треба визначити
$f(x) = P_n(x)e^{ax}$	$Y = x^S Q_n(x)e^{\alpha x}$, де $S = \begin{cases} 0, якщо\ k_1 \neq a \neq k_2 \\ 1, якщо\ k_1 = a \neq k_2 \\ 2, якщо\ k_1 = a = k_2 \end{cases}$
$f(x) = A\cos bx + B\sin bx$ (*A, B, b* – числа)	$Y = x^s(M\cos bx + N\sin bx)$, де $S = \begin{cases} 0, якщо\, k_1 \neq bi \neq k_2 \\ 1, якщо\, k_1 = bi \neq k_2 \end{cases}$, *M, N* – коефіцієнти, які треба визначити

У загальному випадку, коли $f(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – багаточлени з дійсними коефіцієнтами степеню відповідно *n* і *m*, тоді: $Y = x^s e^{ax}\left[R_k(x)\cos bx + T_k(x)\sin bx\right]$, де $k=max\{n, m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – багаточлени степеню *k*, коефіцієнти яких треба визначити;

$$S = \begin{cases} 0, якщо\, k_1 \neq a + bi \neq k_2 \\ 1, якщо\, k_1 = a + bi \neq k_2 \\ 2, якщо\, k_1 = a + bi = k_2 \end{cases}.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням ІІ порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Для знаходження $\bar{y}$ розв'язуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння, що йому відповідає $2y'' + y' - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння $2к^2+к-1=0$. Його корені $к_1= - 1$ і $k_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Права частина $f(x)=2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де n=0, a=1, тому $Y=Ae^x$ бо $a\neq k_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y'=Ae^x, Y''=Ae^x$. Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x+Ae^x-Ae^x\equiv 2e^x$, звідки знаходимо A=1. Отже, $Y=e^x$. Тоді загальний розв`язок рівняння $2y''+y'-y=2e^x$ має вигляд: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$.

Приклад 2 Знайти загальний розв`язок рівняння $y''+7y'+6y=\sin x$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y''-7y'+6y=0$. Його характеристичне рівняння $\kappa^2-7\kappa+6=0$ має корені $\kappa_1=1$, $\kappa_2=6$. Отже, $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$. Права частина даного рівняння $f(x)=\sin x$ являє собою функцію вигляду $f(x)=A\cos bx+B\sin bx$, де $A=0$, $B=1$, b=1. Оскільки $bi=1\neq k_{1,2}$, то $Y=M\cos x+N\sin x$, де M і N - коефіцієнти, які треба визначити. Диференціюючи Y двічі, знаходимо:
$Y'=-M\sin x+N\cos x,\ \ Y''=-M\cos x-N\sin x.$

Підставимо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y''+7y'+6y=\sin x$:
$-M\cos x-N\sin x-7(-M\sin x+N\cos x)+6(M\cos x+N\sin x)=\sin x.$

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні доданки:
$(5M-7N)\cos x+(7M-5N)\sin x\equiv 0\cos x+\sin x.$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ в обох частинах тотожності, одержимо систему рівнянь $\begin{cases}5M-7N=0,\\ 7M+5N=1.\end{cases}$

Розв`язавши її, знаходимо $M=\dfrac{7}{74}, N=\dfrac{5}{74}$. Отже, $Y=\dfrac{7}{74}\cos x+\dfrac{5}{74}\sin x.$

Таким чином, загальний розв`язок даного рівняння має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\dfrac{7}{74}\cos x+\dfrac{5}{74}\sin x.$

Приклад 3 Знайти загальний розв`язок рівняння $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y''-6y'+9y=0$: $\kappa^2-6\kappa+9=0$; $(\kappa-3)^2=0$; $\kappa_1=\kappa_2=3$. Таким чином маємо, що $\bar{y}=(C_1+C_2x)e^{3x}$.

Знаходимо частинний розв`язок неоднорідного рівняння. Його права частина $f(x)=2x^2-x+3$ є функцією вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де n=2, a=0. Оскільки $a\neq k_{1,2}$, то $Y=Ax^2+Bx+C$. Далі знаходимо $Y'=2Ax+B$, $Y''=2A$ і підставляємо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$:

$2A-6(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx+C)\equiv 2x^2-x+3$ або

$9Ax^2+(-12A+9B)x+(2A-6B+9C)=2x^2-x+3.$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} 9A=2, \\ 9B-12A=-1, \\ 9C-6B+2A=3. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, знаходимо $A=\frac{2}{9}, B=\frac{5}{27}, C=\frac{11}{27}.$ Тому $Y=\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}.$ Отже, шуканий загальний розв`язок має вигляд $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}.$

Приклад 4 Знайти загальний розв`язок рівняння $y''-3y'+2y=f(x)$, якщо:

1) $f(x)=3e^{2x}$,

2) $f(x)=2x^3-30.$

**Розв`язання.** Шукаємо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді: $y=\bar{y}+Y$. Знаходимо загальний розв`язок однорідного рівняння $y''-3y'+2y=0$:

κ^2-3κ+2 = 0; κ_1= 1; κ_2= 2;

$\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$, бо $\kappa_1\neq\kappa_2$.

Далі маємо:

1) $f(x)=3e^{2x}$.Це функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де n=0, a=2.

Оскільки, $a=\kappa_2$, то

$Y=Axe^{2x}$,

$Y'=Ae^{2x}+2Axe^{2x}=(A+2Ax)e^{2x}$,

$Y''=2Ae^{2x}+2(A+2Ax)e2^x=(4A+4Ax)e^{2x}.$

Підставивши значення $Y,\ Y',\ Y''$ у рівняння $y''-3y'+2y=3e^x$, маємо:

$(4A+4Ax)e^{2x}-3(A+2Ax)e^{2x}+2Axe^{2x}=3e^{2x}$

$(4A-6A+2A)xe^{2x}+(4A-3A)e^{2x}=3e^{2x}$

$(4A-3A)e^{2x}=3e^{2x}\ \Rightarrow\ 4A-3A=3\ \Rightarrow\ A=3.$

Отже, $Y=3xe^{2x}$, а загальний розв'язок має вигляд: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}.$

2) $f(x)=2x^3-30.$ Маємо функцію вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де n=3, a=0. Оскільки, $a\neq k_{1,2}$, то $Y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$, $Y'=3Ax^2+2Bx+C$, $Y''=6Ax+2B$.

Підставивши значення $Y,\ Y',\ Y''$ у рівняння $y''-3y'+2y=3e^x$, маємо:

$$6Ax+2B-3(3Ax^2+2Bx+C)+2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)=2x^3-30,$$
$$2Ax^3+(2B-9A)x^2+(6A-6B+2C)x+(2B-3C+2D)=2x^3-30.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} 2A=2, \\ 2B-9A=0, \\ 6A-6B+2C=0, \\ 2B-3C+2D=-30. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1, \\ B=9/2, \\ C=21/2, \\ D=-15/4. \end{cases}$$

Отже, $Y=x^3+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{21}{2}x-\dfrac{15}{4}$, а загальний розв`язок має вигляд: $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^3+\dfrac{9}{2}x^2+\dfrac{21}{2}x-\dfrac{15}{4}$.

Приклад 5 Знайти загальний розв`язок рівняння $y''-3y'+2y=f(x)$, якщо $f(x)=(3-4x)e^x$.

**Розв`язання.** Загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+Y$. Загальний розв`язок однорідного рівняння $\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$ - знайдено раніше (див. приклад 4).

$f(x)=(3-4x)e^x$- функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де n=1, a=1=$\kappa_1\neq\kappa_2$, тому $Y=x(Ax+B)e^x$. Обчислюємо похідні $Y'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x$ і $Y''=2Ae^x+(2Ax+B)e^x+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x$ та підставляємо їх значення до рівняння $y''-3y'+2y=(3-4x)e^x$:

$$2Ae^x+(2Ax+B)e^x+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x-3(2Ae^x+(2Ax+B)e^x+$$
$$+(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x)+2(Ax^2+Bx)e^x=(-4x+3)e^x,$$
$$-2Ax+2A-B=-4x+3.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} -2A=-4, \\ 2A-B=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2, \\ B=1. \end{cases}$$

Таким чином, $Y=(2x^2+x)e^x$ і остаточно $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(2x^2+x)e^x$.

Приклад 6 Знайти частинний розв`язок рівняння $y''-y'=2(1-x)$, який задовольняє даним початковим умовам $y(0)=1, y'(0)=1$.

**Розв`язання.** Загальний розв`язок рівняння шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+Y$. Розв`язуємо однорідне рівняння $y''-y'=0$.

k^2-k = 0; $k(k$-1) = 0; k_1= 0; k_2= 1; $\overline{y}=C_1+C_2e^x$.

Оскільки $f(x) = 2(1-x)$, то $n=1,\ a=0=k_1 \neq k_2$, тому $Y = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx$. Обчислюємо $Y' = 2Ax + B$ та $Y'' = 2A$. Підставляємо їх значення до рівняння $y'' - y' = 2(1-x)$:

$$2A - (2Ax+B) = 2(1-x) \quad \Rightarrow \quad -2Ax + 2A - 2B = -2x + 2\,.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} -2A = -2, \\ 2A - 2B = 2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 1, \\ B = 0. \end{cases}$$

Таким чином, $Y = x^2$ і, отже, загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуває вигляду: $y = C_1 + C_2 e^x + x^2$.

Виходячи з початкових умов: $y(0) = 1, y'(0) = 1$ і враховуючи, що $y' = C_2 e^x + 2x,$ маємо систему $\begin{cases} 1 = y(0) = C_1 + C_2 \\ 1 = y'(0) = C_2 \end{cases}$, розв`язавши яку, знаходимо $C_1 = 0$ і $C_2 = 1$. Підставляючи числові значення $C_1$ і $C_2$ в загальний розв`язок рівняння, одержимо шуканий частинний розв`язок $y = e^x + x^2,$ який задовольняє даним початковим умовам.

Приклад 7 Знайти частинний розв`язок даного диференціального рівняння $y'' + y + \sin 2x = 0,$ який задовольняє початковим умовам $y(\pi) = y'(\pi) = 1.$

Розв`язання. Зведемо рівняння до загального вигляду $y'' + y = -\sin 2x$. Його розв'язок шукатимемо у вигляді $y = \bar{y} + Y$.

Знайдемо $\bar{y}$:

$y'' + y = 0;$ $\kappa^2 + 1 = 0;$ $\kappa_{1,2} = \pm i;$ $\alpha = 0; \beta = 1;$

$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Оскільки $f(x) = -\sin 2x$ то $b = 2\ (\pm bi = \pm 2i \neq k_{1,2})$, тому $Y = M\cos 2x + N\sin 2x$. Знаходимо $Y' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x$ та $Y'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x$. Підставляємо їх значення до рівняння $y'' + y = -\sin 2x$:

$$-4M\cos 2x - 4N\sin 2x + M\cos 2x + N\sin 2x = -\sin 2x,$$
$$(-4M + M)\cos 2x + (N - 4N)\sin 2x = -\sin 2x.$$

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ лівої і правої частин тотожності $(-4M + M)\cos 2x + (N - 4N)\sin 2x = -\sin 2x$, будемо мати:

$$\begin{cases} M - 4M = 0, \\ N - 3N = -1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} M = 0, \\ N = 1/3. \end{cases}$$

Отже, $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Враховуючи початкові умови $y(\pi) = y'(\pi) = 1,$ отримаємо систему: $\begin{cases} 1 = -C_1 \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3} \end{cases}$, розв'язавши яку, знаходимо $C_1 = -1,$ $C_2 = -\frac{1}{3}.$ Підставляємо числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок і одержимо шуканий частинний розв`язок $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$

Домашнє завдання

Теорія Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання. [3], с. 108 –117.

Вправи

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь.

1 $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x.$

Відповідь: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

2 $y'' - 2y' + 2y = 2x.$ Відповідь: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.$

3 $y'' - 3y' + 2y = f(x),$ якщо

1) $f(x) = 10e^{-x}.$ Відповідь : $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$

2) $f(x) = 2\sin x.$ Відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

4 $y'' + y = \cos x.$ Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x\sin x.$

5 $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; y(0) = 1; y'(0) = 3{,}2.$

Відповідь: $y = e^x(0{,}16\cos x + 0{,}28\sin x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84.$

6 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3; y(0) = y'(0) = 2.$

Відповідь: $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1).$

7 Вказати вигляд частинних розв`язків неоднорідних рівнянь:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}.$ Відповідь: $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C).$

б) $y'' + 9y = \cos 2x.$ Відповідь: $A\cos 2x + B\sin 2x.$

в) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$ Відповідь: $xe^x(A\cos x + B\sin x).$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 26

Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання.

Приклад 1 Записати систему лінійних рівнянь в матричному вигляді та знайти її розв'язок, якщо $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$.

Розв'язання Запишемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Задану систему запишемо у вигляді матричного рівняння: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Обчисливши визначник, отримаємо $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.

Коренями цього рівняння є $\lambda_1=1$ та $\lambda_2=4$. Для кореня $\lambda_1=1$ складемо систему:

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (3-1)\alpha_2 = 0 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$. У цьому випадку $x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = e^t$; $y_1 = \alpha_2 e^{\lambda_1 t} = -\frac{1}{2} e^t$. Для кореня $\lambda_2=4$ маємо:

$$\begin{cases} (2-4)\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + (3-4)\alpha_2 = 0 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=1$, тоді: $x_2 = \alpha_1 e^{\lambda_2 t} = e^{4t}$; $y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = e^{4t}$. Загальним розв'язком системи є:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{4t} \\ y(t) = -\frac{1}{2} C_1 e^t + C_2 e^{4t} \end{cases}.$$

У матричній формі розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{4t} \end{pmatrix}.$$

Приклад 2 Знайти частинний розв'язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=8x+y\end{cases}$, якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

Розв'язання Запишемо матрицю системи $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$. Задану систему запишемо у вигляді матричного рівняння: $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 8 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$. Обчисливши визначник, отримаємо $\lambda^2-4\lambda-5=0$.

Коренями цього рівняння є $\lambda_1=5$ та $\lambda_2=-1$.

Для кореня $\lambda_1=5$ складемо систему:

$$\begin{cases}(3-5)\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+(1-5)\alpha_2=0\end{cases},\ \text{тобто}\ \begin{cases}-2\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1-4\alpha_2=0\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=2$. У цьому випадку $x_1=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=e^{5t}$; $y_1=\alpha_2 e^{\lambda_1 t}=2e^{5t}$.

Для кореня $\lambda_2=-1$ маємо:

$$\begin{cases}(3-(-1))\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+(1-(-1))\alpha_2=0\end{cases},\ \text{тобто}\ \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases}\ \text{або}\ \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=0\\ 4\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=-4$, тоді: $x_2=\alpha_1 e^{\lambda_2 t}=e^{-t}$; $y_2=\alpha_2 e^{\lambda_2 t}=-4e^{-t}$. Загальним розв'язком системи є:

$$\begin{cases}x(t)=C_1x_1+C_2x_2\\ y(t)=C_1y_1+C_2y_2\end{cases},\ \text{тобто}\ \begin{cases}x(t)=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}\\ y(t)=2C_1e^{5t}-4C_2e^{-t}\end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду $x(0)=4$, $y(0)=2$: $\begin{cases}C_1+C_2=4\\ 2C_1-4C_2=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=3\\ C_2=1\end{cases}$.

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1=3$ і $C_2=1$: $\begin{cases}x(t)=3e^{5t}+e^{-t}\\ y(t)=6e^{5t}-4e^{-t}\end{cases}$.

Домашнє завдання

Вправи

1 Записати систему лінійних рівнянь в матричному вигляді та знайти її розв'язок, якщо $\begin{cases}\dot{x}=5x+4y\\ \dot{y}=2x+3y.\end{cases}$.

2 Знайти частинний розв'язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases}\dot{x}=2x+y\\ \dot{y}=2x+3y\end{cases}$, якщо $x(0)=8$, $y(0)=1$.

Бібліографічний список

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М., 2005.

2. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. – К., 2003.

3. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. – К., 2000.

4. Овчинников П., Кропив'янський П., Полушкін С. та ін. За ред. П. Овчинникова. Вища математика. Збірник задач: У 2-х ч. Ч.2.. – К., 2004.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.1 – М., 1978.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.2 – М., 1978.

7. Каплан И.А., ПустынниковВ. И. / Под ред. Пустынникова В. И. Практикум по высшей математике. В 2-х т. Т. 1, 2. 6-е изд., М.,2006.

8. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.,1986.

9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.,1985.

10. Овчинников П., Кропив'янський П. Полушкін С. та ін. / За ред. П. Овчинникова. Вища математика. Збірник задач: У 2-х ч. Ч.2. 2-ге вид., – К., 2004.

11. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. За ред. Г.Л. Кулініча. У 2 кн. Кн. 1. – К., 1994.

12. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. За ред. І.П.Васильченко. У 2 кн. Кн. 2. – К., 1994.

13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. Изд. 14, М.,1998.

14. Ю.В.Боднарчук Б.В.Олійник. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. – К., 2010.

15. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр. — М., 2005.

16. Ильин В.А. Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М., Изд. МГУ, 1998.

17. Лавренчук В.П., Готинчан Т.І.,Дронь В.С., Кондур О.С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз. – Чернівці, 2007.

18. Кудрявцев Л.Д. Кратний курс математического анализа М, 1989.

19. Смирнов В.И. Курс высшей математики т.1. М., 1974.

20. Математический анализ в вопросах и задачах. Под ред. Бутузова В. Ф. – М., 2001

21. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. А. Д. Мышкиса, О. А. Олейиик. — М., 1984.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища математика» для здобувачів рівня вищої освіти перший (бакалаврський) денної (заочної) форми навчання за спеціальністю 131 «Прикладна механіка».

Укладачі: Гаєвська Вікторія Олексіївна, Лисянська Ганна Володимирівна

За редакцією авторів

Формат 60х84 1/16.
Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. –8,8

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, ул. Алчевських, 44