УДК.621.906.529

АДАПТАЦІЯ В-СПЛАЙН ІНТЕРПОЛЯТОРА ДЛЯ ДВОРІВНЕВИХ ЧПУ

Бичков І. В.[1], Бичков М. І.[2]

[1]*Національний аерокосмічний університет "ХАІ",*
[2]*Інститут проблем машинобудування НАНУ (м. Харків)*

В статті запропоновано адаптацію В-сплайн інтерполяції для системи ЧПУ з дворівневою побудовою. Основна увага приділена полегшенню інтерполяційних розрахунків на нижчому рівні в режимі реального часу. Отримано співвідношення коефіцієнтів поліномів, для вузлового інтервалу В-сплайну в узловому інтервалі. На прикладі показано послідовність розрахунків, які зводяться до сумуванія кінцевих різностей.

Постановка проблеми. Сучасні пристрої ЧПУ, як правило, дозволяють управляти верстатами, розрахованими на виконання високошвидкісної обробки. Неодмінною вимогою до таких пристроїв є наявність універсальної NURBS-інтерполяції [1]. Фірми виробники пристроїв ЧПУ не розкривають рішень з організації обчислювального процесу при реалізації NURBS-інтерполяції. Тим часом ця реалізація допускає ряд варіантів, особливо якщо пристрій ЧПУ виконано за дворівневою структурою.

Мета статті. Розглянути один з варіантів реалізації В-сплайн інтерполяції для дворівневого пристрою ЧПУ, особливо операції на нижньому рівні, що здійснюють безпосереднє управління верстатом в реальному часі.

Основні матеріали дослідження. Як відомо [2], NURBS-крива (Non Uniform Rational B-spline) являє собою В-сплайн ступеня p, який описується виразом:

$$\vec{C}(U) = \sum_{i=0}^{n} N_i, p(U)\overrightarrow{P_i}\quad, \tag{1}$$

де $N_i,p(u)$ – базисні функції ступеня p; $\overline{P_i}$ – контрольні точки, що утворюють контрольний полігон; $(n+1)$ – число точок контрольного полігону.

Базисні функції визначені виразами [3]:

$$N_{i,0}(U) = \begin{cases} 1, U_i \le U < U_{i+1} \\ 0, U \notin \left(U_i, U_{i+1}\right) \end{cases}, \tag{2}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{U - U_i}{U_{i+p} - U_i} N_{i,p-1}(U) + \frac{U_{i+p+1} - U}{U_{i+p+1} - U_{i+1}} N_{i+1,p-1}(U),$$

де $N_{i,0}(u)$ - базисні функції нульового ступеня;

$N_{i,p}(u)$ - базисні функції ступеня p;

u – параметр, визначений в інтервалі (0,1).

Значення параметрів U_i задаються вузловим вектором:

$$U = \left\{ \underbrace{0,0,...,0}_{p+1}, U_{p+1}, ..., U_{m-p-1}, \underbrace{1,1,...,1}_{p+1} \right\}.$$

І задовольняють нерівності

$$0 \le U_0 \le U_1 \le ... \le U_i \le U_{i+1} \le ... \le U_{n-1} \le U_n .$$

Ступінь кривої p, число точок контрольного полігону $(n+1)$ і число вузлів $(m+1)$ вузлового вектора $\{U_i\}$ пов'язані співвідношенням $m=n+p+1$.

Якщо В-сплайн крива вже отримана, то для обчислення її точки при фіксованому $U=U_k$ вимагається:

– знайти вузловий інтервал, якому належить U_k;
– знайти ненульові базисні функції на цьому інтервалі;
– обчислити значення базисних функцій $N_{i-p}(U_k), \ldots, N_i(U_k)$ в точці $U=U_k$;
– обчислити значення евклідових координат x, y, z, що відповідають значенням U_k,

$$x, y, z(u) = \sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(U_k) X, Y, Z\left(\overrightarrow{P_i}\right). \tag{3}$$

Для цілей ЧПУ знайшли застосування В-сплайни 3-го ступеня (завдання просторових і плоских кривих) і 2-го ступеня (завдання плоских кривих).

Вирази для координат x, y, z при використанні В-сплайна 3-го ступеня в і-тому кутовому інтервалі такому, що $U_i<U_{i+1}$, можуть бути представлені у вигляді:

$$x, y, z(u) = A_{x,y,z}u^3 + B_{x,y,z}u^2 + C_{x,y,z}u + D_{x,y,z}, \tag{4}$$

де A, B, C, D – коефіцієнти полінома, що підлягають обчисленню в кожному і-тому вузловому інтервалі. Відповідно для сплайну другого ступеня:

$$x, y, z(u) = B_{x,y,z}u^2 + C_{x,y,z}u + D_{x,y,z}. \tag{5}$$

Коефіцієнти поліномів (4), (5) можна отримати наступним чином.

Представимо базисні функції ступеня 3 і 2 з (2) у вигляді полінома відповідного ступеня:

$$\begin{aligned} N_{i,3}(u) &= a_{i,3}u^3 + b_{i,3}u^2 + c_{i,3}u + d_{i,3}, \\ N_{i,2}(u) &= b_{i,3}u^2 + c_{i,3}u + d_{i,3}. \end{aligned} \tag{6}$$

На головному інтервалі (U_i, U_{i+1}) при $U_i< U_{i+1}$ ненульовими будуть базисні функції третього ступеня $N_{i-3,3}(U),\ N_{i-2,3}(U),\ N_{i-1,3}(U)\ и\ N_{i,3}(U)$. Для поліномів 2-го ступеня такими виявляться $N_{i-2,3}(U),\ N_{i-1,3}(U),\ N_{i,3}(U)$, тоді підставляючи значення $N_{i,3}(U)$ і/або $N_{i,2}(U)$ в вираз (3) і зіставляючи його з (4), отримаємо:

$$A_{i,3}(x) = \sum_{k=0}^{3} a_{i-k,3}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right),$$
$$B_{i,3}(x) = \sum_{k=0}^{3} b_{i-k,3}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right), \quad (7)$$
$$C_{i,3}(x) = \sum_{k=0}^{3} c_{i-k,3}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right),$$
$$D_{i,3}(x) = \sum_{k=0}^{3} d_{i-k,3}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right).$$

Аналогічно будуть виглядати вирази для коефіцієнтів поліномів *y(u)* і *z(u)*. У формулах (7) достатньо змінити позначення координат в лівій частині, а в правій частині замість значень координати $X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right)$ підставити значення координати *y* або *z* тих же векторів $\overrightarrow{P_{i-k}}$. Для кривих 2го порядку отримаємо:

$$B_{i,2}(x) = \sum_{k=0}^{2} b_{i-k,2}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right),$$
$$C_{i,2}(x) = \sum_{k=0}^{2} c_{i-k,2}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right), \quad (8)$$
$$D_{i,2}(x) = \sum_{k=0}^{2} d_{i-k,2}(U_k)X\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right).$$

Більшість сучасних пристроїв ЧПУ класу CNC мають дворівневу структуру [1, 4]. Верхній рівень утворений промисловим ПК і в ньому виконуються всі позациклові операції. Нижній рівень представлений потужним сигнальним процесором і в ньому виконуються операції з управління приводами подач і електроавтоматикою верстата. Якщо в УЧПУ передбачена B-сплайн-інтерполяція, то у форматі завдання сплайн-кадру міститиься G-код сплайн-інтерполяції, ступінь сплайна p, координати точок контрольного полігону $X, Y, Z\left(\overrightarrow{P_i}\right)$, вузловой вектор $\{U_i\}$. Тоді на верхній рівень можуть бути покладені всі розрахунки аж до обчислення коефіцієнтів *A, B, C, D* на кожному вузловому інтервалі. Значення коефіцієнтів передаються на нижній рівень, де з кроком, що визначається швидкістю подачі, виконуються розрахунки тактових збільшень і чергових значень координат.

Так як при цьому розраховуються збільшення координат за такт управління $T_ц$, то вираз (4) може бути представлено у вигляді:

$$x, y, z(n) = A_{x,y,z}h^3n^3 + B_{x,y,z}h^2n^2 + C_{x,y,z}hn + D_{x,y,z}$$

де *h* – крок обчислень по параметру *u*;
n – число (номер) тактів управління.

Ввівши позначення $A_{x,y,z}h^3 = a_{xn,yn,zn}$, $B_{x,y,z}h^2 = b_{xn,yn,zn}$, $C_{x,y,z}h^3 = c_{xn,yn,zn}$ отримаємо функції цілочисельного аргументу n

$$x, y, z(n) = a_{xn,yn,zn}n^3 + b_{xn,yn,zn}n^2 + c_{xn,yn,zn}n + D_{x,y,z}$$

Обчислення точок таких многочленів просто виконати, використовуючи кінцеві різниці. Для цього треба знати початкові значення *X, Y, Z(n)* і кінцевих різниць першого, другого і третього порядків. Формули для їх визначення (для конкретизації взята координата *X*) наведено в таблиці 1.

Приклад. Нехай в-сплайн заданий наступними даними:

– ступінь сплайна *p*=3;
– точки контрольного полінома

$$\left\{\overrightarrow{P_i}\right\} = \{(-100,-60), (-100,0), (-40,70), (60,90), (30,120)\};$$

– вузловий вектор

$$\{U\} = \{0, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0.5, \ 1, \ 1, \ 1, \ 1\}.$$

Тут один внутрішній вузол, тому число ненульових базисних функцій ступеня 0 – дві, ступеня 1 – три, ступеня 2 – чотири, ступеня 3 – п'ять. Використовуючи (2) отримаємо для базисних функцій 3-го ступеня:

$$N_{0,3}(u) \begin{cases} -8u^3 + 12u^2 - 6u + 1 & , u \in (0,\ 0.5), \\ 0 & , u \notin (0,\ 0.5), \end{cases}$$
$$N_{1,3}(u) \begin{cases} 14u^3 - 18u^2 + 6u & , u \in (0,\ 0.5), \\ -2u^3 + 6u^2 - 6u + 2 & , u \in (0.5,\ 1), \end{cases}$$
$$N_{2,3}(u) \begin{cases} -8u^3 + 6u^2 & , u \in (0,\ 0.5), \\ 8u^3 - 18u^2 + 12u - 2 & , u \in (0.5,\ 1), \end{cases}$$
$$N_{3,3}(u) \begin{cases} 2u^3 & , u \in (0,\ 0.5), \\ -14u^3 + 24u^2 - 12u + 2 & , u \in (0.5,\ 1), \end{cases}$$
$$N_{4,3}(u) \begin{cases} 8u^3 - 12u^2 + 6u - 1 & , u \in (0.5,\ 1), \\ 0 & , u \notin (0.5,\ 1). \end{cases}$$

Таблиця 1 – Формули для обчислення кінцевих різниць

№ кроку	X	Δ^1X	Δ^2X	Δ^3X
n	$a_{xn}n^3 + b_{xn}n^2 + c_{xn}n + D_x$	$a_{xn}(3n^2+3n+1) + b_{xn}(2n+1) + c_{xn}n$	$6a_{xn}(n+1) + 2b_{xn}$	$6a_{xn}$
n+1	$X(n) + \Delta^1 X(n)$	$\Delta^1 X(n) + \Delta^2 X(n)$	$\Delta^2 X(n) + 6a_{xn}$	$6a_{xn}$

По співвідношеннях (7) з участю значення координат точок контрольного полігону обчислимо значення коефіцієнтів *A, B, C, D*. (табл. 2).

Вирази для координат запишуться у вигляді:

$$X(u) = \begin{cases} -160u^3 + 360u^2 - 100 & , u \in (0, 0.5), \\ -720u^3 + 1200u^2 - 420u - 30 & , u \in (0.5, 1), \end{cases} \quad (10)$$
$$Y(u) = \begin{cases} 100u^3 - 300u^2 + 360u - 60 & , u \in (0, 0.5), \\ 260u^3 - 540u^2 + 480u - 80 & , u \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Графік функції $y = f(x)$, побудований за цими виразами, наведено на рис. 1. Обчислення координат виконані з кроком по параметру *U*, рівним 0,05. Замінивши в виразах (10) параметр *U* на *h*n* (*h* – крок за параметром *U, n* – число тактів управління контролера ЧПУ), получимо при *h*=0.05:

$$X(u) = \begin{cases} -0.02n^3 + 0.9n^2 - 100 & , u \in (0, 0.5), \\ -0.09n^3 + 3n^2 - 21n - 30 & , u \in (0.5, 1), \end{cases}$$
$$Y(u) = \begin{cases} 0.0125n^3 - 0.75n^2 + 18n - 60 & , u \in (0, 0.5), \\ 0.0325n^3 - 1.35n^2 + 24n - 80 & , u \in (0.5, 1). \end{cases}$$

Таблиця 2 – Значення коефіцієнтів *A, B, C, D* з участю значення координат точок контрольного полігону

Вуз-ловий інтервал	A(x)	B(x)	C(x)	D(x)	A(y)	B(y)	C(y)	D(y)
0-0,5	-160	360	0	-100	100	-300	360	-60
0,5-1	-720	1200	-420	-30	260	-540	480	-80

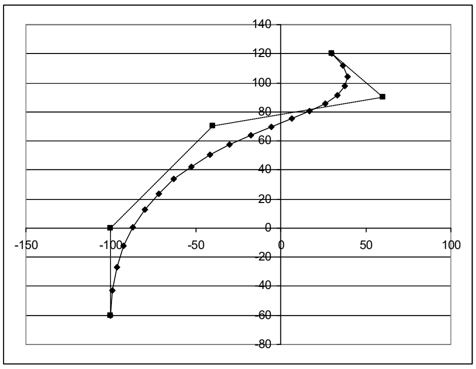

Рисунок 1 – Графік функції $y = f(x)$, реалізує В-сплайн (10)

Безпосередньо з цих виразів отримуємо:

$$\begin{aligned} &X(0) = -100 \\ &\Delta^1 X(0) = 0.88 \\ &\Delta^2 X(0) = 1.68 \\ &\Delta^3 X(0) = -0.12 \end{aligned} \qquad (11)$$

$$\begin{aligned} &X(10) = -30 \\ &\Delta^1 X(10) = 12.21 \\ &\Delta^2 X(10) = 0.06 \\ &\Delta^3 X(10) = -0.54 \end{aligned} \qquad (12)$$

За даними (11) розраховуємо точки координати x при зміні n від 0 до 10, за даними (12) – від 10 до 20.

На закінчення відзначимо, що розглянуті положення справедливі при будь-якому ступені В-сплайна. Дійсно, базисні функції ступеня *p* можна представити у вигляді:

$$N_{i,p}(u) = \sum_{n=0}^{p} a_{i-k,p}^{(n-p)} U^{p-n} .$$

Тут верхній індекс (p-n) визначає номер коефіцієнта при параметрі *U* в ступені *p-n*. Тоді коефіцієнти поліномів виду (4), (5) запишуться співвідношенням:

$$A_{i,p(x,y,z)}^{(n-p)} = \sum_{k=0}^{p} a_{i-k,p}^{(n-p)} X, Y, Z\left(\overrightarrow{P_{i-k}}\right), \qquad n = \overline{0, p}$$

Далі залишається побудувати обчислювальну схему для полінома ступеня р з використанням кінцевих різниць.

Висновки. Викладена методика подання В-сплайна для 2-х рівневих пристроїв ЧПУ. На прикладі В-сплайна 3й ступеня показані правила обчислення коефіцієнтів поліномів, що виражають залежність координат в межах вузлового інтервалу, від параметра U. Отримана проста обчислювальна схема розрахунку координат і їх приростів на нижньому рівні УЧПУ.

Показано, що в циклі управління потрібно не більше 3х операцій додавання на одну точку координати, тобто сплайн інтерполяція на нижньому рівні буде виконуватися навіть простіше, ніж штатні розрахунки по лінійній або кругової інтерполяції.

Список використаних джерел

1. Серебреницкий П. П. Устройства числового программного управления. *Ремонт, инновации, технологии, модернизация*, 2008. №5. С.81- 83.
2. Кунву Ли. Основы САПР (CAD/CAM/CAE). – С-Питербург: Питер, 2004. 560 с.
3. Piegle L., Tiller W. The NURBS book 2-th Edition Springer, 197, Berlin Heidelberg New Yourk. 578p.
4. Раисов Ю.А. Кукушкин В.К. Сплайн интерполяция для систем CNC. *Вестник НТУ ХПИ "Автоматика и приборостроение"* 2003. №7. Т.3. С. 100-105.

Аннотация

АДАПТАЦИЯ В-СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯТОРА ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВЫХ ЧПУ

Бычков И. В., Бычков Н. И.

В статье предложена адаптация В-сплайн интерполяции для систем ЧПУ с двухуровневым строением. Основное внимание уделено облегчению интерполяционных расчетов на нижнем уровне в режиме реального времени. Получены соотношения коэффициентов полиномов, для узлового интервала В-сплайна в узловом интервале. На примере показана последовательность вычислений, которые сводятся к суммированию конечных разностей.

Abstract

ADAPTATION OF B-SPLINE INTERPOLATOR FOR TWO-LEVEL CNC

I. Bychkov, N. Bychkov

The article proposes an adaptation of B-spline interpolation for CNC systems with two-level structure. The main attention is paid to facilitating interpolation calculations at the lower level in real time. The relations of coefficients of polynomials for the node interval of the B-spline in the node interval are obtained. The example shows a sequence of calculations that are reduced to the summation of finite differences.