



Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет мехатроніки та інжинірингу
Кафедра надійності та міцності машин і споруд
ім. В. Я. Аніловича

ОПІР МАТЕРІАЛІВ. ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМ ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ І ВЗАЄМНІСТЬ ПЕРЕМІЩЕНЬ

**Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
з дисциплін «Опір матеріалів»
та «Механіка матеріалів і конструкцій»
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної, заочної та дистанційної форм навчання
інженерних спеціальностей**

Харків
2024

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет мехатроніки та інжинірингу
Кафедра надійності та міцності машин і споруд
ім. В. Я. Аніловича

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ.
ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМ
ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ І ВЗАЄМНІСТЬ
ПЕРЕМІЩЕНЬ**

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
з дисциплін «Опір матеріалів»
та «Механіка матеріалів і конструкцій»

Для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання
інженерних спеціальностей

Затверджено рішенням
Науково-методичної комісії
факультету мехатроніки
та інжинірингу

Протокол № 4
від 21 лютого 2024р

Харків
2024

УДК 620.17(072)
О-61

Схвалено на засіданні
кафедри надійності та міцності машин і споруд ім. В.Я.Аніловича
Протокол №10 від «22» січня 2024 р.

Рецензенти:

Алфьоров О.І. д.т.н., проф. кафедри проектування технічних систем, Сумського національного аграрного університету

Шентун С.Ю. к.т.н., старший викладач кафедри надійності та міцності машин і споруд ім.В.Я Аніловича, Державний біотехнологічний університет

О-61 Опір матеріалів. Дослідна перевірка теорем про взаємність робіт і взаємність переміщень: метод. вказівки до виконання лабораторних робіт з дисциплін «Опір матеріалів» та «Механіка матеріалів і конструкцій» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заоч. та дистанц. форм навч. інженерних спеціальностей / Державний біотехнологічний університет; авт.-уклад.: М.В.Марченко, В.Б.Савченко, О.А.Свіргун, В.І.Іванов. - Харків: [б. в.], 2024. - 27с.

Методичні вказівки «Опір матеріалів. Дослідна перевірка теорем про взаємність робіт і взаємність переміщень» розроблено з метою надання практичних навичок здобувачами освіти під час виконання ними лабораторних робіт з дисципліни опір матеріалів (механіка матеріалів і конструкцій). Включають необхідні теоретичні положення, які дозволяють здобувачам освіти зрозуміти сутність явищ, які досліджуються. Методичні вказівки містять також опис порядку, методів і прийомів виконання лабораторної роботи. В додатку надано відковий матеріал.

Видання призначене для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання інженерних спеціальностей.

Відповідальний за випуск (в.о. зав.каф.): М. В. Марченко, к.т.н., доцент.

© М.В.Марченко, В.Б.Савченко,
О.А.Свіргун, В.І.Іванов

© ДБТУ, 2024

ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМИ ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ І ВЗАЄМНІСТЬ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Мета роботи

Метою виконання лабораторної роботи є експериментальне доведення теорем про взаємність робіт і взаємність переміщень.

Прилади та обладнання

При виконанні лабораторної роботи може використовуватись таке обладнання: установка типу СМ-4А для визначення деформацій сталеві балки (рис. 1), з комплектом ваг та індикаторів часового типу для вимірювання переміщень; програмно-технічний комплекс «Ліра САПР».

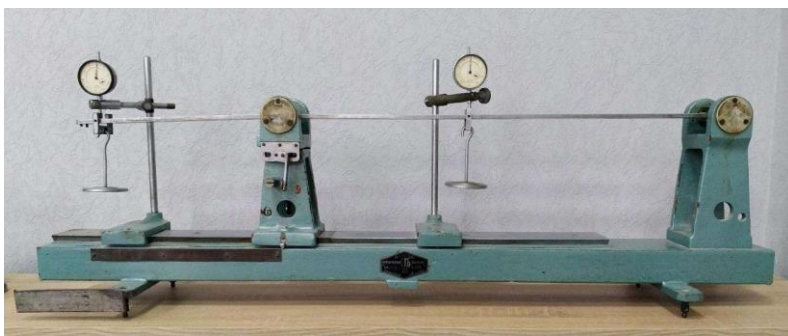


Рис. 1. Лабораторна установка СМ-4А.

Установка складається з основи, рухомої та нерухомої опорних стійок, балки, двох підвісів, набору вантажів та двох індикаторних стійок. Балка, яку навантажують в процесі експерименту, виготовлено зі сталеві полоси розміром 7x40x1000мм.

Теоретичні положення

Теорема про взаємність робіт та переміщень мають велике значення у загальній теорії дослідження напруженого та деформованого станів стрижнів, пластин та інших об'єктів, які підлягають розрахунку. Їх застосування суттєво спрощує вирішення багатьох задач опору матеріалів та будівельної механіки, а також проведення дослідницьких робіт, які потребують визначення переміщень.

Доведення цих теорем ґрунтується на розумінні того, яким чином умови прикладання сили впливають на виконану нею роботу. Так, коли деформація твердого тіла в точці прикладання сили \square дорівнює Δ , то в результаті поступової зміни величини сили від 0 до максимуму, сила виконує роботу A (рис. 2). Тобто, у відповідності до *теорема Клапейрона*, ця робота

може бути визначена, як площа трикутника $A = \frac{1}{2} F \cdot \Delta$. Але, якщо деформація твердого тіла відбувається за якихось сторонніх причин, а сила F при цьому залишається незмінною, то її робота визначається як площа прямокутника $A = F \cdot \Delta$.

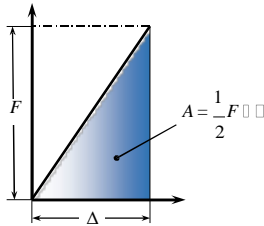


Рис.2. Визначення роботи сили F на створення деформації Δ .

Розглянемо балку на двох опорах, до якої в точках 1 і 2 прикладають сили F_1 і F_2 (рис.3, а). Будемо спостерігати за деформацією балки в процесі прикладання сил при умові, що вони прикладаються послідовно.

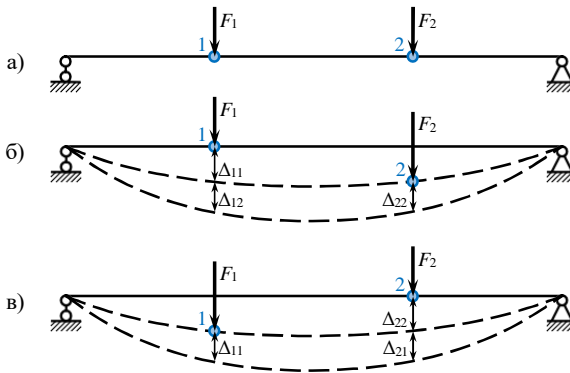


Рис.3. Розрахункова схема і варіанти прикладання навантажень:

- а) загальна розрахункова схема; б) першою прикладають силу F_1 ;
- в) першою прикладають силу F_2 .

Якщо спочатку прикласти силу F_1 , то вона виконає роботу по переміщенню точки її прикладання на величину Δ_{11} (рис.3, б). При прикладанні сили F_2 до вже деформованої балки, вона також виконає певну роботу по переміщенню точки 2 на величину Δ_{22} . Але крім цього, точка 1 прикладання сили F_1 , що не змінювала своєї величини під час останньої деформації балки, переміститься на величину Δ_{21} – переміщення першої точки від дії сили, яка прикладена в другій точці. Таким чином, повна робота

двох сил по деформації балки, складатиме

$$\square_F^{(1)} = \frac{1}{2}\square_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2}\square_2 \cdot \Delta_{22} + \square_1 \cdot \Delta_{12} \quad (1)$$

Змінимо порядок прикладання сил, і так само визначимо виконану ними роботу по деформації балки. Тепер нехай першою прикладається сила \square_2 (рис.3, в), створюючи деформацію Δ_{22} . А коли до вже деформованої балки буде прикладена сила \square_1 , то вона перемістить свою точку прикладання на Δ_{11} . Але в цей час, сила \square_2 переміститься разом зі своєю точкою прикладання на величину Δ_{21} . Повна робота по деформації балки, в цьому випадку буде мати вигляд

$$\square_F^{(2)} = \frac{1}{2}\square_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2}\square_1 \cdot \Delta_{11} + \square_2 \cdot \Delta_{21} \quad (2)$$

Зважаючи на те, що робота двох розглянутих сил по деформації балки не може залежати від порядку їх прикладання, можемо прирівняти вирази для обчислення роботи в першому і другому випадках, тобто $\square_F^{(1)} = \square_F^{(2)}$.

$$\frac{1}{2}\square_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2}\square_2 \cdot \Delta_{22} + \square_1 \cdot \Delta_{12} = \frac{1}{2}\square_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2}\square_1 \cdot \Delta_{11} + \square_2 \cdot \Delta_{21}.$$

Після скорочення отримаємо вираз для теореми Бетті про взаємність робіт:

$$\square_1 \cdot \Delta_{12} = \square_2 \cdot \Delta_{21}, \quad (3)$$

яка формулюється наступним чином: *робота першої сили по переміщенню точки її прикладення, викликаному дією другої сили, дорівнює роботі другої сили по переміщенню точки її прикладення від дії першої сили.*

Якщо в теоремі про взаємність робіт покласти $\square_1 = \square_2 = 1$, то отримаємо математичний вираз теореми про взаємність переміщень (теореми Максвелла):

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (4)$$

Ця теорема має таке формулювання: *переміщення точки 2 від дії сили, яка прикладена в точці 1, дорівнює переміщенню точки 1 від дії сили, яка прикладена в точці 2* (рис. 4).

Розглянуті вище Теореми мають неабияке теоретичне і практичне значення. Так, наприклад, при виконанні експертної оцінки певних елементів конструкцій, може виникати необхідність визначення характеру деформацій реальної конструкції. Фактично, задача зводиться до вимірювання переміщень в багатьох точках конструкції при прикладанні до неї певного навантаження (рис.5, а). Враховуючи складність організації вимірювань в багатьох точках конструкції, така операція може бути як мінімум трудомісткою. Але, використання теореми Бетті, дозволяє замінити процес вимірювання на послідовне прикладання сили в тих самих точках (рис.5, б). Теорема Максвелла, як частковий випадок теореми Бетті, також може бути використана в аналогічних ситуаціях, але має і своє особисте застосування.

Так, при вирішенні задач методом сил, її використання дозволяє майже вдвічі скоротити кількість розрахунків.

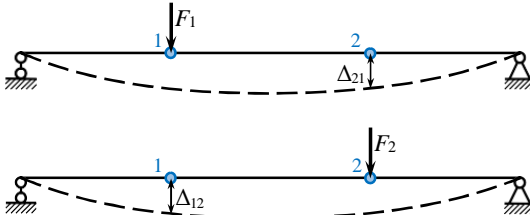


Рис. 4. Ілюстрація до теореми про взаємність переміщень (теореми Максвелла)

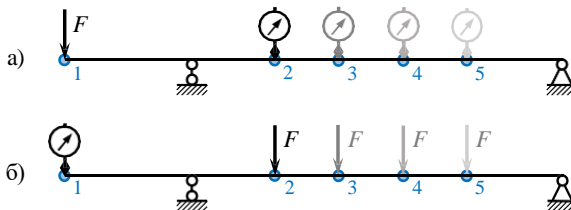


Рис. 5. Заміна вимірювання переміщень на прикладання сили

Аналіз розрахункових формул

В ході практичного заняття, яке передує лабораторній роботі, викладач зі студентами вирішують задачі визначення переміщення певних точок балки від дії сил P_1 і P_2 , а також необхідних одиничних сил, у відповідності до розрахункових схем, що наведено на рисунку 6. Результатом практичного заняття є розрахункові формули для визначення переміщень Δ_{12} і Δ_{21} , записані в загальному вигляді з урахуванням прийнятої на рис.6 системи позначень. Розглянемо ці розрахункові схеми.

Маємо балку на двох опорах, показано на рисунку 6. Визначимо дві точки, в яких будемо прикладати сили і виконувати вимірювання – нехай точка 1 буде знаходитись між опорами, а точка 2 – на консолі.

Розглянемо перший варіант навантаження, коли силу прикладено в точці 1, а вимірювання переміщення здійснюється в точці 2 (рис.6, а). Для визначення переміщення Δ_{21} , необхідно побудувати дві епюри – епюру згинаючих моментів від зовнішнього навантаження (сили F_1), яку називають *вантажною епюрою*, і епюру згинаючих моментів від одиничної сили, що прикладена в точці балки, де необхідно визначити переміщення (*одиничну епюру*). Напрямок одиничної сили має співпадати з напрямком шуканого переміщення. Після цього, обидві епюри перемножують за способом

Верещагіна, яке в прийнятих позначеннях, визначається формулою:

$$\Delta_{21} = \frac{\sum \Omega_{F_{1i}} \bar{c}_i^{(2)}}{EI_x}, \quad (5)$$

де $\Omega_{F_{1i}}$ – площі елементарних фігур на вантажній епюрі, побудованій від зовнішньої сили F_1 ;

$\bar{c}_i^{(2)}$ – ординати на одиничній епюрі, зняті під центрами ваги кожної i -тої площі $\Omega_{F_{1i}}$ на вантажній епюрі;

E – модуль поздовжньої пружності матеріалу балки;

I_x – осьовий момент інерції перерізу.

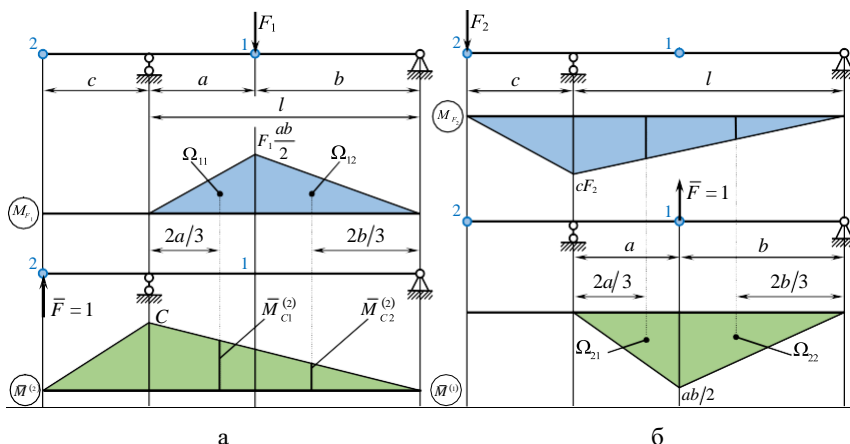


Рис.6. Розрахункові схеми балки і епюри згинаючих моментів від зовнішніх і одиничних навантажень:

а – навантаження прикладено в точці 1, визначається переміщення точки 2;
б – навантаження прикладено в точці 2, визначається переміщення точки 1.

У відповідності до рис.6, а, переміщення точки 2 від дії сили F_1 становитиме

$$\begin{aligned} \Delta_{21} &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_{F_{11}} \bar{c}_{c1}^{(2)} + \Omega_{F_{12}} \bar{c}_{c2}^{(2)}) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{F_1 ab}{2} \cdot \left(\frac{2a}{3} - \frac{2b}{3} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_1 ab}{2} \cdot \left(\frac{2b}{3} - \frac{2a}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{F_1 ab^2}{2EI_x} \left(\frac{2a}{3} - \frac{2b}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{2a}{3} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Тепер розглянемо інший варіант навантаження, коли силу F_2 прикладено в точці 2, а вимірювання переміщення здійснюється в точці 1 (рис.6, б). Для визначення переміщення Δ_{12} , так само будемо *вантажну і одиничну епюри*. Вираз для розрахунку переміщення за способом Верещагіна набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_{F_{21}}^{(1)} C_1 + \Omega_{F_{22}}^{(1)} C_2) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} \frac{F_2 a}{l} \cdot \frac{a^2}{l} \left(l - \frac{a}{3} \right) + \frac{1}{2} \frac{F_2 a}{l} \cdot \frac{a^2}{l} \cdot \frac{2}{3} \right) = \\ &= \frac{F_2 a^3}{2EI_x l^2} \left(l - \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Порівнюючи формули (6) і (7), бачимо, що вони абсолютно ідентичні, за виключенням позначення сил F_1 і F_2 , які в них входять. Але, якщо прийняти, що величина $F_1 = F_2$, то переміщення $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, що фактично є доказом теореми Максвелла про взаємність переміщень.

Робота сил по деформації балки дорівнює добутку сили на переміщення, яке вона створює. Тому доведенням теореми Бетті, про взаємність робіт, є рівність добутків $F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}$.

Порядок виконання лабораторної роботи

Практичну частину лабораторної роботи, студенти можуть виконувати за допомогою лабораторної установки СМ-4А, або/та числової моделі балки, що завантажено в багатофункціональний програмний комплекс «Ліра САПР». Використання цифрової моделі надає широкі можливості гнучкого формування розрахункової схеми і режимів навантаження балки, а крім того, включати в хід лабораторної роботи елементи дослідження – наприклад, змінювати матеріал і форму поперечного перерізу балки.

Розглянемо випадок розрахункової схеми, в якій (у відповідності до рис. 6) $a=0,3$ м, $b=0,4$ м, $c=0,3$ м, $l=0,7$ м, $F_1=30$ Н, $F_2=10$ Н. Для таких параметрів розрахункової схеми розраховують теоретичні значення переміщень Δ_{12} і Δ_{21} , використовуючи формули (6) і (7). Результати розрахунків заносять в табл.1.

Таблиця 1. Результати розрахунків і вимірювань.

Номер точки	Сила F_i , Н	Δ_{21} , мм		Δ_{12} , мм	
		теор.	експ.	теор.	експ.
1 (F_1)	30	1,17		※	※
2 (F_2)	10	※	※	0,39	
1 (F_1)	10	※		※	※

† При виконанні лабораторної роботи з використанням лабораторної установки СМ-4А, її готують до проведення роботи – встановлюють в задане положення шарнірно-рухомо опору, підвіси і кронштейни розташовують в точках 1 і 2 у відповідності до прийнятої розрахункової схеми. На кронштейнах закріплюють стрілочні індикатори, їхні шкали виставляють на нульове значення. Після цього можна починати здійснювати навантаження балки і вимірювання деформацій. Проілюструємо такі дії рисунками.

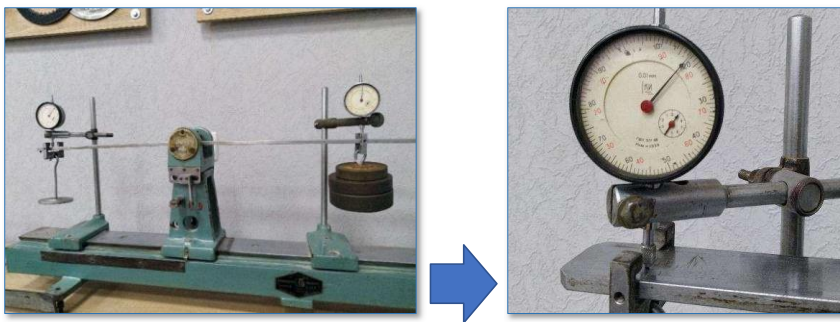


Рис. 7. Навантажуємо балку силою $F_1=30$ Н.
Фіксуємо переміщення в точці 2 ($\Delta_{21} = 1,17$ мм).

Результат вимірювання заносимо в табл. 1.

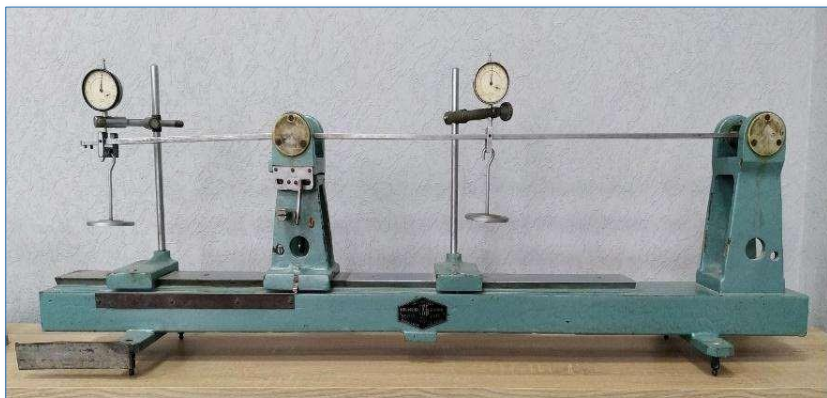


Рис. 8. Знімаємо навантаження з балки.



Рис.9. Навантажуємо балку силою $F_2=10$ Н. Фіксуємо переміщення в точці 1 ($\Delta_{12} = 0,39$ мм). Результат вимірювання заносимо в табл. 1.

У відповідності до формули (3) розрахуємо роботу першої сили по переміщенню точки її прикладення, викликаному дією другої сили, та роботу другої сили по переміщенню точки її прикладення від дії першої сили:

$$F_1 \cdot \Delta_{12} = 30 \cdot 0,39 = 11,7 \text{ мДж},$$

$$F_2 \cdot \Delta_{21} = 10 \cdot 1,17 = 11,7 \text{ мДж}.$$

Таким чином підтверджено *теорему Бетті*, у відповідності до якої $F_1 \cdot \Delta_{12} = F_2 \cdot \Delta_{21}$.

З метою експериментальної перевірки теореми Максвелла, проведемо додатковий опит, приклавши на балку силу $F_1=10$ Н.



Рис.9. Навантажуємо балку силою $F_1=10$ Н. Фіксуємо переміщення в точці 2 ($\Delta_{21} = 0,39$ мм). Результат вимірювання заносимо в табл. 1.

Порівнюючи результати вимірювання переміщень в точках 1 і 2 за умови рівності сил F_1 і F_2 , констатуємо, що $\Delta_{12} = \Delta_{21} = 0,39$ мм. Факт рівності переміщень є експериментальним підтвердженням *теореми Максвелла* про взаємність переміщень. На цьому мету лабораторної роботи досягнуто.

✦ При виконанні лабораторної роботи з використанням числової моделі балки, яку завантажено в багатофункціональний програмний комплекс «Ліра САПР», процес виконання роботи починається із побудови відповідної моделі. Розглянемо процес виконання лабораторної роботи для тієї самої розрахункової схеми балки, яку було описано вище.

Відкриваємо програму ЛІРА-САПР:

Пуск → Програми → LIRA-SAPR → ЛІРА-САПР 2016

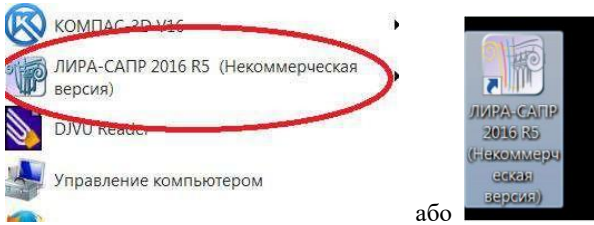



Рис.10. Запуск «ЛІРА САПР»

1. Створення файлу нової задачі

Для створення нової задачі відкрити на головній панелі інструментів натисніть кнопку **Меню Програм**  та обрати пункт "**Новий**, Створити новий документ" (рис.11).

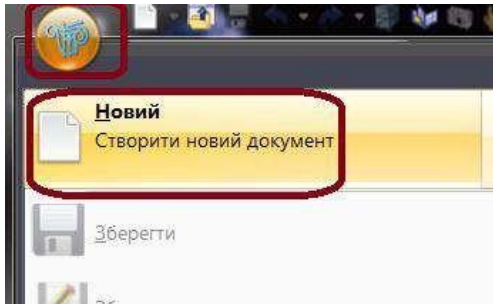


Рис.11. Діалогове вікно «Створення нового файлу»

В діалоговому вікні **Опис схеми** (рис. 12) задати:

- ознаку схеми (обрати) – 2-Три ступеня вільності у вузлі (X, Z, Uy) XOZ;
- ім'я задачі (ввести) – *Теорема про взаємність робіт*;
- опис задачі (ввести) – *Фамілія, номер варіанта*.

Натисніть кнопку **Застосувати**  і закрийте діалогове вікно.

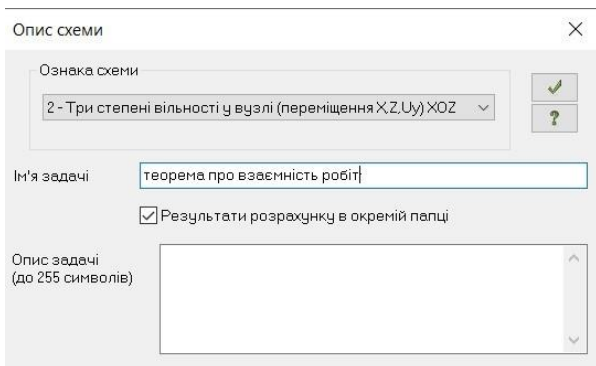


Рис 12. Діалогове вікно «Опис схеми»

2. Налаштування одиниць виміру, що використовуються в розрахунковій роботі.

Натисніть

Меню програм → Налаштування → Одиниці виміру (рис. 13).

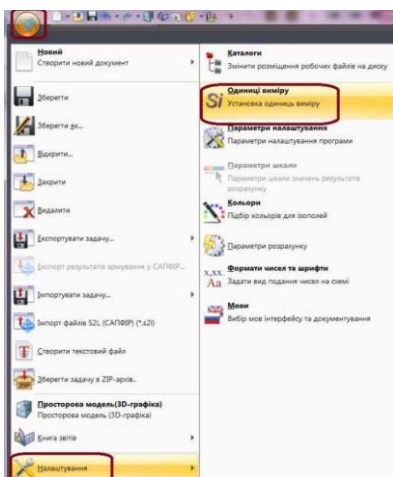


Рис 13. Діалогове вікно «Одиниці виміру»

У вкладці **Одиниці виміру** встановіть на вкладках **Схема** і **Результати**: геометрію в метрах (м), перетини в (см), навантаження, напруження і зусилля в кілоньютонах (кН), (рис. 14). Після встановлення одиниць вимірювання, натисніть кнопку **Підтвердити**.

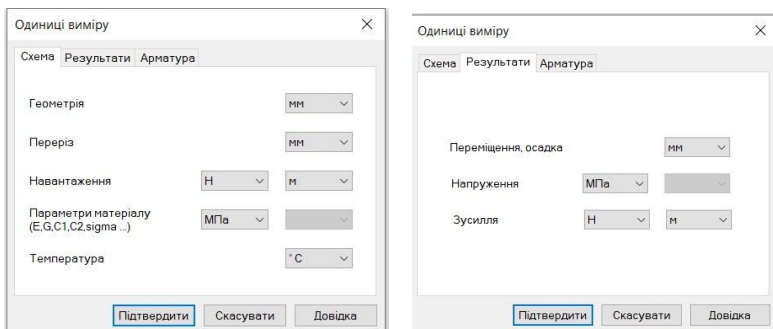


Рис 14. Діалогове вікно «Одиниці виміру»

Увага! Налаштування необхідних одиниць вимірювання може бути виконано окремо для розрахункової схеми, для результатів розрахунку і арматури. Зміна одиниць вимірювання може бути виконана на будь-якому етапі роботи з проектом.

3. Створення геометричної схеми балки.

Створити геометричну схему балки можна декількома способами. В цьому прикладі ми будемо задавати положення вузлів на площині координатами X, Y, Z, що відповідають точкам прикладення навантажень та опор. Ці точки будуть з'єднані стрижнями. Для цього послідовно натиснути:

Створення та редагування → Створення → Додати вузол (рис. 15).

- Встановити першу точку з координатами X (0), Y (0), Z (0).
- Застосувати. ✓

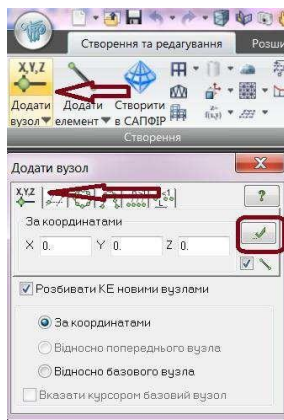


Рис.15. Діалогове вікно «Додати вузол»

За умовами прикладу, який розглядається (рис.15) наступні точки матимуть координати:

X (1000), Y (0), Z(0);

- З'єднати точки стрижнями.

Додати елемент → Додати стрижень → Застосувати (рис. 16)

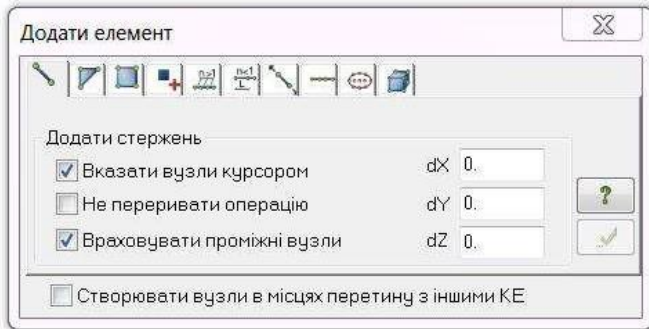


Рис.16. Діалогове вікно «Додати елемент»

Для прикладення закріплень та навантажень, поділимо балку на 10 ділянок, довжина кожної 100мм. Для цього виділяємо балку. Після виділення вона засвітиться червоним.

Створення та редагування → Створення → Додати елемент → Розділити на N рівних частин → N=10 - Застосувати

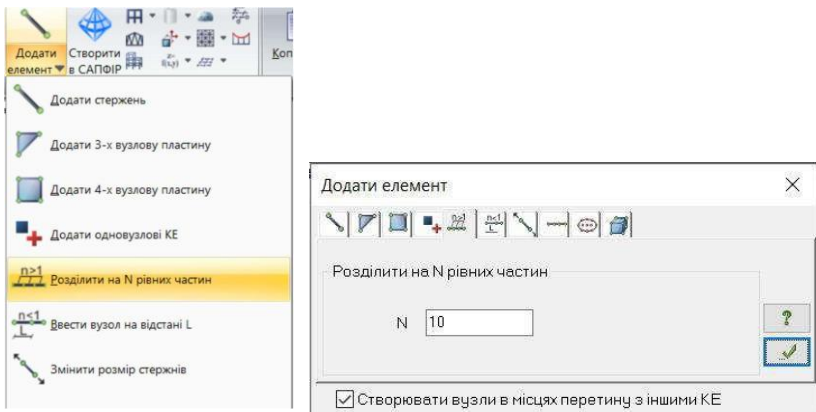






Рис.17. Розділення балки на 10 елементів

Для подальшої роботи потрібно перейти в площину XZ. Для цього на панелі інструментів обираємо , або диметрію .

Для більш зручної роботи необхідно проставити номери вузлів розрахункової схеми. Для цього на панелі інструментів внизу екрану натисніть кнопку **Параметри відображення** (прапори малювання) , у діалоговому вікні перейдіть на вкладку **Вузли**, встановіть прапорець **Номери вузлів** , натисніть кнопку **Перемалювати**. (Рис.17 та 18)

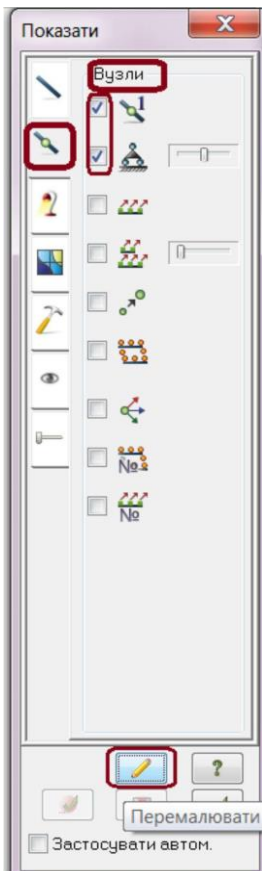


Рис.17 Діалогове вікно «Параметри відображення»

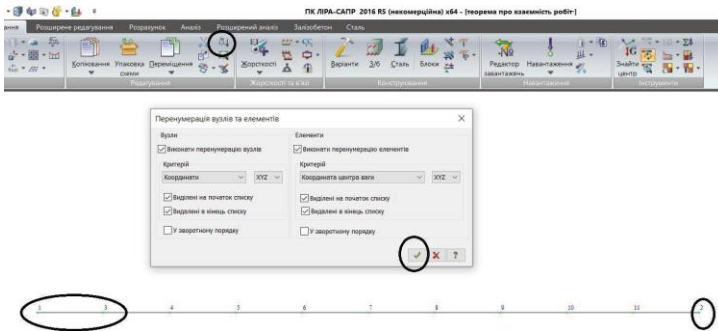


Рис.18. Перенумерація вузлів

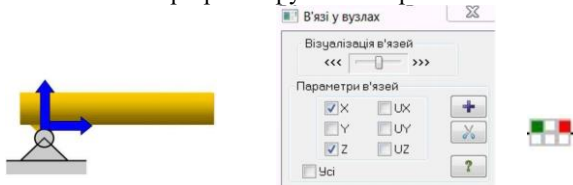
При побудові перший вузол був на початку балки. А другий – в кінці. Проміжні вузли мали нумерацію від 3 до 11. Для більшої зручності перенумеруємо вузли (рис.18).

Редагування → Перенумерувати вузли → Застосувати

4. Завдання граничних умов

Види використовуваних в роботі опор (кріплень) і опорних реакцій:

Шарнірно-нерухома опора



Шарнірно-рухома опора

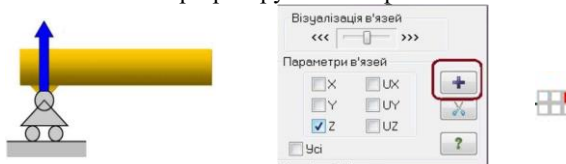



Рис.19. Задання граничних умов

Для виділення окремих вузлів натисніть на панелі інструментів кнопку **Відмітка вузлів** . Виділені вузли відобразяться червоним кольором. По черзі виділяючи вузли 4, 11 схеми.

Створення та редагування - В'язі – Застосувати (рис. 20).

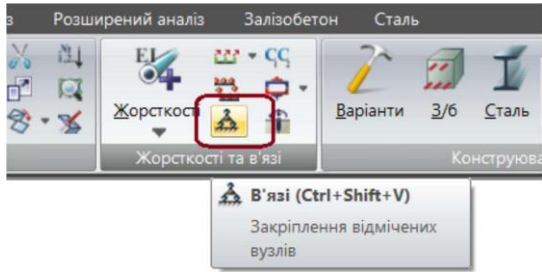


Рис.20. Закріплення відмічених вузлів

У діалоговому вікні **В'язі** у вузлах відзначте напрямки, за якими забороняються переміщення вузлів (X, Z, UY – для защемлення, X, Z – для шарнірно нерухомих опор, Z – для шарнірно рухомих опор) (див. рис.17).

5. Задання жорсткісних параметрів балки.

Для розрахунку необхідно поставити параметри жорсткості елементів. До цих параметрів відносяться: площі поперечних перерізів, моменти інерції перерізів, модулі пружності і зсуву.

Загальна схема завдання характеристик жорсткості така:

- вводяться числові дані характеристик жорсткості;
- кожному типу жорсткості присвоюється порядковий номер;
- один з типів жорсткості призначається поточним;
- на розрахунковій схемі позначаються елементи, яким буде присвоєна поточна жорсткість.

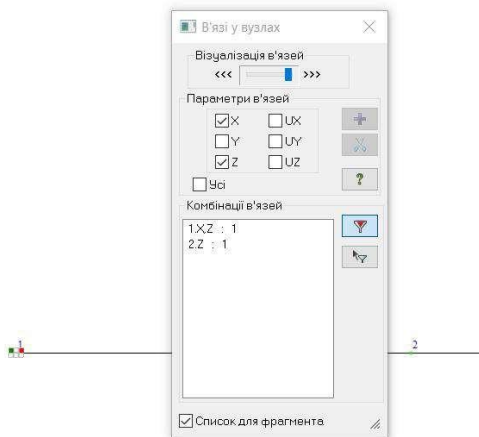


Рис.21. Діалогове вікно «В'язі»

Балка, яка розраховується має постійний переріз та однакову жорсткість.



На розрахунковій схемі потрібно виділити всі стрижні. Для цього на панелі інструментів обираємо **Відмітка елементів**  та виділяємо всю балку (рис. 21). Вона зафарбується у червоний колір.



Рис.22. Виділення елементів

Для задання жорсткості на панелі Створення та редагування оберіть вкладку **Жорсткості та матеріали елементів** Задання та призначення  (рис.23).

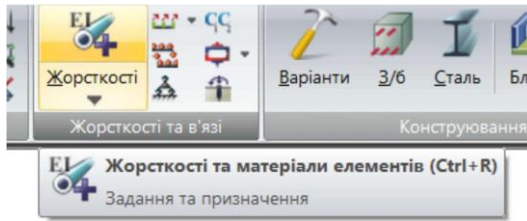


Рис.23. Діалогове вікно «Жорсткості та матеріали»

Діалогове вікно **Додати жорсткість** має три закладки графічного меню і надає доступ до бібліотеки характеристик жорсткості: стандартні типи перетинів, бази типових перетинів сталевого прокату і вікна для завдання параметрів пластин і об'ємних елементів, а також численних характеристик жорсткості параметрів, що відповідають деяким типам скінчених елементів.

По умовам задачі балка сталева з поперечним перерізом 40x7мм, $E=210000\text{МПа}$. Обираємо:

Жорсткості та матеріали → **Додати жорсткість**
→ **Стандартні типи перерізів** → **Брус** →
Задання стандартного перерізу →
Призначити поточним → **Застосувати**

Дивись (рис.24).

Після правильного призначення жорсткості знімається червоне виділення – це означає, що виділеним елементам присвоєно вибраний тип жорсткості. Стрижень повинен зафарбуватись в яскраво чорний колір.

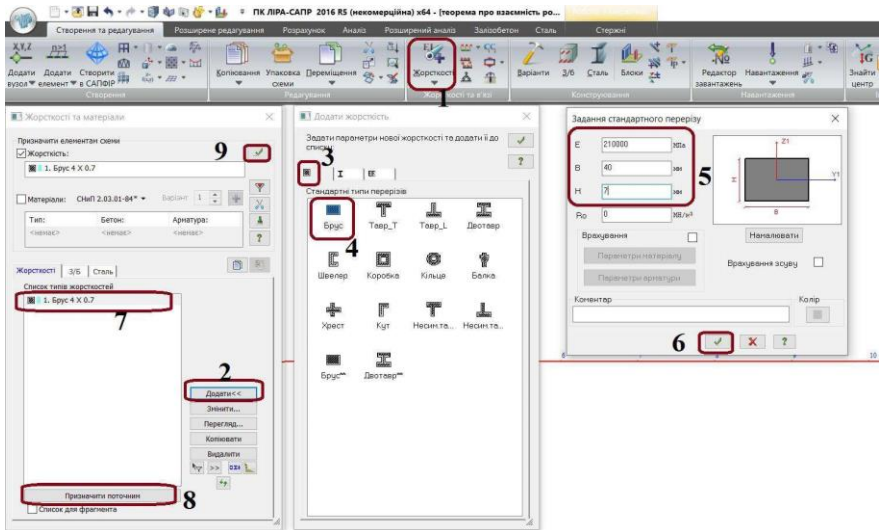


Рис.24. Задання жорсткості балки

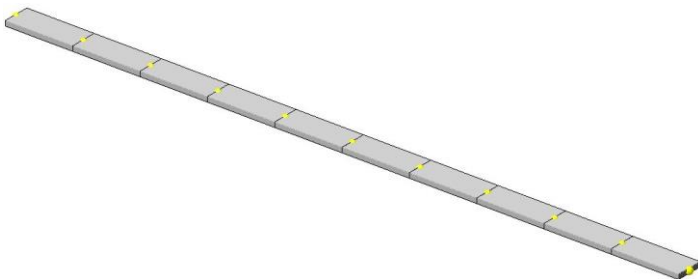


Рис.25. 3-D модель балки

6. Задання навантажень

Навантаження на вузли та елементи задаються за допомогою діалогового вікна **Задання навантажень**. Діалогове вікно містить закладки для завдання навантажень на вузли, стрижні, пластини, об'ємні елементи і суперелементи, а також для завдання навантажень для розрахунку на динаміку в часі.

У вікні містяться радіо-кнопки для завдання систем координат – глобальної (для елемента), локальної (для вузла) і напрямки впливу – X, Y, Z, а також кнопки для завдання статичного навантаження (коричневий колір), заданого зсуву (жовтий колір) і динамічного впливу (рожевий колір) –

меню цих кнопок змінюється в залежності від типу завантаженого скінченого елемента. При натисканні цих кнопок викликається діалогове вікно для завдання параметрів навантаження. Прикладені навантаження і впливи заносяться в поле списку навантажень – **Поточне навантаження**.

У нашій розрахунковій роботі навантаження мають тільки постійний характер, тому завдання різних завантажень проводитися не буде.

У діалоговому вікні **Задання навантажень** перейдіть на потрібну вкладку **Навантаження у вузлах** чи **Навантаження на стержні** (рис.26).

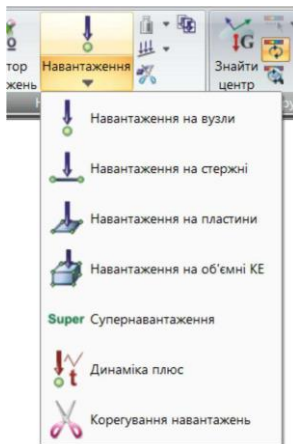


Рис.26. Діалогове вікно «Навантаження»

В нашому розрахунку для сил та моменту необхідно вибрати **Навантаження у вузлах**, а для розподіленого навантаження - **Навантаження на стержні**.

Теорема про взаємність робіт (теорема Бетті) для випадку навантаження пружного тіла двома силами формулюється так: робота першої сили на переміщенні точки її застосування, викликаному дією другої сили, дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її застосування, викликаному дією першої сили.

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21},$$

Згідно з завданням на дослідження спочатку на вузол 7 прикладається сила 30 Н, проводиться розрахунок, вимірюється переміщення в вузлі 1 (Δ_{12}).

Увага! В комплексі ЛІРА САПР вісь **X** показана зеленим кольором, вісь **Y** - синім кольором, а вісь **Z** - червоним.

Глобальна система координат **XYZ** - завжди права декартова – служить для опису координат вузлів всієї схеми, для визначення напрямку



ступенів свободи, ідентифікації переміщень вузлів. Розрахункова схема розташовується завжди в цій системі координат.

Загальне правило орієнтації місцевої системи координат для елементів з двома і більше вузлами таке: вісь **X1** спрямована від першого вузла до другого. Ця система координат необхідна для завдання орієнтації місцевого навантаження, напрямків головних осей інерції перерізу, зусиль і напружень, що виникають в елементі.

Додатне значення сили показано на схемі параметрів навантаження.

6.1. На панелі інструментів вибираємо відмітку вузлів

Виділяємо вузол 7. Він повинен стати червоним.

**Створення та редагування → Навантаження → Завдання навантажень →
→ навантаження у вузлах → Тип навантаження () →
→ Значення () → Застосувати ()** (рис.27).

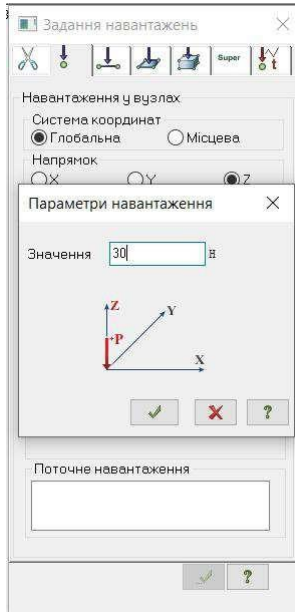


Рис.27. Навантаження. Сила

6.2. Власно Розрахунок.

Запустіть завдання на розрахунок за допомогою кнопки -або

Розрахунок → Виконати повний розрахунок (рис. 28).

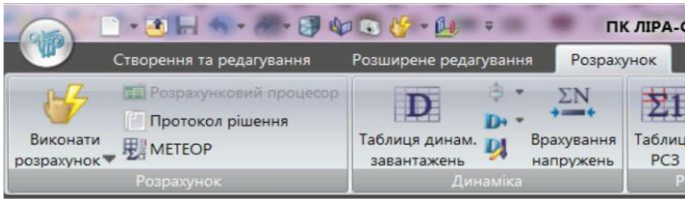


Рис.28. Виконати розрахунок

6.3. Аналіз результатів.

Після виконання розрахунку завдання перейдіть у вкладку **Аналіз** (рис. 29)

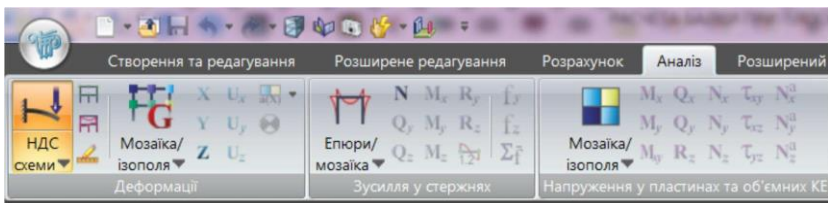



Рис.29. Вкладка «Аналіз»

У режимі перегляду результатів розрахунку за замовчуванням відображається деформована розрахункова схема. Для зняття відображення деформацій натисніть на Вихідна схема .

Можна подивитись на епюру переміщень (рис. 30).

Аналіз → Зусилля в стержнях - f_z → Значення на епюрах

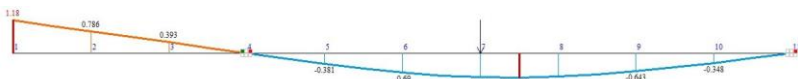
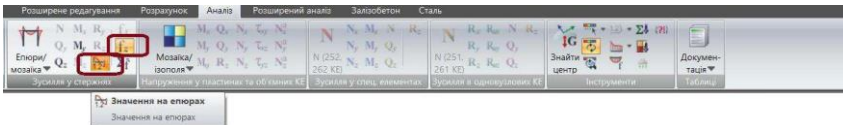


Рис.30. Вкладка «Аналіз»

Результат заносимо в таблицю.

6.4. Розвантаження балки.

Повертаємось на вкладку **Створення та редагування**. Розвантажуюємо балку (рис. 31).

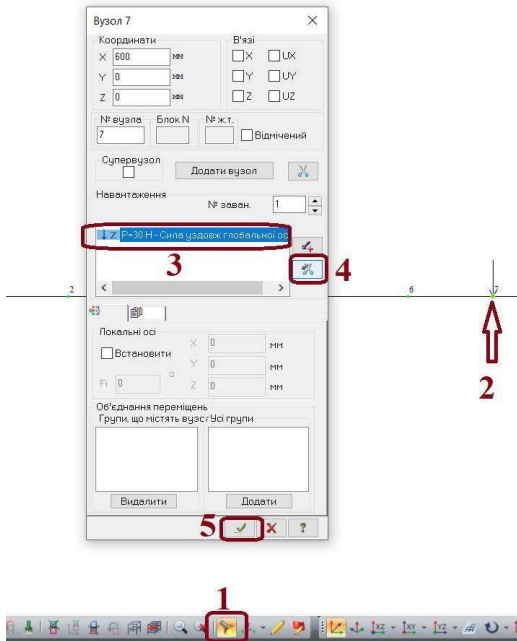


Рис.31. Розвантаження балки.

6.5. Відмічаєм вузол 1

Згідно з завданням на дослідження на вузол 1 прикладається сила 10 Н, проводиться розрахунок, вимірюється переміщення в вузлі 7(Δ_{21}). Відмічаєм вузол 1.

Створення та редагування → **Навантаження** →
Завдання навантажень → **навантаження у вузлах** →

Тип навантаження () → **Значення** →

→ **Застосувати** ()

Дивись рис. 32.

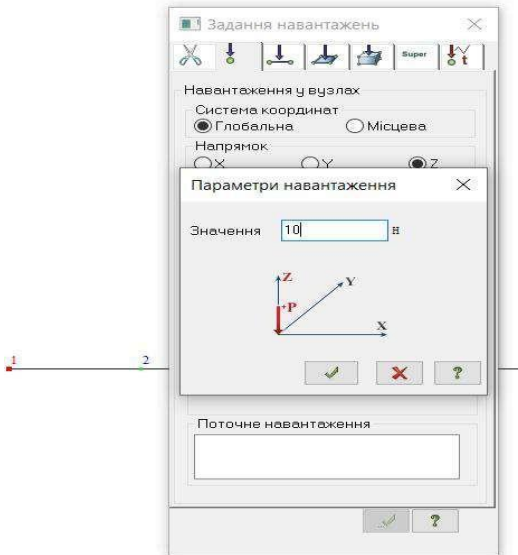


Рис.32. Прикладення нового зусилля

Повторюємо п.п. 6.2, 6.3 (Розрахунок. Аналіз результатів) Визначаємо переміщення в т.7 (рис. 33).

Аналіз → Зусилля в стержнях - f_z → Значення на епюрах

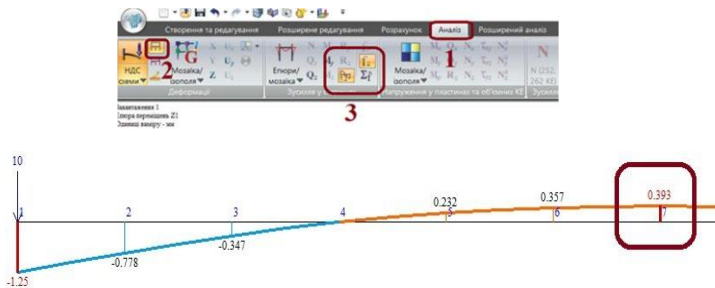


Рис.33. Переміщення точки 7

Результат заносимо в таблицю.

Формула, що виражає теорему Бетті, має такий вигляд:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$$

Підставляємо значення та проводимо обчислення. Результат заносимо

в таблицю.

Окремий випадок теореми про взаємність робіт - теорема про взаємність переміщень (теорема Максвелла): для двох одиничних станів пружної системи переміщення в напрямку першої узагальненої сили, що викликане другою узагальненою силою чисельно дорівнює переміщенню в напрямку другої узагальненої сили, що викликане дією першої узагальненою сили. Формула, що виражає цю теорему, має вигляд:

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}.$$

В натурній лабораторній роботі в точках 1 та 7 підвішується вантаж масою 1 кг. В нашій віртуальній лабораторній роботі прикладаємо силу 10Н, що приблизно відповідає масі 1 кг.

Результат переміщення точки 7 при дії сили $P=10\text{Н}$, яка прикладена в т.1 (Δ_{21}) визначили в п. 6.5 (рис. 33). Для підтвердження теореми Максвелла про взаємність переміщень необхідно прикласти силу $P=10\text{Н}$ в т.7 та обчислити переміщення точки 1. Для цього розвантажуюємо балку в точці 1 як рекомендовано в п. 6.4 (рис. 31) та завантажуюємо її силою в т.7. Для завантаження силою $P=10\text{Н}$ скористуємось тією ж панеллю



на рисунку 34.

Інформація про вузол або елемент → Додати навантаження на вузол →
→ Навантаження у вузлах → Значення **→ Засосувати**

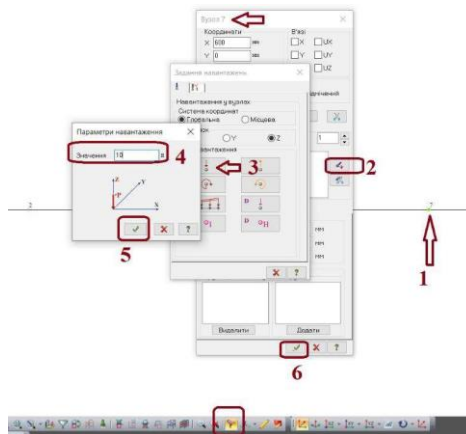


Рис.34. Задання навантаження в т.7

Повторюємо п.п. 6.2, 6.3 (Розрахунок. Аналіз результатів) Визначаємо переміщення в т.1 (рис. 35).

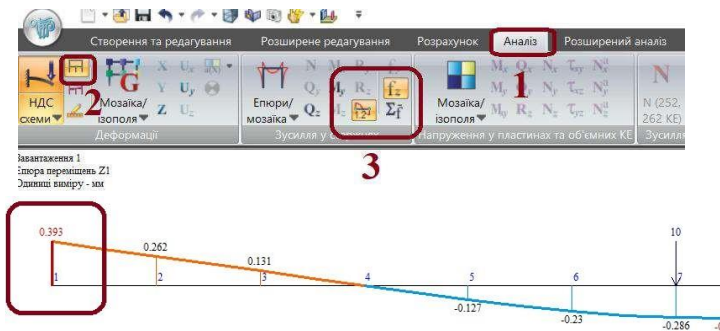


Рис.35. Переміщення т.1

Результат записуємо в таблицю та підставляємо в формулу.

Проводимо аналіз отриманих результатів.

✦ **Наприкінці виконання лабораторної роботи** необхідно проаналізувати отримані результати і зробити відповідні висновки.

Рекомендована література

1. **Опір матеріалів:** Підручник / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський; За ред. Г. С. Писаренка. – 2-ге вид., допов. і переробл. – К.: Вища шк. 2004. 655с.
2. **Опір матеріалів:** навчально-методичний посібник для здобувачів освіти першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної, заочної та дистанційної форм навчання; Держ. біотехн. ун-т; уклад. М. В. Сліпченко, О. І. Алфьоров, В. Б. Савченко, О. А. Свіргун. Харків: [б. в.], 2023. 152 с.
3. Довбуш Т. А. **Опір матеріалів:** навчальний посібник до виконання розрахунково-графічних робіт і самостійної роботи / Т. А. Довбуш, Н. І. Хомик, А. В. Бабій, Г. Б. Цьонь, А. Д. Довбуш. – Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2022. – 220 с.
4. Барабаш М. С. **Основи комп'ютерного моделювання** / М. С. Барабаш, П. М. Кір'язев, О. І. Лапенко, М. А. Ромашкіна // Навчальний посібник. – К.: НАУ, 2019. – 492 с.
5. **Механіка матеріалів і конструкцій.** Лабораторні роботи: Навчальний посібник для вузів / І.А. Цурпал, С.І. Пастушенко, М.П. Барабан, В.М. Швайко. – 3є вид. перероб. І допов. – К.: Аграрна освіта, 2001. – 272 с.

Навчальне видання

**ОПІР МАТЕРІАЛІВ.
ДОСЛІДНА ПЕРЕВІРКА ТЕОРЕМ
ПРО ВЗАЄМНІСТЬ РОБІТ
І ВЗАЄМНІСТЬ ПЕРЕМІЩЕНЬ**

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт
з дисциплін «Опір матеріалів»
та «Механіка матеріалів і конструкцій»

Автори-укладачі:

МАРЧЕНКО Михайло Валентинович
САВЧЕНКО Володимир Борисович
СВІРГУН Ольга Анатоліївна
ІВАНОВ Володимир Іванович

Формат 60×84 1/16. Гарнітура Times New Roman.
Папір для цифрового друку. Друк принтерний.
Умов. друк. арк. 1,2
Наклад 30 примірників.

Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44