МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний біотехнологічний університет
ФАКУЛЬТЕТ МЕХАТРОНІКИ ТА ІНЖИНІРИНГУ

Кафедра фізики і математики

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Основи теорії та методика розв'язування задач

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної форми навчання інженерних спеціальностей

Затверджено
Рішенням Вченої ради факультету
мехатроніки та інженіренгу ДБТУ
Протокол № 11 від 5.06.2024 р.

Харків
2024

УДК 512.64(076.2)
Л-59

Схвалено
на засіданні кафедри фізики і математики
Протокол № 7 від 18.01.2024 р.

Звичайні диференціальні рівняння: основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец. / О.І. Завгородній, О.В. Соловиченко Д.А. Левкін, Т.О. Сичова; Держ. біотехнол. ун-т.– Харків: ДБТУ, 2024. – 117 с.

У методичному посібнику розглянуті найрозповсюдженіші типи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку та лінійні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Дається допоміжна інформація про комплексні числа та системи диференціальних рівнянь. Для більш глибокого розуміння матеріалу і придбання практичних навичок розв’язку задач крім теоретичного матеріалу в кожному розділі показана достатня кількість розібраних прикладів, а також значна кількість ілюстрацій графічного характеру.

Розрахована на студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей.

Рецензенти:

А. О. Пак, доктор техн. наук, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету

О. А. Макаров, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Відповідальний за випуск О. І. Завгородній, д-р техн. наук., проф.

З М І С Т

СПИСОК СКОРОЧЕНИХ ПОЗНАЧЕНЬ

ДР – диференціальні рівняння;

ФСР – фундаментальна система розв'язків;

ХР – характеристичне рівняння;

$ЗР_{од}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння;

$ЧР_{нд}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння;

ЕРС – електрорушійна сила;

ККД – коефіцієнт корисної дії;

КЧ – комплексні числа

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні інженерна освіта практично в усіх галузях народного господарства не уявляється без вивчення диференціальних рівнянь, які є вкрай необхідними для майбутніх інженерів. Чимало задач фізики, механіки, техніки вирішено саме за рахунок диференціальних рівнянь. Тому оволодіння методами відповідного розділу математичного аналізу, уміння застосовувати ці рівняння в теоретичних і прикладних дослідженнях є досить важливим, а відповідна тематика міститься в тих розділах вищої математики, які є обов'язковими для вивчення студентами закладів вищої освіти технічних спеціальностей.

Метою посібника є надання студентам достатньо широкої інформації з обраного розділу "звичайні диференціальні рівняння", прививання навичок у складанні рівнянь при розв'язуванні різних класів задач, умінні розкривати вид диференціальних рівнянь, обирати раціональні підстановки при їх інтегруванні та орієнтуватися в структурі розв'язку лінійних однорідних та неоднорідних рівнянь, володінні методами невизначених коефіцієнтів та варіації довільних сталих.

У першому розділі розкриті поняття диференціального рівняння та їх розв'язку, приводяться приклади застосування диференціальних рівнянь в різних сферах діяльності людини.

У другому розділі розглянуто умови існування і єдиності розв'язку на основі теореми Коші. Вводяться поняття особливих точок та поняття особливих інтегральних кривих. Даються правила пошуку особливих розв'язків.

Третій розділ присвячено диференціальним рівнянням першого порядку. Розглянуто п'ять типів рівнянь: з відокремлюваними змінними; однорідне; лінійне, Бернуллі; в повних диференціалах та деякі супутні види, які зводяться до вказаних простими підстановками. Дається методика розв'язку рівнянь кожного типу з достатньою кількістю ілюстрацій, в тому числі прикладного направлення.

В четвертому розділі розглянуто три частинні види диференціальних рівнянь другого порядку, які допускають зниження порядку. Дається методика розв'язку цих рівнянь, яка розібрана на багатьох прикдадах.

П'ятий розділ присвячений множині комплексних чисел. Розглянуто комплексні числа в алгебраїчній, тригонометричній, показниковій формах та операції над ними. Достатня увага приділена операції добування кореня з комплексного числа, що має широке застосування в теорії лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У шостому розділі розглянуті лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Сформульовані теореми про структуру розв'язку лінійних однорідних та наоднорідних рівнянь. Дається схема знаходження частинного розв'язку неоднорідних рівнянь методом варіації довільних сталих Лагранжа. Детально розкриті питання про загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь та частинний розв'язок лінійних неоднорідних зі сталими коефіцієнтими за методом невизначених коефіцієнтів. Розглянуті також лінійні однорідні диференціальні рівняння вищих порядків зі сталими коефіцієнтами.

У сьомому розділі дається коротка інформація про системи диференціальних рівнянь. Обумовлюються існування та єдиність розв'язку систем на основі теореми Коші. Розглядаєтьтся інтегрування систем методом інтегровних комбінацій. Для систем лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами наводиться метод зведення системи до одного диференціального рівняня більш високого порядку. Вказані методи розв'язку проілюстровані прикладами.

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики і буде корисним для студентів денної і заочної форм навчання.

І. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ
ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ

Диференціальним рівнянням називається співвідношення, яке зв'язує між собою незалежні змінні, невідому функцію і її похідні або диференціали. У випадку, коли функція, що входить в ДР, залежить тільки від однієї змінної **ДР називають звичайним**. Якщо ж вказана функція залежить від двох або більшого числа змінних – його називають **ДР в частинних похідних**.

Звичайне ДР можна записати в такому виді:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{1.1}$$

Якщо рівняння (1.1) вдається розв'язати відносно старшої похідної, то воно матиме вигляд:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{1.2}$$

Найвищий порядок похідної, що входить в ДР називають порядком цього ДР.

Приклади звичайних ДР другого порядку:

$$y'' + xy^2 = \sin x;$$

$$y'' + y' \ln(x + y + 1) = \mathrm{e}^x;$$

$$y'' = 0.$$

П р и м і т к а. Якщо в алгебраїчних рівняннях обов'язково повинна бути записана шукана величина, то в записі ДР шукана функція $y(x)$ може бути відсутньою. Можуть також бути відсутніми нижчі похідні та аргумент, але старша похідна шуканої функції повинна бути обов'язково. Таким чином, вираз $y'' = 0$ є повноцінним ДР.

Приклад ДР в частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2}.$$

В математичній фізиці це співвідношення називають диференціальним рівнянням коливань струни.

Наведемо ще кілька прикладів застосування ДР в різних галузях знань.

В теорії механізмів і машин розглядається механічна система у вигляді канату, перекинутого через блок (рис.1). Активна сила P_2 перетягує канат, який утримується силою P_1. Співвідношення між силами в сталому режимі "поведінки" системи, коли прискорення відсутнє, задається наступним ДР:

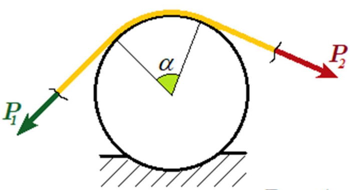


Рис.1

$$\frac{dP}{P} = f\,d\alpha, \tag{1.3}$$

де: f – коефіцієнт тертя ковзання канату по поверхні блоку;

α – кут охвату блока канатом.

Розв'язок ДР (1.3) – відома формула Ейлера ($P_2 = P_1 e^{\alpha f}$), яка є основою розрахунку ремінних передач.

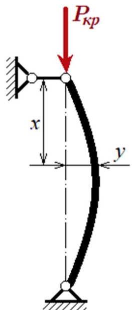


Рис.2

В опорі матеріалів досліджується стійкість стержня (рис.2). Стан стержня при діючому навантаженні описується таким ДР:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P_{\text{кр}}\,y}{J_z E}, \tag{1.4}$$

де: J_z – момент інерції поперечного перерізу стержня; E – модуль пружності матеріалу стержня.

За допомогою ДР (1.4) встановлюють максимально допустиме зусилля $P_{\text{кр}}$ при якому забезпечується стійкість стержня.

В теоретичній механіці досліджуються вимушені коливання пружної системи за допомогою наступного ДР:

$$m\ddot{x} = -Cx + B\sin\omega t, \tag{1.5}$$

Тут: m – маса коливної частини системи; C – жорсткість пружного елемента; $B\sin\omega t$ – змушуюча сила.

В розрахунках очисників отворів решіт зерноочисних машин використовується ДР процесу забивання отворів:

$$\frac{dn}{dt} = \lambda(N - n), \tag{1.6}$$

де: N – число отворів решета; n – число отворів, забитих частинками зернової суміші; λ – числовий коефіцієнт, пропорціональний швидкості забивання отворів при першому струшуванні решета.

Зміна сили струму при замиканні електричного ланцюга описується ДР, яке відповідає закону Ома:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}. \qquad (1.7)$$

Тут: I – сила струму; E – EPC; R – опір ланцюга; L – коефіцієнт самоіндукції.

В гідравліці для розрахунку ламінарного потоку рідини в прямій циліндричній трубі використовується таке ДР:

$$\frac{p_{\text{тр}}r}{2l}=-\mu\frac{d\upsilon}{dr}, \qquad (1.8)$$

де: $p_{\text{тр}}/l$ – стала (по довжині труби) величина; r – відстань від вісі труби до будь-якої точки її перерізу; υ – швидкість рідини у вибраній точці; μ – динамічний коефіцієнт в'язкості. Зокрема, за допомогою рівняння (1.8) встановлена форма епюри швидкостей рідини в перетині труби, якою виявилась квадратна парабола:

$$\upsilon=\frac{p_{\text{тр}}}{4\mu l}\left(r_0^2-r^2\right). \qquad (1.9)$$

В термодинаміці для вивчення течії газу в каналі, як ізоентропного процесу, застосовують наступне ДР:

$$\frac{d\Sigma}{\Sigma}=\frac{1}{kp}\left(\frac{1}{M^2}-1\right)dp, \qquad (1.10)$$

де: Σ – площа перерізу каналу; k – показник ізоентропи; p – тиск газу; M – число Маха. Це рівняння дало можливість знайти параметри сопла з підвищеним ККД – сопла Лаваля.

Цей перелік прикладів можна продовжувати необмежено, так як ДР здатні описувати безліч складних процесів різної природи, що робить їх досить популярними в теорії і практиці. Розв'язуючи ДР, замість диференціального одержують бажаний прямий зв'язок між параметрами досліджуваного процесу.

Розв'язком ДР n-го порядку на інтервалі (a,b) називається будь-яка функція $y=\varphi(x)$, що має похідні до n-ї включно і підстановка якої в ДР перетворює його в тотожність по x на (a,b).

Процес знаходження розв'язку ДР називається **інтегруванням** цього ДР.

Графік розв'язку ДР ($y=\varphi(x)$) називається **інтегральною кривою**.

Розглянемо складання ДР і його розв'язування на простому прикладі. Металева кулька з висоти h підкинута вгору з початковою швидкістю V. Знайти рівняння руху кульки після підкидання. Опором повітря знехтувати.

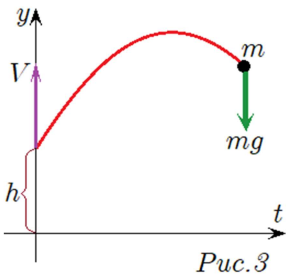


Рис.3

Так як опір повітря відсутній, в польоті на кульку діє лише сила ваги mg (рис.3). Тоді за другим законом Ньютона:

$$m\ddot{y}=-mg, \tag{1.11}$$

де g – прискорення вільного падіння. Нагадаємо, що в механіці для позначення похідних за часом прийнята точка. Отже, $\ddot{y}$ це друга похідна від шляху кульки за часом, а другий закон Ньютона є диференціальним рівнянням другого порядку.

Виконаємо спрощення рівняння (1.11) і його очевидні перетворення:

$$\ddot{y}=-g \Rightarrow \frac{d\dot{y}}{dt}=-g \Rightarrow d\dot{y}=-gdt \Rightarrow \int d\dot{y}=-g\int dt.$$

Після інтегрування одержимо:

$$\boxed{\dot{y}=-gt+C_1.} \tag{1.12}$$

Аналогічно продовжимо:

$$\dot{y}=\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt}=-gt+C_1 \Rightarrow dy=\left(-gt+C_1\right)dt \Rightarrow \int dy=\int\left(-gt+C_1\right)dt$$

Після інтегрування:

$$\boxed{y=-\frac{gt^2}{2}+C_1t+C_2} \tag{1.13}$$

В одержаних виразах (1.12), (1.13) містяться довільні сталі інтегрування C_1, C_2. Їх можна знайти з допоміжних умов задачі:

$$y = h, \quad \dot{y} = V \quad \text{при} \quad t = 0. \tag{1.14}$$

Підставляючи умови (1.14) в рівняння (1.12) і (1.13) дістанемо: $C_1 = V$, $C_2 = h$. З врахуванням значень довільних сталих рівняння руху кульки запишуться у вигляді:

$$\boxed{\dot{y} = -gt + V, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + Vt + h.} \tag{1.15}$$

За цими рівняннями можна знаходити положення та швидкість руху кульки в будь-який момент часу. Отже, поставлена задача вирішена. Як бачимо, вона полягала в розв'язанні ДР (1.11).

П р и м і т к а. В цьому прикладі розв'язування ДР велось за рахунок інтегрування. Взагалі, процес переходу від старшої похідної до нижчої ототожнюється з інтегруванням. Тому і розв'язування будь-якого ДР називають інтегруванням цього ДР. Ця назва зберігається також і для тих ДР, розв'язок яких не потребує безпосередньо процесу інтегрування.

Співвідношення (1.14) називаються початковими умовами. В загальному виді для ДР другого порядку їх записують

$$\left[\begin{array}{l} \text{або так } \; y = y_0, \; y' = y_0' \; \text{ при } \; x = x_0, \\ \text{або так } \; y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \\ \text{або так } \; y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0'. \end{array}\right. \tag{1.16}$$

Функції (1.13) та (1.15) є розв'язками ДР (1.11) так як підстановка і одної, і другої функції в ДР (1.11) перетворює його в тотожність. Але ці функції мають суттєві відмінності: перша з них включає довільні сталі C_1, C_2, тоді як у другій вони відсутні. Це спонукає враховувати названі особливості у визначенні розв'язку.

Загальним розв'язком ДР n-го порядку в деякій області D називають розв'язок, який залежить від сталих інтегрування.

При цьому для будь-яких початкових умов, які відповідають області D, знайдуться такі значення сталих інтегрування, що ці початкові умови будуть задовольнятися.

Таким чином, результат (1.13) є загальним розв'язком ДР (1.11).

Частинним розв'язком ДР n-го порядку в деякій області D називають розв'язок, який одержаний із загального, заміною сталих інтегрування числовими значеннями (включаючи $\pm\infty$).

Результат (1.15) – частинний розв'язок ДР (1.11).

Якщо розв'язок ДР n-го порядку одержано в неявному виді $\boldsymbol{\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0}$ чи $\boldsymbol{\Phi(x, y) = 0}$, то його називають, відповідно, загальним чи частинним **інтегралом** заданого ДР.

II. УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ РОЗ'ЯЗКУ ДР ТЕОРЕМА КОШІ

Задача пошуку розв'язку ДР, що задовольняє початковим умовам називається **задачею Коші**. На відміну від задачі Коші розв'язується також задача, в якій для визначення сталих інтегрування задаються умови не в одній, а в двох чи більше точках. Така задача інтегрування ДР називається **краєвою**.

Відмітимо, що краєві задачі часто мають кілька розв'язків, або, взагалі, не мають розв'язків. Цілком природно виникає також питання про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Відповідь на ці питання дає теорема Коші. Наведемо її спочатку для ДР другого порядку:

$$y'' = f(x, y, y'), \ \ y(x_0) = y_0, \ \ y'(x_0) = y'_0. \tag{2.1}$$

<u>Теорема Коші для ДР другого порядку.</u> Якщо функція $f(x, y, y')$ (права частина ДР (2.1)) неперервна в деякій області D простору її аргументів x, y, y' і має в цій області обмежені частинні похідні f'_y, $f'_{y'}$ по y та по y', то кожній внутрішній точці $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ області D відповідає єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР (2.1), який задовольняє початковим умовам: $\varphi''(x) \equiv f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$; $\varphi(x_0) = y_0$; $\varphi'(x_0) = y'_0$.

Слід відмітити, що теорема Коші дає лише достатні умови існування і єдиності розв'язку ДР, тобто ці умови не є необхідними. Це значить, що не виключаються випадки, коли єдиний розв'язок ДР буде існувати навіть при порушенні умов теореми Коші (про обмеженість похідних). Навпаки, виконання цих умов повністю гарантує існування єдиного розв'язку.

В загальному виді розв'язок ДР другого порядку можна записати так:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \qquad (2.2)$$

Цей розв'язок включає два параметри – довільні сталі C_1, C_2. При фіксованому значенні x_0 за параметри можна прийняти величини y_0 y'_0. Таким чином, розв'язок ДР відображається двохпараметричним сімейством інтегральних кривих (рис.4). При розв'язку задачі Коші довільним сталим надаються значення, які знаходяться із системи:

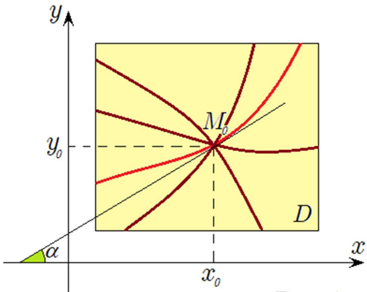


Рис.4

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2); \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases} \qquad (2.3)$$

Геометрично це означає, що з усієї множини інтегральних кривих з області D вибирається та, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має дотичну в цій точці, нахилену до вісі абсцис під кутом α ($\operatorname{tg}\alpha = y'_0$). На рисунку ця лінія виділена червоним кольором.

Розглянемо тепер задачу Коші для ДР першого порядку:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \qquad (2.4)$$

<u>Теорема Коші для ДР першого порядку.</u> Якщо функція $f(x, y)$ (права частина ДР (2.4)) неперервна в деякій замкнутій області D площини xOy і має в цій області обмежену частинну похідну f'_y по y, то кожній внутрішній точці $M_0(x_0, y_0)$ області D відповідає єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ ДР (2.4), який задовольняє початковим умовам: $\varphi'(x) \equiv f\big(x, \varphi(x)\big)$; $\varphi(x_0) = y_0$.

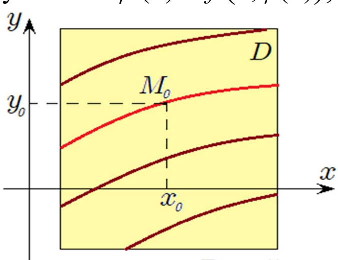


Рис.5

Загальний розв'язок ДР (2.4) включає одну довільну сталу

$$y = \varphi(x, C) \qquad (2.5)$$

тому графічно він відображається однопараметричним сімейством інтегральних кривих (рис.5).

При розв'язку задачі Коші сталій C надається значення, яке знаходиться з використанням початкових умов (2.4):

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{2.6}$$

Отже, з усіх інтегральних кривих вибирається та, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ – червона лінія на рис.5.

Розглянемо більш детальніше випадки коли порушуються умови теореми Коші.

Точки, в яких порушуються умови теореми Коші називають **особливими**.

Якщо умови теореми Коші порушені вздовж деякої кривої, що є інтегральною, то ця лінія називається **особливою інтегральною кривою**, а відповідний розв'язок – **особливим розв'язком ДР**.

Особливий розв'язок не може бути одержаний із загального при жодних значеннях довільних сталих (включаючи $\pm\infty$)!

З теореми Коші витікають лише необхідні умови для пошуку особливих розв'язків. Множина точок де похідна f'_y необмежена може і не бути особливим розв'язком або ж взагалі – не бути розв'язком ДР. Переконатися у наявності особливих розв'язків можна за такою послідовністю.

Правила пошуку особливих розв'язків:

1) *знайти множину точок де f'_y перетворюється в нескінченність;*
2) *підстановкою в задане ДР перевірити, чи є знайдені криві інтегральними;*
3) *якщо це інтегральні криві, то перевірити, чи не витікають вони з загального розв'язку ДР (тобто, чи не порушується в кожній точці властивість єдиності розв'язку).*

При дотриманні всіх трьох правил знайдені криві – особливі.

Для ДР другого порядку правила пошуку особливих розв'язків ті ж самі, але вони доповнюються дослідженням похідної $f'_{y'}$ на обмеженість. Слід також підкреслити, **що розв'язати ДР значить знайти всі його розв'язки, в тому числі і особливі**.

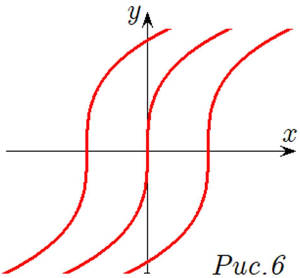


Рис.6

Нехай, наприклад, задано таке ДР: $y' = \dfrac{1}{y^2}$. Маємо:

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2} \Rightarrow f'_y(x,y) = -\frac{2}{y^3}.$$

$$\lim_{y\to 0} f'_y(x,y) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{2}{y^3}\right) = \infty.$$

Умови теореми Коші порушуються на лінії $y=0$, але вона не є інтегральною (не задовольняє задане ДР). Можна також пересвідчитись, що ця лінія не витікає із загального розв'язку $y = \sqrt[3]{3(x+C)}$ при жодному значенні сталої C, а через кожну точку вісі абсцис проходить лише одна інтегральна крива (рис.6). Отже, задане ДР особливих розв'язків не має.

Проведемо ті ж дослідження для наступного ДР: $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$.

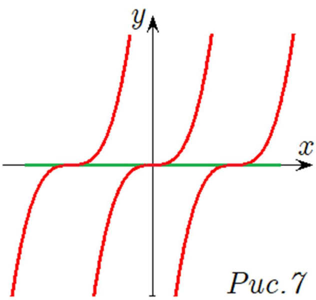


Рис.7

$$f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'_y(x,y) = 2y^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}.$$

$$\lim_{y\to 0} f'_y(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{y}} = \infty.$$

Умови теореми Коші порушуються на лінії $y=0$, де похідна f'_y необмежена. Ця лінія є інтегральною для заданого ДР (підстановка $y=0,\ y'=0$ перетворює його на тотожність). При цьому вираз $y=0$ не може бути одержаний при жодному значенні сталої C із загального розв'язку $y=(x+C)^3$. Отже, одержана функція є особливим розв'язком, в результаті чого через кожну точку вісі абсцис проходять дві інтегральні криві (червона та зелена на рис.7).

III. ДЕЯКІ ВИДИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Вище було з'ясовано, що звичайні ДР відрізняються між собою їх порядком. Але в межах одного й того ж порядку ДР можуть відрізнятися видом, кожний з яких розпізнається за певними особистими ознаками. В цьому розділі розглянемо кілька видів ДР першого порядку, які є основними і до яких зводяться багато інших ДР введенням спеціальних підстановок.

3.1. ДР з відокремлюваними змінними

Так називають ДР, які можна записати у вигляді:

$$y' = f(x)\varphi(y) \tag{3.1}$$

або

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx = f_2(x)\varphi_2(y)dy. \tag{3.2}$$

Передбачається, що функції f і φ неперервні в деякій області D площини xOy.

Основною ознакою ДР з відокремлюваними змінними є те, що коефіцієнти при диференціалах (3.2) чи права частина ДР (3.1) розпадаються на множники, одні з яких залежать тільки від x, а другі – тільки від y.

Нехай $\varphi_1(y) \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$ в області D. Тоді, поділивши рівняння (3.2) на добуток $\varphi_1(y)f_2(x)$, одержимо:

$$\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx. \tag{3.3}$$

З рівності диференціалів витікає, що самі функції відрізняються між собою лише на сталу величину. Інтегруючи рівність (3.3), одержимо загальний інтеграл ДР (3.2):

$$\int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = \int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + C. \tag{3.4}$$

Для ДР (3.1) при $\varphi(y) \neq 0$ слід виконати аналогічні перетворення:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \Rightarrow \frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + C. \tag{3.5}$$

П р и м і т к а. Ділячи на $\varphi_1(y)f_2(x)$ чи на $\varphi(y)$, можна загубити деякі розв'язки заданого рівняння. Наприклад, якщо $y = y_1$, $y = y_2, \ldots, y = y_n$ – корені рівняння $\varphi_1(y) = 0$, а $x = x_1$, $x = x_2$, $\ldots, x = x_k$ – корені рівняння $f_2(x) = 0$, то вони можуть виявитися особливими розв'язками (звичайно, якщо вони не будуть наслідками загального розв'язку). Таким чином, особливі розв'язки можуть з'явитися серед загублених в процесі перетворення ДР, що слід враховувати при їх інтегруванні.

Приклад 1. Виконати інтегрування ДР:

$$\left(x - y^2 x\right)dx + \left(y - x^2 y\right)dy = 0.$$

Виконаємо перетворення заданого ДР до виду, зручного для інтегрування.

$$x\left(1 - y^2\right)dx + y\left(1 - x^2\right)dy = 0.$$

Поділимо рівняння на вираз $\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$:

$$\frac{xdx}{1 - x^2} + \frac{ydy}{1 - y^2} = 0.$$

Помножимо цей вираз на "–2" і виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{-2xdx}{1 - x^2} + \int \frac{-2ydy}{1 - y^2} = 0.$$

Одержано табличні інтеграли, які мають вид логарифмічних функцій. В цьому випадку сталу інтегрування зручно прийняти у виді "$\ln C$", щоб скористатися властивостями логарифмів:

$$\ln\left(1 - x^2\right) + \ln\left(1 - y^2\right) = \ln C \;\Rightarrow\; \ln\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right) = \ln C.$$

Звідси знаходимо загальний інтеграл заданого ДР:

$$\boxed{\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right) = C.}$$

Коренями виразу $\left(1 - x^2\right)\left(1 - y^2\right)$, на який розділено ДР, є значення $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Враховуючи, що відповідні диференціали при сталих значеннях змінних дорівнюють нулю ($dx = 0$, $dy = 0$), наведені значення перетворюють задане ДР в тотожність, тобто вони є розв'язками цього ДР. Але легко зрозуміти, що ці розв'язки – частинні випадки загального при $C = 0$. Отже особливих розв'язків задане ДР не має.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші: $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}, \quad y(0) = 1.$

Виконаємо спочатку відокремлення змінних.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Табличне інтегрування одержаного виразу дає:

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C.$$

Знаходимо значення сталої з початкових умов:

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} 0 + C \Rightarrow C = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4.$$

Отже, розв'язком задачі Коші буде:

$$\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \pi/4.$$

Цей результат можна записати в спрощеному виді, а саме:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \pi/4) \Rightarrow y = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) + \operatorname{tg}(\pi/4)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\operatorname{tg}(\pi/4)} = \frac{x+1}{1-x}.$$

Остаточно будемо мати:

$$\boxed{y = \frac{1+x}{1-x}.}$$

Приклад 3. Знайти форму поверхні рідини у вертикальній циліндричній посудині при її рівномірному обертанні навколо осі.

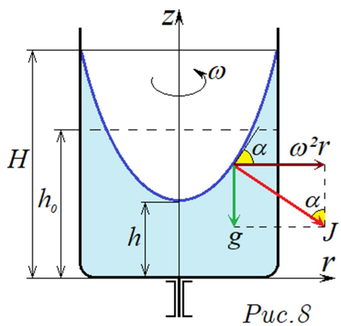


Рис.8

Кінематична схема обертання посудини показана на рисунку, де введені такі позначення:

ω – кутова швидкість обертання;

g – прискорення вільного падіння;

h_0 – початковий рівень рідини;

h, H – найнижчий та найвищий рівень рідини в посудині;

α – кут нахилу дотичної до поверхні рідини у вибраній точці; r – відстань від осі обертання до поверхні рідини (якщо R – радіус циліндра, то $0 \le r \le R$); rOz – відносна система координат, вісь Oz якої співпадає з віссю обертання.

При рівномірному обертанні на рідину діють дві масові сили: сила ваги і відцентрова сила, які, будучи віднесені до одиниці маси, приймають значення g та $\omega^2 r$ (рис.8). За цих умов вільна поверхня рідини вже не буде плоскою і прийме вид деякої кривої (рис. 8). Результуюча масова сила J в сталому режимі руху буде розташована нормально до цієї кривої, що дає можливість записати:

$$g\,\mathrm{tg}\,\alpha = \omega^2 r.$$

Врахуємо тепер, що α – кут нахилу дотичної до кривої:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r \;\Rightarrow\; dz = \frac{\omega^2}{g} r\,dr.$$

Одержано ДР з розділеними змінними, інтегрування якого дає:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + C.$$

Для визначення сталої маємо початкові умови $z(0) = h,$ які зрозумілі з рисунка. Очевидно, що $C = h$ і тоді:

$$z = \frac{\omega^2 r^2}{2g} + h.$$

Отже, в осьовому перетині поверхні рідини виявилась квадратна парабола, а сама поверхня, очевидно, має форму параболоїда обертання.

Для знаходження найнижчого h та найвищого H рівня прирівняємо об'єм рідини при нерухомій посудині $\pi R^2 h_0$ та об'єм рідини, обмеженої параболоїдом:

$$V = 2\pi\int_0^R r\,z\,dr = 2\pi\int_0^R r\left(h + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right)dr = 2\pi\left(h\frac{r^2}{2} + \frac{\omega^2}{2g}\cdot\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^R =$$

$$= \pi\left(hR^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g}\right).$$

$$\pi R^2 h_0 = \pi\left(hR^2 + \frac{\omega^2 R^4}{4g}\right) \;\Rightarrow\; h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

$$H = z(R) = h + \frac{\omega^2 R^2}{2g} = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g} + \frac{\omega^2 R^2}{2g} = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Зрозуміло, що для утворення поверхні у формі параболоїда необхідна певна кількість рідини, тому для рівня h маємо обмеження $h \ge 0$ або $h_0 \ge \omega^2 R^2 / (4g)$. Таким чином, одержано наступні результати:

$$\boxed{\begin{aligned}&z = h_0 - \frac{\omega^2}{4g}\left(2r^2 - R^2\right);\\ &h = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g}; \quad H = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \quad \text{при} \quad h_0 \ge \frac{\omega^2 R^2}{4g}.\end{aligned}}$$

Підкреслимо, що, розглянуте в цьому розділі, ДР з відокремлюваними змінними має ту особливість, що до нього зводяться інші види ДР першого порядку, завдяки чому з'являється можливість їх інтегрування.

Розглянемо далі таке рівняння:

$$y' = f(ax + by + c), \tag{3.6}$$

де $a, b, c \in \mathbb{R}$, $f -$ неперервна функція свого аргумента.

Воно зводиться до ДР з відокремлюваними змінними наступною підстановкою:

$$ax + by + c = z. \tag{3.7}$$

Дійсно, з рівняння (3.6) маємо:

$$y' = f(z), \tag{3.8}$$

а після диференціювання виразу (3.7) і врахування (3.8) дістанемо:

$$\frac{dz}{dx} = a + by' \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + bf(z) \Rightarrow \frac{dz}{a + bf(z)} = dx. \tag{3.9}$$

Як бачимо, змінні розділилися. Далі слід виконати інтегрування одержаного ДР і знову повернутися до змінної y за допомогою тієї ж підстановки (3.7).

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ДР: $y' = (x+y)^2$.

Введемо позначення:

$z = x + y.$

Тоді:

$$y' = z^2; \quad \frac{dz}{dx} = 1 + y' \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 + z^2 \Rightarrow \frac{dz}{1+z^2} = dx.$$

Одержано ДР з відокремленими змінними. Виконуємо його інтегрування:

$$\int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx \Rightarrow \operatorname{arctg} z = x + C \Rightarrow z = \operatorname{tg}(x+C).$$

Підставивши сюди $x+y$ замість z, прийдемо до розв'язку:

$$\boxed{y = \operatorname{tg}(x+C) - x.}$$

3.2. Однорідне ДР першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається **однорідним**, якщо воно має вид:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3.10}$$

тобто, **якщо його правою частиною є функція тільки відношення y/x.**

Це рівняння приводиться до ДР з відокремлюваними змінними підстановкою

$$\boxed{\frac{y}{x} = u, \quad y = ux, \quad y' = u'x + u,} \tag{3.11}$$

застосування якої дає:

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування одержаного ДР до змінної y повертаються шляхом заміни u відношенням y/x.

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку може бути записане також у вигляді:

$$M(x, y)dy = N(x, y)dx, \tag{3.12}$$

де **коефіцієнти $M(x, y), N(x, y)$ – однорідні функції однакового степеня.**

Функція $f(x,y)$ називається **однорідною κ-го степеня однорідності** відносно x і y, якщо при будь-яких допустимих значеннях t виконується умова:

$$f(tx,ty) = t^{\kappa} f(x,y). \tag{3.13}$$

Нехай $M(tx,ty) = t^{\kappa} M(x,y), \quad N(tx,ty) = t^{\kappa} N(x,y)$. Тоді із ДР (3.12) витікає:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N(x,y)}{M(x,y)} = \frac{t^{\kappa} N(x,y)}{t^{\kappa} M(x,y)} = \frac{N(tx,ty)}{M(tx,ty)}. \tag{3.14}$$

Припустивши, що $t = 1/x$, з попереднього виразу одержимо:

$$y' = \frac{N\left(1, \frac{y}{x}\right)}{M\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.15}$$

Таким чином, за умови, що коефіцієнти $M(x,y), N(x,y)$ – однорідні функції однакового степеня, ДР (3.12) є однорідним, так як в цьому випадку воно приводиться до виду (3.10).

З цього одночасно витікає, що розв'язати ДР (3.12) можна шляхом приведення його до виду (3.10) і застосування після цього підстановки (3.11). Але для спрощення перетворень можна рекомендувати вводити підстановку (3.11) безпосередньо в ДР (3.12) попередньо замінивши в ній похідну y' диференціалом:

$$\boxed{\frac{y}{x} = u; \quad y = ux; \quad dy = xdu + udx.} \tag{3.16}$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок ДР: $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}$.

Маємо однорідне ДР виду (3.10). Введемо підстановку (3.11):

$u'x + u = u + \sin u.$

Розділяємо змінні:

$$\frac{du}{dx}x = \sin u \;\Rightarrow\; \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$$

При інтегруванні довільну сталу приймемо у формі $\ln C$:

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln|x| + \ln C \;\Rightarrow\; \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| = \ln Cx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; u = 2\operatorname{arctg} Cx.$$

Звідси:

$$\boxed{y = 2x\operatorname{arctg} Cx.}$$

При діленні на x та $\sin u$ могли бути втрачені розв'язки $x = 0$ та $\sin u = 0$. Перший з них не є розв'язком заданого ДР, а другий перепишемо у вигляді:

$$u = 2\pi k \;\Rightarrow\; y = 2\pi kx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Цей вираз задовольняє задане ДР, але він є наслідком знайденого загального розв'язку при $C = 0$ тобто, особливі розв'язки тут відсутні.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші: $(\ln y - \ln x)xdy = ydx, \quad y(1) = \mathrm{e}.$

Перепишемо задане ДР таким чином:

$$\ln\frac{y}{x}dy = \frac{y}{x}dx.$$

Коефіцієнти при диференціалах – однорідні функції нульового степеня однорідності, отже, маємо однорідне ДР першого порядку. Застосуємо до нього підстановку (3.16):

$$\ln u(udx + xdu) = udx.$$

Для розділення змінних виконаємо очевидні перетворення:

$$(\ln u - 1)udx + x\ln u du = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} + \frac{\ln u}{u(\ln u - 1)} = 0.$$

Приведемо другий доданок до виду, зручного для інтегрування:

$$\frac{\ln u}{u(\ln u - 1)} = \frac{1 + (\ln u - 1)}{u(\ln u - 1)} = \frac{1}{u(\ln u - 1)} + \frac{1}{u}.$$

Тепер всі інтеграли будуть табличними:

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(\ln u - 1)}{\ln u - 1} + \int \frac{du}{u} \Rightarrow \ln|x| + \ln|\ln u - 1| + \ln|u| = \ln C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xu(\ln u - 1) = C.$$

З урахуванням виразу (3.16) загальний розв'язок заданого ДР прийме вигляд:

$$\boxed{y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = C.}$$

Для знаходження сталої інтегрування використаємо початкові умови $(y = \mathrm{e} \text{ при } x = 1)$:

$$\mathrm{e}(\ln \mathrm{e} - 1) = C \Rightarrow C = 0.$$

Враховуємо це значення:

$$y\left(\ln\frac{y}{x} - 1\right) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ \ln\dfrac{y}{x} = 1, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = \mathrm{e}x. \end{array}\right.$$

Так як $x > 0$, $y > 0$, то залишається лише один розв'язок задачі Коші: $\boxed{\boxed{y = \mathrm{e}x.}}$

Перевіримо можливу втрату розв'язків з-за ділення на $u(\ln u - 1)$.
$u = 0 \Rightarrow y/x = 0 \Rightarrow y = 0$ – не є розв'язком.
$\ln u - 1 = 0 \Rightarrow \ln(y/x) = 1 \Rightarrow y = \mathrm{e}x$ – витікає з загального розв'язку при $C = 0$ (співпадає з розв'язком задачі Коші).

Таким чином, особливих розв'язків задане ДР не має.

Приклад 7. Знайти криву, яка проходить через точку $A(1;1)$ і відстань між дотичною до якої в будь-якій точці та початком координат дорівнює абсцисі точки дотику.

До розв'язку задачі застосуємо відомі залежності:

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної до кривої в точці $P_0(x_0; y_0)$;

$d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ – відстань від точки $P_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$.

Приймемо для координат шуканої кривої позначення $x, y,$ а для дотичної – $X, Y.$ Тоді рівняння дотичної до шуканої кривої в будь-якій точці $M(x, y)$ набуде вигляду:

$Y - y = y'(X - x)$ або $-y'X + Y + y'x - y = 0,$ де $A = -y',\ B = 1.$

Відстань між дотичною і початком координат ($X_0 = 0,\ Y_0 = 0$) можна підрахувати за формулою:

$$d = \frac{\left|-y'X_0 + Y_0 + y'x - y\right|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = \frac{\left|y'x - y\right|}{\sqrt{(y')^2 + 1}}.$$

За умовою задачі ця відстань дорівнює $x.$ Звідси маємо:

$$\frac{\left|y'x - y\right|}{\sqrt{(y')^2 + 1}} = x \Rightarrow x\sqrt{y'^2 + 1} = \left|y'x - y\right| \Rightarrow x^2 y'^2 + x^2 =$$

$$x^2 y'^2 - 2xyy' + y^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right).$$

Одержане ДР – однорідне першого порядку. Застосуємо до нього підстановку (3.11):

$$u'x + u = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right) \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{u^2 - 1}{2u} - u \Rightarrow \frac{du}{dx}x = -\frac{u^2 + 1}{2u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(u^2 + 1) = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(u^2 + 1) = \ln\frac{C}{x} \Rightarrow u^2 + 1 = \frac{C}{x}.$$

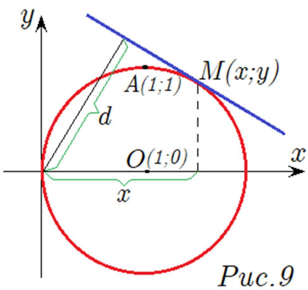


Рис.9

Зворотна підстановка дає:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x} \Rightarrow x^2 + y^2 = Cx.$$

Крива проходить через точку $A(1;1),$ тому:

$1 + 1 = C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow$

$x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{(x-1)^2 + y^2 = 1}$$

Отже, шуканою кривою (рис.9) є коло радіуса $R = 1$ з центром в точці $O(1;\,0).$

Розглянемо далі ДР наступного виду:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right),} \tag{3.17}$$

в якому $a, b, c, a_1, b_1, c_1 -$ деякі дійсні числа, при цьому:

хоча б одне з чисел c чи c_1 не дорівнює нулю і $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$ (3.18)

Якщо $c = c_1 = 0,$ то ДР (3.17) є однорідним:

$$y' = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right) = f\left(\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Якщо $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ або $a_1 = \lambda a,\ b_1 = \lambda b,$ звідки витікає:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{ax+by+c_1}\right) = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right) = f(ax+by).$$

Одержано рівняння виду (3.6), яке приводиться підстановкою $ax+by=z$ до ДР з відокремлюваними змінними.

Отже, нас цікавить випадок, коли умови (3.18) виконані.

Введем підстановку:

$$\boxed{x = t+h, \quad y = p+\ell, \quad dx = dt, \quad dy = dp.} \tag{3.19}$$

$$\frac{dp}{dt} = f\left(\frac{at+bp+ah+b\ell+c}{a_1t+b_1p+a_1h+b_1\ell+c_1}\right) = f\left(\frac{at+bp}{a_1t+b_1p}\right) =$$

$$= f\left(\frac{a+b\frac{p}{t}}{a_1+b_1\frac{p}{t}}\right) = f\left(\frac{p}{t}\right). \tag{3.20}$$

Таким чином, підстановкою (3.19) ДР (3.17) приводиться до однорідного відносно змінних t і p. Зрозуміло, що ця підстановка дасть рівняння (3.20) тільки тоді, коли числа h і ℓ будуть знайдені із системи:

$$\begin{cases} ah+b\ell+c=0, \\ a_1h+b_1\ell+c_1=0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок ДР: $y' = \dfrac{2x-4y+6}{3-x-y}$.

Маємо рівняння виду (3.17). Складаємо систему (3.21) для заданого рівняння:

$$\begin{cases} h-2\ell=-3, \\ h+\ell=3. \end{cases}$$

Вона має очевидні корені: $h=1$, $\ell=2$.

Вводимо підстановку (3.19):

$$x=t+1, \quad y=p+2, \quad dx=dt, \quad dy=dp.$$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{2t+2-4p-8+6}{3-t-1-p-2}=\frac{4p-2t}{p+t}=\frac{4\frac{p}{t}-2}{\frac{p}{t}+1}.$$

Це рівняння є однорідним (3.10). Застосовуємо до нього підстановку виду (3.11)

$$\frac{p}{t}=u, \quad p=ut, \quad \frac{dp}{dt}=\frac{du}{dt}t+u,$$

що дає:

$$\frac{du}{dt}t+u=\frac{4u-2}{u+1} \Rightarrow \frac{du}{dt}t=\frac{4u-2}{u+1}-u \Rightarrow \frac{du}{dt}t=\frac{-u^2+3u-2}{u+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(u+1)du}{u^2-3u+2}=-\frac{dt}{t}.$$

Представимо дріб зліва сумою елементарних дробів.

$$\frac{u+1}{u^2-3u+2}=\frac{u+1}{(u-1)(u-2)}=\frac{A}{u-1}+\frac{B}{u-2}=\frac{A(u-2)+B(u-1)}{(u-1)(u-2)};$$

$$A(u-2)+B(u-1)=u+1.$$

При $u=1$: $A(1-2)=1+1 \Rightarrow A=-2$;

При $u=2$: $B(2-1)=2+1 \Rightarrow B=3$;

$$\frac{u+1}{u^2-3u+2}=\frac{3}{u-2}-\frac{2}{u-1}.$$

Проведемо інтегрування:

$$3\int\frac{du}{u-2}-2\int\frac{du}{u-1}=-\int\frac{dt}{t} \Rightarrow 3\ln|u-2|-2\ln|u-1|=\ln C-\ln t.$$

Далі пропотенціюємо одержаний вираз

$$\frac{(u-2)^3}{(u-1)^2}=\frac{C}{t}$$

і проведемо обернену заміну $u=p/t$:

$$\frac{\left(\frac{p}{t}-2\right)^3}{\left(\frac{p}{t}-1\right)^2}=\frac{C}{t}\;\Rightarrow\;\left(p-2t\right)^3=C\left(p-t\right)^2.$$

Повертаючись до основних змінних за співвідношеннями $t=x-1,\;p=y-2,$ знайдемо загальний розв'язок заданого ДР:

$$\left(y-2-2x+2\right)^3=C\left(y-2-x+1\right)^2,$$

$$\boxed{\left(y-2x\right)^3=C\left(y-x-1\right)^2.}$$

3.3. Лінійне ДР першого порядку

Лінійне ДР є рівнянням першого степеня відносно шуканої функції та її похідної:

$$y'+p(x)y=q(x). \tag{3.22}$$

Його ще називають **лінійним неоднорідним** або **лінійним з правою частиною.**

Якщо відкинути праву частину (3.22), то одержимо **відповідне однорідне** ДР або **без правої частини**:

$$y'+p(x)y=0. \tag{3.23}$$

П р и м і т к а. Не слід путати це рівняння з однорідним ДР першого порядку (3.10), (3.12), яке є рівнянням іншого виду! ДР (3.23) є одночасно і рівнянням з відокремлюваними змінними.

Коефіцієнти $p(x),\ q(x)$ вважаються відомими функціями, неперервними на деякому відрізку (a,b).

Розглянемо два методи розв'язку лінійного ДР.

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої.)

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР.

$$y'+p(x)y=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-p(x)y\Rightarrow\frac{dy}{y}=-p(x)dx\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=-\int p(x)dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln C - \int p(x)dx \Rightarrow \ln\frac{y}{C} = -\int p(x)dx \Rightarrow y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \quad (3.24)$$

Загальний розв'язок неоднорідного ДР (3.22) будемо шукати у вигляді (3.24), вважаючи, що $C = C(x)$ деяка невідома функція:

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}. \quad (3.25)$$

Тоді: $$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}.$$

Далі використаємо вихідне рівняння (3.23):

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} - \cancel{C(x)p(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}} + \cancel{p(x)C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}} = q(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow C'(x) = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx} \Rightarrow$$

$$C(x) = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C. \quad (3.26)$$

Залишилось підставити функцію (3.26) у вираз (3.25):

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx + C\right]} \quad (3.27)$$

П р и м і т к и. В області неперервності коефіцієнтів $p(x)$, $q(x)$ права частина ДР (3.22), а саме $f(x,y) = q(x) - p(x)y$, задовольняє теоремі Коші (похідна $f'_y = -p(x)$ неперервна, а значить і обмежена на відрізку (a,b)). Тому в цій області загальний розв'язок (3.27) включає всі існуючі розв'язки лінійного ДР, тобто особливі розв'язки відсутні.

При розв'язуванні ДР прихильники неформального підходу використовують переважно алгоритм, закладений у перетвореннях (3.24)-(3.26), а не формулу (3.27) в готовому вигляді. Але застосування цієї формули цілком правомірне.

Загальний розв'язок (3.27) можна записати у вигляді:

$$y = \overline{y} + \tilde{y}, \quad (3.28)$$

де: $\overline{y} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного ДР;

$\tilde{y} = \mathrm{e}^{-\int p(x)dx}\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)dx}dx$ – частинний розв'язок неоднорідного.

Співвідношення (3.28) обумовлює структуру розв'язку лінійного ДР. Воно показує, що **загальний розв'язок лінійного ДР (3.22) – це сума загального розв'язку відповідного однорідного ДР (3.23) та частинного розв'язку неоднорідного (3.22).**

Інтеграли у виразі (3.27) з врахуванням початкових умов (2.4) можна зобразити зі змінною верхньою та фіксованою нижньою межами. Це дає можливість записати розв'язок задачі Коші для лінійного ДР (3.22) у вигляді:

$$y = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[\int_{x_0}^{x} q(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t} p(z)dz} dt + y_0\right]. \qquad (3.29)$$

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок лінійного ДР: $y' + 2xy = x\mathrm{e}^{x^2}$.

Використаємо метод варіації довільної сталої.

Знаходимо розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y' + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xy \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -x^2 + \ln C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2 \Rightarrow y = C\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Шукаємо загальний розв'язок заданого ДР у виді:

1) $y = C(x)\mathrm{e}^{-x^2}$.

Знаходимо похідну за правилом диференціювання добутку функцій:

$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}.$

Підставимо y та y' в задане рівняння:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - \cancel{2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}} + \cancel{2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}} = x\mathrm{e}^{-x^2} \Rightarrow C'(x) = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\big(C(x)\big) = xdx \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Враховуємо знайдену функцію $C(x)$ у співвідношенні (1):

$$\boxed{y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)\mathrm{e}^{-x^2}.}$$

Метод Бернуллі. Пропонується шукати розв'язок лінійного ДР (3.22) у виді добутку двох функцій $U = U(x)$ та $V = V(x)$, тобто використовується підстановка:

$$\boxed{y = UV, \quad y' = U'V + UV'.} \tag{3.30}$$

Тоді з рівняння (3.22) та співвідношень (3.30) витікає:

$$U'V + \underline{UV' + p(x)UV} = q(x). \tag{3.31}$$

Маємо дві невідомі функції $U(x)$, $V(x)$ і тільки одне рівняння (3.31) для їх знаходження. Очевидно, що знайти вказані функції можна лише за умови, що до рівняння (3.31) буде добавлено ще одне рівняння відносно вказаних функцій. За таке допоміжне рівняння приймається підкреслена частина рівняння (3.31), яку прирівнюють до нуля. Оскільки $U \neq 0$, то це приводить до наступної системи:

$$\begin{cases} V' + p(x)V = 0, \\ U'V = q(x). \end{cases} \tag{3.32}$$

Перше з рівнянь цієї системи – рівняння з відокремлюваними змінними. Знайшовши з нього функцію $V = V(x)$, підставимо її в друге рівняння. Очевидно, що при цьому одержимо теж рівняння з відокремлюваними змінними, з якого знайдеться функція $U = U(x)$. Щоб знайти загальний розв'язок лінійного ДР (3.22) досить перемножити знайдені функції $y = UV$ (3.30), що дає співвідношення виду (3.27).

П р и м і т к а. При інтегруванні двох ДР системи (3.32) з'являються дві довільні сталі C_1, C_2, які при множенні функцій U і V увійдуть в загальний розв'язок $y = UV$ заданого ДР у вигляді добутку. Для належного виду загального розв'язку їх доведеться перепозначити однією буквою $C = C_1C_2$. Цього можна легко уникнути і спростити процес розв'язку, якщо довільну сталу C вводити лише при інтегруванні другого рівняння системи (3.32), а розв'язок першого рівняння записувати в спрощеному вигляді без довільної сталої. Очевидно, що при цьому вид загального розв'язку заданого ДР не зміниться.

Приклад 10. Знайти розв'язок задачі Коші: $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1.$

Застосуємо підстановку Бернуллі (3.30):

$$U'V + \underline{UV' - UV\,\mathrm{tg}\,x} = \frac{1}{\cos x}.$$

Складаємо систему рівнянь (3.32):

$$\begin{cases} V' - V\,\mathrm{tg}\,x = 0, \\ U'V = \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Інтегруємо перше рівняння системи (сталу інтегрування при цьому опускаємо):

$$V' - V\,\mathrm{tg}\,x = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = V\,\mathrm{tg}\,x \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = \int \mathrm{tg}\,x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|V| = -\ln|\cos x| \Rightarrow V = \frac{1}{\cos x}$$

З врахуванням знайденої функції V інтегруємо друге рівняння системи:

$$U' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 1 \Rightarrow dU = dx \Rightarrow U = x + C.$$

Знаходимо загальний розв'язок заданого рівняння:

$$y = UV = \frac{x + C}{\cos x}.$$

З початкових умов ($y = 1$ при $x = 0$) витікає: $C = 1$.

Враховуючи це значення, остаточно одержимо:

$$\boxed{y = \frac{x + 1}{\cos x}.}$$

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок ДР:

$$y'\left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right) = 1 + y^2.$$

Очевидно, що це рівняння не є лінійним відносно функції y.

Перепишем його у вигляді:

$$\frac{dx}{dy} + \frac{xy}{1+y^2} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Якщо вважати змінну y аргументом, а змінну x – функцією, то ми одержали лінійне ДР відносно функції $x = x(y)$.

Підстановка Бернуллі в цьому випадку запишеться так:

$x = UV,\ \frac{dx}{dy} = \frac{dU}{dy}V + \frac{dV}{dy}U,$

де $U = U(y),\ V = V(y) -$ деякі функції аргумента y.

Проведемо далі інтегрування ДР методом Бернуллі аналогічно попередньому прикладу.

$$\frac{dU}{dy}V + \frac{dV}{dy}U + \frac{UVy}{1+y^2} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$$\begin{cases} \frac{dV}{dy} + \frac{Vy}{1+y^2} = 0, \\ \frac{dU}{dy}V = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}}. \end{cases}$$

$$1)\ \frac{dV}{dy} = -\frac{Vy}{1+y^2} \Rightarrow \int\frac{dV}{V} = -\int\frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \ln|V| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}.$$

$$2)\ \frac{dU}{dy}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\sin y}{\sqrt{1+y^2}} \Rightarrow dU = \sin ydy \Rightarrow U = \int\sin ydy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U = C - \cos y.$$

$\boxed{x = UV = \frac{C-\cos y}{\sqrt{1-y^2}}.}$ – загальний розв'язок заданого ДР.

Приклад 12. Розглянути зміну сили струму при замиканні ланцюга постійного струму.

По законам електродинаміки – при всякій зміні сили струму в ланцюгу з'являється ЕРС самоіндукції, яка направлена протилежно зовнішній ЕРС і дорівнює $L \cdot I_t'$, де: $L-$ коефіцієнт самоіндукції; I_t' – похідна від сили струму за часом (швидкість зміни сили струму). Співвідношення між силою струму (I), опором ланцюга (R), зовнішньою ЕРС (E) та ЕРС самоіндукції задається законом Ома: $IR = E - L \cdot I_t'$ – добуток сили струму на опір ланцюга дорівнює фактично діючій ЕРС.

Перепишемо закон Ома у вигляді:

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}.$$

Як бачимо, закон Ома представляє собою лінійне ДР першого порядку.

Оскільки в розімкнутому ланцюгу струм відсутній, то для розв'язку цього ДР маємо початкові умови:

$$I=0 \text{ при } t=0.$$

Отже, поставлена задача Коші, для якої можна використати, наприклад, готовий розв'язок (3.29). В ньому, виходячи зі змісту задачі, слід покласти:

$$p=\frac{R}{L};\quad q=\frac{E}{L};\quad x_0=t_0=0;\quad y_0=I_0=0.$$

Будемо також мати на увазі, що від позначення внутрішньої змінної визначеного інтегралу результат інтегрування не залежить. У відповідності з цим дістанемо:

$$I=\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\int_0^t dz}\int_0^t \frac{E}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}\int_0^x dz}dx=\frac{E}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{R}{L}x}dx=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{R}{L}x}\right)\Big|_0^t=$$

$$=\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\left(\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}-1\right)\Rightarrow \boxed{I=\frac{E}{R}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right),\quad I_t'=\frac{E}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.}$$

Інтегрування виявилось достатньо простим, так як вихідне ДР має сталі коефіцієнти p і q.

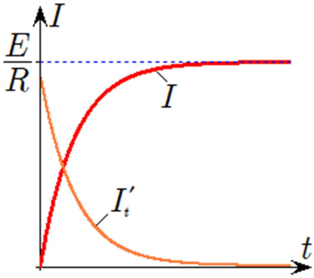


Рис.10

Графік розв'язку ДР представлено на рисунку. При замиканні ланцюга струм стрімко зростає до певного сталого значення, яке обумовлене зовнішньою ЕРС. При цьому протидіюча внутрішня ЕРС разом зі швидкістю I_t' прямує до нуля.

3. 4. Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі має наступний вигляд:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1. \tag{3.33}$$

При $\alpha = 0$ рівняння (3.33) стає лінійним, а при $\alpha = 1$ воно допускає відокремлення змінних, тому ці значення показника α відкидаються.

Відмітимо, що рівняння Бернуллі схоже з лінійним ДР (3.22) тим, що воно має таку ж ліву частину. Права частина відрізняється від правої частини лінійного ДР наявністю множника y^{α}.

Поділимо рівняння (3.33) на y^{α}

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \tag{3.34}$$

і введемо підстановку:

$$\boxed{y^{1-\alpha} = z; \quad z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'; \quad y'y^{-\alpha} = \frac{z'}{1-\alpha}.} \tag{3.35}$$

В результаті цих дій одержуємо лінійне ДР першого порядку:

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x). \tag{3.36}$$

Отже, до рівняння Бернуллі, після вказаних перетворень, можна застосовувати ті ж методи, що і до лінійного ДР: метод варіації довільної сталої, чи метод Бернуллі. Ці методи можна також застосовувати і безпосередньо до рівняння (3.34), обминаючи підстановку (3.35).

Приклад 13. Знайти загальний розв'язок ДР: $xy' + 2y - y^2 = 0$.

Перетворимо це рівняння до вигляду:

$$y' + \frac{2y}{x} = \frac{y^2}{x}.$$

Маємо рівняння Бернуллі. Поділимо його на y^2

$$y'y^{-2} + \frac{2}{x}y^{-1} = \frac{1}{x},$$

після чого введемо підстановку (3.35):

$z = y^{-1}, \quad z' = -y^{-2}y', \quad y^{-2}y' = -z';$

$$1) - z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; z' - \frac{2}{x}z = -\frac{1}{x}.$$

До одержаного лінійного ДР застосуємо метод варіації довільної сталої. Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

$$z' - \frac{2}{x}z = 0 \;\Rightarrow\; \int \frac{dz}{z} = 2\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; z = Cx^2$$

Загальний розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді:

$$2)\; z = C(x)x^2.$$

Підставляємо цей вираз в рівняння (1):

$$C'(x)x^2 + \cancel{2C(x)x} - \cancel{\frac{2}{x}C(x)x^2} = -\frac{1}{x} \;\Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{x^3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; C(x) = -\int x^{-3}dx \;\Rightarrow\; \frac{1}{2x^2} + C.$$

З врахуванням виразу функції $C(x)$ розв'язок (2) набуде вигляду:

$$z = Cx^2 + \frac{1}{2}.$$

Оскільки $z = y^{-1}$, з попереднього співвідношення знаходимо:

$$\frac{1}{y} = Cx^2 + \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{y = \frac{2}{1 + 2Cx^2}.}$$

Приклад 14. Знайти загальний розв'язок ДР: $y' + \frac{y}{x} = y^3\left(1 - x^2\right).$

До заданого рівняння Бернуллі застосуємо однойменну підстановку (3.30)

$$y = UV,\; y' = U'V + UV' \text{ що дає: } U'V + UV' + \frac{1}{x}UV = U^3V^3\left(1 + x^2\right).$$

Відповідно до методу Бернуллі складаємо систему двох ДР і виконуємо їх інтегрування.

$$\begin{cases} V' + \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = U^3V^3\left(1 - x^2\right). \end{cases}$$

$$1)\ \frac{dV}{dx} = -\frac{V}{x} \ \Rightarrow \ \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dx}{x} \ \Rightarrow \ \ln|V| = -\ln|x| \ \Rightarrow \ V = \frac{1}{x}.$$

$$2)\ \frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{x} = U^3 \frac{1 - x^2}{x^3} \ \Rightarrow \ U^{-3}dU = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx \ \Rightarrow \ \int U^{-3}dU =$$

$$= \int x^{-2}dx - \int dx \Rightarrow -\frac{1}{2U^2} = -\frac{1}{x} - x - C \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{U^2} = 2\left(\frac{1 + x^2 + Cx}{x}\right) \Rightarrow U = \sqrt{\frac{x}{2(1 + x^2 + Cx)}}.$$

З врахуванням результатів (1), (2) записуємо загальний розв'язок:

$$\boxed{y = UV = \frac{1}{\sqrt{2x(1 + x^2 + Cx)}}.}$$

3.5. Рівняння в повних диференціалах

ДР першого порядку називають рівнянням в повних диференціалах, якщо воно має вид

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.37}$$

і ліва частина якого – повний диференціал деякої функції $U(x, y)$ двох незалежних змінних, тобто

$$dU(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \tag{3.38}$$

Припускається, що функції $P(x, y)$, $Q(x, y)$ мають неперервні частинні похідні в деякій області D площини xOy.

При розв'язку рівняння (3.37) будемо спиратися на наступну **теорему**. Для того, щоб ліва частина виразу (3.37) була повним диференціалом функції $U(x, y)$ двох незалежних змінних необхідно і достатньо виконання умови:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{dx}. \tag{3.39}$$

Приведемо допоміжно загальний вираз повного диференціалу функції $U(x, y)$, який знадобиться при доведенні теореми:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy. \tag{3.40}$$

Будемо вважати, що співвідношення (3.38) виконане і ліва частина виразу (3.37) – повний диференціал. З порівняння диференціалів (3.38) і (3.40) витікає:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y). \tag{3.41}$$

Знайдемо частинні похідні від $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ відповідно по y та по x:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}. \tag{3.42}$$

Умова (3.39) підтверджується тим, що змішані похідні, які відрізняються тільки порядком диференціювання, рівні. Таким, чином, необхідність цієї умови доведена.

При доведенні достатності покажемо, що саме за виконання цієї умови можливе знаходження функції $U(x, y)$, яка є повним диференціалом (3.38).

З першого із співвідношень (3.41) знаходимо:

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + \varphi(y). \tag{3.43}$$

Так, як інтегрування велось по змінній x – сталою інтегрування може бути довільна функція $\varphi(y)$ аргумента y.

Візьмемо частинну похідну від U по y та, враховуючи друге із співвідношень (3.41), прирівняємо її до $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + \varphi'_y(y) = Q(x, y). \tag{3.44}$$

Звідси:

$$\varphi'_y(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx. \tag{3.45}$$

Ліва частина (3.45) залежить від y. Якщо і права частина цієї рівності буде залежати тільки від y, то це дасть можливість визначити $\varphi(y)$ інтегруванням і одержати функцію $U(x,y)$ за співвідношенням (3.43). Але це стає можливим завдяки виконанню умови (3.39). Дійсно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]=$$

$$=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int P(x,y)dx\right]=\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=0 \quad (3.46)$$

і достатність умови (3.39) теж доведена. Одночасно доведена можливість знаходження функції $\varphi(y)$ із (3.45)

$$\varphi(y)=\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy+C, \quad (3.47)$$

а також і функції $U(x,y)$ (3.43), диференціалом якої слугує задане ДР

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy+C. \quad (3.48)$$

Задача інтегрування рівняння (3.37) може ставитися таким чином: "знайти функцію $U(x,y)$ за її повним диференціалом". Вираз (3.48) і є розв'язком такої задачі. Зважимо ще на те, що при $dU(x,y)=0$ – це показує ДР (3.37), сама функція $U(x,y)$ є сталою величиною, тому загальний інтеграл рівняння (3.37) слід записувати у вигляді $U(x,y)=C,$ тобто:

$$\int P(x,y)dx+\int\left[Q(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)dx\right]dy=C. \quad (3.49)$$

При інтегруванні ДР (3.37) треба спочатку переконатися, що умова (3.39) виконана, після чого задіяти алгоритм, який легко простежується в перетвореннях (3.43)-(3.49).

Приклад 15. Знайти загальний розв'язок ДР:

$$\mathrm{e}^{-y}dx-\left(2y+x\mathrm{e}^{-y}\right)dy=0.$$

Перевіримо умову (3.39):

$$P(x,y)=\mathrm{e}^{-y}, \quad Q(x,y)=-2y-x\mathrm{e}^{-y} \;\Rightarrow\; \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-y}.$$

Умова виконана, а це означає, що задане ДР є рівнянням в повних диференціалах. Тоді (3.41):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) = \mathrm{e}^{-y}.$$

Звідси:

1) $U(x,y) = \int \mathrm{e}^{-y} dx = x\mathrm{e}^{-y} + \varphi(y).$

Так як інтегрування ведеться по змінній x, то y при цьому вважається фіксованим, а тому і стала інтегрування приймається у виді довільної функції $\varphi(y)$.

Далі використаємо друге із співвідношень (3.41) і попередній результат (1):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y) = -2y - x\mathrm{e}^{-y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -x\mathrm{e}^{-y} + \varphi_y'(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x\mathrm{e}^{-y} + \varphi_y'(y) = -2y - x\mathrm{e}^{-y} \Rightarrow \varphi_y'(y) = -2y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi(y) = -2\int y dy = -y^2 + C.$$

Знаючи функцію $\varphi(y)$ і підставляючи її у вираз (1), знайдемо функцію $U(x,y)$, повний диференціал якої складає задане ДР:

$$U(x,y) = x\mathrm{e}^{-y} - y^2 + C.$$

Загальний інтеграл заданого ДР (порівняйте вирази (3.48) і (3.49)) записуємо по виразу функції $U(x,y)$:

$$\boxed{x\mathrm{e}^{-y} - y^2 = C.}$$

Розглянемо ще один підхід до інтегрування ДР у повних диференціалах, оснований на використанні криволінійного інтегралу.

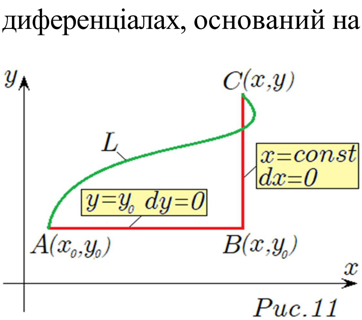


Рис.11

Функцію $U(x,y)$ можна знайти таким чином (3.38):

$$U(x,y) = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \quad (3.50)$$

Тут зображено криволінійний інтеграл по координатам, який береться по деякому шляху L (рис.11).

Взагалі такий інтеграл суттєво залежить від вибору шляху інтегрування, але якщо підінтегральний вираз – повний диференціал деякої функції, то інтеграл залежить лише від кінцевих точок інтегрування (A і C на рис.11), а шлях інтегрування не має значення. Як ми вже знаємо, ця особливість стосується саме ДР в повних диференціалах. Отже, незалежно від того, який шлях ми виберемо для інтегрування, в результаті одержимо одну й ту ж функцію $U(x, y)$. Очевидно також, що вказаний шлях доцільно вибирати таким чином, щоб процес інтегрування був якомога простішим. В цьому сенсі можна рекомендувати ламану ABC (рис.11). Припускається, що інтегральна крива проходить через деяку точку $A(x_0, y_0)$, точка ж $C(x, y)$ вибирається довільно і має поточні координати. Це відповідає постановці задачі Коші. Таким чином, щоб розв'язати задачу Коші треба обчислити криволінійний інтеграл (3.50) по ламаній ABC:

$$U(x, y) = \int_{ABC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy +$$

$$+ \int_{BC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)d\eta. \quad (3.51)$$

При формуванні інтегралів враховувалось, що $y = y_0$, $dy = 0$ на відрізку $AB = [x_0; x]$ і $x = \text{const}$, $dx = 0$ на відрізку $BC = [y_0; y]$. Замість змінних інтегрування x і y введені змінні ξ і η, щоб запобігти їх співпадання з верхніми межами інтегрування.

Вираз $U(x, y) = 0$ задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$. Дійсно, обидва інтеграли, що входять у праву частину рівності (3.51), перетворюються на нуль при $x = x_0$, $y = y_0$. Отже, частинний інтеграл рівняння (3.37), який задовольняє початковим умовам, можна подати у вигляді:

$$\int_{x_0}^{x} P(\xi, y_0)d\xi + \int_{y_0}^{y} Q(x, \eta)d\eta = 0. \quad (3.52)$$

Загальний інтеграл $U(x,y)=C$ одержимо заміною нуля у цьому виразі сталою C. Цей вираз можна допоміжно спростити, якщо всі сталі величини, після обчислення інтегралів, перенести в праву частину і замінити її довільною сталою C.

Приклад 16. Знайти частинний інтеграл ДР

$$2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0,$$

який задовольняє початковим умовам: $y = 0$ при $x = 0$.

Перевіримо виконання умови (3.39):

1) $P(x,y) = 2x\cos^2 y$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \cdot 2\cos y(-\sin y) = -2x\sin 2y$;

2) $Q(x,y) = 2y - x^2 \sin 2y$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin 2y$.

Похідні (1), (2) співпадають, а значить задано рівняння в повних диференціалах.

Частинний інтеграл рівняння представимо у вигляді (3.52), зважаючи на те, що $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $\cos y_0 = 1$:

$$\int_0^x 2\xi d\xi + \int_0^y \left(2\eta - x^2 \sin 2\eta\right)d\eta = \left.\xi^2\right|_0^x + \left.\eta^2\right|_0^y + x^2\left.\left(\frac{\cos 2\eta}{2}\right)\right|_0^y =$$

$$= x^2 + y^2 + x^2\left(\frac{\cos 2y}{2} - \frac{1}{2}\right) = x^2 + y^2 + x^2\left(\frac{2\cos^2 y - 1}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= y^2 + x^2\cos^2 y.$$

В результаті одержуємо частинний інтеграл :

$$\boxed{y^2 + x^2\cos^2 y = 0.}$$

Приклад 17. Знайти загальний інтеграл ДР в повних диференціалах:

$$\left(x - y\right)dx + \left(y^{-2} - x\right)dy = 0.$$

Використаємо (3.52), де нуль замінимо сталою C_1.

$$\int_{x_0}^x (\xi - y_0)d\xi + \int_{y_0}^y (\eta^{-2} - x)d\eta = \left.\left(\frac{\xi^2}{2}\right)\right|_{x_0}^x - y_0\left.\left(\xi\right)\right|_{x_0}^x - \left.\left(\frac{1}{\eta}\right)\right|_{y_0}^y - x\left.\left(\eta\right)\right|_{y_0}^y =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} - y_0\left(x - x_0\right) - \frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} - x\left(y - y_0\right) = C_1.$$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - xy = C_1 + \frac{x_0^2}{2} - x_0 y_0 - \frac{1}{y_0}.$$

$$\boxed{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{y} - xy = C.}$$

IV. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІНТЕГРУВАННЯ ЗНИЖЕННЯМ ПОРЯДКУ

Чим менший порядок ДР, тим простіше воно виглядає і тим простішим є алгоритм його розв'язку. Взагалі, така тенденція спостерігається не завжди. Нижче, наприклад, ми будемо розглядати ДР другого та вищих порядків, для розв'язування яких процес інтегрування функцій не передбачається. А в цьому розділі ми розглянемо такі ДР другого порядку, які можуть бути заміненими двома ДР першого порядку і фактично розв'язування зводиться до послідовного інтегрування цих двох ДР. Позитивним в цьому алгоритмі є те, що згадані ДР першого порядку нам знайомі з попередніх розділів.

4.1. Рівняння, яке включає тільки старшу похідну та незалежну змінну

Це рівняння можна записати у вигляді:

$$\boldsymbol{y'' = f(x)}. \tag{4.1}$$

Зниження порядку такого рівняння виконується послідовним дворазовим інтегруванням:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \;\Rightarrow\; dy' = f(x)dx \;\Rightarrow\; y' = \int f(x)dx + C_1; \tag{4.2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1 \;\Rightarrow\; dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2. \tag{4.3}$$

Для задачі Коші (по аналогії з виразом (3.52)) можна записати наступний розв'язок:

$$y = \int_{x_0}^{x} dz \int_{x_0}^{z} f(t)dt + y_0'\left(x - x_0\right) + y_0. \tag{4.4}$$

В цьому розв'язку, так само, як і у виразі (3.52), змінні інтегрування позначені таким чином, щоб вони не співпадали з верхніми межами інтегрування.

Приклад 18. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' = -\dfrac{18}{\cos^2 3x}$.

Задане ДР має вид (4.1). У відповідності з указаним алгоритмом, для знаходження загального розв'язку проінтегруємо це рівняння двічі підряд:

$$y' = -\int \frac{18dx}{\cos^2 3x} = -6\int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} = -6\,\mathrm{tg}\,3x + C_1;$$

$$y = -6\int \mathrm{tg}\,3x dx + C_1\int dx = -2\int \mathrm{tg}\,3x d(3x) + C_1 x + C_2 =$$

$$= \boxed{2\ln|\cos 3x| + C_1 x + C_2.}$$

Приклад 19. Задана консоль, яка несе навантаження P (рис.12), та рівняння зігнутої вісі консолі:

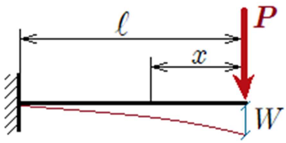


Рис.12

1) $\dfrac{d^2W}{dx^2} = -\dfrac{Px}{EJ}$,

де: W – величина прогину консолі;
E – модуль пружності;
J – момент інерції перерізу.

Знайти найбільший прогин консолі.

В точці затиснення консолі ($x = \ell$) її прогин W та кут повороту $\theta = W_x'$ дорівнюють нулю. Отже, маємо початкові умови:
2) $W = 0, \quad W_x' = 0 \quad$ при $\quad x = \ell$.
Зв'язок між координатою x по довжині консолі і її прогином W знайдемо, розв'язуючи ДР (1) при початкових умовах (2). Для цього скористаємося співвідношенням (4.4), поклавши в ньому $x_0 = \ell,\ y_0 = W(\ell) = 0,\ y_0' = \theta(\ell) = 0$.

$$W = \int_\ell^x dz \int_\ell^z \left(-\frac{Pt}{EJ}\right)dt = -\frac{P}{EJ}\int_\ell^x dz\left(\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_\ell^z = -\frac{P}{EJ}\int_\ell^x \left(\frac{z^2}{2} - \frac{\ell^2}{2}\right)dz =$$

$$= -\frac{P}{2EJ}\left(\frac{z^3}{3} - \ell^2 z\right)\Bigg|_\ell^x = -\frac{P}{2EJ}\left(\frac{x^3}{3} - \ell^2 x + \frac{2\ell^3}{3}\right).$$

Найбільший прогин має місце на кінці консолі при $x = 0$:

$$\boxed{W_{\text{найб}} = W(0) = -\frac{P\ell^3}{3EJ}}$$

4.2. Рівняння, в якому відсутня шукана функція

Диференціальне рівняння другого порядку

$$\boldsymbol{y'' = f(x, y')}, \tag{4.5}$$

в якому відсутня функція y, приводиться до ДР першого порядку наступною підстановкою:

$$\boxed{y' = p, \quad y'' = p'.} \tag{4.6}$$

Ця підстановка перетворює ДР (4.5) до виду:

$$p' = f(x, p). \tag{4.7}$$

Нехай розв'язок ДР першого порядку (4.7) такий:

$$p = \varphi(x, C_1). \tag{4.8}$$

Знову, звертаючись до підстановки (4.6), дістанемо ще одне ДР першого порядку:

$$y' = \varphi(x, C_1). \tag{4.9}$$

Остаточно розв'язок заданого ДР (4.5) дістанемо інтегруванням рівняння (4.9):

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2. \tag{4.10}$$

Приклад 20. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' = y' - 6x$.

Рівняння не включає шуканої функції, тому слід використати підстановку (4.6):

$p' = p - 6x.$

До одержаного лінійного ДР застосовуємо метод Бернуллі.

$p = UV, \quad p' = U'V + UV'$ (3.30):

$U'V + UV' = UV - 6x,$

$$\begin{cases} V' = V, \\ U'V = -6x. \end{cases}$$

1) $\dfrac{dV}{dx} = V \;\Rightarrow\; \displaystyle\int \frac{dV}{V} = \int dx \;\Rightarrow\; \ln|V| = x \;\Rightarrow\; V = \mathrm{e}^x.$

2) $\dfrac{dU}{dx}\mathrm{e}^x = -6x \;\Rightarrow\; U = -6\displaystyle\int x\mathrm{e}^{-x}dx = 6\int x d(\mathrm{e}^{-x}) =$

$$= 6\left(x\mathrm{e}^{-x} - \int \mathrm{e}^{-x}dx\right) = 6\mathrm{e}^{-x}\left(x+1\right) + C_1.$$

$$p = UV = C_1\mathrm{e}^{x} + 6\left(x+1\right).$$

При розв'язуванні рівняння (2) залучено метод інтегрування частинами.

Повертаємося знову до функції y (4.6):

$$y' = C_1\mathrm{e}^{x} + 6\left(x+1\right) \Rightarrow y = C_1\int \mathrm{e}^{x}dx + 6\int (x+1)dx =$$

$$= C_1\mathrm{e}^{x} + 6\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2$$

Загальний розв'язок заданого ДР запишемо так:

$$\boxed{y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2 + 3x\left(x+2\right)}$$

Приклад 21. Дослідити рух тіла, яке падає під дією сили ваги і опору повітря, якщо опір повітря пропорціональний квадрату швидкості.

За другим законом Ньютона:

1) $m\ddot{S} = mg - k\dot{S}^2,$

де: $m, \ddot{S}$ – маса і прискорення тіла; g – прискорення вільного падіння; $\dot{S}$ – швидкість тіла; k – коефіцієнт пропорціональності.

Початок відліку часу сумістим з початком руху тіла, що впроваджує наступні початкові умови:

2) $S = 0, \quad \dot{S} = 0$ при $t = 0.$

Введемо позначення:

$$g = q^2, \quad k/m = \mu^2.$$

Тоді рівняння (1) можна записати так:

3) $\ddot{S} = q^2 - \mu^2\dot{S}^2.$

В цьому рівнянні відсутня шукана функція $S,$ тому його порядок можна понизити підстановкою (4.6)

$$\dot{S} = V, \quad \ddot{S} = \dot{V},$$

після чого рівняння (3) прийме вигляд:

$\dot{V} = q^2 - \mu^2 V^2.$

Розв'язуємо це ДР, як рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\dot{V} = q^2 - \mu^2 V^2 \;\Rightarrow\; \frac{dV}{dt} = q^2 - \mu^2 V^2 \;\Rightarrow\; \frac{dV}{q^2 - \mu^2 V^2} = dt \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{\mu}\int \frac{d(\mu V)}{q^2 - (\mu V)^2} = t + C_1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\mu q}\ln\left|\frac{q+\mu V}{q-\mu V}\right| = t + C_1.$$

Нульові початкові умови (2) дають $C_1 = 0$. Враховуючи значення C_1, з попереднього співвідношення знаходимо:

$$4)\quad \boxed{V = \frac{2g}{p}\cdot\frac{\mathrm{e}^{pt}-1}{\mathrm{e}^{pt}+1}, \quad p = 2\mu q = 2\sqrt{\frac{kg}{m}}.}$$

Оскільки $V = \dot{S}$, маємо ще одне ДР:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2g}{p}\cdot\frac{\mathrm{e}^{pt}-1}{\mathrm{e}^{pt}+1}.$$

В ньому змінні t і S теж відокремлюються.

$$S = \frac{2g}{p}\int\frac{\mathrm{e}^{pt}-1}{\mathrm{e}^{pt}+1}dt = \left|\begin{matrix}\mathrm{e}^{pt} = z & p\mathrm{e}^{pt}dt = dz \\ dt = \frac{dz}{p\mathrm{e}^{pt}} = \frac{dz}{pz} & \end{matrix}\right| = \frac{2g}{p^2}\int\frac{z-1}{z(z+1)}dz =$$

$$= \frac{2g}{p^2}\int\left(\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z}\right)dz = \frac{2g}{p^2}\left(2\int\frac{dz}{z+1} - \int\frac{dz}{z}\right) = \frac{2g}{p^2}\big(2\ln|z+1| -$$

$$-\ln z\big) + C_2 = \frac{2g}{p^2}\ln\frac{(\mathrm{e}^{pt}+1)^2}{\mathrm{e}^{pt}} + C_2.$$

При нульових початкових умовах маємо:

$$0 = \frac{2g}{p^2}\ln 4 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = -\frac{2g}{p^2}\ln 4.$$

Отже, шлях падаючого тіла описується рівнянням:

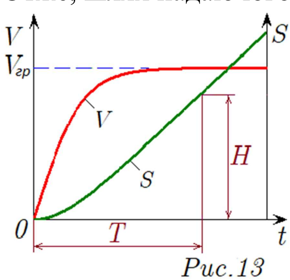


Рис.13

$$5)\quad \boxed{S = \frac{2g}{p^2}\ln\frac{(\mathrm{e}^{pt}+1)^2}{4\mathrm{e}^{pt}}.}$$

Графічна інтерпретація рівнянь (4) і (5) представлена на рис.13. Рисунок показує, що швидкість падіння тіла спочатку стрімко зростає (червона лінія), а потім плавно наближається до деякого граничного значення. Це граничне значення легко знаходиться з рівняння (4):

$$V_{\text{гр}} = \lim_{t\to\infty} V = \frac{2g}{p}\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{pt}-1}{\mathrm{e}^{pt}+1} = \frac{2g}{p} = \frac{2g}{2\mu q} = \frac{g}{\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{g}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Отже, гранична швидкість тим менша, чим менша вага тіла і чим більший опір повітря.

Після досягнення граничного етапу польоту швидкість тіла залишається незмінною ($V = V_{\text{гр}} = \text{const}$), а шлях стає рівномірним і прямолінійним (зелена лінія).

Якщо відома висота падіння H, то рівняння (5) (при $S = H$) дозволяє визначити час T польоту тіла (до приземлення). Найпростіше це зробити графічно (рис.13).

4.3. Рівняння, в якому відсутня незалежна змінна

Диференціальне рівняння, в якому відсутня незалежна змінна

$$\boldsymbol{y'' = f(y, y')} \tag{4.11}$$

приводиться до ДР першого порядку підстановкою $y' = p$, де $p = p(y) -$ залежить від самої шуканої функції. Друга похідна y'' виражається через функцію p таким чином:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\,y' = \frac{dp}{dy}\,p. \tag{4.12}$$

Отже, в заданому ДР слід виконати такі заміни

$$\boxed{y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy}\,p,} \tag{4.13}$$

після чого прийдемо до наступного ДР першого порядку:

$$\frac{dp}{dy}\,p = f(y, p). \tag{4.14}$$

Нехай $p = \phi(y) + C_1 -$ розв'язок ДР (4.14). Тоді для знаходження розв'язку заданого ДР треба розглянути рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \phi(y) + C_1. \tag{4.15}$$

Приклад 22. Розв'язати задачу Коші: $y'^2 + 2yy'' = 0;\ y(1) = 1;\ y'(1) = 1.$

В рівнянні відсутня незалежна змінна x, тому використаємо підстановку (4.13):

$$p^2 + 2y\frac{dp}{dy}p = 0.$$

Виконаємо розділення змінних, вважаючи, що $p \neq 0$.

$$p = -2y\frac{dp}{dy} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -2\int\frac{dp}{p} \Rightarrow \ln|y| = \ln C_1^2 - 2\ln p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left(\frac{C_1}{p}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{C_1}{p}\right)^2 = y \Rightarrow \frac{C_1}{p} = \pm\sqrt{y} \Rightarrow p = \pm\frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Маючи на увазі підстановку (4.13), запишемо:

1) $y' = \pm\dfrac{C_1}{\sqrt{y}}.$

Знаходимо довільну сталу C_1 з початкових умов:

$$1 = \pm\frac{C_1}{\sqrt{1}} \Rightarrow C_1 = 1.$$

Зрозуміло, що при $C_1 = 1$ перед дробом вибирається знак "плюс". Враховуючи відмічене, інтегруємо ДР (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow y^{\frac{1}{2}}dy = dx \Rightarrow \int y^{\frac{1}{2}}dy = x + C_2 \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = x + C_2.$$

Знаходимо довільну сталу C_2:

2) $\dfrac{2}{3} = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = x - \dfrac{1}{3}.$

Частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам, витікає з виразу (2):

$$\boxed{y = \sqrt[3]{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2}}$$

Відмітимо, що $p = y' = 0$ задовольняє задане ДР, але цей розв'язок витікає з рівняння (1) при $C_1 = 0$, тому він не є особливим.

Може бути, що **рівняння** типу (4.11) **не включає не тільки змінної x, але і похідної y'**:

$$\boldsymbol{y'' = f(y)}. \tag{4.16}$$

Воно є частинним випадком ДР (4.11), тому інтегрування можна виконувати за допомогою тієї ж підстановки (4.13). Але в указаному випадку це можна зробити простіше і більш вишукано. Для цього приймемо до уваги, що:

$$y'dx = dy, \quad d\left(y'^2\right) = 2y'y''dx. \tag{4.17}$$

Помножимо рівняння (4.16) на $2y'dx$:

$$2y'y''dx = 2f(y)y'dx. \tag{4.18}$$

З врахуванням (4.17) маємо:

$$d\left(y'^2\right) = 2f(y)dy. \tag{4.19}$$

Отже, перший інтеграл ДР (4.16) можна записати так:

$$y'^2 = 2\int f(y)dy + C_1. \tag{4.20}$$

Цей інтеграл в механіці називають <u>інтегралом енергії</u> (зважаючи на те, що швидкість є першою похідною від шляху за часом, а вказаний інтеграл відрізняється від кінетичної енергії лише сталим множником – масою об'єкта).

ДР (4.20) – це рівняння з відокремлюваними змінними. Після належних перетворень з (4.20) одержимо загальний інтеграл вихідного рівняння (4.16):

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = x + C_2. \tag{4.21}$$

Приклад 23. Розв'язати задачу Коші: $y'' = 2 - y; \quad y(0) = 2; \quad y'(0) = 2.$

Задане рівняння відноситься до типу (4.16). Помножимо ліву і праву частину цього рівняння на $2y'dx$:

$2y'y''dx = 2(2 - y)y'dx.$

Тепер, маючи на увазі співвідношення (4.17), запишемо:

$d\left(y'^2\right) = 2(2 - y)dy.$

Інтегрування цього рівняння дає:

$$y'^2 = 2\int (2-y)dy \;\Rightarrow\; y'^2 = 2\left(2y - \frac{y^2}{2}\right) + C_1 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; y' = \pm\sqrt{4y - y^2 + C_1}.$$

Знаходимо сталу інтегрування C_1:

$$2 = \pm\sqrt{4\cdot 2 - 2^2 + C_1} \;\Rightarrow\; C_1 = 0.$$

Крім того бачимо, що перед коренем може стояти лише один знак – "плюс". Отже, приходимо до рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{4y - y^2},$$

в якому змінні відокремлюються:

1) $$\frac{dy}{\sqrt{4y - y^2}} = dx.$$

Приведемо ліву частину цього рівняння до виду, зручного для інтегрування, виділяючи повний квадрат у виразі під коренем:

$$4y - y^2 = -\left(y^2 - 4y + 4 - 4\right) = 4 - \left(y-2\right)^2.$$

Застосовуємо до виразу (1) табличне інтегрування:

2) $$\int \frac{d(y-2)}{\sqrt{4-(y-2)^2}} = x + C_2 \;\Rightarrow\; \arcsin\frac{y-2}{2} = x + C_2.$$

Знаходимо сталу інтегрування C_2:

$$\arcsin\frac{2-2}{2} = 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 0.$$

Розв'язуємо рівняння (2) відносно змінної y при $C_2 = 0,$ що і дає шуканий розв'язок задачі Коші:

$$\boxed{y = 2\left(\sin x + 1\right)}$$

V. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА
ДІЇ НАД КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ

Відомі натуральні – $\mathbb{N}$, цілі – $\mathbb{Z}$, раціональні – $\mathbb{R}$ і дійсні – $\mathbb{R}$ числа є підмножиною більш загального виду чисел – $\mathbb{C}$, які називаються комплексними (КЧ):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Нині математику не можна уявити без КЧ. Вони знайшли широке застосування не тільки у математиці, а й у фізиці, механіці, електротехніці і в багатьох інших областях знань. Далі ми будемо застосовувати КЧ в процесі інтегрування диференціальних рівнянь.

5.1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Комплексними числами називаються вирази виду

$$\boldsymbol{z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},} \tag{5.2}$$

над якими визначені поняття рівності та операції додавання і множення наступним чином:

$$a + bi = c + di, \quad \text{якщо} \quad a = c \quad \text{та} \quad b = d; \tag{5.3}$$

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \tag{5.4}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{5.5}$$

У виразі (5.2) величину $a = \operatorname{Re} z$ називають дійсною частиною КЧ, $b = \operatorname{Im} z$ – уявною частиною, а i – уявною одиницею.

При $b = 0$ комплексне число перетворюється на дійсне $(a + 0i = a)$, а при $a = 0$ – на чисто уявне число $(0 + bi = bi)$. Очевидно, що $(a + 0i) + (0 + bi) = a + bi$, тобто знак "+" у виразі $a + bi$ можна розглядати, як знак додавання двох чисел.

<u>Властивості додавання і множення КЧ такі ж, як і для дійсних чисел:</u>

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – комутативність або переставний закон;
2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – асоціативність або сполучний закон;
3) $z + 0 = z$ – знайдеться таке число, додавання якого не змінює результат;

4) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ – комутативність;
5) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ – асоціативність;
6) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ – дистрибутивність або розподільний закон;
7) $z \cdot 1 = z$ – знайдеться таке число, множення на яке не змінює результат.

Розглянемо детальніше уявну одиницю. Представимо її в алгебраїчній формі ($i = 0 + 1 \cdot i$) і обчислимо i^2, спираючись на правило множення комплексних чисел (5.5):

$$i^2 = (0 + 1 \cdot i)(0 + 1 \cdot i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) i = -1. \tag{5.6}$$

Отже, уявна одиниця – це таке число, яке в квадраті дає мінус одиницю:

$$\boxed{i^2 = -1.} \tag{5.7}$$

На основі цього результату знайдемо

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \tag{5.8}$$

і взагалі:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.9}$$

Модулем комплексного числа називають дійсне число:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{5.10}$$

Число $\overline{z} = a - bi$ називають **спряженим** до числа $z = a + bi$. (5.11)

Як бачимо, спряжені числа відрізняються між собою лише знаком уявної частини. Має місце співвідношення:

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z \cdot \overline{z} = |z|^2.} \tag{5.12}$$

Властивості модуля комплексних чисел:

$$1)\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|; \quad 2)\ |z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|. \tag{5.13}$$

Властивості спряжених комплексних чисел:

$$1)\ \overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2; \quad 2)\ \overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2; \quad 3)\ \overline{(z_1 / z_2)} = \overline{z}_1 / \overline{z}_2. \tag{5.14}$$

Різницею $z_1 - z_2$ чисел z_1 і z_2 називають таке число z, яке в сумі з z_2 дає z_1, тобто:

$$z = z_1 - z_2, \quad \text{якщо} \quad z + z_2 = z_1. \tag{5.15}$$

Припустимо, що:

$$z = x + yi, \quad z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i, \tag{5.16}$$

де a_1, a_2, b_1, b_2 – відомі дійсні числа.

Щоб знайти число z треба визначити невідомі x та y. Для цього використаємо другу з рівностей (5.15):

$$(x + a_2) + (y + b_2) = a_1 + b_1 i. \tag{5.17}$$

Звідси, на основі поняття рівності КЧ (5.3), витікає:

$$x + a_2 = a_1, \quad y + b_2 = b_1 \quad \text{або} \quad x = a_1 - a_2, \quad y = b_1 - b_2. \tag{5.18}$$

Отже, правило віднімання КЧ виглядає так:

$$\boxed{(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.} \tag{5.19}$$

Часткою z_1/z_2 від ділення двох чисел z_1 і z_2 називають таке число z, яке при множенні на z_2 дає z_1, тобто:

$$\frac{z_1}{z_2} = z, \quad \text{якщо} \quad z \cdot z_2 = z_1. \tag{5.20}$$

Приймемо до уваги співвідношення (5.16) та правило множення КЧ (5.5):

$$(a_2 x - b_2 y) + (b_2 x + a_2 y)i = a_1 + b_1 i. \tag{5.21}$$

Ця рівність дає систему рівнянь відносно невідомих x та y:

$$\begin{cases} a_2 x - b_2 y = a_1, \\ b_2 x + a_2 y = b_1. \end{cases} \tag{5.22}$$

За формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2^2 + b_2^2; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a_1 & -b_2 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - a_1 b_2;$$

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \quad y = \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{5.23}$$

Отже, маємо таке правило ділення двох КЧ:

$$\boxed{\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.} \tag{5.24}$$

На відміну від правила віднімання (5.19), правило ділення досить громіздке і важке для запам'ятовування. З метою спрощення ділення можна рекомендувати наступний спосіб, оснований на властивості (5.12) спряжених КЧ:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}.} \tag{5.25}$$

Таким чином, **щоб поділити комплексні числа, треба чисельник і знаменник дробу помножити на число, спряжене до знаменника.**

Як бачимо, в цьому способі операція ділення чисел z_1 і z_2 змінюється операцією множення чисел z_1 і $\overline{z}_2$, що значно простіше, адже множення виконується за звичним правилом множення многочлена на многочлен (5.5) з тим лише доповненням, що замість квадрата уявної одиниці (i^2) записують "мінус одиницю (5.7)".

Приклад 24. Виконати додавання, віднімання, множення та ділення комплексних чисел: $z_1 = 2 + 3i; \quad z_2 = 1 - 5i.$

1) $z_1 + z_2 = (2+1) + (3+5)i = 3 - 2i.$ (5.4)

2) $z_1 - z_2 = (2-1) + (3+5)i = 1 + 8i.$ (5.19)

3) $z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 5) + (3 \cdot 1 - 2 \cdot 5)i = 17 - 7i.$ (5.5)

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \dfrac{(2 \cdot 1 - 3 \cdot 5) + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 5)i}{1 + 5^2} = \dfrac{-13 + 13i}{26},$

$\dfrac{z_1}{z_2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} i.$ (5.25)

5.2. Тригонометрична форма комплексного числа та його геометрична інтерпретація

Комплексне число прийнято зображати на координатній площині у вигляді вектора, який виходить з початку координат (рис.14).

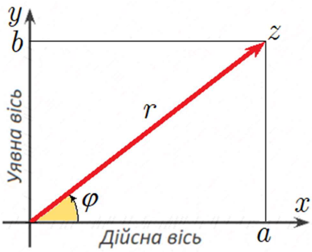


Рис.14

Зображення вектора на площині визначається однозначно двома параметрами a і b або r і φ. Рисунок наглядно показує зв'язок між цими параметрами:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi. \tag{5.26}$$

На основі алгебраїчної форми КЧ (5.2) і співвідношень (5.26) можна записати:

$$\boldsymbol{z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)}. \tag{5.27}$$

Це і є тригонометрична форма комплексного числа. В ньому:

$\varphi = \arg z$ – аргумент КЧ (кут між додатнім напрямком осі абсцис і вектором z); (5.28)

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ – модуль (5.10) КЧ (довжина вектора z). (5.29)

Отже, щоб перейти від алгебраїчної до тригонометричної форми КЧ, треба крім модуля знайти **аргумент, для якого прийнято діапазон $-\pi \le \varphi \le \pi$**. Наглядно кут φ разом з вектором z показаний на рис.15 для випадків розміщення вектора в усіх чотирьох четвертях (I…IV) площини.

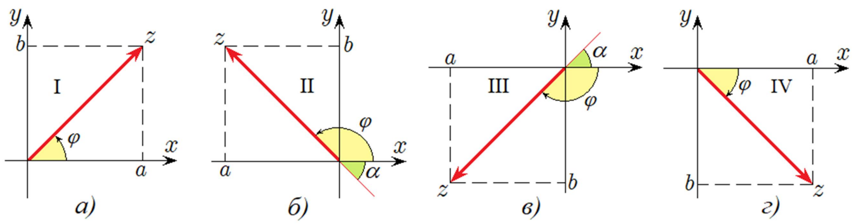


Рис.15

В першій та другій четвертях аргумент додатний, а в третій та четвертій – від'ємний. В першій та четвертій четвертях цей кут гострий, а в другій та третій – тупий.

При відомих значеннях параметрів a і b для визначення аргумента φ можна застосувати функцію $\operatorname{arctg} x$, яка визначена на відрізку $[-\pi/2; \pi/2]$. При цьому величина $\operatorname{arctg}(b/a)$ буде за абсолютним значенням не більшою $\pi/2$ і визначатиме кут φ лише для четвертей I і IV. Для четвертей же II і III величина arctg(b/a) буде визначати кут α (рис.15), який доповнює кут φ до розгорнутого кута π. Тоді для вказаних четвертей кут φ знайдеться за рахунок додавання (четверть II) чи віднімання (четверть III) кута π до/від величини arctg(b/a). Отже, аргумент КЧ можна знайти так:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & при \quad a \geq 0,\ b \in \mathbb{R}; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & при \quad a < 0,\ b \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & при \quad a < 0,\ b < 0. \end{cases} \tag{5.30}$$

Відмітимо, що аргумент φ знаходиться за формулою (5.30) з точністю до $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ (цілого числа обертів вектора z).

Геометричне зображення векторів дає можливість досить просто додавати та віднімати КЧ. Легко зрозуміти, що ці операції здійснюються за відповідними правилами додавання (*а*) та віднімання (*б*) векторів у векторній алгебрі (рис.16).

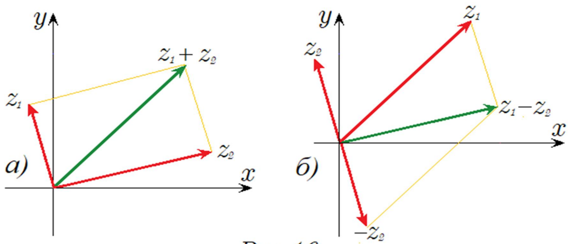


Рис.16

Поняття рівності двох КЧ в алгебраїчній та тригонометричній формах відрізняються між собою наявністю величини $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, яка враховує, вказане вище, ціле число обертів вектора:

$$z_1 = z_2, \quad \text{якщо} \quad r_1 = r_2 \quad \text{та} \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \tag{5.31}$$

Що стосується операцій множення та ділення КЧ в тригонометричній формі, то тут вони виконуються більш просто:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right]; \tag{5.32}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\right]. \tag{5.33}$$

В цих співвідношеннях:

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right); \quad z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right). \qquad (5.34)$$

Таким чином, при множенні двох КЧ в тригонометричній формі їх модулі треба помножити, а аргументи скласти. При діленні – модулі поділити, а аргументи відняти.

Виконаємо множення цих чисел за правилом (5.5):

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\Big[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + \left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \right.$$
$$\left.+\sin\varphi_2\cos\varphi_1\right)i\Big] = r_1 r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + \sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)i\right].$$

Одержали формулу (5.32).

Щоб довести формулу (5.33), спочатку запишемо число, спряжене до z_2: $\bar{z}_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)$. Далі скористаємось формулою (5.25):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{\left|z_2\right|^2} = \frac{1}{r_2^2}\cdot r_1 r_2\Big[\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) +$$
$$+\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1\right)i\Big] = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right].$$

З виразу (5.32) витікає формула для **піднесення КЧ до степеня** n $(n\in\mathbb{N})$ **:**

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (5.35)$$

Приклад 25. Виконати множення і ділення комплексних чисел:

$$z_1 = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\sin\tfrac{\pi}{4}\right); \quad z_2 = 2\left(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}\right).$$

Число z_1 піднести до четвертого степеня.

За формулою (5.32) знайдемо:

$$z_1 z_2 = 2\cdot 2\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{3}\right)\right] = 4\left(\cos\tfrac{7\pi}{12} + i\sin\tfrac{7\pi}{12}\right) =$$
$$= 4\left(-\sin\tfrac{\pi}{12} + i\cos\tfrac{\pi}{12}\right) = -1{,}035 + 3{,}864i.$$

За формулою (5.33):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{2}\left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\tfrac{\pi}{12} - i\sin\tfrac{\pi}{12} = 0{,}966 - 0{,}259i.$$

За формулою (5.35):

$$z_1^4 = 2^4\left(\cos\tfrac{4\pi}{4} + i\sin\tfrac{4\pi}{4}\right) = 16\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = -16.$$

Співвідношення (5.35) можна переписати у вигляді:

$$\left[r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)\right]^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right). \qquad (5.36)$$

При $r=1$ одержимо **формулу Муавра**:

$$\boxed{\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.} \qquad (5.37)$$

Ця формула відіграє важливу роль в тригонометрії.

Приклад 26. Нехай, наприклад, $n=3$. Виконаємо піднесення до куба в лівій частині формули (5.37) і прирівняємо правій:

$$\cos^3\varphi+3\cos^2\varphi\cdot i\sin\varphi+3\cos\varphi\left(i\sin\varphi\right)^2+\left(i\sin\varphi\right)^3=$$
$$=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$

Приведемо подібні в лівій частині рівності:

$$\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi+\left(3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi\right)i=\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi.$$

Прирівняємо дійсні і уявні частини:

$$\cos 3\varphi=\cos^3\varphi-3\sin^2\varphi\sin\varphi;$$

$$\sin 3\varphi=3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi.$$

Одержано формули для синуса і косинуса потроєного аргумента, знайомі зі шкільного курсу елементарної математики.

При добуванні кореня з КЧ в загальному випадку одержимо теж КЧ. Отже, можна записати:

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\rho\left(\cos\psi+i\sin\psi\right), \qquad (5.38)$$

де ρ і ψ – модуль і аргумент одержаного числа.

Виконаємо піднесення до степеня за формулою (5.36):

$$r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)=\rho^n\left(\cos n\psi+i\sin n\psi\right). \qquad (5.39)$$

Далі скористаємось поняттям рівності КЧ (5.31):

$$r=\rho^n,\quad n\psi=\varphi+2\pi k\ \Rightarrow\ \rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=(\varphi+2\pi k)/n. \qquad (5.40)$$

Отже, **формула добування кореня з КЧ** має вид:

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right) \qquad (5.41)$$
$$k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Ця формула показує, що добування кореня n-го степеня з КЧ дає n різних значень. Збільшувати k зверх $n-1$ немає сенсу, так як, завдяки періодичності тригонометричних функцій, їх значення повторюються і нові корені не з'являються. Крім того, зрозуміло, що рівняння $z^n = z_0$ (z_0 – деяке КЧ) має рівно n коренів.

Приклад 27. Добути корінь кубічний з КЧ : $z = 8\left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$.

Запишем формулу (5.41) для заданих умов:

$$\sqrt[3]{z} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Звідси одержимо:

$$\left.\sqrt[3]{z}\right|_{k=0} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i;$$

$$\left.\sqrt[3]{z}\right|_{k=1} = 2\left(\cos\pi + i\sin\pi\right) = 2\left(-1 + 0i\right) = -2;$$

$$\left.\sqrt[3]{z}\right|_{k=2} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

При обчисленні третього кореня $(k = 2)$ враховано, що:

$$\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}; \quad \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}; \quad \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 28. Розв'язати рівняння: $z^3 = 1$.

Очевидно, що $z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1\cdot\left(\cos 0\right) + i\sin 0}, \quad r = 1, \quad \varphi = 0.$

Використовуємо формулу (5.41):

$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Отже, маємо 3 кореня заданого рівняння:

$$\left.z_1\right|_{k=0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1;$$

$$\left.z_2\right|_{k=1} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\left.z_3\right|_{k=2} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

В останньому прикладі аргумент φ для коренів z_1, z_2, z_3 приймав значення: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 120^\circ$, $\varphi_3 = -120^\circ$. Геометрично це означає, що вектори z_1, z_2, z_3 розміщені в одиничному колі і ділять його на три ($n = 3$) рівних сектори. Це проілюстровано нижче рисунком 17, *а*.

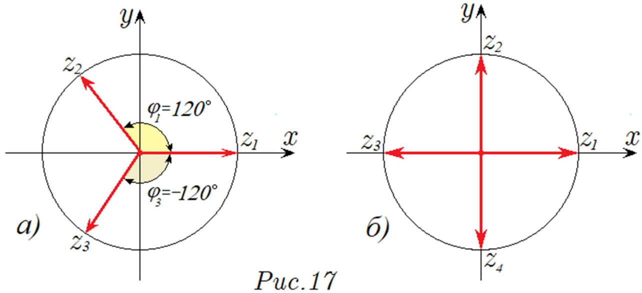


Рис.17

Таким чином, корені рівняння $z^n = 1$ можна знайти графічно діленням одиничного кола на n рівних секторів. Тоді вектори $z_1,\ z_2,\ z_3, \ldots, z_n$, побудовані як межі цих секторів і будуть коренями вказаного рівняння.

Приклад 29. Розв'язати рівняння: $z^4 = 1$.

Один з коренів $z_1 = 1$ є відомим. Це чисто дійсний корінь, який слід зобразити вектором на дійсній осі Ox (рис.17, *б*). Розділимо одиничне коло на $n = 4$ сектори по 90°, як показано на рисунку. Оскільки всі вектори лежать на осях координат (по два на кожній), одержимо два чисто дійсних і два чисто уявних кореня: $z_1 = 1;\ z_3 = -1;\ z_2 = i;\ z_4 = -i$.

З наведеного витікає, що **комплексні корені з'являються лише спряженими парами**.

При розв'язуванні квадратних рівнянь перехід до тригонометричної форми КЧ не обов'язковий.

Приклад 30. Розв'язати рівняння:

$$x^2 - 2x + 5 = 0. \ (x^2 + px + q = 0)$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm \sqrt{4i^2} = 1 \pm 2i.$$

Тут "мінус одиницю" під знаком кореня замінено на i^2 (5.7).

5.3. Показникова форма комплексного числа

Для зображення КЧ в показниковій формі використаємо формулу Ейлера:

$$\mathrm{e}^{\beta x i} = \cos\beta x + i\sin\beta x. \qquad (5.42)$$

Звідси маємо $\cos\varphi + i\sin\varphi = \mathrm{e}^{\varphi i}$ і далі $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\varphi i}$. Ми прийшли до показникової форми КЧ:

$$\boldsymbol{z = r\mathrm{e}^{\varphi i}}, \qquad (5.43)$$

де, як і раніше, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Отже, якщо відома тригонометрична форма КЧ, то відомі його модуль і аргумент, а, значить, перехід до показникової форми здійснюється досить просто за формулою (5.43). Використаємо це щоб записати операції множення, ділення, піднесення до степеня та добування кореня комплексних чисел в показниковій формі, маючи ті ж дії в тригонометричній формі (5.32), (5.33), (5.35), (5.41).

Дії над комплексними числами в показниковій формі:

1) множення $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

2) ділення $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3) піднесення до степеня $z^n = r^n \mathrm{e}^{in\varphi}$;

4) добування кореня $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}, k = 0,1,2,...,n-1.$

Відмітимо, що записані правила множення, ділення і піднесення до степеня такі ж, як і для дійсних чисел.

Приклад 31. Записати КЧ $z = -3 + \sqrt{3}i$ в показниковій формі.

Знаходимо модуль (5.10) і аргумент (5.28) заданого числа.

$r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \pi = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$

Отже, показникова форма (5.43) заданого КЧ:

$r = 2\sqrt{3}\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{6}}.$

VI. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

6.1. Загальні поняття

Лінійні диференціальні рівняння мають вигляд:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6.1}$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.2}$$

де: $p(x), q(x), f(x)$ – задані функції, неперервні на деякому відрізку $[a, b]$.

ДР(6.1) називають **лінійним неоднорідним**, або лінійним з правою частиною.

ДР(6.2) називають **лінійним однорідним**, або лінійним без правої частини.

П р и м і т к а. ДР(6.1) можна записати у виді:

$$y'' = F(x, y, y') = p(x) - p(x)y' - q(x)y.$$

Частинні похідні $\frac{\partial F}{\partial y} = -q(x),\ \frac{\partial F}{\partial y'} = -p(x)$ неперервні, а значить і обмежені на відрізку $[a, b]$. Тому за теоремою Коші на цьому відрізку ДР(6.1) особливих розв'язків не має. Очевидно, що те саме стосується і ДР(6.2).

З метою скорочення записів і спрощення доведень доцільно ввести позначення:

$$L = \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right\}. \tag{6.3}$$

Тоді ДР (6.1) і (6.2) запишуться так:

$$L(y) = f(x), \tag{6.1)*$$

$$L(y) = 0. \tag{6.2)*$$

Величину L називають лінійним диференціальним оператором. Формально $L(y)$ виглядає як множення L на функцію y.

Оператор L має такі властивості:

$$a)\ L(U+V)=L(U)+L(V),$$

$$b)\ L(aU)=aL(U),$$

$$c)\ L(aU+bV)=aL(U)+bL(V).$$

Перші дві властивості базуються на аналогічних властивостях похідної, а третя є наслідком перших двох.

Таким чином, якщо y_1 є частинним розв'язком ДР (6.1), (6.1)*, то маємо тотожність:

$$L(y_1)\equiv f(x).$$

Якщо ж y_2 є частинним розв'язком ДР (6.2), (6.2)*, то:

$$L(y_2)\equiv 0.$$

<u>Теорема 6.1 (про частинні розв'язки лінійного однорідного ДР):</u> будь-яка лінійна комбінація $a_1y_1+a_2y_2$ частинних розв'язків y_1, y_2 лінійного однорідного ДР (6.2) є також частинним розв'язком цього рівняння.

Нехай $L(y_1)\equiv 0,\ L(y_2)\equiv 0$ тобто y_1 та y_2 – частинні розв'язки ДР (6.2). Тоді:

$$L(a_1y_1+a_2y_2)=a_1L(y_1)+a_2L(y_2)\equiv 0\ .$$

Це значить, що $a_1y_1+a_2y_2$ є частинним розв'язком ДР(6.2), що і треба було довести.

<u>Теорема 6.2 (про накладання частинних розв'язків лінійного неоднорідного ДР):</u> якщо права частина рівняння $L(y)=f(x)$ представлена сумою двох доданків $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ і відомі частинні розв'язки y_1 та y_2 рівнянь, відповідно, $L(y)=f_1(x)$ та $L(y)=f_2(x)$, то сума y_1+y_2 є частинним розв'язком рівняння $L(y)=f(x).$

Маємо: $L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\equiv f_1(x)+f_2(x)\equiv f(x).$ Це значить, що сума y_1+y_2 є розв'язком рівняння (1): $L(y)=f(x).$

6.2. Лінійні однорідні ДР другого порядку

Лінійне однорідне ДР записується у виді (6.2) або (6.2)*.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.2}$$

$$L(y) = 0. \tag{6.2*}$$

Для цих рівнянь надзвичайно важливим є поняття лінійної залежності і незалежності частинних розв'язків y_1 і y_2, тому розглянемо ці поняття в кількох варіантах. Перший з них є основним, а інші будуть наслідками першого.

① Два частинних розв'язки y_1 і y_2 однорідного рівняння (6.2), (6.2)* називаються лінійно незалежними, якщо будь-яка їх лінійна комбінація, в якій не всі коефіцієнти рівні нулю, не дорівнює тотожно нулю:

$$\boldsymbol{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \not\equiv 0}.$$

Якщо ж хоча б одна така комбінація дорівнює тотожно нулю, то частинні розв'язки y_1 і y_2 є лінійно залежними.

② Два частинних розв'язки y_1 і y_2 однорідного рівняння (6.2), (6.2)* називаються лінійно незалежними, якщо їх відношення не є сталою величиною:

$$\boldsymbol{\frac{y_1}{y_2} = \varphi(x) = \mathbf{var}}.$$

Якщо ж це відношення – стала величина, то розв'язки y_1 і y_2 є лінійно залежними.

Визначник

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{6.4}$$

називають визначником Вронського або вронскіаном.

③ Вронскіан (6.4) або не дорівнює нулю в жодній точці деякого відрізку $[a, b]$, або дорівнює нулю на всьому відрізку. Перше $\boldsymbol{(W \neq 0)}$ має місце тоді і лише тоді, **коли частинні розв'язки $\boldsymbol{y_1}$ і $\boldsymbol{y_2}$ лінійно незалежні**, а друге $\boldsymbol{(W = 0)}$ **– коли лінійно залежні**.

Приклад 32. Нехай $y_1 = \ln\sqrt{x},\ y_2 = \ln\sqrt[3]{x}$.

Запишемо частинні розв'язки у виді $y_1 = \frac{1}{2}\ln x\ \ y_2 = \frac{1}{3}\ln x$. За приведеними визначеннями маємо:

1) $\dfrac{1}{3}y_1 - \dfrac{1}{2}y_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\ln x - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\ln x \equiv 0$ – лінійна комбінація розв'язків y_1 і y_2 дорівнює тотожно нулю;

2) $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln x}{\frac{1}{3}\ln x} = \dfrac{3}{2} = \mathrm{const}$ – відношення розв'язків y_1 і y_2 є стала величина;

3) $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\ln x & \frac{1}{3}\ln x \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{3x} \end{vmatrix} = \dfrac{\ln x}{6x} - \dfrac{\ln x}{6x} \equiv 0$ – вронскіан дорівнює тотожно нулю при $x > 0$.

Таким чином, з усіх трьох визначень витікає, що розв'язки y_1 і y_2 є лінійно залежними.

Приклад 33. Нехай $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$. За другим визначенням маємо:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x = \mathrm{var}\ .$$

Так, як відношення частинних розв'язків y_1 і y_2 не є сталою величиною, то вони є лінійно незалежними.

Доведення цього твердження за іншими визначеннями рекомендується виконати самостійно.

Очевидно, що для практичного застосування друге визначення лінійної залежності (незалежності) частинних розв'язків є досить простим. Але далі переконаємось, що існує чимало задач де доцільним буде застосування інших двох визначень.

На базі поняття лінійної незалежності формується поняття фундаментальної системи частинних розв'язків (ФСР).

Фундаментальною системою частинних розв'язків $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ лінійного однорідного ДР другого порядку називається будь-яка система двох лінійно незалежних частинних розв'язків цього рівняння.

Велике значення при інтегруванні лінійних однорідних диференціальних рівнянь має наступна теорема.

<u>Теорема 6.3 (про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР):</u> загальним розв'язком лінійного однорідного ДР є лінійна комбінація частинних розв'язків фундаментальної системи де коефіцієнтами служать довільні сталі, тобто

$$\boldsymbol{y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)}. \tag{6.5}$$

Дійсно $L(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) \equiv 0$. Це випливає з того, що $L(y_1) \equiv 0$ і $L(y_2) \equiv 0$ в силу того, що y_1 і y_2 є розв'язками лінійного ДР. Отже вираз $C_1y_1 + C_2y_2$ перетворює ДР в тотожність, але треба ще показати, що для будь-яких початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ знайдуться такі значення сталих, при яких ці умови будуть задовольнятися.

Сталі інтегрування знаходяться із системи:

$$\begin{cases} y_0 = C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) \\ y_0' = C_1y_1'(x_0) + C_2y_2'(x_0) \end{cases}$$

Ця система завжди має єдиний розв'язок, так як її визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}$$

не може дорівнювати нулю, тому що він є вронскіаном $\Delta = W(y_1, y_2)$, в якому y_1 і y_2 – фундаментальна система розв'язків.

Отже, теорема доведена. Вона показує, що незалежно від виду коефіцієнтів $p(x)$, $q(x)$ диференціального рівняння (6.2) його розв'язок завжди буде мати один і той же вигляд, який дається співвідношенням (6.5). При цьому, щоб записати загальний розв'язок ДР (6.2) треба знайти два частинних розв'язки цього рівняння.

Покажемо, що при відомому одному з частинних розв'язків y_1 другий розв'язок y_2 можна знайти за співвідношенням:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx\,. \tag{6.6}$$

Нехай y_1, y_2 фундаментальна система частинних розв'язків ДР(6.2), тому вони задовольняють це рівняння. Тобто:

$$\left.\begin{aligned} y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0 \\ y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0 \end{aligned}\right| \begin{aligned} -y_2 \\ y_1 \end{aligned}$$

Помножимо перше з рівнянь на "$-y_2$", а друге – на "y_1" і складемо одержані результати. Після приведення подібних і винесення $p(x)$ за дужки, одержимо:

$$y_2''y_1 - y_1''y_2 + p(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2) = 0$$

Відмітимо наступне:

$$y_2'y_1 - y_1'y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W,$$

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d}{dx}(y_2'y_1 - y_1'y_2) = y_2''y + \cancel{y_2'y_1'} - y_1''y_2 - \cancel{y_2'y_1'} = y_2''y_1 - y_1''y_2.$$

Тепер маємо:

$$\frac{dW}{dx} + p(x)W = 0.$$

Одержано диференціальне рівняння першого порядку (відносно вронскіана) з відокремлюваними змінними. Його розв'язок:

$$\frac{dW}{dx} = -p(x)W \Rightarrow \frac{dW}{W} = -p(x)dx \Rightarrow \int \frac{dW}{W} = -\int p(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|W| = -\int p(x)dx + \ln C \Rightarrow \ln\frac{W}{C} = -\int p(x)dx$$

Кінцевий результат інтегрування

$$W = C\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}$$

називають формулою Остроградського-Ліувілля.

Виконаємо далі наступні перетворення.

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2} \Rightarrow \frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W}{y_1^2}dx \Rightarrow y_2 = y_1\int \frac{W}{y_1^2}dx$$

Приймемо для спрощення $C = 1$ у виразі для W і підставимо його під знак інтегралу. Одержимо формулу (6.6).

6.3. Лінійні неоднорідні ДР другого порядку

Приведемо вирази лінійного неоднорідного диференціального рівняння в загальному виді та з застосуванням лінійного диференціального оператора (6.3):

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{6.1}$$

$$L(y) = f(x). \tag{6.1*}$$

Рівняння (6.2), (6.2)* порівняно з приведеними називають відповідними однорідними. Будемо вважати, що фундаментальна система y_1, y_2 частинних розв'язків відповідного однорідного ДР відома. Якщо відомий також і частинний розв'язок $\tilde{y}$ ($L(\tilde{y}) \equiv f(x)$) неоднорідного ДР (6.1), (6.1)*, то його загальний розв'язок можна знайти за, приведеною нижче, теоремою.

<u>Теорема 6.4 (про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР):</u> загальний розв'язок лінійного неоднорідного ДР є сума загального розв'язку відповідного однорідного ДР та частинного розв'язку неоднорідного.

$$\boldsymbol{y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x)}, \tag{6.7}$$

де: $\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2$ – загальний розв'язок відповідного однорідного ДР(6.2);

$\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ – частинний розв'язок неоднорідного ДР(6.1);

y_1, y_2 – фундаментальна система частинних розв'язків однорідного ДР(6.2);

C_1, C_2 – довільні сталі.

Очевидно, що:

$$L(y) = L(C_1 y_1 + C_2 y_2) + L(\tilde{y}) \equiv 0 + f(x) \equiv f(x).$$

Для визначення сталих C_1, C_2 маємо систему:

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \tilde{y}(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \tilde{y}'(x_0), \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок, так як її визначник – вронскіан. Отже доведення цієї теореми таке ж, як і аналогічної теореми для однорідних рівнянь (6.2).

Отже, для визначення загального розв'язку неоднорідного ДР (6.1), (6.1)* необхідно крім загального розв'язку однорідного ДР (6.2), (6.2)* знайти частинний розвязок $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ неоднорідного. Одним з методів його знаходження є **метод варіації довільних сталих, запропонований Лагранжем.** Для його застосування вимагається, щоб загальний розв'язок відповідного однорідного ДР (6.2), (6.2)* був відомим:

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 .$$

Тоді частинний розв'язок $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ ДР (6.1) шукають у вигляді

$$\tilde{y} = U_1 y_1 + U_2 y_2 , \tag{6.8}$$

де $U_1 = U_1(x)$, $U_2 = U_2(x)$ деякі невідомі функції аргумента x, записані замість сталих інтегрування. Для знаходження вказаних функцій обчислимо першу та другу похідну від $\tilde{y}$ і підставимо вирази для $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в ДР (6.1).

$$\tilde{y}' = U_1' y_1 + U_1 y_1' + U_2' y_2 + U_2 y_2' .$$

Оскільки нам треба визначати дві невідомі функції U_1 і U_2, а для цього маємо лише одне диференціальне рівняння (6.1), то доведеться вводити ще одне допоміжне рівняння, яке дасть можливість якомога простіше знайти шукані функції. Це рівняння запишемо у вигляді такої умови:

$$U_1' y_1 + U_2' y_2 = 0 .$$

Тоді будемо мати:

$$\tilde{y}' = U_1 y_1' + U_2 y_2',$$
$$\tilde{y}'' = U_1' y_1' + U_1 y_1'' + U_2' y_2' + U_2 y_2''.$$

Підставивши $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в ДР(6.1), одержимо:

$$U_1' y_1' + U_1 y_1'' + U_2' y_2' + U_2 y_2'' + p(x)(U_1 y_1' + U_2 y_2') +$$
$$+ q(x)(U_1 y_1 + U_2 y_2) = f(x).$$

Виконаємо очевидні перетворення, виносячи функції U_1 і U_2 за дужки:

$$U_1 \left[y_1'' + p(x) y_1' + q(x) y_1 \right] + U_2 \left[y_2'' + p(x) y_2' + q(x) y_2 \right] +$$
$$+ U_1' y_1' + U_2' y_2' = f(x)$$

Це співвідношення радикально спрощується завдяки вдалому підбору допоміжної умови: вирази в квадратних дужках дорівнюють нулю, так як y_1, y_2 – фундаментальна система частинних розв'язків однорідного ДР (6.2). Враховуючи сказане, одержимо перетворене співвідношення, яке разом з вказаною умовою утворює достатньо просту систему рівнянь для визначення U_1' та U_2':

$$\begin{cases} U_1'y_1 + U_2'y_2 = 0, \\ U_1'y_1' + U_2'y_2' = f(x). \end{cases} \tag{6.9}$$

Відмітимо, що записана система має єдиний розв'язок, так як її визначник – вронскіан.

Нехай в результаті розв'язку системи (6.9) одержано: $U_1' = \varphi_1(x),\ U_2' = \varphi_2(x)$. Тоді, очевидно, будемо мати:

$$U_1 = \int \varphi_1(x)dx, \quad U_2 = \int \varphi_2(x)dx.$$

Тепер частинний розв'язок неоднорідного ДР(6.1) знайдемо підстановкою одержаних функцій в співвідношення (6.8):

$$\tilde{y} = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx. \tag{6.10}$$

При відомому результаті (10) загальний розв'язок неоднорідного ДР (6.1) будуємо на основі **теореми 6.4** (про структуру загального розв'язку):

$$y = \underbrace{C_1y_1(x) + C_2y_2(x)}_{\bar{y}} + \underbrace{y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx.}_{\tilde{y}}$$

З викладеного витікає наступна **послідовність розв'язку неоднорідного ДР(6.1)**.

1. По відомому одному з розв'язків ФСР – y_1 знаходимо другий – y_2 за формулою (6.6).

2. У відповідності з теоремою 6.3 записуємо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР(6.2).

3. Методом варіації довільних сталих знаходимо частинний розв'язок неоднорідного ДР(6.1).

4. У відповідності з теоремою 6.4 записуємо загальний розв'язок заданого неоднорідного ДР(6.1).

5. Якщо розв'язується задача Коші, то з початкових умов знаходимо довільні сталі і замінюємо їх в загальному розв'язку знайденими числами.

Не з'ясованим залишається питання про знаходження одного з двох розв'язків ФСР (п.1). В загальному випадку, коли коефіцієнти $p(x)$, $q(x)$ ДР(6.1) мають довільний вигляд, знайти один з розв'язків ФСР не вдається. Але існують деякі типи лінійних ДР (зі спеціальним видом вказаних коефіцієнтів), які дозволяють знаходження одного з розв'язків ФСР за певною послідовністю дій. Одними з таких рівнянь є лінійні ДР зі сталими коефіцієнтами ($p(x)=p=\text{const}$, $q(x)=q=\text{const}$). Такі рівняння будуть розглянуті далі.

Приклад 34. Розв'язати задачу Коші: $y''+\dfrac{y'}{x}-\dfrac{y}{x^2}=x$, $y(1)=\dfrac{9}{8}$; $y'(1)=\dfrac{3}{8}$.

Маємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.
Спочатку розглядаємо відповідне однорідне:

$$y''+\frac{y'}{x}-\frac{y}{x^2}=0$$

Щоб сума трьох доданків дорівнювала нулю треба, щоб ці доданки були подібними (випадок, коли всі доданки – нулі відкидається). Оскільки в знаменниках стоять степеневі функції, можна допустити, що і чисельники (y, y') теж степеневі. Перевіримо спочатку функцію $y=x$.

Тоді $y'=1$; $y''=0$ і підстановка в однорідне рівняння дає:

$$0+\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\equiv 0.$$

Таким чином, $y_1=x$ є одним з розв'язків ФСР.

Другий розв'язок ФСР знаходимо за формулою (6.6), враховуючи, що в заданому ДР $p(x)=\frac{1}{x}$.

$$y_2=y_1\int\frac{\mathrm{e}^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx=x\int\frac{\mathrm{e}^{-\int\frac{dx}{x}}}{x^2}dx=x\int\frac{\mathrm{e}^{-\ln x}}{x^2}dx=$$

$$=x\int\frac{x^{-1}}{x^2}dx=x\int x^{-3}dx=-x\frac{x^{-2}}{2}=-x\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2x}$$

За теоремою 6.3 записуємо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР:

$$\overline{y}=C_1x+C_2^*\left(-\frac{1}{2x}\right)=C_1x-\frac{C_2^*}{2}\cdot\frac{1}{x}$$

Цей запис можна спростити, введенням позначення: $-C_2^*/2=C_2$.

$$\left|\overline{y}=C_1x+C_2\frac{1}{x}\right.$$

Отже, знайдено загальний розв'язок відповідного лінійного ДР. За методом варіації довільних сталих частинний розв'язок неоднорідного (заданого) ДР будемо шукати у вигляді:

1) $\tilde{y}=U_1x+U_2\frac{1}{x}$.

Враховуючи, що $y_1=x,\ y_2=\frac{1}{x}$, запишемо систему (6.9):

$$\begin{cases}U_1'x+U_2'\frac{1}{x}=0, \\ U_1'-U_2'\frac{1}{x^2}=x.\end{cases}\left|\begin{matrix}\frac{1}{x}\\ -x\end{matrix}\right.\Rightarrow\begin{cases}2U_1'=x\\ 2U_2'\frac{1}{x}=-x^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1'=\frac{x}{2}\\ U_2'=-\frac{x^3}{2}\end{cases}$$

Під час запису системи враховано, що $x'=1,\ \left(1/x\right)'=-1/x^2$.

При розв'язку спочатку перше рівняння системи помножили на "$1/x$", після чого рівняння склали. Потім друге рівняння помножили на "$-x$" і рівняння склали.

Знаходимо тепер функції U_1, U_2 інтегруванням:

$$U_1=\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2}{4};\ U_2=-\frac{1}{2}\int x^3dx=-\frac{x^4}{8}.$$

Отже, частинний розв'язок (1) неоднорідного ДР має вид:

$$\tilde{y}=\frac{x^2}{4}x+\left(-\frac{x^4}{8}\right)\frac{1}{x}\Rightarrow\tilde{y}=\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{8}\Rightarrow\left|\tilde{y}=\frac{x^3}{8}\right..$$

Загальним розв'язком заданого рівняння буде:

$$\boxed{y=\overline{y}+\tilde{y}=C_1x+C_2\frac{1}{x}+\frac{x^3}{8}}$$

Похідна від цього розв'язку:

$$y'=C_1-\frac{C_2}{x^2}+\frac{3}{8}x^2.$$

Підставимо в два останні співвідношення числові значення $x,\ y$ і y' з початкових умов $\left(x=1,\ y=\frac{9}{8},\ y'=\frac{3}{8}\right)$. Одержимо систему рівнянь, з якої знайдемо значення сталих C_1, C_2.

$$\begin{cases}\frac{9}{8}=C_1+C_2+\frac{1}{8}\\ \frac{3}{8}=C_1-C_2+\frac{3}{8}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_1-C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{2}\\ C_2=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Вносячи значення довільних сталих в загальний розв'язок, остаточно одержимо:

$$\boxed{y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}+\frac{x^3}{4}\right)}$$

Це і є розв'язок поставленої задачі Коші.

Приклад 35. Знайти загальний розв'язок ДР: $y''+y=\operatorname{tg}x.$

Легко бачити, що частинними розв'язками ФСР є:

$y_1=\sin x,\ y_2=\cos x.$

Тоді загальний розв'язок відповідного однорідного ДР:

$$\overline{y}=C_1\sin x+C_2\cos x$$

Частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо в виді:

$\tilde{y}=U_1\sin x+U_2\cos x$.

Розв'яжемо систему (6.9), враховуючи вигляд ФСР:

$$\begin{cases}U_1'\sin x+U_2'\cos x=0 & \left|\sin x\right|\cos x\\ U_1'\cos x-U_2'\sin x=\operatorname{tg}x & \left|\cos x\right|-\sin x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1'=\operatorname{tg}x\cos x=\sin x\\ U_2'=-\operatorname{tg}x\sin x=\cos x-\frac{1}{\cos x}\end{cases}$$

При знаходженні U_1' перше рівняння системи помножили на $\sin x,$ а друге – на $\cos x$ і результати склали. При знаходженні U_2' перше рівняння системи помножили на $\cos x,$ друге – на $-\sin x$ і результати теж склали. Далі проводимо інтегрування.

$U_1=\int\sin x dx=-\cos x,$

$U_2=\int\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)dx=\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

Отже, можемо записати частинний розв'язок неоднорідного ДР.

$\tilde{y}=U_1\sin x+U_2\cos x=-\cos x\sin x+\left(\sin x-\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x.$

Після спрощення:

$$\tilde{y}=-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

Нарешті, за теоремою 6.4, остаточно одержимо:

$$\boxed{y=C_1\sin x+C_2\cos x-\cos x\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.}$$

6.4. Лінійні однорідні ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Названі диференціальні рівняння мають вид:

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{6.11}$$

$$L(y) = 0\,, \tag{6.11*}$$

де p і q – деякі дійсні числові коефіцієнти ($p, q \in \mathbb{R}$), а L – лінійний диференціальний оператор, який тепер виглядає так:

$$L = \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q \right\}. \tag{6.12}$$

Відмітимо, що записані ДР є частинними випадками ДР(6.2) зі змінними коефіцієнтами, тому всі результати, одержані для ДР (6.2) автоматично переносяться і на ДР(6.11).

Не дивлячись на те, що записи операторів (6.3) і (6.12) майже ідентичні, в операторі (6.12) з'являється допоміжна властивість:

$$L\left(\mathrm{e}^{kx}\right) = \mathrm{e}^{kx}P_2(k), \quad P_2(k) = k^2 + pk + q, \tag{6.13}$$

де $P_2(k)$– многочлен другого степеня відносно k з тими ж коефіцієнтами, що і ДР(6.11). Дійсно:

$$L\left(\mathrm{e}^{kx}\right) = \frac{d^2(\mathrm{e}^{kx})}{dx^2} + p\frac{d(\mathrm{e}^{kx})}{dx} + q\mathrm{e}^{kx} = k^2\mathrm{e}^{kx} + pk\mathrm{e}^{kx} + q\mathrm{e}^{kx} =$$
$$= \mathrm{e}^{kx}\left(k^2 + pk + q\right)$$

Многочлен $P_2(k)$ називають характеристичним многочленом, а рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{6.14}$$

– характеристичним рівнянням (ХР).

Порівнюючи записи (6.11) і (6.14) прийдемо до наступного правила. **Щоб скласти ХР треба в заданому ДР(6.11) замінити y'' на k^2, y' на k і y на 1**.

Наступна теорема, не дивлячись на простоту, має провідне значення в теорії інтегрування лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами.

<u>Теорема 6.5.</u> Якщо k_0 є коренем характеристичного рівняння, то $e^{k_0 x}$ є частинним розв'язком диференціального рівняння $y'' + py' + qy = 0$.

Доведення. Нехай $k_0^2 + pk_0 + q = 0$, тобто k_0 є коренем ХР. Тоді маємо:

$$L\left(e^{k_0 x}\right) = e^{k_0 x}\left(k_0^2 + pk_0 + q\right) \equiv 0 \Rightarrow L\left(e^{k_0 x}\right) \equiv 0,$$

А це і значить, що $e^{k_0 x}$ є частинним розв'язком ДР(6.11).

Розглянемо **три можливих випадки розв'язку ХР**.

<u>Випадок 1</u>. Корені ХР дійсні і різні: $k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Тоді за теоремою 5 функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$$

будуть частинними розв'язками ДР(6.11). Так, як $k_1 \neq k_2$, то:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} = \mathrm{var},$$

тобто, частинні розв'язки y_1 і y_2 утворюють фундаментальну систему (ФСР). Отже, загальним розв'язком на основі теореми 6.3 є вираз:

$$\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}} \tag{6.15}$$

<u>Випадок 2</u>. Корені ХР дійсні, але однакові: $k_1 = k_2 = k,\ k \in \mathbb{R}$. За теоремою 6.5

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{kx}, \quad y_2 = e^{k_2 x} = e^{kx}$$

– частинні розв'язки ДР(6.11), але вони однакові, їх відношення є стала величина (одиниця), тому вони не утворюють ФСР. Для ФСР маємо лише один частинний розв'язок ($y_1 = e^{kx}$). Тоді другий частинний розв'язок знайдемо із співвідношення (6):

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx = e^{kx} \int \frac{e^{-p\int dx}}{e^{2kx}} dx = e^{kx} \int \frac{dx}{e^{px} e^{2kx}} =$$

$$= e^{kx} \int dx = x e^{kx}.$$

Тут враховано, що за теоремою Вієта: $2k = k_1 + k_2 = -p$, $\mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{2kx} =$ $= \mathrm{e}^{px}\mathrm{e}^{-px} = 1$. Отже, маємо таку ФСР:

$$y_1 = \mathrm{e}^{kx}, \quad y_2 = x\mathrm{e}^{kx}.$$

На основі теореми 6.3 загальним розв'язком в цьому випадку є вираз:

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{kx}\left(C_1 + C_2 x\right)} \tag{6.16}$$

<u>Випадок 3</u>. Коренями ХР є комплексні спряжені числа:

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

При цьому частинні розв'язки ДР(6.11) можна записати так:

$$y_1^* = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta i)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\beta x i}, \quad y_2^* = \mathrm{e}^{(\alpha-\beta i)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{-\beta x i}.$$

Як бачимо, їх відношення не є сталою величиною і, значить, вони утворюють ФСР. Але вони включають комплексні числа. Щоб їх уникнути, застосуємо формули Ейлера (друга з них є наслідком першої при заміні "β" на "$-\beta$"):

$$\mathrm{e}^{\beta x i} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad \mathrm{e}^{-\beta x i} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Розглядаючи їх, як систему, знайдемо:

$$\cos\beta x = \frac{\mathrm{e}^{\beta x i} + \mathrm{e}^{-\beta x i}}{2}, \quad \sin\beta x = \frac{\mathrm{e}^{\beta x i} - \mathrm{e}^{-\beta x i}}{2i}.$$

Запишемо тепер лінійні комбінації розв'язків y_1^* і y_2^*, які на основі теореми 6.1 теж є частинними розв'язками ДР(6.11), а їх лінійна незалежність гарантує утворення ФСР:

$$y_1 = \frac{1}{2}y_1^* + \frac{1}{2}y_2^* = \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{\mathrm{e}^{\beta x i} + \mathrm{e}^{-\beta x i}}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_2 = \frac{1}{2i}y_1^* - \frac{1}{2i}y_2^* = \mathrm{e}^{\alpha x}\frac{\mathrm{e}^{\beta x i} - \mathrm{e}^{-\beta x i}}{2i} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Розв'язки y_1 і y_2 на відміну від y_1^* і y_2^* не включають комплексних чисел. Загальним розв'язком на основі теореми 6.3 буде:

$$\boxed{y = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right)} \tag{6.17}$$

Якщо корені ХР чисто уявні $k_{1,2} = \pm\beta i$ $(\alpha = 0)$, то:

$$\boxed{y = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x} \tag{6.18}$$

З викладеного витікає наступний порядок знаходження загального розв'язку однорідного ДР(6.11):

– по заданому диференціальному рівнянню складаємо характеристичне (ХР) та знаходимо його корені;
– по виду коренів характеристичного рівняння (1 – дійсні різні, 2 – дійсні однакові, 3 – комплексні) встановлюємо фундаментальну систему розв'язків (ФСР);
– на основі теореми 6.3 записуємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Нагадаємо, що при розв'язку задачі Коші допоміжно треба:
– з початкових умов знайти значення довільних сталих C_1, C_2;
– підставити знайдені числа в загальний розв'язок.

Приклад 36. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Складаємо характеристичне рівняння:
$k^2 - 3k + 2 = 0$.
За теоремою Вієта: $k_1 + k_2 = 3;\ k_1 k_2 = 2 \Rightarrow k_1 = 1,\ \ k_2 = 2$
(корені ХР дійсні і різні – <u>випадок 1</u>).

ФСР: $y_1 = \mathrm{e}^x;\ y_2 = \mathrm{e}^{2x}$.

Загальний розв'язок (ЗР):

$$\boxed{y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{2x}}$$

Приклад 37. Розв'язати задачу Коші: $y'' + 4y' + 4y = 0$,
$y(0) = 2,\ y'(0) = 5$.

ХР: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k+2)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = -2,\ k_2 = -2$
(корені ХР дійсні і однакові – <u>випадок 2</u>).

ФСР: $y_1 = \mathrm{e}^{-2x};\ \ y_2 = x\mathrm{e}^{-2x}$.

Загальний розв'язок і його похідна:
$y = \mathrm{e}^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right);\ \ y' = C_2\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}\left(C_1 + C_2 x\right)$.

З початкових умов: $\begin{cases} 2 = C_1 \\ 5 = C_2 - 2C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = 9 \end{cases}$

Розв'язок задачі Коші: $\boxed{y = \mathrm{e}^{-2x}\left(2 + 9x\right)}$

Приклад 38. Розв'язати задачу Коші:

$$y'' - 2y' + 10y = 0, \quad y(0) = 6, \; y'(0) = 0.$$

ХР: $k^2 - 2k + 10 = 0 \;\Rightarrow\; k_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i$ [1)]

(<u>випадок 3</u> комплексних коренів).

ФСР: $y_1 = \mathrm{e}^x \cos 3x; \quad y_2 = \mathrm{e}^x \sin 3x.$

Загальний розв'язок і його похідна:

$$y = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right);$$

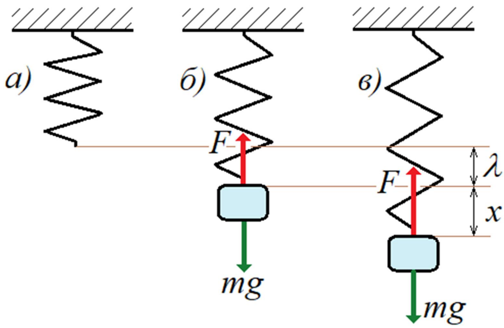
$$y' = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + \mathrm{e}^x \left(3C_2 \cos 3x - 3C_1 \sin 3x\right).$$

З початкових умов: $\begin{cases} 6 = C_1 \\ 0 = C_1 + 3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 6 \\ C_2 = -2 \end{cases}$

Розв'язок задачі Коші:

$$\boxed{y = 2\mathrm{e}^x \left(3\cos 3x - \sin 3x\right)}$$

Приклад 39. Дослідити коливання важка, підвішеного на пружині.



На рисунку зображена пружина у вільному стані $(а)$, пружина з нерухомим важком у стані рівноваги $(б)$ а також пружина з рухомим важком $(в)$, коли його відхилення від положення рівноваги складає $x\,м$.

[1)] використана формула для зведеного квадратного рівняння:

$$x^2 + px + q = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Сила пружності $F[H]$ обчислюється за формулою:
$F = C\ell,$
де: $C[H/м]$ – жорсткість пружини; $\ell[м]$ – її деформація.
Різницю довжин пружини в стані рівноваги і вільному стані називають усадкою пружини – $\lambda[м]$.
В позиції $(б)$ сила пружності і сила ваги врівноважені, тому:
$F = mg \Rightarrow C\lambda = mg \Rightarrow \lambda = mg/C.$
За другим законом Ньютона зі схеми $(в)$ витікає:
$m\ddot{x} = -C(\lambda + x) + mg = -C\lambda - Cx + mg.$
Враховуючи, що $mg - C\lambda = 0,$ отримаємо:
$m\ddot{x} = -Cx \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\ddot{x} + \nu^2 x = 0},\; \nu = \sqrt{C/m}.$
Одержано лінійне ДР зі сталими коефіцієнтами. При його розв'язку врахуємо, що крапка означає похідну за часом.
ХР: $k^2 + \nu^2 = 0 \Rightarrow k^2 = -\nu^2 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\nu i$ (випадок чисто уявних коренів).
ФСР: $x_1 = \cos\nu t;\quad x_2 = \sin\nu t.$
ЗР: $x = C_1\cos\nu t + C_2\sin\nu t.$
Введемо позначення: $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2};\; \sin\varphi = C_1/A;\; \cos\varphi = C_2/A.$
Далі виконаємо елементарні перетворення:

$$x = A\left(\frac{C_1}{A}\cos\nu t + \frac{C_2}{A}\sin\nu t\right) = A\left(\sin\varphi\cos\nu t + \cos\varphi\sin\nu t\right) = \\ = A\sin\left(\nu t + \varphi\right).$$

Остаточно загальний розв'язок ДР запишеться у вигляді:

$$\boxed{x = A\sin\left(\nu t + \varphi\right)}$$

Тут A – амплітуда коливань, ν – частота коливань, φ – початкова фаза коливань. Параметри A і φ знаходять з початкових умов: $x = x_0,\;\; \dot{x} = \dot{x}_0$ при $t = 0.$

$$\begin{cases} x_0 = A\sin\varphi \\ \dot{x}_0 = A\nu\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_0/A)^2 + (\dot{x}_0/A\nu)^2 = 1 \\ \nu x_0/\dot{x}_0 = \operatorname{tg}\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\nu)^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\left(\nu x_0/\dot{x}_0\right) \end{cases}$$

Отже, в залежності від початкових умов, важок, підвішений на пружині, буде рухатися за гармонічним законом відносно положення рівноваги (*при* $A \neq 0$), або знаходитися в стані рівноваги (*при* $A = 0$).

6.5. Лінійні однорідні ДР вищих порядків зі сталими коефіцієнтами

Лінійне однорідне ДР n-го порядку має вигляд:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \;\; p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, \dots \quad (6.19)$$

Будемо вважати його ДР вищого порядку, якщо $n > 2$.

По аналогії з виразом (6.14) запишемо характеристичне рівняння, як алгебраїчне n-го степеня з тими ж коефіцієнтами, що і ДР (6.19):

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_{n-1} k + p_n = 0. \quad (6.20)$$

Очевидно, що для складання ХР (6.20) треба замінити в рівнянні (6.19) $y^{(\mu)}$ на k^{μ} $(\mu = 1, 2, 3, \dots, n)$ і y на одиницю.

Фундаментальна система розв'язків для ДР (6.19) включає n лінійно незалежних частинних розв'язків цього ДР і залежить від виду коренів ХР. Відповідність частинних розв'язків ДР кореням ХР задається наступними правилами побудови ФСР:

1) кожному дійсному однократному кореню ХР $k = k_0$ відповідає один розв'язок ФСР

$$y_1 = \mathrm{e}^{k_0 x}; \quad (6.21)$$

2) кожному дійсному кратному кореню ХР $k = k_0$ кратності m відповідає m розв'язків ФСР

$$y_1 = \mathrm{e}^{k_0 x}, \quad y_2 = x\mathrm{e}^{k_0 x}, \quad y_3 = x^2 \mathrm{e}^{k_0 x}, \dots, \quad y_m = x^{m-1} \mathrm{e}^{k_0 x}; \quad (6.22)$$

3) кожній парі комплексних спряжених однократних коренів ХР $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ відповідає два частинних розв'язки ФСР:

$$\begin{aligned} y_1 &= \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2 &= \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x; \end{aligned} \quad (6.23)$$

4) кожній парі комплексних спряжених коренів $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ХР кратності m відповідає $2m$ частинних розв'язків ФСР:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \;\; y_3 = x\mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \;\; y_5 = x^2 \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \dots$$
$$y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \;\; y_4 = x\mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \;\; y_6 = x^2 \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$$

$$\begin{aligned} &\dots, \;\; y_{2m-1} = x^{m-1} \mathrm{e}^{\alpha x} \cos \beta x, \\ &\dots, \;\; y_{2m} = x^{m-1} \mathrm{e}^{\alpha x} \sin \beta x; \end{aligned} \quad (6.24)$$

Знаходження частинних розв'язків за приведеними правилами гарантує утворення ФСР. Але, як і у випадку ДР 2-го порядку, лінійна залежність (незалежність) частинних розв'язків для ДР n-го порядку може бути окремо встановлена. Це можна зробити, наприклад, за допомогою визначника Вронського, який по аналогії з виразом (6.4) можна записати так:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (6.25)$$

При наявності ФСР загальний розв'язок однорідного ДР (6.19) формують у відповідності до теореми 6.3 про структуру загального розв'язку, яку в даному випадку можна записати так:

$$\boldsymbol{y = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n.} \qquad (6.26)$$

Отже, загальний розв'язок ДР(6.19) диктується співвідношенням (6.26). Якщо ж розв'язується задачі Коші, то, як відомо, допоміжно задаються початкові умови, які для ДР n-го порядку мають вид:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad y''(x_0) = y_0'', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (6.27)$$

Приклад 40. Розв'язати задачу Коші: $y''' - 2y'' + y' = 0,$

$$y(0) = 5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 3.$$

ХР: $k^3 - 2k^2 + k = 0 \Rightarrow k\left(k^2 - 2k + 1\right) = 0 \Rightarrow k\left(k-1\right)^2 = 0,$

$k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 1.$

Всі корені дійсні. Один з них однократний, а другий – двократний, тому використовуємо далі правила (6.21) і (6.22).

ФСР: $y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1, \quad y_2 = \mathrm{e}^x, \quad y_3 = x\mathrm{e}^x.$

За теоремою про структуру загального розв'язку (6.26) маємо:

$y = C_1 + \mathrm{e}^x\left(C_2 + C_3 x\right)$

Знаходимо першу та другу похідні одержаного виразу:

$y' = \mathrm{e}^x\left(C_2 + C_3 x\right) + C_3\mathrm{e}^x,$

$y'' = \mathrm{e}^x\left(C_2 + C_3 x\right) + 2C_3\mathrm{e}^x.$

Знаходимо довільні сталі, для чого використовуємо початкові умови та вирази для $y,\ y'$ та y''.

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_2 + C_3 \\ 3 = C_2 + 2C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = 3, \\ C_2 = -3, \\ C_1 = 8. \end{cases}$$

Отже, розв'язком задачі Коші є:

$$\boxed{y = 8 + 3e^x\left(x - 1\right)}$$

Приклад 41. Знайти загальний розв'язок ДР: $y^{(4)} - y = 0.$

ХР: $k^4 - 1 = 0 \Rightarrow k^4 = 1$

Представимо одиницю, як комплексне число:

$k^4 = \cos 0 + i \sin 0.$

Маємо формулу для добування кореня з комплексного числа:

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi\mu}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\mu}{n}\right),\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Враховуючи, що в нашому випадку модуль і аргумент, відповідно, дорівнюють $r = 1,\ \varphi = 0,$ вираз для знаходження коренів ХР записується в такому виді:

$k = \sqrt[4]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{\pi\mu}{2} + i\sin\frac{\pi\mu}{2},\quad \mu = 0, 1, 2, 3.$ Звідси:

$$k\big|_{\mu=0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1, \qquad k\big|_{\mu=1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$k\big|_{\mu=2} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, \qquad k\big|_{\mu=3} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,$$

(порівняйте з прикладом 29).

Знайдено два різних дійсних кореня $k_{1,2} = \pm 1$ і пару чисто уявних спряжених коренів $k_{1,2} = \pm i.$ Використовуємо правила (6.21), (6.23) для складання ФСР та записуємо загальний розв'язок.

ФСР: $y_1 = e^x,\quad y_2 = e^{-x},\quad y_3 = \cos x,\quad y_4 = \sin x.$

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x}$$

Приклад 42. $y^{(4)} + y = 0$

ХР: $k^4 + 1 = 0 \Rightarrow k^4 = -1 = \cos\pi + i\sin\pi.$

$$k=\sqrt[4]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\tfrac{\pi+2\pi\mu}{4}+i\sin\tfrac{\pi+2\pi\mu}{4},\quad \mu=0,1,2,3.$$

$$k\big|_{\mu=0}=\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4}=\tfrac{\sqrt2}{2}+\tfrac{\sqrt2}{2}i,\qquad k\big|_{\mu=1}=\cos\tfrac{3\pi}{4}+i\sin\tfrac{3\pi}{4}=-\tfrac{\sqrt2}{2}+\tfrac{\sqrt2}{2}i,$$

$$k\big|_{\mu=2}=\cos\tfrac{5\pi}{4}+i\sin\tfrac{5\pi}{4}=-\tfrac{\sqrt2}{2}-\tfrac{\sqrt2}{2}i,\ k\big|_{\mu=3}=\cos\tfrac{7\pi}{4}+i\sin\tfrac{7\pi}{4}=\tfrac{\sqrt2}{2}-\tfrac{\sqrt2}{2}i.$$

Одержано дві пари комплексних спряжених однократних коренів: $k_{1,2}=\tfrac{\sqrt2}{2}\pm\tfrac{\sqrt2}{2}i,\ k_{3,4}=-\tfrac{\sqrt2}{2}\pm\tfrac{\sqrt2}{2}i.$ За правилом (6.23):

ФСР: $y_1=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt2}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt2}{2}x,\quad y_2=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt2}{2}x}\sin\tfrac{\sqrt2}{2}x,$

$y_3=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\cos\tfrac{\sqrt2}{2}x,\quad y_4=\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\sin\tfrac{\sqrt2}{2}x$. Отже:

$$\boxed{y=\mathrm{e}^{\frac{\sqrt2}{2}x}\left(C_1\cos\tfrac{\sqrt2}{2}x+C_2\sin\tfrac{\sqrt2}{2}x\right)+\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\left(C_3\cos\tfrac{\sqrt2}{2}x+C_4\sin\tfrac{\sqrt2}{2}x\right)}$$

Приклад 43. $64y^{(8)}+48y^{(6)}+12y^{(4)}+y''=0$

ХР: $64k^8+48k^6+12k^4+k^2=0\Rightarrow k^2\left(64k^6+48k^4+12k^2+1\right)=0.$

$k^2\left(4k^2+1\right)^3=0$ [2)]

Маємо дійсний двократний корінь $k=0$ та пару чисто уявних трикратних коренів $k=\pm\frac{1}{2}i$, тобто:

$$k_{1,2}=0,\quad k_{3,4}=\pm\tfrac12 i,\quad k_{5,6}=\pm\tfrac12 i,\quad k_{7,8}=\pm\tfrac12 i.$$

Для складання фундаментальної системи розв'язків слід застосувати правила (6.22) та (6.24).

ФСР: $y_1=\mathrm{e}^{0x}=1,\qquad y_2=x\mathrm{e}^{0x}=x,$

$y_3=\cos\tfrac{x}{2},\qquad y_5=x\cos\tfrac{x}{2},\qquad y_7=x^2\cos\tfrac{x}{2},$

$y_4=\sin\tfrac{x}{2},\qquad y_6=x\sin\tfrac{x}{2},\qquad y_8=x^2\sin\tfrac{x}{2}.$

Загальний розв'язок ДР:

$$\boxed{y=C_1+C_2x+\left(C_3+C_5x+C_7x^2\right)\cos\tfrac{x}{2}+\left(C_4+C_6x+C_8x^2\right)\sin\tfrac{x}{2}}$$

[2)] Використана формула скороченого множення: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

6.6. Метод невизначених коефіцієнтів для лінійних неоднорідних ДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

В загальному вигляді назване ДР записується так:

$$y'' + py' + q = f(x); \quad p, q \in \mathbb{R}. \tag{6.28}$$

За теоремою 6.4 загальним розв'язком цього рівняння є сума загального розв'язку відповідного однорідного ДР та частинного розв'язку неоднорідного. Знаходження загального розв'язку однорідного ДР розглянуто вище. Що стосується частинного розв'язку неоднорідного, то його теж можна знайти вже розглянутим методом варіації довільних сталих при будь-якому виді правої частини ДР. Але цей метод є не зовсім зручним, так як передбачає обчислення інтегралів, які, як відомо, не завжди беруться в елементарних функціях. Далі розглянемо метод, який можна застосовувати хоча і не для всіх видів правої частини ДР, але який є простішим за метод варіації довільних сталих за рахунок виключення процесу інтегрування. Цей метод (невизначених коефіцієнтів) ґрунтується на тому, що деякі функції при диференціюванні не змінюють свого виду. Серед них, наприклад, експоненціальна функція $[(a\mathrm{e}^x)' = a\mathrm{e}^x]$, тригонометричний многочлен першого степеня $[(a\cos x + b\sin x)' = b\cos x - a\sin x]$ та ін. Тому, якщо права частина ДР буде однією з таких функцій, то розв'язок слід шукати у виді функції того ж типу. Залишається лише підібрати числові коефіцієнти таким чином, щоб підстановка у ліву частину ДР давала тотожність.

Розглянемо кілька випадків можливого застосування методу невизначених коефіцієнтів.

<u>Випадок 1</u>. Права частина ДР – експоненціальна функція: $f(x) = a\mathrm{e}^{\nu x}; \quad a, \nu \in \mathbb{R}$, тобто:

$$y'' + py' + qy = a\mathrm{e}^{\nu x}. \tag{6.29}$$

Будемо шукати частинний розв'язок у виді:

$$\tilde{y} = U\mathrm{e}^{\nu x}, \tag{6.30}$$

де U – деяка функція, яку слід вибрати так, щоб при підстановці в ДР(6.28) одержати тотожність.

Щоб підставити вираз (6.30) в ДР (6.29), помножимо цей вираз та його похідні $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ на відповідні коефіцієнти q, p, 1, підсумуємо результат і прирівняємо його до правої частини ДР(6.29):

$$\begin{array}{r|l} q & \tilde{y} = U\mathrm{e}^{\nu x} \\ p & \tilde{y}' = U'\mathrm{e}^{\nu x} + \nu U\mathrm{e}^{\nu x} \\ 1 & \tilde{y}'' = U''\mathrm{e}^{\nu x} + \nu U'\mathrm{e}^{\nu x} + \nu U'\mathrm{e}^{\nu x} + \nu^2 U\mathrm{e}^{\nu x} \end{array}$$

$$U''\mathrm{e}^{\nu x} + 2\nu U'\mathrm{e}^{\nu x} + \nu^2 U\mathrm{e}^{\nu x} + pU'\mathrm{e}^{\nu x} + p\nu U\mathrm{e}^{\nu x} + qU\mathrm{e}^{\nu x} = a\mathrm{e}^{\nu x}$$

Скоротимо одержаний вираз на $\mathrm{e}^{\nu x}$:

$$U'' + \underline{2\nu U'} + \overset{\frown}{\nu^2 U} + \underline{pU'} + \overset{\frown}{p\nu U} + \overset{\frown}{qU} = a$$

Винесемо за дужки U' та U (подібні члени відмічені, відповідно, нижніми рисками та верхніми дужками):

$$U'' + (2\nu + p)U' + (\nu^2 + p\nu + q)U = a \qquad (6.31)$$

1) Нехай $\nu^2 + p\nu + q \neq 0$, тобто ν – не є коренем ХР. Тоді, щоб рівняння (6.31) перетворилось в тотожність, достатньо прийняти $U = A = \mathrm{const}$, $U' = 0$, $U'' = 0$. З рівняння (6.31) маємо

$$(\nu^2 + p\nu + q)A = a \Rightarrow \boxed{A = \frac{a}{\nu^2 + p\nu + q}}$$

і частинним розв'язком (6.30) буде:

$$\boxed{\tilde{y} = A\mathrm{e}^{\nu x}}$$

2) Нехай $\nu^2 + p\nu + q = 0$, $2\nu + p \neq 0$, тобто ν – однократний корінь ХР. Тоді доцільно взяти $U = Ax$, $U' = A$, $U'' = 0$, після чого (6.31):

$$(2\nu + p)A = a \Rightarrow \boxed{A = \frac{a}{2\nu + p}},$$

а частинним розв'язком (6.30) є:

$$\boxed{\tilde{y} = Ax\mathrm{e}^{\nu x}}$$

3) Нехай, тепер, $\nu^2 + p\nu + q = 0,\ 2\nu + p = 0,$ тобто $\nu -$ двократний корінь ХР. Тоді приймемо $U = Ax^2,\ U' = 2Ax,\ U'' = 2A.$ Із (6.31) одержуємо

$$2A = a \Rightarrow \boxed{A = \frac{a}{2}},$$

а шуканий частинний розв'язок запишеться так:

$$\boxed{\tilde{y} = Ax^2 \mathrm{e}^{\nu x}}$$

Отже, якщо права частина ДР (6.28) – експоненціальна функція, то його частинний розв'язок слід приймати у вигляді:

$$\boxed{\tilde{y} = \begin{cases} A\mathrm{e}^{\nu x}, & \text{якщо } \nu \text{ не є коренем ХР,} \\ Ax\mathrm{e}^{\nu x}, & \text{якщо } \nu - \text{однократний корінь ХР,} \\ Ax^2\mathrm{e}^{\nu x}, & \text{якщо } \nu - \text{двократний корінь ХР,} \end{cases}} \tag{6.32}$$

де, відповідно:

$$A = \begin{cases} \dfrac{a}{\nu^2 + p\nu + q}, & \text{якщо } \nu \text{ не є коренем ХР,} \\ \dfrac{a}{2\nu + p}, & \text{якщо } \nu - \text{однократний корінь ХР,} \\ \dfrac{a}{2}, & \text{якщо } \nu - \text{двократний корінь ХР.} \end{cases} \tag{6.33}$$

При пошуку розв'язку ДР(6.29) можна вибрати необхідний варіант (6.32), підставити $\tilde{y}$ і похідні $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ в ДР (6.29) та із одержаного рівняння знайти невідомий коефіцієнт A, але простіше знайти цей коефіцієнт за відповідною формулою (6.33).

Приклад 44. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{3x}.$

Відповідне однорідне ДР:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

ХР: $k^2 - 4k + 3 = 0.$ За теоремою Вієта: $k_1 = 1;\ k_2 = 3.$

ФСР: $y_1 = e^x$; $y_2 = e^{3x}$.

Загальний розв'язок відповідного однорідного ДР

ЗР$_{\text{од}}$: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$

Так, як $\nu = 3 -$ однократний корінь ХР, частинний розв'язок неоднорідного рівняння (ЧР$_{\text{нд}}$) шукаємо у вигляді (6.32): $\tilde{y} = Axe^{3x}$.

$$\begin{array}{r|l} 3 & \tilde{y} = Axe^{3x} \\ -4 & \tilde{y}' = Ae^{3x} + 3Axe^{3x} \\ 1 & \tilde{y}'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 9Axe^{3x} \end{array}$$

$$6Ae^{3x} + \cancel{9Axe^{3x}} - 4Ae^{3x} \cancel{-12Axe^{3x}} + \cancel{3Axe^{3x}} = 2e^{3x}$$

Скорочуємо експоненту та зводимо подібні. Одержимо:
$6A - 4A = 2 \Rightarrow 2A = 2 \Rightarrow A = 1$.

ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{y} = xe^{3x}$

Загальний розв'язок заданого ДР запишемо у відповідності до теореми (6.4):

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + xe^{3x}}$$

Приклад 45. Знайти загальний розв'язок ДР: $5y'' + 2y' = 3e^{2x}$.

Відповідне однорідне ДР:

$5y'' + 2y' = 0$.

ХР: $5k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k(5k+2) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$; $k_2 = -\frac{2}{5}$.

ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1$; $y_2 = e^{-\frac{2}{5}x}$.

ЗР$_{\text{од}}$: $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{-\frac{2}{5}x}$

Степінь $\nu = 2$ не є коренем ХР, тому частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо в виді (6.32):
$\tilde{y} = Ae^{2x}$.

Порівняємо задане ДР $y'' + \frac{2}{5}y' + 0y = \frac{3}{5}e^{2x}$ з ДР в загальному виді $y'' + py' + qy = ae^{\nu x}$. Маємо: $p = \frac{2}{5}$; $q = 0$; $a = \frac{3}{5}$; $\nu = 2$. Тоді (6.33):

$$A = \frac{a}{\nu^2 + p\nu + q} = \frac{\frac{3}{5}}{2^2 + \frac{2}{5}\cdot 2 + 0} = \frac{3}{20+4} = \frac{1}{8}.$$

ЧР$_{нд}$: $\tilde{y} = \frac{1}{8}e^{2x}$

Отже, за теоремою (6.4):

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{-\frac{2}{5}x} + \frac{1}{8}e^{2x}}$$

Приклад 46. Розв'язати задачу Коші: $y'' - 2y' + y = 12e^x$,
$y(0) = 3,\ y'(0) = 3.$

Відповідне однорідне ДР:

$y'' - 2y' + y = 0$

ХР: $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 1;\ k_2 = 1.$

ФСР: $y_1 = e^x;\ y_2 = xe^x.$

ЗР$_{од}$: $\bar{y} = e^x(C_1 + C_2 x)$

Так, як $\nu = 1$ є двократним коренем ХР, то частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо в виді (23):

$\tilde{y} = Ax^2 e^x$.

Тут (6.33): $A = \frac{a}{2} = \frac{12}{2} = 6.$ Отже:

ЧР$_{нд}$: $\tilde{y} = 6x^2 e^x$

ЗР: $\boxed{y = e^x(C_1 + C_2 x) + 6x^2 e^x}$

Похідна від ЗР дорівнює:

$y' = e^x(C_1 + C_2 x) + C_2 e^x + 12xe^x + 6x^2 e^x$

Знаходимо $C_1,\ C_2$ з початкових умов:

$$\begin{cases} 3 = C_1 \\ 3 = C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язок задачі Коші: $y = 3e^x + 6x^2 e^x.$ Остаточно:

$$\boxed{\boxed{y = 3(1 + 2x^2)e^x}}$$

Випадок 2. Права частина ДР – тригонометричний многочлен першого степеня: $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x;\ \ a, b, \omega \in \mathbb{R},$ тобто:

$$y'' + py' + qy = a\cos\omega x + b\sin\omega x. \tag{6.34}$$

У відповідності з задумом методу невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок ДР(6.34) шукаємо в тому ж виді, що і права частина:

$$\tilde{y} = A\cos\omega x + B\sin\omega x. \tag{6.35}$$

Обчислюємо похідні цього виразу.

$$\begin{array}{r|l} q & \tilde{y} = \underline{A\cos\omega x} + B\sin\omega x \\ p & \tilde{y}' = -A\omega\sin\omega x + \underline{B\omega\cos\omega x} \\ 1 & \tilde{y}'' = \underline{-A\omega^2\cos\omega x} - B\omega^2\sin\omega x \end{array}$$

При підстановці величин $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в ліву частину ДР(6.34) з підкреслених виразів винесемо за дужки $\cos\omega x$, а з непідкреслених – $\sin\omega x$.

$$\left(Aq + Bp\omega - A\omega^2\right)\cos\omega x + \left(Bq - Ap\omega - B\omega^2\right)\sin\omega x =$$

$$= a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos\omega x$ та $\sin\omega x$, одержимо:

$$\begin{cases} Aq + Bp\omega - A\omega^2 = a \\ Bq - Ap\omega - B\omega^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (q-\omega^2)A + p\omega B = a \\ -p\omega A + (q-\omega^2)B = b \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему відносно невідомих A і B за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} q-\omega^2 & p\omega \\ -p\omega & q-\omega^2 \end{vmatrix} = \left(q-\omega^2\right)^2 + p^2\omega^2; \tag{6.36}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a & p\omega \\ b & q-\omega^2 \end{vmatrix} = a\left(q-\omega^2\right) - bp\omega;$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} q-\omega^2 & a \\ -p\omega & b \end{vmatrix} = b\left(q-\omega^2\right) + ap\omega.$$

По виразу (6.36) бачимо, що розв'язок системи існує (притому єдиний), коли $q \neq \omega^2,\ \ p \neq 0$ (тоді $\Delta \neq 0$). За цих умов маємо:

$$A = \frac{a(q-\omega^2) - bp\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}; \qquad B = \frac{b(q-\omega^2) + ap\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2}. \tag{6.37}$$

Розглянемо, тепер, випадок, коли $q = \omega^2,\ p = 0$. Тоді ДР (6.34) перетвориться до виду:

$$y'' + \omega^2 y = a\cos\omega x + b\sin\omega x. \tag{6.38}$$

Коренями ХР $k^2 + \omega^2 = 0$ в цьому випадку будуть $k_{1,2} = \pm\omega i$, а вираз (6.35) $\overline{y} = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ стане розв'язком однорідного ДР $y'' + \omega^2 y = 0$. Підстановка цього виразу в ДР (6.38) не дасть змоги знайти коефіцієнти A, B, так, як ліва частина ДР (6.38) зведеться до нуля. Покажемо, що знаходження A і B буде можливим, якщо розв'язок ДР (6.38) шукати у виді (6.35), доповненим множником x, тобто:

$$\tilde{y} = x\overline{y} = x\left(A\cos\omega x + B\sin\omega x\right). \tag{6.39}$$

Обчислюємо похідні:

$$\begin{array}{c|l} \omega^2 & \tilde{y} = x\overline{y} \\ 0 & \tilde{y}' = \overline{y} + x\overline{y}' \\ 1 & \tilde{y}'' = \overline{y}' + \overline{y}' + x\overline{y}'' \end{array}$$

Підставимо $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в ліву частину ДР (6.38). Одержимо:

$$\overline{y}' + \overline{y}' + x\overline{y}'' + \omega^2 x\overline{y} =$$

$$= 2\overline{y}' + x\underbrace{(\overline{y}'' + \omega^2\overline{y})}_{0} = 2\overline{y}' = 2\left(-A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x\right)$$

Як бачимо, тепер ліва частина ДР (6.38) відмінна від нуля і це дає можливість знайти коефіцієнти A, B. Прирівняємо одержаний результат правій частині ДР (6.38):

$$2\left(-A\omega\sin\omega x + B\omega\cos\omega x\right) = a\cos\omega x + b\sin\omega x.$$

Далі, щоб знайти A, B, в записаному співвідношенні порівнюємо коефіцієнти при $\cos\omega x$ та $\sin\omega x$ зліва і справа:

$$\begin{cases} -2A\omega = b \\ 2B\omega = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{b}{2\omega}; \\ B = \dfrac{a}{2\omega}. \end{cases}$$

Таким чином, якщо права частина ДР – тригонометричний многочлен першого степеня (6.34), то частинний розв'язок цього ДР слід шукати в виді:

$$\boxed{\tilde{y}=\begin{cases}A\cos\omega x+B\sin\omega x, \text{ якщо } \omega i \text{ не є коренем ХР,}\\ x(A\cos\omega x+B\sin\omega x), \text{ якщо } \omega i-\text{корінь ХР,}\end{cases}} \tag{6.40}$$

де: $$A=\frac{a(q-\omega^2)-bp\omega}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2};\ B=\frac{b(q-\omega^2)+ap\omega}{(q-\omega^2)^2+p^2\omega^2},\ \text{якщо } \omega i \text{ не є коренем ХР,} \tag{6.41}$$

$$A=-\frac{b}{2\omega};\ B=\frac{a}{2\omega},\ \text{ якщо } \omega i-\text{корінь ХР.} \tag{6.42}$$

Приклад 47. Знайти загальний розв'язок ДР: $y''-7y'+10y=4\sin x$.

Відповідне однорідне ДР:

$y''-7y'+10y=0$.

ХР: $k^2-7k+10=0.$ За теоремою Вієта: $k_1=2,\ k_2=5.$

ФСР: $y_1=\mathrm{e}^{2x};\quad y_2=\mathrm{e}^{5x}.$

ЗР$_{\text{од}}$: $\boxed{\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{5x}}$

Так, як ωi не є коренем ХР, то частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо в виді (6.40):

$\tilde{y}=A\cos x+B\sin x.$

Коефіцієнти A, B можна знайти за формулами (6.41), або шляхом підстановки $\tilde{y},\ \tilde{y}',\ \tilde{y}''$ в задане ДР. Обчислимо похідні:

$$\begin{array}{r|l}10 & \tilde{y}=A\cos x+B\sin x\\ -7 & \tilde{y}'=-A\sin x+B\cos x\\ 1 & \tilde{y}''=-A\cos x-B\sin x\end{array}$$

Виконуємо підстановку:

$$(10A-7B-A)\cos x+(10B+7A-B)\sin x=4\sin x$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$, що дає систему:

$$\begin{cases}9A-7B=0;\\ 7A+9B=4.\end{cases}$$

Звідси маємо $A = 14/65$, $B = 18/65$ і, як наслідок:

ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{y} = \frac{2}{65}\left(7\cos x + 9\sin x\right)$

Загальним розв'язком заданого ДР (теорема 4) буде:

$$\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + \frac{2}{65}\left(7\cos x + 9\sin x\right)}$$

Приклад 48. Розв'язати задачу Коші: $y'' + 9y = \cos 3x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

Відповідне однорідне ДР:

$y'' + 9y = 0$.

ХР: $k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k^2 = -9 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i$.

ФСР: $y_1 = \cos 3x$; $y_2 = \sin 3x$.

ЗР$_{\text{од}}$: $\bar{y} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$

Так, як $3i$ є коренем ХР, то частинний розв'язок заданого ДР шукаємо в виді (6.40):

$\tilde{y} = x\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right)$

Коефіцієнти A, B знаходимо за формулами (6.42):

$$A = -\frac{b}{2\omega} = \frac{0}{2\cdot 3} = 0; \quad B = \frac{a}{2\omega} = \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{y} = \frac{x}{6}\sin 3x$

ЗР: $\boxed{y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{x}{6}\sin 3x}$

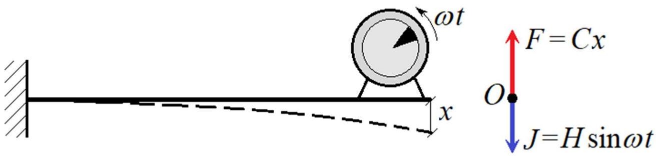
Похідна: $y' = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x + \frac{1}{6}\sin 3x + \frac{x}{2}\cos 3x$.

З початкових умов: $\begin{cases} 0 = C_1 \\ 3 = 3C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \end{cases}$

Із загального розв'язку, з врахуванням значень довільних сталих, одержимо:

$$\boxed{\boxed{y = \left(1 + \frac{x}{6}\right)\sin 3x}}$$

Приклад 49. Дослідити коливання електродвигуна з неврівноваженим ротором, встановленого на консолі (див. рисунок).



Схематично неврівноваженість ротора моделюється дебалансом, який при обертанні ротора створює силу інерції з проекцією на вертикальну вісь $J = H\sin\omega t$. Тут $H[H]$ – амплітудне значення сили інерції, $\omega[c^{-1}]$ – частота обертання ротора, $t[c]$ – тривалість процесу. Сила пружності консолі задається співвідношенням $F = Cx$, де $C[H/м]$ – жорсткість консолі, а $x[м]$ – її деформація.

Як відомо (*приклад* 39), коливання відбуваються відносно положення рівноваги (сила ваги врівноважена силою пружності за рахунок усадки консолі). Тоді в диференціальне рівняння коливань двигуна вздовж вісі Ox увійдуть лише сила пружності F та сила інерції J :

$$m\ddot{x} = -Cx + H\sin\omega t,$$

де m – приведена маса двигуна. Позначимо: $C/m = \nu^2$; $H/m = h$. Перепишемо, тепер, диференціальне рівняння таким чином:

1) $$\ddot{x} + \nu^2 x = h\sin\omega t.$$

Одержане ДР є лінійним неоднорідним зі сталими коефіцієнтами. Для розв'язку цього рівняння залучимо метод невизначених коефіцієнтів.

Відповідне однорідне ДР:

$\ddot{x} + \nu^2 x = 0.$

Загальний розв'язок цього рівняння одержано вище (*приклад* 39)

2) ЗР$_{од}$: $\boxed{\bar{x} = \bar{A}\sin(\nu t + \varphi)}$,

де в якості довільних сталих використовуються амплітуда $\bar{A}$ і початкова фаза коливань – φ , а також враховано, що коренями ХР $k^2 + \nu^2 = 0$ є чисто уявні числа $k_{1,2} = \pm\nu i$.

Для знаходження частинного розв'язку неоднорідного ДР (1) розглянемо два випадки.

***а) ωi* – не є коренем ХР ($\nu \neq \omega$).**

Тоді вказаний частинний розв'язок шукаємо в виді (6.40):

$\tilde{x} = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$

Коефіцієнти A і B знаходимо за формулами (6.41), в яких: $p = 0,\ q = \nu^2;\ \ a = 0,\ b = h.$ Ці значення легко знаходяться при порівнянні виразів (1) і (6.34).

$$A = \frac{a(q-\omega^2) - bp\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2} = \frac{0\cdot(\nu^2-\omega^2) - h\cdot 0\cdot\omega}{(\nu^2-\omega^2)^2 + 0\cdot\omega^2} = 0,$$

$$B = \frac{b(q-\omega^2) + ap\omega}{(q-\omega^2)^2 + p^2\omega^2} = \frac{h(\nu^2-\omega^2) + 0\cdot\omega\cdot 0}{(\nu^2-\omega^2)^2 + 0\cdot\omega^2} = \frac{h}{\nu^2-\omega^2}.$$

3) ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{x} = \dfrac{h}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t$.

Отже, в цьому випадку знайдено такий загальний розв'язок:

4) ЗР: $\boxed{x = \bar{A}\sin\left(\nu t + \varphi\right) + \dfrac{h}{\nu^2-\omega^2}\sin\omega t}$

***б) ωi* – корінь ХР ($\nu = \omega$).**

Тоді частинний розв'язок ДР(1) треба шукати в виді (6.40):

$\tilde{x} = t\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right).$

Коефіцієнти A, B знаходимо за формулами (6.42):

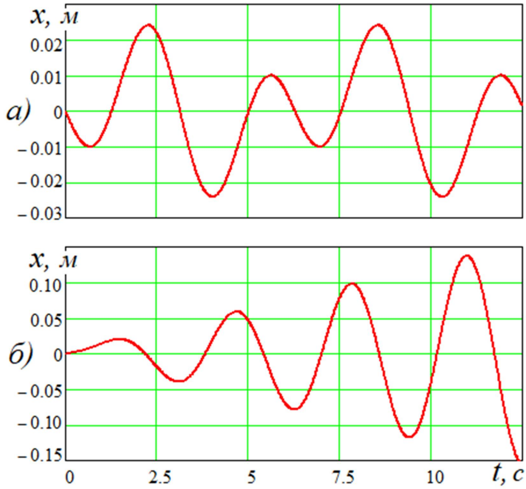
$$A = -\frac{b}{2\omega} = -\frac{h}{2\omega};\quad B = \frac{a}{2\omega} = \frac{0}{2\omega} = 0.$$

5) ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{x} = -\dfrac{ht}{2\omega}\cos\omega t$

Отже, в цьому випадку коливання описується рівнянням:

6) ЗР: $\boxed{x = \bar{A}\sin\left(\omega t + \varphi\right) - \dfrac{ht}{2\omega}\cos\omega t}$

Нижче представлена графічна інтерпретація випадків (*а*) і (*б*) з використанням формул, відповідно (4) і (6).



Розрахунки проведені при наступних значеннях параметрів:
$$a = 0{,}01\,м;\; h = 0{,}05\,м/с^2;\; \nu = 1\,с^{-1};\; \omega = 2\,с^{-1};\; \varphi = 0.$$

Перші доданки в формулах (4), (6) (розв'язки однорідного ДР) описують вільні коливання системи з частотою ν при вимкненому електродвигуні. Другі доданки (розв'язки неоднорідного ДР) – вимушені коливання, що виникають в зв'язку з обертанням неврівноваженого ротора з частотою ω. Якщо частоти вільних і вимушених коливань не співпадають ($\nu \neq \omega$), то рух двигуна є результатом накладання цих коливань з утворенням складної періодичної кривої (*а*). В нашому прикладі цей період становить $2\pi\,с$. Ці коливання можуть виявитися також і неперіодичними, якщо частоти вільних і вимушених коливань виявляться несумірними, тобто, коли їх відношення виявиться ірраціональним числом.

Якщо $\nu = \omega$, то з часом, за рахунок вимушеної складової коливань їх амплітуда буде невпинно зростати (*б*). Це явище називають резонансом. В наведеному прикладі резонанс впливає негативно, так як може привести до обрушення консолі. Очевидно, що одним із заходів боротьби з таким ефектом є запобігання співпадання частот вільних і вимушених коливань.

<u>Випадок 3</u>. Права частина ДР – многочлен $n-$го степеня:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \tag{6.43}$$

$a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad a_0 \neq 0,$ тобто:

$$y'' + py' + qy = P_n(x). \tag{6.44}$$

При диференціюванні многочлена знову одержуємо многочлен, тому є доцільним шукати частинний розв'язок лінійного неоднорідного ДР теж у вигляді многочлена того ж степеня, що і права частина, але з невизначеними коефіцієнтами:

$$\tilde{y} = Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n, \tag{6.45}$$

де: $A_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0, n}$ – невизначені коефіцієнти.

Однак замічаємо, що при $q = 0$ підстановка виразу (6.45) в ліву частину ДР (6.44) дасть многочлен, степінь якого буде на одиницю менша степені многочлена справа (степінь знижується за рахунок диференціювання). Многочлени ж можуть бути рівними тільки тоді, коли їх степені рівні. Щоб цього досягти перед підстановкою многочлена (6.45) його множать на x ($\tilde{y} = xQ_n(x)$). Відмітимо також, що в цьому разі ХР має вид $k^2 + pk = 0$ і один з його коренів обов'язково буде нулем. Таким чином, частинний розв'язок неоднорідного лінійного ДР шукають у вигляді:

$$\boxed{\tilde{y} = \begin{cases} Q_n(x), \text{ якщо нуль не є коренем ХР} \\ xQ_n(x), \text{ якщо нуль – корінь ХР} \end{cases}} \tag{6.46}$$

Крім виразу (6.45) наведемо ще приклади многочленів з невизначеними коефіцієнтами:

A .... многочлен нульового порядку;
$Ax + B$ .... многочлен першого порядку;
$Ax^2 + Bx + C$ .... многочлен другого порядку;
$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ ... многочлен третього порядку;
$A, \quad B, \quad C, \quad D, \ldots$ ...... невизначені коефіцієнти.

Приклад 50. Розв'язати задачу Коші: $y''+4y'+3y=x^2,\ \ y(0)=\frac{26}{27},\ y'(0)=\frac{1}{9}$.

Відповідне однорідне ДР:

$y''+4y'+3y=0$.

ХР: $k^2+4k+3=0.$ За теоремою Вієта: $k_1=-1;\ k_2=-3.$

ФСР: $y_1=\mathrm{e}^{-x};\ y_2=\mathrm{e}^{-3x}.$

ЗР$_{\text{од}}$: $\boxed{\bar{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}}$

Так, як нуль не є коренем ХР, то частинний розв'язок заданого ДР шукаємо в виді многочлена другого порядку з невизначеними коефіцієнтами (6.46):

$\tilde{y}=Ax^2+Bx+C$

Обчислюємо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \tilde{y}=Ax^2+Bx+C \\ 4 & \tilde{y}'=2Ax+B \\ 1 & \tilde{y}''=2A \end{array}$$

Виконуємо підстановку в задане ДР:

$2A+8Ax+4B+3Ax^2+3Bx+3C=x^2$ або

$3Ax^2+(8A+3B)x+2A+4B+3C=x^2$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа записаної рівності і знаходимо коефіцієнти A, B, C:

$$\begin{cases} 3A=1 \\ 8A+3B=0 \\ 2A+4B+3C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{8}{3}A=-\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{8}{9} \\ C=-\frac{1}{3}\left(2A+4B\right)=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-\frac{32}{9}\right)=\frac{26}{27} \end{cases}$$

ЧР$_{\text{нд}}$: $\boxed{\tilde{y}=\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}}$

ЗР: $\boxed{y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}+\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{26}{27}}$

Похідна від загального розв'язку:

$$y'=-C_1\mathrm{e}^{-x}-3C_2\mathrm{e}^{-3x}+\frac{2}{3}x-\frac{8}{9}.$$

Знаходимо сталі інтегрування з початкових умов:

$$\begin{cases} \frac{26}{27} = C_1 + C_2 + \frac{26}{27} \\ \frac{1}{9} = -C_1 - 3C_2 - \frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 3C_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \\ C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Після підстановки знайдених числових значень в загальний розв'язок, одержимо:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\left(e^{-x} - e^{-3x}\right) + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{26}{9}\right)}$$

Приклад 51. Знайти загальний розв'язок ДР: $y'' - 8y' = 2 - x$.

Відповідне однорідне ДР:

$y'' - 8y' = 0.$

ХР: $k^2 - 8k = 0 \Rightarrow k(k-8) = 0 \Rightarrow k_1 = 0;\ k_2 = 8.$

ФСР: $y_1 = 1;\quad y_2 = e^{8x}.$

ЗР$_{\text{од}}$: $\boxed{\overline{y} = C_1 + C_2 e^{8x}}$

Частинний розв'язок заданого неоднорідного ДР шукаємо з врахуванням того, що нуль є коренем ХР (6.46):

$\tilde{y} = x\left(Ax + B\right) = Ax^2 + Bx.$

Знаходимо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 0 & \tilde{y} = Ax^2 + Bx. \\ -8 & \tilde{y}' = 2Ax + B \\ 1 & \tilde{y}'' = 2A \end{array}$$

Виконуємо підстановку в задане ДР:

$2A - 16Ax - 8B = 2 - x$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{cases} -16A = -1 \\ 2A - 8B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{16} \\ B = \frac{1}{4}\left(A - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16} - 1\right) = -\frac{15}{64} \end{cases}$$

ЧР$_{\text{нд}}$: $\boxed{\tilde{y} = x\left(\frac{x}{16} - \frac{15}{64}\right) = \frac{x(4x-15)}{64}}$

Загальний розв'язок заданого рівняння:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 e^{8x} + \frac{x(4x-15)}{64}}$$

<u>Випадок 4</u>. Права частина ДР включає всі функції, названі у випадках 1-3:

$$y'' + py' + qy = \mathrm{e}^{\alpha x}\left[p_\kappa(x)\cos\beta x + q_r(x)\sin\beta x\right], \qquad (6.47)$$

де $p_\kappa(x), q_r(x) -$ многочлени, відповідно, κ -го і r -го порядку.

Можна довести, що частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді:

$$\tilde{y} = x^m \mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]. \qquad (6.48)$$

Тут: $m -$ кратність кореня $\alpha + \beta i$ характеристичного рівняння;
$P_n(x), Q_n(x) -$ многочлени з невизначеними коефіцієнтами;
$n -$ найбільше з чисел κ і r.

П р и м і т к и. Якщо $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то слід прийняти $m = 0$ і, як наслідок, $x^m = 1$.

Якщо у виразі (6.47) відсутні $\cos\beta x$ та $\sin\beta x$, то слід приймати $\beta = 0$.

Якщо права частина рівняння (6.47) включає лише один многочлен, наприклад $y'' + py' + qy = p_\kappa(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, то число n буде дорівнювати степені цього многочлена $n = \kappa$.

Приклад 52. Задано ДР з правою частиною. Вказати в якому виді слід шукати частинний розв'язок $\tilde{y}$ неоднорідного рівняння.

52 *а*. $y'' - 9y = 2x\mathrm{e}^{3x}$.

Встановлюємо значення параметра m.

ХР: $k^2 - 9 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3$,

$\alpha = 3, \quad \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = 3.$

Число $\alpha + \beta i = 3 -$ однократний корінь ХР, тому $m = 1$.

Так як права частина ДР включає лише один многочлен ($2x$) першого степеня, то $n = 1$.

При відомих праpаметрах m і n вираз (42) дає:

$$\boxed{\tilde{y} = x\mathrm{e}^{3x}\left(Ax + B\right)}$$

52 *б*. $y'' - 12y' + 35y = 5\sin 2x - x\cos 2x$.

ХР: $k^2 - 12k + 35$. За теоремою Вієта: $k_1 = 5,\ k_2 = 7$.

$\alpha = 0, \quad \beta = 2 \Rightarrow \alpha + \beta i = 2i.$

Число $\alpha + \beta i = 2i$ не є коренем ХР, тому $m = 0$.

Степені многочленів (5 та $-x$) справа, відповідно, дорівнюють $r = 0$ та $\kappa = 1$, тому $n = 1$. Отже, маємо:

$$\boxed{\tilde{y} = \left(Ax + B\right)\cos 2x + \left(Cx + D\right)\sin 2x}$$

22 *в*. $4y'' - 8y' + 5y = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^x \sin\frac{x}{2}$.

ХР: $4k^2 - 8k + 5 = 0 \Rightarrow \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4} = \frac{8 \pm 4i}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}i$.

$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha + \beta i = 1 + \frac{1}{2}i$.

$m = 1$, так як $\alpha + \beta i$ є однократним коренем ХР.

$n = 2$, так як єдиний многочлен справа ($1 - x^2$) – другого степеня. З виразу (6.48) одержуємо:

$$\boxed{\tilde{y} = x\mathrm{e}^x \left[\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos\frac{x}{2} + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin\frac{x}{2}\right]}$$

Приклад 53. Розв'язати задачу Коші: $y'' + y = -4x\cos x, \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$.

Відповідне однорідне рівняння: $y'' + y = 0$.

ХР: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm i$.

ФСР: $y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x$.

ЗР$_{\text{од}}$: $\boxed{\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x}$

$\alpha = 0, \quad \beta = 1 \Rightarrow \alpha + \beta i = i$.

$m = 1$, так як $\alpha + \beta i$ є однократним коренем ХР.

$n = 1$, так як єдиний многочлен справа ($-4x$) – першого степеня. Отже, частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді (6.48):

1) $\tilde{y} = x\left[\left(Ax + B\right)\cos x + \left(Cx + D\right)\sin x\right]$ або

$\tilde{y} = \left(Ax^2 + Bx\right)\cos x + \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x$.

Знаходимо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \tilde{y} = \left(Ax^2 + Bx\right)\cos x + \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x. \\ 0 & \tilde{y}' = \left(2Ax + B + Cx^2 + Dx\right)\cos x + \left(2Cx + D - Ax^2 - Bx\right)\sin x \\ 1 & \tilde{y}'' = \left(2A + 2Cx + D + 2Cx + D - Ax^2 - Bx\right)\cos x + \\ & \qquad + \left(2C - 2Ax - B - 2Ax - B - Cx^2 - Dx\right)\sin x \end{array}$$

Підставляємо $\tilde{y}$ та $\tilde{y}''$ в задане рівняння.

$$\left(2A + 4Cx + 2D\right)\cos x + \left(2C - 4Ax - 2B\right)\sin x = -4x\cos x .$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$ та $\sin x$.

$$2A + 4Cx + 2D = -4x,$$

$$2C - 4Ax - 2B = 0.$$

Прирівнюючи коефіцієнти в записаних співвідношеннях при рівних степенях x, одержимо систему рівнянь, з якої і знаходимо невідомі A, B, C, D.

$$\begin{cases} 4C = -4, \\ 2A + 2D = 0, \\ -4A = 0, \\ 2C - 2B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -1, \\ B = -1, \\ A = 0, \\ D = 0. \end{cases}$$

З врахуванням цих значень розв'язок (1) набуде вигляду:

ЧР$_{\text{нд}}$: $\tilde{y} = -x\cos x - x^2 \sin x$

Тепер можемо записати загальний розв'язок заданого рівняння.

2) $\boxed{y = \bar{y} + \tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x\cos x - x^2 \sin x}$

Переходимо до визначення довільних сталих. Для цього спочатку візьмемо першу похідну від знайденої функції.

$$y' = C_2 \cos x - C_1 \sin x - \cos x + x\sin x - 2x\sin x - x^2 \cos x.$$

Далі використовуємо початкові умови.

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 0 = C_2 - 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = 1. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення у вираз (2), одержимо розв'язок задачі Коші.

$$\boxed{\boxed{y = \left(1 - x^2\right)\sin x - x\cos x}}$$

Приклад 54. Знайти загальний розв'язок ДР: $y''' - y'' = 3xe^x$.

Відповідне однорідне рівняння: $y''' - y'' = 0$.

ХР: $k^3 - k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k-1) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0,\ k_3 = 1$

ФСР: $y_1 = e^{0x} = 1,\quad y_2 = xe^{0x} = x,\quad y_3 = e^x$.

ЗР$_{\text{од}}$: $\bar{y} = \underline{C_1 + C_2 x + C_3 e^x}$

$\alpha = 1,\quad \beta = 0 \Rightarrow \alpha + \beta i = 1$.

$m = 1$, так як $\alpha + \beta i$ є однократним коренем ХР.

$n = 1$, так як єдиний многочлен справа ($3x$) – першого степеня. Отже, частинний розв'язок неоднорідного ДР шукаємо у вигляді (6.48):

$\tilde{y} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$.

Знаходимо похідні:

$$\begin{array}{r|l} 0 & \tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^x \\ 0 & \tilde{y}' = (2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x \\ -1 & \tilde{y}'' = (2A + 2Ax + B + 2Ax + B + Ax^2 + Bx)e^x \\ 1 & \tilde{y}''' = (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + 2Ax + 4A + B)e^x \end{array}$$

Приводимо подібні (в дужках) і підставляємо знайдені похідні $\tilde{y}''$, $\tilde{y}'''$ в задане ДР:

$$(Ax^2 + 6Ax + Bx + 6A + 3B)e^x - (Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B)e^x = 3xe^x$$

Після скорочення на e^x і спрощення:

$2Ax + 4A + B = 3x$.

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\begin{cases} 2A = 3, \\ 4A + B = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{3}{2}, \\ B = -6. \end{cases}$$

ЧР$_{\text{нд}}$: $\underline{\tilde{y} = x\left(\frac{3}{2}x - 6\right)e^x}$

Отже, загальний розв'язок заданого ДР буде таким:

$$\boxed{y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + 3x\left(\frac{x}{2} - 2\right)e^x}$$

VII. КОРОТКО ПРО СИСТЕМИ ДР

7.1. Загальні поняття, інтегрування систем ДР методом знаходження інтегровних комбінацій

Пошуки нових здобутків в різних областях природознавства часто приводять до систем ДР. В теоретичній механіці, наприклад, рух матеріальної точки масою m під дією сили $\vec{F}(t,\vec{r},\dot{\vec{r}})$ описується векторним рівнянням

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}\left(t,\vec{r},\frac{d\vec{r}}{dt}\right), \tag{7.1}$$

яке шляхом проектування на вісі координат може бути заміненим системою трьох скалярних рівнянь другого порядку:

$$\begin{cases} m\ddot{x}=X\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right); \\ m\ddot{y}=Y\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right); \\ m\ddot{z}=Z\left(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}\right). \end{cases} \tag{7.2}$$

Цю систему можна замінити системою шести рівнянь першого порядку. Для цього вводять заміну: $\dot{x}=u,\ \ \dot{y}=v,\ \ \dot{z}=w.$ Тоді:

$$\begin{cases} \dot{x}=u; \\ \dot{y}=v; \\ \dot{z}=w; \\ m\dot{u}=X\left(t,x,y,z,u,v,w\right); \\ m\dot{v}=Y\left(t,x,y,z,u,v,w\right); \\ m\dot{w}=Z\left(t,x,y,z,u,v,w\right). \end{cases} \tag{7.3}$$

Якщо розглядати рух не точки, а твердого тіла, то воно має шість ступенів вільності і буде описуватися системою 12 рівнянь першого порядку. Взагалі, механічна система з n степенями вільності потребує систему ДР з $2n$ рівняннями першого порядку. Тому, як в механіці, так і в інших галузях знань, системи ДР відіграють велику роль.

В загальному виді система n ДР з n невідомими функціями аргумента t записується так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = F_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right); \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \end{cases} \tag{7.4}$$

Якщо всі рівняння системи (7.4) першого порядку і першого степеня відносно похідних, при цьому кожне рівняння включає похідну тільки від однієї функції, то систему називають нормальною. Її розв'язком називають сукупність n функцій

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t), \tag{7.5}$$

підстановка яких в рівняння системи перетворює кожне з них в тотожність.

До системи (7.4) додаються початкові умови:

$$x_1\left(t_0\right) = x_{10}, \quad x_2\left(t_0\right) = x_{20}, \ldots, \quad x_n\left(t_0\right) = x_{n0}. \tag{7.6}$$

Задача пошуку функцій (7.5), задовольняючих початкові умови (7.6), носить назву задачі Коші. Існування та єдиність цієї задачі встановлює наступна теорема.

<u>Теорема Коші.</u> Якщо всі функції $F_1, F_2, \ldots, F_n$ неперервні і мають обмежені частинні похідні по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в деякій замкнутій області D перебігу змінних $t, x_1, x_2, \ldots, x_n$, то кожній внутрішній точці області D відповідає єдиний розв'язок $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots,$ $x_n = \varphi_n(t)$ системи (7.4), що задовольняє початковим умовам (7.6).

Розв'язок задачі Коші називають частинним.

Довільно змінюючи в області D початкові умови, одержимо n-параметричну сім'ю частинних розв'язків, які можна вважати залежними від n довільних сталих:

$$x_1 = \phi_1\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \quad x_2 = \phi_2\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \ldots,$$

$$x_n = \phi_n\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_n\right). \tag{7.7}$$

Такий розв'язок називають загальним.

Частинний розв'язок системи можна одержати із загального присвоєнням числових значень довільним сталим. Ці значення знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \phi_1\left(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = x_{10}; \\ \phi_2\left(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = x_{20}; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \phi_n\left(t_0, C_1, C_2, \ldots, C_n\right) = x_{n0}. \end{cases} \tag{7.8}$$

Інтегрування системи (7.4) значно спрощується, якщо для неї вдається підібрати так-звані інтегровні комбінації.

Інтегровною комбінацією називається диференціальне рівняння, яке є наслідком рівнянь (7.4), але легко інтегрується або зводиться до ДР інтегровного типу. Наприклад:

$$d\Phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0. \tag{7.9}$$

Одна інтегровна комбінація дає змогу одержати одне кінцеве рівняння

$$\Phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_1, \tag{7.10}$$

яке утримує невідомі функції і незалежну змінну. Воно називається першим інтегралом системи (7.4). Якщо знайдено k інтегровних комбінацій, то одержимо k перших інтегралів:

$$\begin{cases} \Phi_1\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_1; \\ \Phi_2\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_2; \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \Phi_k\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = C_k. \end{cases} \tag{7.11}$$

Якщо система (7.11) дозволяє знаходження яких-небудь k функцій через інші, то, підставляючи їх в систему (7.4), зводимо її до системи з меншим числом змінних. При $k = n$ всі невідомі функції знайдуться з системи перших інтегралів (7.11).

Зауважимо, що метод інтегровних комбінацій спрацьовує не завжди із-за складності або неможливості їх знаходження. Тому наряду з вказаним знайшли широке застосування інші методи інтегрування.

Приклад 55. Знайти загальний розв'язок системи ДР:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Склавши почленно рівняння, знайдемо одну інтегровну комбінацію:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x + y \quad \text{або} \quad \frac{d(x+y)}{x+y} = dt.$$

Звідси:

$$\ln\left|x + y\right| = t + \ln C_1 \;\Rightarrow\; x + y = C_1 \mathrm{e}^t.$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, знайдемо другу інтегровну комбінацію:

$$\frac{d(x-y)}{dt} = y - x \quad \text{або} \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt.$$

Звідси:

$$\ln\left|x - y\right| = -t + \ln C_2 \;\Rightarrow\; x - y = C_2 \mathrm{e}^{-t}.$$

Для знаходження функцій і маємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = C_1 \mathrm{e}^t; \\ x - y = C_2 \mathrm{e}^{-t}. \end{cases}$$

Розв'язуючи її, одержимо:

$$x = \tfrac{1}{2}\left(C_1 \mathrm{e}^t + C_2 \mathrm{e}^{-t}\right);$$

$$y = \tfrac{1}{2}\left(C_1 \mathrm{e}^t - C_2 \mathrm{e}^{-t}\right).$$

Позначивши $C_1^* = C_1/2,\;\; C_2^* = C_2/2,$ дістанемо кінцевий результат:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = C_1^* \mathrm{e}^t + C_2^* \mathrm{e}^{-t}; \\ y = C_1^* \mathrm{e}^t - C_2^* \mathrm{e}^{-t}. \end{array}}$$

7.2. Зведення системи ДР до одного рівняння більш високого порядку

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t); \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t); \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t). \end{cases} \tag{7.12}$$

Якщо $a_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ – дійсні числа, то систему називають лінійною зі сталими коефіцієнтами. При цьому, якщо $f_i(t) \equiv 0$ – систему називають лінійною однорідною, в противному разі – лінійною неоднорідною.

До системи (7.12) доцільно застосовувати метод інтегрування, який полягає в зведенні системи до одного рівняння *n*-го порядку відносно однієї із шуканих функцій. Для цього продиференціюємо, наприклад, перше рівняння системи (7.12) по t і замінимо в ньому перші похідні $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \ldots$ в його правій частині виразами із тієї ж системи (7.12). Після приведення подібних одержимо:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + \varphi_1(t). \tag{7.13}$$

Цю операцію виконаємо $n-1$ разів, що приводить до системи:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t); \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n + \varphi_1(t); \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \dfrac{d^nx_1}{dt^n} = D_1x_1 + D_2x_2 + \cdots + D_nx_n + \varphi_{n-1}(t). \end{cases} \tag{7.14}$$

З перших $n-1$ рівнянь цієї системи знайдемо $x_2, x_3, \ldots, x_n$ через $t, x_1, \dfrac{dx_1}{dt}, \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, \ldots, \dfrac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}$:

$$
\begin{aligned}
&x_2 = \Omega_2\left(t,\, x_1,\, \frac{dx_1}{dt},\, \frac{d^2x_1}{dt^2},\ldots,\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right);\\
&x_3 = \Omega_3\left(t,\, x_1,\, \frac{dx_1}{dt},\, \frac{d^2x_1}{dt^2},\ldots,\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right);\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&x_n = \Omega_n\left(t,\, x_1,\, \frac{dx_1}{dt},\, \frac{d^2x_1}{dt^2},\ldots,\frac{d^{(n-1)}x_1}{dt^{(n-1)}}\right).
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Підставляючи вирази (7.15) в останнє із рівнянь (7.14), одержимо ДР n-го порядку відносно функції x_1. З цього рівняння знайдемо загальний розв'язок:

$$x_1 = \varphi_1\left(t, C_1, C_2, \ldots, C_n\right), \tag{7.16}$$

а, підставляючи його у вирази (7.15), також і інші розв'язки $x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Зауважимо, що система однорідних (неоднорідних) рівнянь приводить до лінійного однорідного (неднорідного) рівняння вищого порядку. Якщо при цьому коефіцієнти рівнянь системи є сталими, то і коефіцієнти рівняння вищого порядку теж сталі.

Приклад 56. Знайти загальний розв'язок однорідної системи ДР:

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{2}y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$

Диференціюємо друге рівняння системи:

$\dfrac{d^2y}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt}.$

Враховуючи перше рівняння, дістаємо:

2) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -y$ або $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0.$

ХР: $k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_{12} = \pm i.$

Загальний розв'язок рівняння (2):

3) $y = \overline{C}_1 \cos t + \overline{C}_2 \sin t.$

З другого рівняння стистеми (1) з врахуванням (3) маємо:

4) $x = \dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}\left(\overline{C}_2 \cos t - \overline{C}_1 \sin t\right).$

Нехай $\overline{C}_1 = 2C_1$, $\overline{C}_2 = 2C_2$. Тоді кінцевий результат одержимо, як наслідок рівнянь (3) і (4):

$$\boxed{\begin{aligned} &x = C_2 \cos t - C_1 \sin t;\\ &y = 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t.\end{aligned}}$$

Приклад 57. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи ДР:

$$1)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + y + 2\sin t - 3\cos t;\\ \dfrac{dy}{dt} = -6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t.\end{cases}$$

Продиференціюємо перше рівняння системи:

$$2)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2\cos t + 3\sin t.$$

Замість похідної $\frac{dy}{dt}$ підставимо в рівняння (2) її вираз з другого рівняння системи (1):

$$3)\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 6x + 4y + 7\sin t - 20\cos t + 2\cos t + 3\sin t =$$
$$= -\frac{dx}{dt} - 6x + 4y + 10\sin t - 18\cos t.$$

Знайдемо вираз для y з першого рівняння системи (1)

$$4)\ y = \frac{dx}{dt} + x + 3\cos t - 2\sin t$$

та використаємо його для виключення y з рівняння (3):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 6x + 4\frac{dx}{dt} + 4x + 12\cos t - 8\sin t + 10\sin t - 18\cos t =$$
$$= 3\frac{dx}{dt} - 2x + 2\sin t - 6\cos t \quad \text{або}$$

$$5)\ \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 2\sin t - 6\cos t.$$

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного ДР:

$$6)\ \frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

ХР: $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow$ За теоремою Вієта $k_1 = 1,\ k_2 = 2.$

Загальний розв'язок рівняння (6):

$$7)\ \overline{x} = C_1 e^t + C_2 e^{2t}.$$

Частинний розв'язок рівняння (5) шукаємо у вигляді:

8) $\tilde{x} = A\cos t + B\sin t.$

$$\begin{array}{r|l} 2 & \tilde{x} = A\cos t + B\sin t; \\ -3 & \frac{d\tilde{x}}{dt} = B\cos t - A\sin t; \\ 1 & \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} = -A\cos t - B\sin t. \end{array}$$

Підстановка знайдених величин в рівняння (5) дає:

$$\left(2A - 3B - A\right)\cos t + \left(2B + 3A - B\right)\sin t = 2\sin t - 6\cos t.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos t$ і $\sin t$, одержимо:

$$\begin{cases} A - 3B = -6 \\ B + 3A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A - 9B = -18 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10B = 20 \\ A = 3B - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 2 \\ A = 0 \end{cases}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5):

$\tilde{x} = 2\sin t.$

Загальний розв'язок цього рівняння:

9) $x = \bar{x} + \tilde{x} = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2\sin t.$

Знайдемо похідну від виразу (9):

10) $\frac{dx}{dt} = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 2\cos t.$

Для знаходження функції y використаємо співвідношення (4), (9) і (10):

11) $y = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t} + 2\cos t + C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2\sin t + 3\cos t - 2\sin t =$

$= 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + 5\cos t.$

Приймаючи до уваги (9) і (11), запишемо загальний розв'язок заданої неоднорідної системи ДР:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + 2\sin t; \\ y = 2C_1 e^t + 3C_2 e^{2t} + 5\cos t. \end{array}}$$

Приклад 58. Розв'язати задачу Коші:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y + \mathrm{e}^{2t}; \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x + 5y; \qquad x(0) = \frac{1}{7}, \quad y(0) = \frac{31}{14}. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо:

$$2)\ \frac{d^2x}{dt^2} = 3\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + 2\mathrm{e}^{2t}.$$

Підставимо в це рівняння перші похідні з системи (1):

$$3)\ \frac{d^2x}{dt^2} = 9x + 12y + 3\mathrm{e}^{2t} + 24x + 20y + 2\mathrm{e}^{2t} =$$

$$= 33x + 32y + 5\mathrm{e}^{2t}.$$

Далі з першого рівняння системи (1) дістанемо:

$$4)\ y = \frac{1}{4}\frac{dx}{dt} - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}.$$

Виключаємо y з рівнянь (3) і (4):

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 33x + 8\frac{dx}{dt} - 24x - 8\mathrm{e}^{2t} + 5\mathrm{e}^{2t};$$

$$5)\ \frac{d^2x}{dt^2} - 8\frac{dx}{dt} - 9x = -3\mathrm{e}^{2t}.$$

Розв'язуємо одержане неоднорідне лінійне ДР другого порядку.

ХР: $k^2 - 8k - 9 = 0 \Rightarrow$ За теоремою Вієта $k_1 = -1,\ k_2 = 9.$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$6)\ \bar{x} = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{9t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного ДР (5) шукаємо у вигляді:

$$7)\ \tilde{x} = A\mathrm{e}^{2t} \Rightarrow \tilde{x}' = 2A\mathrm{e}^{2t},\ \tilde{x}'' = 4A\mathrm{e}^{2t}.$$

Після підстановки співвідношень (7) в рівняння (5) і скорочення на e^{2t} маємо:

$$4A - 16A - 9A = -3 \Rightarrow A = \frac{1}{7}.$$

Отже, знайдено частинний розв'язок рівняння (5):

$$8)\ \tilde{x} = \frac{1}{7}\mathrm{e}^{2t}.$$

Тоді його загальним розв'язком є:

$$9)\ x = \bar{x} + \tilde{x} = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{9t} + \frac{1}{7}\mathrm{e}^{2t}.$$

Обчислимо похідну знайденої функції:

10) $\frac{dx}{dt} = 9C_2 e^{9t} - C_1 e^{-t} + \frac{2}{7} e^{2t}.$

Підставимо вирази (9) і (10) в праву частину рівняння (4):

11) $y = \frac{9}{4} C_2 e^{9t} - \frac{1}{4} C_1 e^{-t} + \frac{1}{14} e^{2t} - \frac{3}{4} C_1 e^{-t} - \frac{3}{4} C_2 e^{9t} - \frac{3}{28} e^{2t} - \frac{1}{4} e^{2t} =$

$$= \frac{3}{2} C_2 e^{9t} - C_1 e^{-t} - \frac{2}{7} e^{2t}.$$

Таким чином, загальним розв'язком системи (1) буде:

$$\boxed{\begin{aligned} &x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t} + \frac{1}{7} e^{2t}; \\ &y = \frac{3}{2} C_2 e^{9t} - C_1 e^{-t} - \frac{2}{7} e^{2t}. \end{aligned}}$$

Для знаходження сталих інтегрування використаємо початкові умови.

$$\begin{cases} \frac{1}{7} = C_1 + C_2 + \frac{1}{7} \\ \frac{31}{14} = \frac{3}{2} C_2 - C_1 - \frac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + \frac{3}{2} C_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 1 \\ C_1 = -1 \end{cases}$$

Тепер запишемо розв'язок задачі Коші:

$$\boxed{\boxed{\begin{aligned} &x = e^{9t} - e^{-t} + \frac{1}{7} e^{2t}; \\ &y = \frac{3}{2} e^{9t} + e^{-t} - \frac{2}{7} e^{2t}. \end{aligned}}}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Копась І.М. Диференціальні рівняння.– К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.– 126с.
2. Нечуйвітер О.П. Диференціальні рівняння та їх застосування.– Харків.: НТУ "ХПІ", 2019.– 88с.
3. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
4. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння.– Тернопіль, 2014.–175с.
5. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика: повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб.– К.: Книги України ЛТД, 2010.– 470с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛНІ РІВНЯННЯ

Основи теорії та методика розв'язування задач

ЗАВГОРОДНІЙ Олексій Іванович
СОЛОВИЧЕНКО Ольга Володимирівна
ЛЕВКІН Дмитро Артурович
СИЧОВА Тетяна Володимирівна

Формат 60x84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 4,8
Наклад 100 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44