Міністерство освіти і науки України

Харківський національний аграрний університет

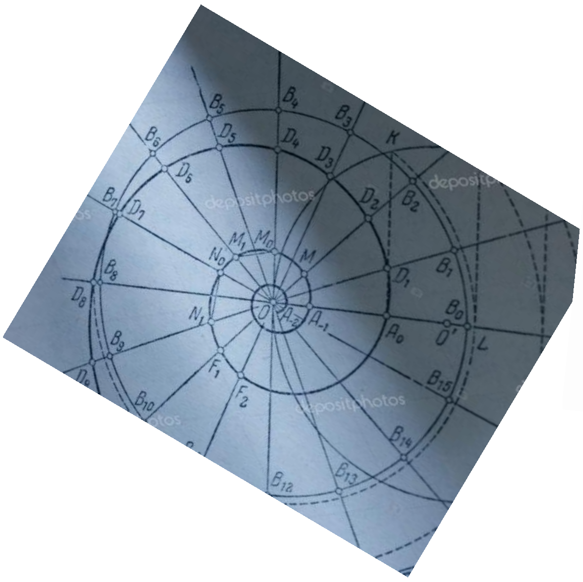
імені В.В.Докучаєва

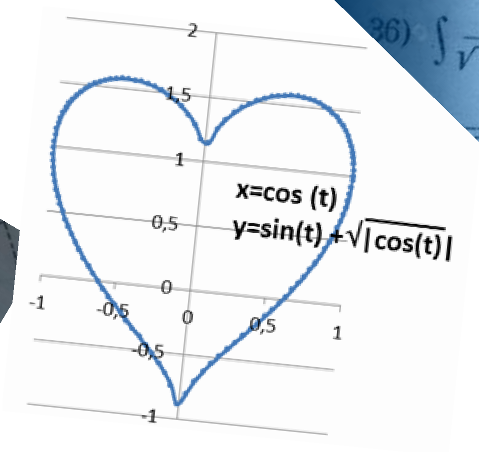
О.А.Мандражи

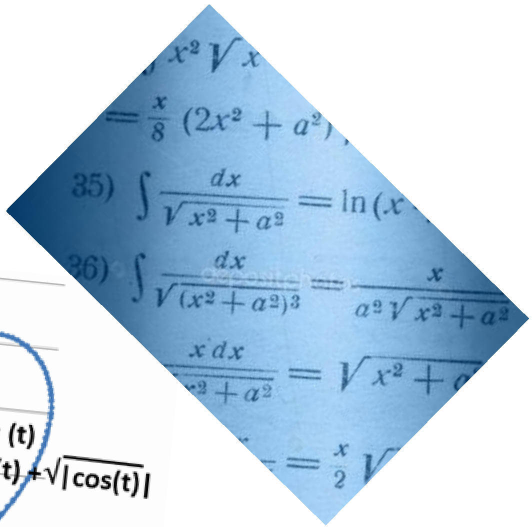
ВИЩА МАТЕМАТИКА

навчальний посібник

для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої освіти
галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»
спеціальності 051 «Економіка»







Харків – 2021

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені В. В. Докучаєва

Рекомендовано до видання
вченою радою ХНАУ ім.В.В.Докучаєва
(протокол № 1 від 03 лютого 2021 р.)

ВИЩА МАТЕМАТИКА

навчальний посібник

для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої освіти
галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки»
спеціальності 051 «Економіка»

Харків – 2021

У к л а д а ч і: канд. пед. наук, доцент *О. А. Мандражи*

Р е ц е н з е н т и: доцент кафедри геометричного моделювання та комп'ютерної графіки Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", канд. техн. наук, доцент *О.С. Сидоренко,*
доцент кафедри менеджменту і адміністрування Харківського національного аграрного університету імені В. В. Докучаєва, канд. екон. наук, доцент *О. М. Таран,*
доцент кафедри прикладної економіки і міжнародних економічних відносин Харківського національного аграрного університету імені В. В. Докучаєва, канд. екон. наук, доцент *В.Є.Мещеряков.*

За редакцією канд. пед. наук, доцента *О. А. Мандражи*

В 55 Вища математика для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої освіти галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 «Економіка» [навчальний посібник] / О.А. Мандражи. – Харків: ХНАУ, 2020. – 63 с.

Зміст

Вступ

Курс вищої математики має важливе значення для процесу підготовки спеціалістів аграрного профілю. Сучасний випускник сільськогосподарського вишу повинен володіти кількісними методами аналізу економічних ситуацій, які виникають як у маленьких фермерських господарствах, так і на великих аграрних підприємствах. Без сучасних методів вищої математики не можна обійтись і при оцінці кількості та якості земель у господарствах.

Завдання вивчення курсу «вища математика» у повному обсязі навчальної програми досить складне і потребує багатьох зусиль. Наразі у вищих навчальних закладах години для дисциплін математичного циклу скорочуються і, що є зовсім недоречним, скорочуються терміни для їхнього вивчення. Матеріал, який раніше мав усвідомлюватися здобувачами протягом двох років тепер пропонується збагнути за один семестр. Узагалі, за роз’ясненнями та рекомендаціями Додатку до листа Міністерства освіти і науки від 13.05.2015 № 1/9-126 орієнтовна кількість годин аудиторних занять в одному кредиті ЄКТС (денна форма навчання) для здобувачів може становити від 50% до 33%. Отже, відштовхуючись від 33% маємо, що 67% матеріалу здобувачі вищої освіти повинні опрацьовувати самостійно. Самостійне опрацювання матеріалу з математики передбачає повноцінну роботу, якій спочатку необхідно навчити, що передбачає певну кількість годин, за межі якої варто не переходити.

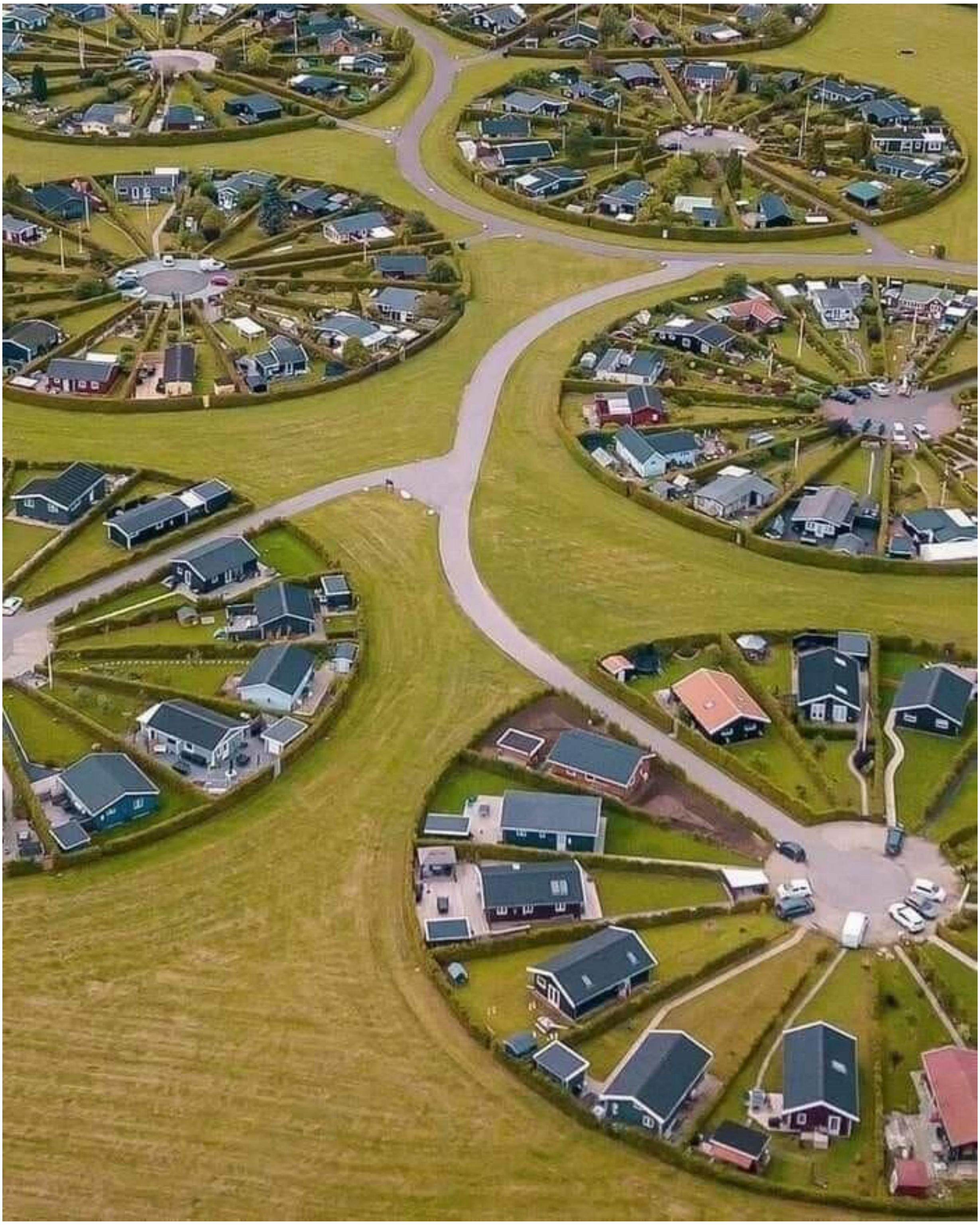
Багаторічний досвід викладання курсу «вища математика» здобувачам вищої освіти свідчить про те, що для опанування зазначеного курсу при самостійній роботі здобувачеві доцільно спочатку засвоїти деякі основоположні розділи, а тільки потім переходити до поглибленого вивчення усього курсу за існуючою програмою навчання. Така методика вивчення вищої математики дає кращі результати набуття необхідних знань здобувачами. Крім того, вона дає викладачам можливість в умовах скорочення аудиторного часу сконцентрувати увагу здобувачів на складнішому матеріалі.

За такого підходу стає важливою продумана процедура консультування, тобто було би бажаним, щоб у процесі самостійного опанування матеріалу здобувач мав можливість звертатись до викладача кафедри за поясненнями, роз’ясненнями, а, отже, даний момент має бути врахованим при плануванні навчального навантаження науково-педагогічних працівників.

Далі наведено ті розділи курсу вищої математики, які здобувачам доцільно засвоїти у першу чергу.

Розділ 1. Математичні методи і моделі в аграрному виробництві

Математичні методи широко використовуються в різних галузях людської діяльності. Однією з найважливіших областей застосування математики є економіка. Погляньте на рисунку нижче на сучасне селище у Данії.



Виглядає дивовижно і незвично та при цьому стає цікаво, з чим пов'язане саме таке його доволі незвичне для нас розташування. До речі у Об'єднаних Арабських Еміратах не є диковинкою поля у формі круга, що викликано зручністю застосування систем зрошення.

Отже, розглянемо один з прикладів математичної моделі, на основі якої плануються розміри сільськогосподарського підприємства за роботою Маркової Поліни, учениці-члена Харківського територіального відділення Малої академії наук України (2017 рік).

Оптимальний розмір сільськогосподарського підприємства залежить від багатьох факторів, при цьому у результаті розширення площі оброблюваних земель значно зростають витрати на доставку вирощеної продукції на підприємство для переробки. Таким чином, транспортні витрати обмежують розміри господарства.

Тому у дослідженні створюється математична модель сільськогосподарського підприємства, яка дозволить встановити його оптимальні розміри, виходячи з обмежень в результаті транспортних витрат. У моделі єдиним цілим є оброблювані землі і підприємство для переробки сільськогосподарської продукції. У зв'язку із цим сільськогосподарське виробництво умовно поділяється на три складові: 1) отримання первинної сільськогосподарської продукції (вирощування сільськогосподарських культур); 2) її доставка на підприємство для переробки; 3) переробка первинної сільськогосподарської продукції й отримання вторинної продукції (м'ясо, молоко, цукор тощо).

Загальні витрати сільськогосподарського виробництва запишемо у вигляді суми трьох доданків X_1, X_2 і X_3:

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

кожен з яких виражає загальні витрати відповідної складової сільськогосподарського виробництва.

Припустимо, що загальні витрати на вирощування певної сільськогосподарської культури пропорційні площі посіву :

$$X_1 = x_1 S$$

де x_1 – загальні витрати на вирощування сільськогосподарської культури на одиницю площі.

Також припустимо, що загальні витрати на переробку первинної сільськогосподарської продукції x_3 пропорційні повній масі вирощеної продукції Q, а в підсумку – площі посіву:

$$X_3 = x_3 \cdot Q = x_3 \cdot a \cdot S$$

де x_3 – загальні витрати на переробку одиниці маси первинної сільськогосподарської продукції, a – урожайність сільськогосподарської культури.

Обчислимо загальні витрати на транспортування сільськогосподарської продукції з поля на підприємство для переробки X_2. З метою спрощення розрахунків виберемо форму поля у вигляді кола з внутрішнім $R_{вн}$ і зовнішнім $R_з$ радіусами. Вважатимемо, що підприємство для переробки продукції розташоване в центрі кола. Для обчислення величини X_2 дане коло розіб'ємо на n достатньо вузьких кілець концентричними колами, радіуси яких $r_0, r_1, r_2, \dots, r_n$ задовольняють умовам: $R_{вн} = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n < R_з$. Розглянемо довільне i-те кільце, внутрішній радіус якого дорівнює r_{i-1}, а зовнішній r_i. Припустимо, що ширина цього кільця $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ значно менша від його зовнішнього радіуса, тобто

$$\Delta r_i < r_i .$$

Площа i-го кільця дорівнює:

$$S_i = \pi r_i^2 - \pi r_{i-1}^2 = \pi\left(r_i + r_{i-1}\right)\left(r_i - r_{i-1}\right) \approx 2\pi r_i \Delta r_i .$$

Остання наближена рівність у формулі буде тим точнішою, чим краще виконуватиметься нерівність $\Delta r_i < r_i$. Обчислимо далі повну масу продукції, зібраної в i-му кільці:

$$Q_i = a \cdot S_i \approx 2\pi a \cdot r_i \Delta r_i ,$$

і знайдемо вартість транспортування цієї продукції на підприємство для переробки. Для простоти припустимо, що доставка продукції з будь-якої точки i-го кільця відбувається за відрізком прямої, яка з'єднує дану точку (в якій продукція зібрана) з центром кола – підприємством для переробки. Довжина цього відрізка l_i наближено дорівнює зовнішньому радіусу кільця $l_i \approx r_i$. У цьому випадку повна вартість транспортування всієї продукції з i -го кільця на підприємство для переробки (повні витрати на транспортування) x_{2i} наближено дорівнює

$$x_{2i} \approx Q_i \cdot r_i \cdot b \approx 2\pi r_i^2 \cdot a \cdot b \cdot \Delta r_i,$$

де b – вартість транспортування одиниці маси вантажу на одиницю відстані.

Для визначення загальних витрат пов'язаних із транспортуванням сільськогосподарської продукції на підприємство для переробки зі всього поля необхідно підсумувати загальні витрати за всіма кільцями, від 1 до n:

$$X_2 = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i^2 \cdot a \cdot b \cdot \Delta r_i .$$

Як відомо, ця сума являє собою інтегральну суму функції $f(r) = 2\pi r_i^2 \cdot a \cdot b$ на проміжку $[R_{\text{вн}},\ R_{\text{зов}}]$. У граничному випадку нескінченно великої кількості розбивок кола ($n \to \infty$) такого, що $\max \Delta r_i \to 0$, дана сума дорівнює визначеному інтегралу від функції $f(r)$ у межах від $R_{\text{вн}}$ до $R_{\text{зов}}$:

$$X_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i^2 \cdot a \cdot b \cdot \Delta r_i = \int_{R_{\text{вн}}}^{R_{\text{зов}}} 2\pi r^2 \cdot a \cdot b \cdot dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot a \cdot b \cdot r^3 \Big|_{R_{\text{вн}}}^{R_{\text{зов}}} = \frac{2\pi}{3} \cdot a \cdot b \left({R_{\text{зов}}}^3 - {R_{\text{вн}}}^3 \right)$$

Отже, у рамках даної моделі загальні витрати на транспортування сільськогосподарської продукції на підприємство для переробки дорівнюють:

$$X_2 = \frac{2\pi}{3} \cdot a \cdot b \left({R_{\text{зов}}}^3 - {R_{\text{вн}}}^3 \right)$$

З урахуванням того, що площа поля S дорівнює $S = \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2 \right)$, отримаємо формулу для обчислення загальних витрат сільськогосподарського виробництва:

$$X = x_1 \cdot \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2 \right) + \frac{2\pi}{3} \cdot a \cdot b \left({R_{\text{зов}}}^3 - {R_{\text{вн}}}^3 \right) + x_3 \cdot a \cdot \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2 \right)$$

$$= \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2 \right)(x_1 + x_3 \cdot a) + \frac{2\pi}{3} \cdot a \cdot b \left({R_{\text{зов}}}^3 - {R_{\text{вн}}}^3 \right).$$

Обчислимо чистий економічний прибуток $P_{\text{ч.пр.}}$, який сільськогосподарське підприємство отримає в результаті продажу своєї кінцевої продукції (м'ясо, молоко, цукор тощо). Величину $P_{\text{ч.пр.}}$ визначимо з формули

$$P_{\text{ч.пр.}} = P_{\text{з.пр.}} - X,$$

де $P_{\text{з.пр.}}$ – загальний прибуток сільськогосподарського підприємства. Величина $P_{\text{з.пр.}}$ дорівнює добутку маси проданої кінцевої сільськогосподарської продукції $Q_{\text{к}}$ на ціну одиниці її маси p:

$$P_{\text{з.пр.}} = Q_{\text{к}} \cdot p \,.$$

Величину $Q_{\text{к}}$ можна виразити через величину повної маси вирощеної продукції Q (3), а тому через розміри поля співвідношенням

$$Q_{\text{к}} = cQ = c \cdot a \cdot S = c \cdot a \cdot \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2\right),$$

де коефіцієнт c дорівнює масі кінцевої продукції, отриманої з одиниці маси первинної продукції (наприклад, масі цукру у тоннах, отриманого з тонни цукрових буряків). Підставивши отримані співвідношення, отримаємо величину чистого економічного прибутку як функцію розмірів поля:

$$P_{\text{ч.пр.}} = \pi\left({R_{\text{зов}}}^2 - {R_{\text{вн}}}^2\right)(a \cdot c \cdot p - x_1 - x_3 \cdot a) - \frac{2\pi}{3} a \cdot b\left({R_{\text{зов}}}^3 - {R_{\text{вн}}}^3\right).$$

Знайдемо оптимальні розміри сільськогосподарського підприємства (радіус поля) з позиції максимально можливого значення чистого економічного прибутку $P_{\text{ч.пр.}}$. Для цього дослідимо функцію $P_{\text{ч.пр.}} = f(R_{\text{зов}})$ на екстремум за змінною $R_{\text{зов}}$ при незмінному значенні $R_{\text{вн}}$. Похідна функції дорівнює:

$$\frac{dP_{\text{ч.пр.}}}{d\, R_{\text{зов}}} = 2\pi\, R_{\text{зов}}(a \cdot c \cdot p - x_1 - x_3 \cdot a) - 2\pi a \cdot b\, {R_{\text{зов}}}^2$$

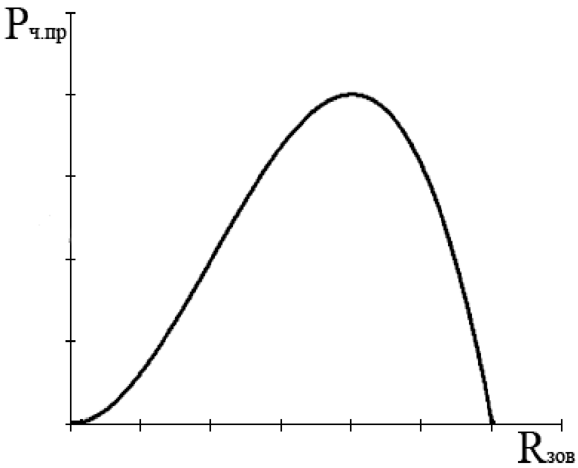
Прирівнявши похідну до нуля і розв’язавши рівняння відносно $R_{\text{зов}}$, знайдемо можливу точку екстремуму

$$R_{\text{зов}} = R_0 = \frac{a \cdot c \cdot p - x_1 - x_3 \cdot a}{a \cdot b}$$

Друга похідна функції $P_{\text{ч.пр.}} = f(R_{\text{зов}})$ в точці $R_{\text{зов}} = R_0$ дорівнює

$$\frac{d^2P_{\text{ч.пр.}}}{d\,{R_{\text{зов}}}^2} = 2\pi(a\cdot c\cdot p - x_1 - x_3\cdot a) - 4\pi a\cdot b\cdot\ R_{\text{зов}}$$

$$= -2\pi(a\cdot c\cdot p - x_1 - x_3\cdot a)$$



і є меншою за нуль. Тому у точці $R_{\text{зов}} = R_0$ маємо максимум функції $P_{\text{ч.пр.}} = f(\ R_{\text{зов}})$.

У той же час переконуємося, що функція $P_{\text{ч.пр.}}$ не має екстремуму за змінною $R_{\text{вн}}$. При цьому максимального значення величина $P_{\text{ч.пр.}}$ досягає при $R_{\text{вн}} = 0$.

Підставивши $R_{\text{вн}} = 0$, а також значення $R_{\text{зов}}$, отримаємо максимально можливу величину чистого економічного прибутку сільськогосподарського підприємства

$$P_{\text{ч.пр.}max} = \frac{\pi}{3(a\cdot b)^2}(a\cdot c\cdot p - x_1 - x_3\cdot a)^3$$

Нехай $R_{\text{вн}} = 0$. Тоді чистий економічний прибуток $P_{\text{ч.пр.}}$ дорівнює:

$$P_{\text{ч.пр.}}(\ R_{\text{зов}}) = \pi\ {R_{\text{зов}}}^2(a\cdot c\cdot p - x_1 - x_3\cdot a) - \frac{2\pi}{3}a\cdot b\ {R_{\text{зов}}}^3$$

Схематичний графік даної функції представлено вище. Із графіка та останньої формули випливає, що прибуток сільськогосподарського підприємства є від'ємним, тобто підприємство становиться збитковим, якщо зовнішній радіус поля $R_{\text{зов}}$ перебільшуватиме критичне значення $1{,}5R_0$, тобто $R_{\text{зов}} > 1{,}5R_0$ Це пояснюється тим, що прибуток, отриманий від збільшення оброблюваної площі в цьому випадку не компенсує витрати на транспортування вирощеної сільськогосподарської з більш віддалених дільниць на підприємство для переробки.

Застосуємо економіко-математичний підхід до планування перевезень, за допомогою якого оптимізуємо перевезення, що здійснюються певним підприємством ООО, яке би привело до скорочення вартості перевезень або до зменшення часу, що витрачається на перевезення за роботою Іванченка Дмитра, учня-члена Харківського територіального відділення Малої академії наук України (2017 рік).

Аналіз діяльності ООО дозволив визначити наступних постачальників і споживачів цементу, які обслуговуються підприємством ООО по певному місту. Постачальники продукції: «Євроцемент – Україна»; «Укрцемент», промислова компанія; «Євроцемент Груп – Україна». Можливості постачання відповідно складають 100 т, 80 т, 90 т. Споживачі: ПМК №1; «Харків-промбуд»; «Житлокомунсервіс»; «Жилдорстрой». Потреба даних споживачів відповідно складає: 120 т, 80 т, 30 т, 35 т.

Тарифи перевезень одиниці продукції від кожного постачальника кожному споживачу задаються матрицею:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 23 & 19{,}7 & 20{,}7 & 20{,}2 \\ 17{,}3 & 19{,}3 & 19{,}7 & 18 \\ 24 & 20{,}6 & 21{,}6 & 21 \end{pmatrix}$$

Вартість перевезень становить:

$Z_{ст.} = 100 \cdot 23 + 20 \cdot 24 + 80 \cdot 19{,}3 + 30 \cdot 21{,}6 + 35 \cdot 21 = 5707$ (тис. грн.).

Для розробки оптимального плану перевезень створюється математична модель транспортної задачі.

Маємо:

m (i = 1,2,3) – постачальники продукції;

a_i – кількість одиниць продукції «*i-го*» постачальника;

n (j = 1,2,3,4) – споживачі;

b_j – потреби «*j-го*» споживача;

c_{ij} – вартість перевезення 1 умовної одиниці продукції від «*i-го*» постачальника до «*j-го*» споживача.

Для даної задачі існують наступні обмеження.

1. Балансове обмеження.

Передбачається, що сума всіх запасів (a_i) дорівнює сумі всіх заявок (b_j):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Слід зазначити, що для даної постановки задачі дана умова не виконується, оскільки

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = 270m, \qquad \sum_{j=1}^{n} b_j = 265m,$$

то спостерігається перевищення об'єму по постачальниках над об'ємами по споживачах.

Таким чином, слід увести додаткового споживача відповідно до об'єму перевищення (на 5 т). Цій фіктивній фірмі необхідно поставити 5 т цементу.

Цього споживача пов'язуємо з усіма постачальниками, причому вартість перевезення повинна дорівнювати 0 або бути достатньо великою і однаковою для всіх постачальників. Нехай вона дорівнює 30 грн. Таким чином, матриця вартостей матиме вигляд:

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 23 & 19{,}7 & 20{,}7 & 20{,}2 & 30 \\ 17{,}3 & 19{,}3 & 19{,}7 & 18 & 30 \\ 24 & 20{,}6 & 21{,}6 & 21 & 30 \end{pmatrix}$$

2. Ресурсне обмеження.

Сумарна кількість вантажу, направленого від кожного постачальника до всіх споживачів, повинна дорівнювати запасу вантажу у даного постачальника. Маємо систему $m = 3$ рівностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3 \end{cases}$$

Тобто, $\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{1j} = a_1 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = a_2 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = a_3 \end{cases}$

Для нашої задачі таке обмеження буде дорівнювати:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 100 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 80 \\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 90 \end{cases}$$

Планове обмеження.

Сумарна кількість вантажу, що доставляється кожному споживачу призначення від усіх постачальників, повинне дорівнювати заявці (b_j), поданої даним споживачем. Маємо систему n = 5 рівностей:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=b_4 \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}=b_5 \end{cases}$$

Тобто

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{i1}=b_1 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2}=b_2 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3}=b_3 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4}=b_4 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i5}=b_5 \end{cases}$$

Для нашої задачі таке обмеження буде дорівнювати:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{i1}=120 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2}=80 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3}=30 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4}=35 \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i5}=5 \end{cases}$$

3. Реальність плану перевезень.

Перевезення не можуть бути виражені від'ємними числами, тобто $x_{ij} \geq 0$.

4. Потрібно скласти такий план перевезень, у якому всі заявки були б виконані, і при цьому загальна вартість всіх перевезень була б мінімальною,

тому маємо цільову функцію або критерій ефективності:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

Таким чином, поліпшення господарської діяльності досліджуваного підприємства можливе за рахунок оптимізації перевезень. У процесі дослідження проведено оптимізацію вантажоперевезень підприємства ООО, що привело до економії 426 тис. грн. за рік при загальній вартості вантажоперевезень 5281 тис. грн.

За наведеними прикладами можна бачити, що сучасний спеціаліст та фахівець економіко-аграрного спрямування має знати та вміти з розумінням застосовувати не тільки математичні основи, але і знання економічної складової та бути обізнаним з функціонуванням сільськогосподарського підприємства.

Розділ 2. Основні математичні поняття для економістів

Те, що не може бути єдиного простого способу розв'язання всіх на світі проблем, зрозуміло кожному. Але все ж є такий прийом, як оптимізація – важливе поняття для економістів. Математична модель задачі на оптимізацію пов'язана із задачами на максимум та мінімум, які розв'язуються стандартно. Спочатку слід продумати єдину форму запису умови задачі і загальну мову, на якій можна було б міркувати про задачі різного змісту. Для цього необхідно уточнити значення таких слів як "максимум", "мінімум", "екстремум". Слова "максимум" та "мінімум" – латинські. Вони означають "найбільше" та "найменше". Термін "екстремум" – від латинського *extremum,* що значить "крайнє" – об'єднує поняття максимуму та мінімуму.

Теорію задач на відшукання найбільших та найменших величин називають або теорією екстремальних задач, або теорією оптимізації.

Екстремальні проблеми, які виникають в математиці, в економіці, в природознавстві або в практичних справах спочатку ставляться без формул, в термінах тієї області, в якій вони виникли. Для того, щоб можна було скористуватися загальною теорією, необхідно здійснити переклад постановок задач із специфічної мови на мову математичну. Такий переклад називатися формалізацією, або побудовою математичної моделі.

Наприклад, розглянемо задачу Герона.

Дано дві точки *A* і *B* по один бік від прямої *c.* Потрібно знайти на *c* таку точку *D*, щоб сума відстаней від *A* до *D* і від *B* до *D* була найменшою.

Формалізація:

Направимо вісь *ox* по заданій прямій, а вісь *oy* проведемо перпендикулярно осі *ox* через точку *A*. Нехай точки *A* та *B* мають такі координати: *A(0; a), B (c; b),* візьмемо на осі *ox* точку *D* з координатами *(x;0).* Тоді сума відстаней від *A* до *D* і від *D* до В буде дорівнювати $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$.

Ми прийшли до такої задачі: знайти найменше значення функції *f(x)*= $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}$.

Формалізація задачі – це мистецтво, якому потрібно вчитися, працюючи над практичними задачами. Таким чином, формалізувати екстремальну задачу – це значить точно описати функцію, яку слід мінімізувати або максимізувати (позначимо її *fo)* та обмеження (позначимо його *C*).

Обмеження задається звичайно рівностями та нерівностями. Точки із *C* називаються допустимими, якщо ж обмежень немає, то задачу називають задачею без обмежень. Наприклад, задача Герона є задачею без обмежень. Допустима точка *x* називається абсолютним мінімумом (максимумом) в задачі на оптимізацію, якщо $f(x) \le f(x)$ (або $f(x) \ge f(x)$) для будь-якого x із C .

Абсолютний мінімум (максимум) задачі будемо називати розв'язком задачі, знайти розв'язок – це і є наша ціль.

Що ж таке математична модель? У найпростіших випадках умову задачі можна безпосередньо записати математичною мовою, наприклад, рівнянням чи нерівністю. Це і є математична модель даної задачі. Основою математичної моделі більшості задач оптимізації є деяка функція. Вона здійснює переклад запитання задачі із специфічної мови на мову функцій і називається *цільовою функцією,* яку потрібно при заданих умовах дослідити на найменше (найбільше) значення. Отриманий при цьому результат і дає *розв'язок* задачі оптимізації.

Для однієї і тієї самої задачі оптимізації можна по-різному побудувати її математичну модель. Від того, наскільки вдало вона побудована, часто залежить успіх розв'язування задачі. У математиці створено загальні методи розв'язування певних типів задач оптимізації. Проте в багатьох випадках задачі вдається розв'язати, користуючись лише фактами з елементарної математики. Такі прийоми розв'язування задач оптимізації називаються *елементарними*.

Процес розв'язання екстремальних задач можна розділити на 3 етапи:

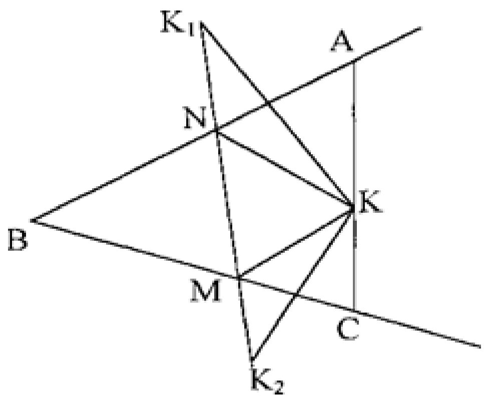
1. вивчення умови задачі і її переклад на мову рівнянь та нерівностей;
2. вибір способу розв'язання та його реалізація;
3. аналіз отриманого результату та встановлення його відповідності з тим об'єктом, який моделювався.

Найважливішим, очевидно, є етап побудови математичної моделі екстремальної задачі, який включає в себе:

а) вибір найважливішої ознаки оптимальності;

б) опис умови задачі у вигляді рівняння, нерівності, рисунка.

Розглянемо приклад: є дві залізничних дороги AB і BC та одна шосейна дорога AC, розміщена так, як показано на рисунку.



Біля залізничної дороги планується будівництво відповідних торгівельних баз та доріг, які з'єднують їх між собою та містом К, що розміщене біля шосейної дороги АС. Найбільш якісним проєктом вважається той, який забезпечує найкомфортніший маршрут з точки зору витрачення часу на об'їзд обслуговуючого автотранспорту по замкненій дорозі. Як спланувати будівництво?

Перший етап розв'язку цієї задачі – переклад її умови, сформульованої на природній мові, на мову математики. Для цього потрібно зобразити карту, поглянути, що всі три дороги перетинаються і утворюють геометричну фігуру – гострокутний трикутник, з якою можна надалі працювати. Вибір оптимального плану розміщення баз означає знаходження таких двох точок, розміщених на відповідних сторонах даного трикутника *ABC*, щоб периметр трикутника *ABC* був найменшим із усіх периметрів можливих трикутників, вершини яких лежать відповідно на сторонах трикутника *ABC*.

Таким чином, одержана геометрична модель задачі: дано кут і в середині нього точка *K*. Побудуйте такий трикутник *MNK* найменшого периметру, щоб одна вершина лежала в даній точці *K*, а дві інші – на сторонах кута.

На другому етапі розв'язування здійснюється пошук методів, прийомів її розв'язання. Розв'язання модельованої задачі відбувається методом перетворення площини. При цьому використовуються ознаки осьової симетрії. Цей етап розв'язання задачі завершується доведенням того, що min $(MK+MN+NK) = K_1K_2$, де K_1=S $AB(K)$, K_2=S $BC(K)$ і того, що точка K_1 симетрична точці *K* відносно прямої *AB*, а точка K_2 симетрична точці *K* відносно прямої *BC*.

На третьому етапі, одержане розв'язання задачі досліджується на предмет його відповідності вихідної ситуації. Так на цьому етапі слід показати, що трикутник *MNK* де *N* – точка перетину прямих *AB* і K_1K_2 та *M* – точка перетину прямих *BC* і K_1K_2 задовольняє умові задачі, так як периметр трикутника є найменшим із периметрів трикутника *ABC*. Найкращий план розміщення торгівельних баз, який забезпечує найменшу витрату часу на об'їзд автотранспортом по замкненій дорозі, співпадає з місцями точок *M* та *N* на відповідних залізничних дорогах.

Необхідність змістовної інтерпретації одержаного розв'язку випливає із того, що одна і та ж математична модель часто застосовується для формального опису різних явищ та процесів. Наприклад, вище розглянута геометрична модель відповідає і наступній задачі: деякий механічний устрій має вигляд гострого кута. В ньому розміщене джерело світла (т. *M*). Як направити промінь світла із точки *M*, щоб він, відбиваючись спочатку з одного боку, а потім з іншого, потрапив у зворотному напрямку в точку *M* ?

Як зазначалось вище, основою математичної моделі більшості задач оптимізації є все ж таки функція. Функція − основне поняття математичного аналізу, але сформувалося воно не одразу. На початку минулого століття з'являється ідея поняття функції, як відповідності, закону за яким незалежна змінна *x* перетворюється в *y* незалежно від способу такої відповідності. Тобто змінна величина *y* називається функцією від змінної величини *x*, якщо кожному значенню x відповідає одне певне значення y. Функції розрізняють за кількістю змінних – однозначні, функції двох змінних та т.і. Розглянемо кілька методів розв’язання задач на оптимізацію, що застосовують поняття функції.

Метод опорних функцій.

Зміст цього методу полягає у тому, що екстремальну задачу представляють математичною мовою і записують функцію (опорну), яка задає критерій оптимізації у вигляді системи обмежень на змінні, що входять до неї, та зв’язок між основними характеристиками процесу.

Розглянемо приклад: на заводі A_1 виготовляють a_1 одиниць продукції, а на заводі A_2 – a_2 одиниць. Вся продукція цих заводів повинна забезпечити обпекти B_1 та B_2. Об’єкт B_1 споживає b_1 одиниць, а об’єкт B_2 – b_2 одиниць. Вартість перевезення продукції із заводу A_1 на об’єкт B_1 складає – n_1 гривень, а із заводу A_1 на об’єкт B_2 – n_3 гривень. Із заводу A_2 на об’єкт B_1 – n_2 гривень, із заводу A_2 на об’єкт B_2 n_4 гривень. Необхідно розібрати план забезпечення об'єктів B_1 та B_2.

Таблиця вартості перевезень продукції

	Завод A_1	Завод A_2
Об’єкт B_1	n_1	n_2
Об’єкт B_2	n_3	n_4

Припустимо, що вся продукція виготовляється об’єктами B_1 та B_2, тоді запишемо $x_1+x_2= b_1$, $x_1+ y_1= a_1$, $y_1+y_2= b_2$, $x_2+y_2=a_2$.

Таблиця плану перевозу продукції

	Завод A_1	Завод A_2	Кіл. продукції
Об’єкт B1	x_1	x_2	b_1
Об’єкт B2	y_1	y_2	b_2
Кіл. продукції	a_1	a_2	$a_1+ a_2= b_1+b_2$

Можемо записати витрати на перевезення продукції:

$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 y_1 + n_4 y_2 = x_1 (n_1 – n_2 – n_3 + n_4) + (n_2 b_1 + n_3 a_1 + n_4 a_2 – n_4 b_1)$,

звідки $z = a x_1 +b$, де $a= n_1 – n_2 – n_3 + n_4$ та $b = n_2 b_1 + n_3 a_1 + n_4 a_2 – n_4 b_1$.

Для визначення мінімального значення цільової функції необхідно встановити границі змінної x. За умовою задачі $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

Тоді

$b_1 - x_1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_1 \leq b_1$

$a_1 - x_1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_1 \leq a_1$

$a_2 - b_1 + x_1 \geq 0$ $\qquad\qquad$ $x_1 \geq b_1 - a_2$.

Порівнюючи нерівності останньої системи визначимо границі зміни x. Використовуючи їх, встановимо, при якому значенні x будемо мати мінімум функції і знайдемо його.

Метод оцінки

Зміст цього методу полягає в тому, що записується алгебраїчний вираз для z, який характеризує основні зв'язки між даними в умові величинами і доводять справедливість однієї з нерівностей: $z \leq M$ або $z \geq \mathrm{m}$, що визначаються умовою задачі. При розв'язуванні екстремальних задач цим методом доводиться використовувати нерівності.

Розглянемо приклад: з круглого дерева, діаметр якого дорівнює d, необхідно вирізати валку прямокутного перерізу так, щоб площа перерізу була найбільшою. Які повинні бути розміри цього перерізу?

Розв'язання:

Площа перерізу $\quad z = S = \sqrt{x^2(d^2 - x^2)}$,

де x – довжина прямокутника. Оцінюємо величину S використовуючи нерівність

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; \qquad \frac{x^2 + (d^2 - x^2)}{2} \geq \sqrt{x^2(d^2 - x^2)} \qquad \text{або} \qquad \sqrt{x^2(d^2 - x^2)} \leq \frac{d^2}{2}$$

Отже, $S\ max = \frac{d^2}{2}$.

Метод перебору

Цей метод застосовується, коли математична модель задачі представлена дискретною функцією, яку не можна представити аналітично. Суть цього методу полягає в тому, що спочатку виділяють послідовність значень аргументу $x_1, x_2, \ldots x_n$, а потім обчислюють відповідні значення функції $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$. Ці обчислення виконують до тих пір, поки не знайдеться таке k, що $f(x_k) \leq f(x_j)$, де $i=1,2...n$. Тоді зрозуміло, що $f(x) = f(x_k)$.

Якщо кількість елементів невелика, то необхідно обчислити всі значення функції $f(x_j)$ і вибрати з них екстремальне. В цьому випадку, метод будемо називати простим перебором. Якщо кількість елементів x велика або нескінченна, то простий перебір неможливий і необхідно знайти спочатку закономірність одержання значень функції. В цьому випадку метод знаходження екстремумів будемо називати методом оптимального перебору.

Розглянемо приклад: із листка жесті довжиною 5 м. необхідно вирізати смуги для серійного випуску виробів довжиною по 6 та 7 см. Як розрізати матеріал, щоб максимально використати його і виготовити приблизно однакову кількість виробів двох видів?

Розв'язання задачі зводиться до розв'язування рівняння $6x+7y=500$ де x та y – кількість виробів одного та другого видів. Звідси: $x=\frac{500-7y}{6}$

Методом простого перебору знаходимо декілька пар розв'язання цього рівняння, наприклад: *(81,2), (74,8), (67,14)*,...

Далі знаходимо закономірність: $x=88-7y$, $y=6n-4$ де n – натуральне число.

Оскільки бажано, щоб $x = y$, то методом оптимального перебору легко встановити, що шуканим розв'язком буде пара чисел 39 та 38.

Описаними методами не обмежуються можливості застосування математики. Деякі задачі прикладного спрямування вже розглядались у Розділі 1 та будуть ще наведені у Розділі 5.

Розділ 3. Логічне та критичне мислення

Згідно сучасної концепції математичної освіти, її найважливішою метою є „інтелектуальний розвиток і саморозвиток здобувачів, оволодіння математичними знаннями і видами діяльності, формування якостей мислення, характерних для математичної діяльності і необхідних людині для повноцінного життя в суспільстві“. На сучасному етапі пріоритетними в освітній системі є розвивальна функція навчання порівняно з її освітньою та інформаційною функціями, перенесення акцентів зі збільшення об'єму інформації, призначеної для засвоєння здобувачами, на формування умінь використовувати інформацію. Навчання математики повинно бути орієнтоване не скільки на математичну освіту, у вузькому значенні слова, скільки на освіту за допомогою математики.

Для реалізації описаних напрямів важливими є доцільно підібрані *форми, методи роботи* та *зміст занять*. Зокрема, підібрані різноманітні складні задачі з достатнім евристичним навантаженням, відповідний історичний матеріал (висвітлення історії розвитку виведення та доведення математичних тверджень), задачі, що використовують об'єднання, взаємопроникнення різних предметів, а також і взаємопроникнення у самій математиці є вкрай необхідними для досягнення поставленої мети. Необхідно наголосити і на систематичному виконанні усних вправ з математики, *усного обговорення* математичних питань, які сприяють розвиткові логічного мислення здобувачів, підвищують їхню математичну культуру, формують важливі навички, збуджують творчу активність, привчають до зосередженості, розвивають вміння планувати свою діяльність.

Сучасні тенденції оновлення змісту освіти передбачають, крім іншого, його культуровідповідність, гуманітаризацію й особистісну орієнтацію. З історії відомо, що найважливіші математичні ідеї виникали в ті моменти, коли найповніше проявлявся зв'язок різних розділів математики. Вивчення цих зв'язків і проникнення у їх суть приводило до розширення предмета математики в цілому і окремих її розділів. Підтвердженням цьому є, наприклад, створення методу координат. Ідея співставлення точок площини з відповідними числами дала потужний стимул для розвитку алгебри і геометрії. І все ж головне значення методу координат полягає в тому, що він став основою для введення поняття функції, яка в свою чергу створила міцне підґрунтя для формування математичного аналізу. Це один із найяскравіших прикладів інтеграції математичного знання. Висвітлення історії творення методу координат і його значення для подальшого розвитку математики сприятиме усвідомленню єдності математичної науки, її понять і методів.

Багатогранна діяльність творців методу координат П.Ферма і Р.Декарта сама по собі є також прикладом різноманітних зв'язків у математиці: між окремими галузями, між минулим і майбутнім, між інтуїцією і логікою тощо.

На шляху розвитку мислення і творчості провідну роль в математиці відіграють *задачі і вправи*. Саме вони активізують розумову діяльність здобувачів на занятті. Розв’язуючи математичні задачі, здобувачі не тільки виконують побудови, перетворення і запам’ятовують формулювання, а й навчаються чіткому мисленню, умінню міркувати, порівнювати і протиставляти факти, знаходити в них спільне і різне, робити правильні висновки. Правильно організоване навчання розв’язанню задач привчає до повноцінної аргументації кожного кроку розв’язання, з посиланням у відповідних випадках на аксіоми, введенні означення, раніше доведені теореми. Уміння міркувати передбачає і вміння оцінювати істинність або хибність висловлювань, правильно складати складні висловлення і судження, тобто логічно правильно вживати сполучники ”і”, “або”, заперечення “не”. Навчання правильному застосуванню цих сполучників допомагає вихованню у здобувачів математично грамотної мови, а творчість, як відомо, пов’язана з мовою, мовленням людини. Доцільно навчити здобувачів правильно формулювати заперечення тих чи інших тверджень. Такі вміння мають особливо велике значення при розв’язуванні задач зведенням до протиріччя.

Мислення є одним із провідних пізнавальних процесів, його вважають найвищим ступенем пізнання. Саме математика, як жодна з інших наук, привчає нас до розумової діяльності, міркувань, розвиває різні види мислення, логічному і аргументованому викладу думок.

Аналітичне мислення умовно можна назвати раціональним, логічним. Ми використовуємо нашу здатність до аналітичного мислення, коли від нас вимагається розкласти об'ємну інформацію на окремі «шматочки» і, просуваючись крок за кроком, зрозуміти її суть і логіку. Розвинені аналітичні здібності корисні як в повсякденному житті, так і в професійній діяльності, оскільки вони допомагають нам відрізняти другорядне від головного, знаходити сильні та слабкі сторони життєвих ситуацій, виявляти можливості і обмеження, приймати рішення, опираючись на дані, проєктувати свою діяльність відповідно до цілей тощо. Завдяки аналітичному мисленню ми розуміємо суть явищ та подій, причинно-наслідкових відносин, бачимо складові частини складної проблеми, можемо зробити порівняльний аналіз та обрати оптимальне рішення.

Критичне мислення можна умовно назвати оціночним. Критичне мислення допомагає нам, зокрема, оцінювати, чи дійсно відбулась та чи інша подія, в якій мірі можна довіряти отриманій інформації, визначати корисність отриманої інформації. Іншими словами, критичне мислення допомагає нам сформувати свою думку або переконання з приводу тієї чи іншої інформації.

В інтелектуальному розвитку студентської молоді саме об’єднання логічного та критичного, що надалі формує професійне мислення має надзвичайно важливе значення, так як від рівня його сформованості залежить успішність подальшої професійної діяльності здобувачів. Високий рівень професіоналізму пов'язаний з теоретичним (не емпіричним), творчим, часто інтуїтивним мисленням і розвиненим практичним інтелектом. Підготовка професіонала вимагає обов'язкового аналізу специфіки професійних задач і стратегії їхнього розв'язування, оскільки процес мислення полягає в розв'язуванні тих або інших задач. Таким чином, обов’язкова дисципліна «Вища математика» є необхідним підґрунтям для розвитку професійного мислення – основою професіоналізму майбутніх спеціалістів.

Розділ 4. Програма курсу «Вища математика для здобувачів початкового (короткого циклу) рівня вищої освіти галузі знань 05 «Соціальні та поведінкові науки» спеціальності 051 «Економіка»

У ринкових умовах ефективне господарювання й управління виробничою діяльністю на будь-якому рівні в будь-якій галузі не можливі без використання сучасних методів планування й організації, основою яких є відповідний математичний апарат. Поєднання математичних методів та економічного аналізу відкриває нові можливості для економічної науки та практики.

Безперечно, успіх у професійній або підприємницькій діяльності чималою мірою залежить від рівня розвитку культури економіко-математичних знань, яка складається не тільки з глибоких знань природничо-наукових теорій і соціально-економічних концептів, а, до того ж, із здатності відчувати математичні характеристики економічних явищ, класифікувати та узагальнювати властивості соціально-економічних об'єктів.

Математика – мова, якою останнім часом користується будь-яка природнича і більшість суспільних наук. Серед інших соціальних наук саме економіка більш за все застосовує математичні методи. Інтегрування економіки і математики безумовно збагачує економічну науку, озброює її інструментами розрахунків, прогнозів, оцінок. Математика у свою чергу одержує стимул розвитку через відкриття нових галузей застосування до різноманітних економічних і фінансових задач.

У зв’язку з цим курс вищої математики займає особливе місце і лежить в основі математичної освіти. Введення в математику понять змінної величини, вектора, функції дозволяє перейти від розв̓язання окремих фізичних та геометричних задач до створення загальних методів розв̓язання цих задач.

Курс „Вища математика" для економічних спеціальностей є необхідною складовою частиною фахової підготовки спеціалістів і гарантує їм подальше використання знань і навичок в процесі вивчення інших дисциплін як математичного, так і економічного профілю. А тому в умовах аграрного ВНЗ курс вищої математики є одним з основних, визначальних як для всього процесу навчання, так і подальшої практичної діяльності спеціаліста. Він є необхідним для успішного засвоєння спеціальних дисциплін.

Програма вивчення обов’язкової навчальної дисципліни “Вища математика” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки молодших бакалаврів. Дисципліна викладається у першому семестрі першого курсу з використанням лекційних та практичних форм навчання та екзаменаційною формою контролю.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є загальні математичні властивості та закономірності й теоретичні засади імовірнісно-статистичного апарату.

Мета і завдання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни "Вища математика" є засвоєння здобувачами базових математичних знань; вироблення вміння розв'язувати задачі у професійній діяльності та навичок математичного дослідження прикладних задач; забезпечення відповідним понятійним та математичним апаратом, необхідним для значно глибшого та чіткішого розуміння багатьох економічних законів і співвідношень, які мають імовірнісний характер; розвинення у здобувачів мислення; формування навичок використання повного об'єму інформації та комунікативних засобів для визначення джерел інформації.

Міждисциплінарні зв'язки:

"Вища математика" належить до циклу фундаментальних дисциплін і забезпечує вивчення загальнонаукових та спеціальних дисциплін.

Основними завданнями вивчення дисципліни "Вища математика" є

– оволодіння здобувачами основами математичного апарату;

– розвиток мислення;

– вироблення навичок самостійного вивчення наукової літератури з математики та її застосування.

Для вивчення вищої математики необхідні знання математики в об'ємі середньої школи.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми здобувачі повинні:

знати :

1. Поняття матриці, оберненої матриці, дії над матрицями;
2. Методи розв'язування систем лінійних рівнянь, теорему Кронекера-Капеллі;
3. Основні поняття векторної алгебри: означення вектора, розклад вектора за базисом, означення та геометричний зміст скалярного, векторного та мішаного добутків векторів;
4. Різні види рівнянь площини та прямої в просторі;
5. Різні види рівнянь прямої на площині;
6. Графіки елементарних функцій та їхні властивості, поняття про границю функції, теореми про границі, поняття неперервності функції, класифікацію точок розриву;
7. Визначення похідної, таблицю похідних, геометричний та економічний зміст похідної, основні теореми про похідні;
8. Поняття первісної, невизначеного інтеграла, таблицю інтегралів,

основні методи інтегрування, поняття визначеного інтеграла, формулу Ньютона-Лейбніца, поняття невласних інтегралів.

9. Аксіоматику теорії ймовірностей. Класичне, геометричне і статистичне визначення ймовірностей. Властивості ймовірностей.

10. Теореми додавання і множення ймовірностей. Складні та залежні події. Умовну ймовірність. Формулу повної ймовірності. Формулу Байєса.

11. Незалежні події. Попарну незалежність подій, незалежність в сукупності.

12. Повторні незалежні випробування. Формулу Бернуллі. Асимптотичні формули в схемі Бернуллі.

13. Означення випадкової величини. Функцію розподілу (інтегральну функцію) та функцію щільності (диференціальну функцію) випадкової величини.

14. Дискретні і неперервні випадкові величини та їхні числові характеристики.

15. Основні поняття математичної статистики.

уміти :

1. Розв'язувати системи лінійних рівнянь, користуватись формулами Крамера, знаходити ранг матриці, обернену матрицю;

2. Обчислювати скалярний, векторний, мішаний добуток векторів, довжину вектора, кут між векторами, застосовувати формули векторної алгебри для розв'язування задач на пряму та площину;

3. Будувати графіки функцій, знаходити границі функцій;

4. Знаходити похідну складної функції;

5. Знаходити невизначений інтеграл за допомогою таблиці, методів заміни змінних, підстановки та інтегрування частинами;

6. Обчислювати визначені інтеграли;

7. Розв’язувати задачі, використовуючи класичне і статистичне визначення ймовірності.

8. Розв’язувати задачі, використовуючи теореми додавання і множення ймовірностей, умовні ймовірності, формулу повної ймовірності, формулу Байєса.

9. Перевіряти події на незалежність, незалежність в сукупності, знаходити ймовірності незалежних подій.

10. Користуючись формулою Бернуллі й асимптотичними формулами в схемі Бернуллі знаходити ймовірності подій в схемі незалежних випробувань.

11. Знаходити числові характеристики випадкових величин, розподіл функції випадкової величини.

12. Досліджувати закони розподілів випадкових величин.

13. Встановлювати кореляційну залежність між величинами.

Наслідком вивчення навчальної дисципліни «Вища математика» має стати розвиток й удосконалення наступних результатів навчання (компетентностей):

Інтегральна компетентність

Здатність розв'язувати типові спеціалізовані задачі у сфері економіки суб'єктів господарювання або у процесі навчання, що передбачає застосування положень і методів сучасної економічної науки і характеризується певною невизначеністю умов і необхідністю врахування комплексу вимог здійснення професійної та навчальної діяльності.

Програмні компетентності:

загальні компетентності:

ЗК 3. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації, у тому числі в глобальних комп'ютерних мережах.

ЗК 4. Здатність критично оцінювати характер впливу соціально-психологічних і природних факторів на професійну і побутову діяльність індивідуумів, соціальних груп та суб'єктів господарювання.

ЗК 7. Здатність працювати в команді та генерувати нові ідеї.

спеціальні компетентності:

СК 1. Здатність використовувати математичний інструментарій для дослідження соціально-економічних процесів, розв'язання прикладних завдань у сфері економіки підприємства.

Програмні результати навчання:

ПРН 7. Застосовувати набуті теоретичні знання для розв'язання практичних завдань та змістовно інтерпретувати отримані результати.

РПН 13. Проводити аналіз функціонування та розвитку суб'єктів господарювання, визначати функціональні сфери, розраховувати фактичні та планові показники їх діяльності з використанням математичного інструментарію.

Інформаційний обсяг навчальної дисципліни

Змістовий модуль 1. Вища математика

Тема 1. Елементи лінійної та векторної алгебри

Тема 2. Аналітична геометрія

Тема 3. Вступ до математичного аналізу

Тема 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Тема 5. Інтегральне числення функцій однієї змінної

Тема 6. Функції двох змінних (оглядово)

Змістовий модуль 2. Теорія імовірностей та основи математичної статистики

Тема 1. Вступ до теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності

Тема 2. Важливі теореми теорії ймовірностей

Тема 3. Послідовність незалежних випробувань за схемою Бернуллі
Тема 4. Числові характеристики дискретної випадкової величини
Тема 5. Неперервна випадкова величина та її характеристики
Тема 6. Основні поняття математичної статистики
Тема 7. Статистичні оцінки параметрів розподілу
Тема 8. Елементи теорії кореляції
Тема 9. Регресійний аналіз

Форма підсумкового контролю успішності навчання

Екзамен

Засоби діагностики успішності навчання

Робота здобувачів на лекційних і практичних заняттях, виконання самостійних та контрольних робіт, захист індивідуальних завдань.

Розділ 5. Лекції за курсом

5.1 Основи теорії матриць. Елементи теорії визначників

Перша зустріч з матрицями

У 1858 році А. Келі (А́ртур Ке́лі (англ. Arthur Cayley) — англійський математик) зайнявся систематичною побудовою чисел нової природи – *таблиць* (прямокутних, зокрема квадратних), що складаються з дійсних чисел (або навіть комплексних). Вони отримали назву ***матриць.*** Якщо в матриці m рядків і n стовпчиків, то говорять, що вона має розмірність $m \times n$. В окремому випадку, коли число рядків в матриці дорівнює числу стовпчиків, тобто $m = n$, отримаємо квадратну (квадратичну) матрицю n – го порядку. Тобто кількість її рядків (або стовпців) називають порядком матриці. Наприклад, таблиця $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ є матрицею розмірів 3×4. Вона має 3 рядки і 4 стовпчики. Для запису, матрицю зазвичай заключають у круглі дужки і позначають однією великою буквою (наприклад, *A*, *M*). Можемо записати

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 6 \\ 1 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Завдання для здобувачів:

Запишіть, будь ласка, приклад матриці 5-го порядку.

Числа, з яких складається матриця, називаються її елементами. Для кожного елемента матриці можна визначити відповідні рядок і стовпчик, у яких він знаходиться. Так, у матриці *A* елемент 9 знаходиться у *2* рядочку і *3* стовпчику. У зв'язку з цим, коли записують довільну матрицю, її елементи позначають буквою з двома індексами, наприклад, a_{ij} (i визначає номер рядочка, j — номер стовпчика).

За аналогією з числами Келі увів для матриць однієї і тієї ж самої розмірності визначення рівності, правила додавання, віднімання, множення на число.

Завдання для здобувачів:

Які б ви ввели визначення для зазначених дій?

Складніше визначити добуток матриць. Спочатку помножимо квадратичну матрицю $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ на матрицю-стовпець $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Це виконується за правилом "множення рядка на стовпець":

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 x + a_2 y \\ b_1 x + b_2 y \end{pmatrix}$$

(у результаті отримуємо матрицю-стовпець). Дану дію можна записати так: $A \cdot X = C$, де C – матриця, що записана у правій частині формули.

За допомогою множення матриць можна компактно записувати системи рівнянь. Так, систему

$\begin{cases} 2x + 6y = 17, \\ 3x + 5y = 13 \end{cases}$ можна записати у вигляді: $A \cdot X = C$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 17 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Саме можливість такого компактного запису системи рівнянь і продиктував вибір правила множення матриць: "рядок на стовпець".

Завдання для здобувачів:

Навести власний приклад системи і записати її у вигляді добутку матриць.

А тепер добуток матриць запишіть як систему рівнянь.

Матриці використовують для компактного запису підсумків якогось турніру, результатів поставки (у яких-небудь одиницях) товару з кількох пунктів відправлення у кілька пунктів призначення, вартості перевезень цих товарів тощо. Тобто матриця є зручною як деяке інформаційне зведення.

Основні поняття про матриці, їхні види. Дії над матрицями

Матриця – це прямокутна таблиця, яка складається з m рядків та n стовпчиків.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \; \dots \; a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \; \dots \; a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \; \dots \; a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо число рядків в матриці дорівнює числу стовпчиків, тобто $m = n$, отримаємо квадратну матрицю n – го порядку.

Отже, ***матриця*** – це впорядкована таблиця чисел, що має m рядків та n стовпців. Матриця записується у вигляді такої таблиці в круглих дужках і позначається як правило прописними латинськими літерами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} – елементи матриці, де i – номер рядка, j – номер стовпця, у яких розміщений даний елемент.

Елементи квадратної матриці a_{ij}, у яких номер рядка співпадає з номером стовпця, називаються діагональними і утворюють головну діагональ.

Числа m та n визначають розміри матриці. Якщо $m \neq n$, то матриця прямокутна, якщо $m = n$, то матриця квадратна порядку n. Квадратна матриця має свій визначник, який позначається $\det A$ або $|A|$.

Квадратна матриця, у якій відмінні від нуля лише елементи, що знаходяться на діагоналі з елементом a_{11}, має назву діагональної. Якщо усі діагональні елементи дорівнюють одиниці, то маємо одиничну матрицю, яка відіграє роль одиниці у матричному численні. Роль нуля відіграє нульова матриця, тобто матриця, усі елементи якої дорівнюють нулю.

Наприклад:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ – прямокутна матриця розмірності 2×3;

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ – квадратна матриця другого порядку;

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ – діагональна матриця третього порядку;

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – одинична матриця третього порядку;

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нульова матриця розмірності 3×2;

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – матриця-стовпець;

$F = (3 \quad 0 \quad 1 \quad -1)$ – матриця-рядок.

Дві матриці A та B з однаковими розмірами $m \times n$ вважаються рівними, коли їхні відповідні елементи рівні, тобто коли $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. У цьому випадку пишуть $A = B$.

Матриці можна транспонувати, множити на число, додавати, множити на матрицю.

Транспонувати – це означає зробити рядки матриці стовпцями з тими ж номерами, а стовпці – рядками. Матрицю, транспоновану до матриці A, позначають A^T.

Щоб помножити матрицю на число, досить кожен елемент матриці помножити на це число.

Сума двох матриць є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів матриць-доданків. З означення випливає, що додавати можна лише матриці однакових розмірів. Суму матриць A та B позначають $A+B$.

У той же спосіб визначають різницю $A-B$ двох матриць A та B.

Означені вище матриці мають усі властивості додавання й множення чисел:

1. $A+B=B+A$.
2. $A+0=0+A=A$.
3. $1\cdot A=A$.
4. $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$.
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.
6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
7. $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$.

Тут α, β – числа; A, B, C – матриці.

Дещо складніше визначають добуток двох матриць A та B.

За означенням, добутком матриць A та B є матриця $C=AB$, елемент якої c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів $i-$го рядка матриці A та $j-$го стовпця матриці B.

Із означення випливає, що помножити матрицю A на матрицю B можна лише у випадку, коли кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. Щоб отримати $i-$й рядок добутку, необхідно помножити $i-$й рядок матриці A на кожен стовпець матриці B.

Таким чином, якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix},$$

то

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} & \ldots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \ldots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \ldots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} & \ldots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \ldots + a_{2n}b_{np} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ddots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \ldots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + a_{m2}b_{22} + \ldots + a_{mn}b_{n2} & \ldots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \ldots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

Як бачимо, якщо матриця A має розміри $m \times n$, а матриця B – розміри $n \times p$, то матриця $C = AB$ має розміри $m \times p$, тобто добуток двох матриць є матриця, кількість рядків якої дорівнює кількості рядків першої матриці, а кількість стовпців – кількості стовпців другої матриці.

Очевидно, що переставний закон у загальному випадку не має місця: $AB \neq BA$. Навіть не завжди існують AB та BA.

Матриці, для яких діє переставний закон, мають назву переставних. Так, якщо A – квадратна матриця $n-$го порядку, а E – одинична матриця $n-$го порядку, то $AE = EA = A$.

Завдання для здобувачів:

Перевірте останнє твердження.

Множення матриці на матрицю має такі властивості:

1. $(AB)C = A(BC) = ABC$;
2. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
3. $(A+B)C = (AC) + (BC)$;
4. $C(A+B) = CA + CB$.

Матричне числення дуже ефективно використовують в теорії систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Нехай дана система рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Систему (1) за допомогою матриць можна записати більш коротко:

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тут A – матриця системи; X – матриця-стовпець невідомих; B – матриця-стовпець правих частин рівнянь.

Наведемо приклад.

Багатогалузеве підприємство потребує балансу між окремими галузями. Кожна галузь є, з одного боку, виробником одного визначеного набору видів продукції, а з іншого – споживачем іншого набору видів продукції. Виникає складне завдання: узгодити об'єми виробництва кожної з галузей, щоб задовольнити всі потреби у продукції. Наприклад, візьмемо виробничу сферу з 3 галузей, кожна з яких виробляє один (власний) продукт. Означимо період часу, наприклад, рік, протягом якого всі коефіцієнти залишаються постійними. Нехай

x_i – загальний (валовий) випуск i-ої галузі ($x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3$);

x_{ij} – об'єм продукції i-ої галузі, яка постачається для j-ої галузі в процесі виробництва;

a_{ij} – затрати i-ої галузі на випуск однієї одиниці продукції для j-ої галузі, де $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \geq 0$.

Тоді балансові співвідношення матимуть вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ x_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{cases}$$

Або у матричній формі $X = AX$, де X –матриця випусків галузей, A – матриця прямих затрат.

Визначники 2-го, 3-го, n – го порядку та їхні властивості

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо систему методом виключення невідомих:

$$\left.\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = h_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = h_2. \end{cases}\right| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ - \\ \cdot a_{12} \end{array}$$

Отримаємо: $(a_{11} a_{22} – a_{21} a_{12})\ x_1 = h_1 a_{22} – h_2 a_{12}$.

Позначимо: $a_{11} a_{22} – a_{21} a_{12} = \Delta$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad (3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} h_1 & a_{12} \\ h_2 & a_{22} \end{vmatrix} = h_1 \cdot a_{22} - h_2 \cdot a_{12}, \qquad (3`)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & h_1 \\ a_{21} & h_2 \end{vmatrix} = h_2 \cdot a_{11} - h_1 \cdot a_{21}. \qquad (3``)$$

Визначник Δ називається визначником системи або визначником відповідної матриці.

Визначником другого порядку називається:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Тут зліва – позначення визначника другого порядку, праворуч – його значення.

Величини a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ – елементи визначника.

Як бачимо, визначник другого порядку має $2 \times 2 = 4$ елемента, що розташовані у вигляді таблиці з двома рядками та двома стовпцями, розміщеної між двома вертикальними лініями.

Треба звернути увагу на індекси елементів визначника: перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпця, у яких розташований елемент.

Якщо елементи визначника являють собою числа, то визначник також є число, що одержують за вказаною вище формулою.

Визначники позначаються, як правило, грецькими літерами Δ або δ.

Приклад 1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

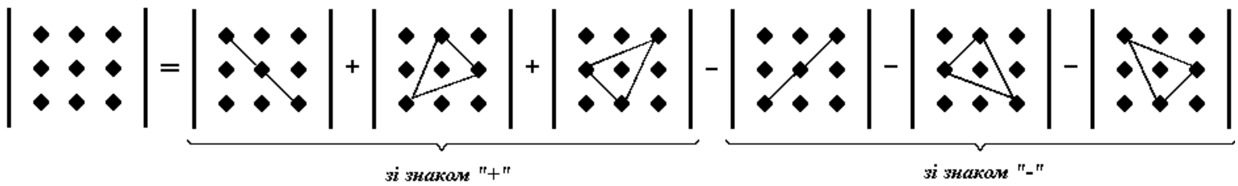
Розв’язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 = -10 - 12 = -22.$$

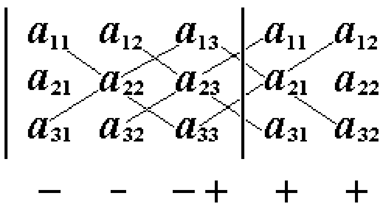
Визначник третього порядку:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

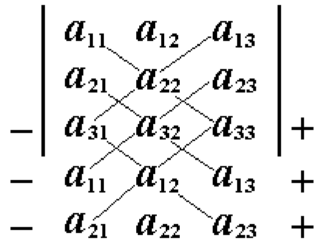
Хоча вираз для визначника третього порядку є досить громіздкий, закон його складання дуже простий. Схематично правило обчислення визначника третього порядку можна зобразити таким чином:



Легко також запам'ятати правило Сар'юса обчислення визначників третього порядку. Згідно за цим правилом слід приписати праворуч від визначника перший та другий стовпці або знизу від визначника перший та другий рядки та вибрати відповідні добутки елементів згідно з наведеною нижче схемою:



або



Як бачимо, якщо елементами визначника є числа, то й визначник також є число.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2)\cdot 0 + 4\cdot 5\cdot(-6) + 1\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot(-2)\cdot(-6) - 4\cdot 3\cdot 0 - 2\cdot 5\cdot 1 =$$

$$= 0 - 120 + 3 - 12 - 0 - 10 = -139.$$

Визначник $n-$ го порядку позначають так:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Він має n^2 елементів з $n!$ членів. При $n = 10$ визначник має $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 3628800$ членів, для запису яких треба було б мати більш 20 тисяч сторінок. Тому обчислення визначників більш ніж третього порядку зводиться до обчислення визначників третього або другого порядків за допомогою таких двох *властивостей визначника*:

1. визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого ряду (рядка або стовпця) додати відповідні елементи паралельного ряду, помножені на одне й те саме число;

2. визначник довільного порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення, зокрема, якщо у визначника $n-$го порядку всі елементи, крім одного, будь-якого ряду дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку цього елемента, що відрізняється від нуля, на його алгебраїчне доповнення.

За допомогою першої з цих властивостей у будь-якому ряду всі елементи, крім одного, робимо рівними нулю, а за допомогою другої – порядок визначника знижуємо на одиницю. Так робимо доти, доки не прийдемо до визначника третього або другого порядків.

3. визначник з двома однаковими рядками або стовпцями дорівнює – *нулю.*

Зазначимо, що визначником першого порядку є число a_{11}.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку є добуток $(-1)^{i+j}$ та визначника $(n-1)-$го порядку, який називається мінором (мино́р з лат. minor – менший, також малий. Можна пригадати мінор у музиці), отриманого з даного визначника викреслюванням $i-$го рядка та $j-$ го стовпця. Позначають алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} через A_{ij}, а мінор елемента a_{ij} через M_{ij}. При цьому $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Визначники $\mathbf{n}-$ го ***порядку***

Визначник Δ_n квадратної матриці порядку n

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

може бути знайдений за формулою:

$$\Delta_n=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\mathrm{A}_{ik}=a_{i1}\mathrm{A}_{i1}+a_{i2}\mathrm{A}_{i2}+\ldots+a_{in}\mathrm{A}_{in}$$

(розкладання за елементами i-го рядка). Через A_{ik} позначено алгебричне доповнення елемента a_{ik} – визначник, одержаний вилученням із матриці i-го рядка та k-го стовпця, перед яким поставлено знак $(-1)^{i+k}$. Наприклад,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{24}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Таким чином, визначник 4-го порядку обчислюється через чотири визначники 3-го порядку, визначник 5-го порядку – через п’ять визначників 4-го порядку.

Завдання для здобувачів:

Записати розклад за елементами $j-го$ стовпця.

Тобто записати

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Приклад 3. Знайти мінори й алгебраїчні доповнення визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

$$a_{11} = 1,\ a_{12} = 2,\ a_{13} = -1,\ a_{21} = 3,\ a_{22} = -1,\ a_{23} = 2,\ a_{31} = 1,\ a_{32} = 0,\ a_{33} = 4.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4;\ A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = (-1)^2 M_{11} = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10;\ A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -10;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;\ A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13} = 1;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8;\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -M_{21} = -8;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5;\ A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^3 M_{22} = (-1)^4 M_{22} = M_{22} = 5;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2;\ A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = (-1)^5 M_{23} = -M_{23} = 2;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3;\ A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = (-1)^4 M_{31} = M_{31} = 3;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5;\ A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{32} = -5;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7;\ A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = (-1)^6 M_{33} = M_{33} = -7;$$

Приклад 4. Обчислити визначник розкладанням за елементами будь-якого ряду (рядка або стовпця):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Алгебраїчні доповнення цього визначника було знайдено у прикладі 3:

$A_{11} = -4, A_{12} = -10, A_{13} = 1, A_{21} = -8, A_{22} = 5, A_{23} = 2, A_{31} = 3, A_{32} = -5, A_{33} = -7.$

Запишемо розкладання за рядками:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-10) - 1 \cdot 1 = -25,$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 3 \cdot (-8) - 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -25,$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-5) + 4 \cdot (-7) = -25.$$

Запишемо розкладання за стовпцями за допомогою мінорів:

$$\Delta = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 24 + 3 = -25,$$

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -20 - 5 = -25,$$

$$\Delta = -1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 28 = -25.$$

Відповідь: $\Delta = -25$.

Обернена матриця. Її обчислення методом приєднаної матриці (методом елементарних перетворень) або за формулою

Важливим поняттям матричного числення є поняття оберненої матриці. Обернена матриця до квадратної невиродженої матриці A є матриця A^{-1} така, що $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця порядку матриці A.

Вироджена і невироджена матриці.

Запишемо квадратну матрицю А третього порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матриці А відповідає детермінант третього порядку

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Матриця А називається ***невиродженою***, коли її детермінант не дорівнює нулю, і ***виродженою***, коли її детермінант дорівнює нулю.

Приклад 5.

Чи буде задана матриця А виродженою?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Розв'язання.

Щоб відповісти на питання, знайдемо детермінант матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -27$$

Детермінант матриці А не дорівнює нулю, матриця А невироджена.

Отже, квадратична матриця n – го порядку $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots . a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots . \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots \quad a_{nn} \end{pmatrix}$

називається невиродженою, якщо її визначник $|A| \neq 0$.

Обернена матриця A^{-1} для невиродженої квадратної матриці A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

може бути знайдена за формулою $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$,

де $\det A$ – визначник матриці A; A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} визначника матриці A $(i, j = \overline{1, n})$.

Приклад 6. Чи є матриця $B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ оберненою до матриці $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$?

Розв'язання. Знайдемо добуток матриць A і B

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi\cdot\cos\varphi+(-\sin\varphi)\cdot(-\sin\varphi) & \cos\varphi\cdot\sin\varphi+(-\sin\varphi)\cdot\cos\varphi\\ \sin\varphi\cdot\cos\varphi+\cos\varphi\cdot(-\sin\varphi) & \cos\varphi\cdot\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\sin\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

матриця $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ – одинична матриця E. Виконання співвідношення

$$AB=E$$

доводить, що матриця B обернена до матриці A.

Приклад 7. Дана матриця

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Знайти обернену матрицю B^{-1} до матриці B.

Розв'язання.

1) Обчислимо визначник (детермінант) матриці B:

$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(1\cdot3-1\cdot2)=1$, при обчисленні було застосовано першу властивість про незмінність визначника (детермінанту) при додаванні до елементів одного ряду відповідних елементів іншого ряду (до елементів першого стовпчика додано відповідні елементи третього стовпчика).

2) Визначник матриці B не дорівнює нулю, отже, матриця B невироджена, а значить для неї можна знайти (існує) обернену матрицю.

3) Знайдемо алгебраїчні доповнення усіх елементів матриці B:

$$b_{11}=1;B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2;b_{12}=0;B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=-3;b_{13}=-1;B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$b_{21}=1; B_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-1; b_{22}=1; B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=3; b_{23}=1; B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$b_{31}=0; B_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1; b_{32}=1; B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2; b_{33}=3; B_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1;$$

4) Запишемо обернену матрицю B^{-1} за формулою:

$$B^{-1}=\frac{1}{\det B}B^{V},$$

де B^V – ***приєднана матриця*** до матриці B, тобто матриця одержана у наслідок транспонування матриці, елементами якої є алгебраїчні доповнення до відповідних елементів матриці B.

$$B^{V}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Визначник $detB = 1$, отже, обернена матриця має вигляд:

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Зауваження: Матриці B і B^{-1} повинні задовольняти співвідношенню

$$B\cdot B^{-1}=E$$

Перевіримо, чи воно виконується для них:

$$B\cdot B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 3 & -2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot(-3)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-1)+0\cdot 3+(-1)\cdot(-1) & 1\cdot 1+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 2+1\cdot(-3)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 3+1\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 1\\ 0\cdot 2+1\cdot(-3)+3\cdot 1 & 0\cdot(-1)+1\cdot 3+3\cdot(-1) & 0\cdot 1+1\cdot(-2)+3\cdot 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

E – одинична матриця третього порядку.

Оскільки співвідношення $B\cdot B^{-1}=E$ виконується, обернена матриця знайдена правильно.

Властивості оберненої матриці.

1. Для двох невироджених матриць одного порядку виконується

рівність:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

2. Для операцій транспонування і знаходження оберненої матриці виконується перестановка:

$$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$$

3. Для невиродженої матриці виконується співвідношення:

$$\det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}$$

Зверніть увагу. Поняття оберненої матриці A^{-1}, тобто такої, для якої виконується: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$, вводиться для невироджених матриць.

Обернену матрицю можна знайти за формулою (за даною формулою, як можна бачити, вже не треба виконувати дію транспонування для матриці, що складається з алгебраїчних доповнень):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Покажемо застосування цієї формули на прикладі.

Приклад 8. Дана матриця $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Знайти: *1)* обернену їй матрицю, якщо вона існує;

2) перевірити, чи виконується рівність $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Розв'язання:

1) Знаходимо визначник матриці A: $|A|=-8\neq 0$, тобто матриця невироджена, отже обернена матриця існує.

2) Для знаходження алгебраїчного доповнення A_{11} елемента a_{11} викреслюємо перший рядок та перший стовпчик матриці A і записуємо отриманий мінор зі знаком плюс:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-5+3=-2.$$

Для знаходження A_{12} викреслюємо перший рядок та другий стовпчик матриці A і записуємо мінор зі знаком мінус:

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2.$$

Аналогічно

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

Звідки $$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Алгоритм обчислення оберненої матиці:

1. Знайти визначник заданої матриці. Якщо $|A| = 0$, то матриця A – вироджена і обернена матриця A^{-1} не існує. Якщо $|A| \neq 0$, то матриця A – невироджена й обернена до неї матриця існує.
2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів заданої матриці і записати обернену матрицю за формулою.
3. Перевірити правильність обчислення оберненої матриці A^{-1}, виходячи з її визначення: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Зверніть увагу. Нехай дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ і $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Знайти добуток $E \cdot A$.

За правилом добутку матриць маємо:

$$E \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot c & 1 \cdot b + 0 \cdot d \\ 0 \cdot a + 1 \cdot c & 0 \cdot b + 1 \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

Отже, матриця $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ діє на будь-яку квадратну матрицю *2*-го порядку подібно до того, як при множенні будь-якого дійсного числа на одиницю, тобто залишає це число без змін. Враховуючи цю аналогію, матрицю E назвали одиничною (ми про неї вже говорили) матрицею. Але тепер звернемо увагу на той випадок, коли добуток двох матриць є одинична матриця E і назвемо такі матриці взаємно оберненими. Легко перевірити, що

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що при $ad - bc = 1$ дані матриці будуть взаємно оберненими.

Поняття матриці та визначники відносяться до лінійної алгебри.

Розглянемо застосування елементів лінійної алгебри на практиці

За даними професора О.М. Можейко врожайність кукурудзи на зерно і люцерни першого року для застосування на сіно під впливом зрошення сумується наступним чином:

Культури	Врожайність, *ц/га*		Прибав-ка,	Зміст у 1 *ц* корму, *ц*		Зміст у прибавці вр., *ц*	
	без поливу	з поливом	*ц/га*	к.од.	перет. протеїн	к.од.	перет. протеїн
Кукурудза на зерно	31,4	50	18,6	1,34	0,08	24,92	1,49
Люцерна	13,2	24,9	11,7	0,48	0,119	5,62	1,39

Питання: яку з цих культур потрібно поливати, а якій культурі у зв'язку з нехваткою води у поливі відмовити з тим, щоб для виробництва заданої кількості кормових одиниць і протеїну, який перетравлюється, обійтися якомога меншою посівною площею.

Розв'язання.

Кукурудза завдяки поливу дає більшу прибавку врожаю і в кормових одиницях і в протеїні, тому поливати слід кукурудзу. Перевіримо, наскільки правильним виявився вибір. Припустимо, що необхідно отримати за рахунок поливних і неполивних земель 100 *ц.* кормових одиниць та 10 *ц.* протеїну. Введемо невідомі x_1 – площа кукурудзи з поливом, x_2 – площа люцерни без поливу. Для визначення кожної з площ S складемо систему рівнянь:

1-е рівняння – виробництво кормових одиниць

$$\underbrace{50 \cdot 1{,}34}_{\text{1 га}}\, x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}48 x_2 = 100$$

2-е рівняння – виробництво протеїну

$$50 \cdot 0{,}08 x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}119 x_2 = 10$$

Таким чином, маємо:

$$\begin{cases} 50 \cdot 1{,}34x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}48x_2 = 100 \\ 50 \cdot 0{,}08x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}119x_2 = 10 \end{cases}$$

Звідки отримуємо $\begin{cases} x_1 = 1{,}17 \text{ га} \\ x_2 = 3{,}38 \text{ га} \end{cases}$

Дослідимо протилежний варіант, тобто будемо поливати люцерну. Для порівняння варіантів необхідно, щоб S люцерни з поливом була такою ж, як і S кукурудзи у попередньому варіанті, а саме 1,17 га. З цієї площі люцерни з поливом можна отримати кормових одиниць:
$24{,}9 \cdot 0{,}48 \cdot 1{,}17 = 13{,}98$ *ц* і протеїну – $24{,}9 \cdot 0{,}119 \cdot 1{,}17 = 3{,}47$ *ц*

Центнери, яких недостає 100 – 13,98 = 86,02 *ц* к.од. і 10 – 3,47 = 6,53 *ц* протеїну необхідно отримати за рахунок посіву кукурудзи і люцерни без поливу. Щоб визначити потрібні для цього площі, складемо систему:

$$\begin{cases} 31{,}4 \cdot 1{,}34x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}48x_2 = 86{,}02 \\ 31{,}4 \cdot 0{,}08x_1 + 13{,}2 \cdot 0{,}119x_2 = 6{,}53 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}87 \text{ га} \\ x_2 = 1{,}17 \text{ га} \end{cases}$$

Отже, в останньому розв'язанні S посівів без поливу дорівнюють $1{,}87 + 1{,}17 = 3{,}04$ га. А при першому підході S землі без поливу дорівнювала 3,38 га. Відмітимо, що S на полив при обох підходах були однакові. Таким чином, поливаючи люцерну ми досягли зменшення S землі без поливу на $3{,}38 - 3{,}04 = 0{,}34$ га або на 10%. Розв'язання виявилось неочікуваним на користь поливу люцерни. Пояснення отриманої несподіванки полягає у наступному. Введемо два поняття:

1. абсолютна чуйність культури на зрошення;
2. відносна чуйність.

Абсолютна чуйність культури на зрошення характеризується абсолютним приростом врожайності. За цим показником кукурудза перевершує люцерну і за кормовими одиницями (24,92 та 5,62), і за протеїном (1,49 та 1,39). Якби S, відведені кожній культурі, були чіткими і не припускали маневрів при посівах, то варто було би поливати кукурудзу.

Відносна чуйність характеризується відношенням прибавки від поливу до врожайності без поливу. По кукурудзі це $18{,}6 : 31{,}4 = 0{,}59$. По люцерні $11{,}7 : 13{,}2 = 0{,}89$. Отже маємо, що відношення чуйності на полив вище у люцерни, а це означає, що віддаючи землю, яка поливається, люцерні можна отримати з неї необхідну кількість продукції, значно скоротивши S землі, яка не зрошується, та звільнити її під іншу культуру.

Завдання для закріплення у тестовій формі

Матриці – основні поняття

1. Матрицею другого порядку називається:

а) визначник; б) вираз з двома елементами;

в) таблиця з чотирьох елементів; г) чотири числа.

2. Розміром матриці називається:

а) кількість елементів у матриці;

б) кількість рядків у матриці;

в) сума кількості рядків і кількості стовпців;

г) вираз $m \times n$ кількості рядків і стовпців.

3. Квадратна матриця – це коли

а) усі елементи однакові;

б) парна кількість елементів;

в) кількість рядків дорівнює кількості стовпців;

г) тільки цілі числа.

4. Дві матриці є рівними, якщо…

а) мають однакові розміри;

б) мають однаковий порядок;

в) мають однакові розміри й відповідні елементи;

г) у них співпадають діагональні елементи.

5. Нульова матриця, це така матриця, у якої...

а) усі елементи нульові;

б) головна діагональ – нулі;

в) хоч один елемент нульовий;

г) є рядок (стовпець), що складається з нулів.

6. Що означає перший індекс елемента матриці?

а) номер стовпця елемента;

б) номер рядка елемента;

в) кількість рядків у матриці;

г) кількість стовпців у матриці.

7. Елемент, який має однакові індексами, це –

а) елемент головної діагоналі;

б) непарний елемент матриці;

в) нульовий елемент матриці;

г) не обов'язковий елемент матриці.

8. Головна діагональ у матриці:

а) зліва зверху – вправо вниз;

б) зліва знизу – вправо уверх;

в) має найбільшу суму елементів;

г) не повинна містити нулі.

9. Матриця називається одиничною, якщо

а) усі її елементи одиниці;

б) усі її елементи або +1 або -1;

в) елементи головної діагоналі – одиниці;

г) вона є діагональною з одиничними елементами.

10. У симетричної матриці...

а) усі елементи однакові;

б) чергуються однакові рядки;

в) головна діагональ – вісь симетрії;

г) чергуються знаки елементів.

Матриці – основні операції

1. Транспонування матриці це

а) заміна рядків відповідними стовпцями;

б) заміна діагональних елементів нулями;

в) перестановка місцями двох рядків (стовпців);

г) заміна знаків рядків на протилежні.

2. Для транспонування матриці є правильним наступне:

а) $a_{ij} \to -a_{ij}$;

б) $a_{ij} \to a_{ji}$;

в) $a_{ij} \to -a_{ji}$;

г) $a_{ij} \to a_{ij}$.

3. Яка матриця при транспонуванні не змінюється?

а) квадратна;

б) з додатковими елементами;

в) симетрична;

г) прямокутна нульова.

4. Результатом додавання двох матриць є

а) матриця того ж порядку й розміру;

б) числове значення;

в) матриця більшого розміру;

г) діагональна матриця.

5. Яке з тверджень не є правильним?

а) "додавання матриць комутативне";

б) "додавання з нульовою матрицею не змінює матрицю";

в) "додавання матриць асоціативне";

г) "додавати можна тільки квадратні матриці".

6. Дві матриці вважаються рівними, якщо

а) кількість стовпців першої дорівнює кількості рядків другої;

б) кількість рядків першої дорівнює кількості стовпців другої ;

в) матриці мають однакові розміри і їхні відповідні елементи рівні;

г) матриці симетричні.

7. Якщо матриці A та B є рівними, то B і A...

а) теж є рівними;

б) не можуть бути рівними;

в) теж рівні, якщо матриці є квадратними;

г) не є рівними, якщо вихідні матриці квадратні.

8. Яку матрицю можна піднести до квадрату?

а) прямокутну;

б) нульову;

в) квадратну;

г) будь-яку.

9. Щоб перемножити дві матриці необхідно...

а) помножити їхні елементи;

б) рядки першої множити на стовпці другої і підсумувати;

в) рядки першої множити на рядки другої і підсумувати;

г) транспонувати їх і перемножити елементи.

Обернена матриця

1. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці A, якщо

а) вона читається справа наліво так само, як матриця A зліва направо;

б) $AE = A^{-1}$;

в) $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця;

г) після транспонування вона співпадає з даною.

2. Обернена матриця для даної матриці не існує, якщо

а) визначник даної матриці дорівнює нулю;

б) у заданій матриці є хоча би один нульовий елемент;

в) задана матриця є невиродженою;

г) дана матриця має нульові діагональні елементи.

3. Елементи оберненої матриці це –

а) алгебраїчні доповнення;

б) мінори;

в) мажори;

г) протилежні елементи.

4. Скільки обернених матриць може існувати для даної?

а) одна;

б) будь-яка кількість;

в) одна або дві;

г) жодної або одна.

5. Оберненою для одиничної матриці буде

а) нульова матриця;

б) одинична матриця;

в) будь-яка матриця;

г) транспонована матриця.

Відповіді до завдань у тестовій формі:

Матриці – основні поняття: 1- в, 2- г, 3- в, 4- в, 5- а, 6- б, 7- а, 8- а, 9- г, 10- в.

Матриці – основні операції: 1- а, 2- б, 3- в, 4- а, 5- г, 6- в, 7- а, 8- в, 9- б.

Обернена матриця: 1- в, 2- а, 3- а, 4- а, 5- б.

5.2 Застосування матриць при розв'язуванні систем лінійних рівнянь. Формули Крамера

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими називається система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де числа a_{11}, a_{12}, …, a_{mn} – коефіцієнти системи, числа b_1, b_2,…, b_m – вільні члени або праві частини системи, x_1, x_2,…, x_n – невідомі системи.

Розв’язати систему означає знайти її невідомі x_1, x_2,…, x_n або показати, що система розв’язку не має.

Розв’язком системи лінійних рівнянь називається впорядкований набір чисел (x_1, x_2,…, x_n), при підстановці якого в систему усі рівняння обертаються у правильні рівності.

Система, яка має розв’язок, називається ***сумісною***; система, яка не має розв’язків називається ***несумісною***.

Сумісна система може мати один чи множину розв'язків.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

Для спрощення викладу розглянемо систему трьох рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

За допомогою трьох матриць, а саме

матриці коефіцієнтів системи $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$,

матриці вільних членів $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ та матриці невідомих $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,

систему рівнянь можна записати у компактній матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \qquad A\,X = B.$$

Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Нехай матриця A (коефіцієнтів системи) невироджена, $det\,A \neq 0$.

Тоді для розв'язання рівняння $AX = B$ (систему лінійних рівнянь записали у матричній формі) помножимо його ліву і праву частини на обернену матрицю A^{-1}, тобто

$$A^{-1}A\,X = A^{-1}\,B,$$

(для того, щоб зліва залишився X, зазвичай при розв'язанні лінійного рівняння ми виконуємо дію ділення $B:A$. Оскільки для матриць дія ділення не визначена, то ми і виконуємо множення на A^{-1}, адже відповідно означенню оберненої матриці $A^{-1}A= E$, де E – одинична матриця, яка у матричному численні виконує роль одиниці).

Маємо $EX = A^{-1}\,B$

Враховуючи, що $EX=X$, запишемо

$$X= A^{-1}\,B$$

Це і буде розв'язком системи лінійних рівнянь, записаним за допомогою оберненої матриці.

Зверніть увагу. Оскільки переставний закон у загальному випадку для добутку матриць не має місця, то при розв'язанні рівняння $AX = B$ можна або домножити на обернену матрицю зліва $A^{-1}A\,X = A^{-1}\,B$ або справа $A\,A^{-1}\,X = B\,A^{-1}$.

Приклад 9. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22, \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо задану систему у матричній формі $AX=B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Матриця A – квадратна, $det\,A = 6 \neq 0$, отже, матриця A невироджена.

Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3;$$

Обернену матрицю запишемо за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{v},$$

A^{v} – приєднана матриця до матриці A. Приєднана матриця A^{v}- транспортована матриця алгебраїчних доповнень:

$$A^{v} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Для $X = A^{-1}B$ маємо

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -6 \cdot 11 + (-2) \cdot 8 + 4 \cdot 22 \\ 0 \cdot 11 + (-4) \cdot 8 + 2 \cdot 22 \\ 6 \cdot 11 + 3 \cdot 8 + (-3) \cdot 22 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

З останньої рівності отримали: x_1=1; x_2=2; x_3=4.

Перевірка

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2 \cdot 4 = 11 \to 11 = 11, \\ 2 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 4 = 8 \to 8 = 8, \\ 4 \cdot 1 + 2 + 4 \cdot 4 = 22 \to 22 = 22. \end{cases}$$

Після підстановки розв'язку системи у її рівняння, вони перетворились в тотожності. Це означає, що обчислення виконано правильно.

Відповідь: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 4$.

Розв'язання системи лінійних рівнянь за формулами Крамера

Задамо систему з n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Дана система рівнянь сумісна і визначена (має єдиний розв'язок) тільки при виконанні умови $\Delta \neq 0$ ($det\ A \neq 0$, де A – матриця коефіцієнтів системи). При цьому невідомі знаходять за ***формулами Крамера****:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ \ldots \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ – визначники, що утворюються з визначника Δ (визначника матриці A) шляхом послідовних замін стовпців (заміни відповідного $1,\ 2, \ldots\ n$ стовпця) стовпцем вільних членів $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Якщо $\Delta = 0$, і крім того, всі додаткові визначники дорівнюють нулю

($\Delta_1 = \Delta_2 ... = \Delta_n = 0$), то система рівнянь є сумісною і невизначеною (має безліч розв'язків). Якщо Δ = 0, але принаймні один з додаткових визначників відмінний від нуля ($\Delta_k \neq 0$), то система рівнянь несумісна і не має розв'язків.

Розглянемо приклади розв'язання систем трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, система рівнянь сумісна і має єдиний розв'язок. Знаходимо додаткові визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ -6 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 33 & -6 & -1 \end{vmatrix} = -36, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix} = -18.$$

За формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{18}{-18} = -1; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-36}{-18} = 2; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-18}{-18} = 1.$$

Виконаємо перевірку:

$$\begin{cases} 2 \cdot (-1) - 2 + 1 = -3, \\ -1 + 3 \cdot 2 + 1 = 6, \\ 3 \cdot (-1) - 2 - 1 = -6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \equiv -3, \\ 6 \equiv 6, \\ -6 \equiv -6. \end{cases}$$

тобто розв'язок знайдено правильно.

Відповідь: $x_1 = -1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$.

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} 4x_1 + \qquad 6x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & 6\\1 & 1 & 2\\3 & -1 & 4\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}-2 & 0 & 6\\0 & 1 & 2\\-2 & -1 & 4\end{vmatrix}=0,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & -2 & 6\\1 & 0 & 2\\3 & -2 & 4\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}4 & 0 & -2\\1 & 1 & 0\\3 & -1 & -2\end{vmatrix}=0.$$

Оскільки $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, дана система рівнянь невизначена і має безліч розв'язків.

Відповідь: система має безліч розв'язків.

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3=0,\\-x_1+x_2=0,\\3x_1+2x_2+5x_3=-5.\end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначники $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\-1 & 1 & 0\\3 & 2 & 5\end{vmatrix}=0,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 1 & 3\\0 & 1 & 0\\-5 & 2 & 5\end{vmatrix}=-15.$$

Оскільки $\Delta=0$, а $\Delta_1\neq 0$ немає необхідності обчислювати визначники Δ_2 і Δ_3, оскільки система несумісна.

Відповідь: система розв'язків не має.

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Знайти суму $x_1+x_2+x_3$, де $(x_1;x_2;x_3)$ – розв'язок системи
$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=5,\\ \quad x_2+4x_3=7,\\ \qquad x_3=2.\end{cases}$$
   а) –2; б) 2; в) –1; г) 0.

2. Яке з рівнянь 1) $x_1+x_2=1$, 2) $x_1-x_2=0$, 3) $2x_1+2x_2=0$ необхідно приписати до рівняння $x_1+x_2=0$, щоб скласти сумісну систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими?
   а) будь-яке; б) жодне; в) тільки не 1; г) тільки не 3.

3. Дано системи лінійних рівнянь:
   1) $\begin{cases}6x-3y=1,\\2x-y=2\,;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=1,\\2x+2y=-1\,;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=1,\\2x+2y=2\,.\end{cases}$

Несумісною системою є:

а) 3; б) 2; в) 1; г) 1 та 2.

4. При якому значенні a, система не має розв’язків $\begin{cases} 4x + a^2y = 12, \\ x + y = a + 1 \end{cases}$

а) –1; б) –2; в) 1; г) 0.

5. Якщо система розв’язується за формулами Крамера $x_i = \frac{\triangle x_i}{\triangle}$, то з того, що $\triangle = 0$ маємо:

   а) система розв’язків не має;

   б) система має єдиний розв’язок;

   в) система може мати безліч розв’язків, а може не мати розв’язків;

   г) система має безліч розв’язків.

6. Визначник $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) 6; б) –6; в) –5; г) 0.

7. Мінор елемента a_{31} визначника $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) –3; б) 3; в) 1; г) –1.

8. Алгебраїчне доповнення елемента a_{12} визначника $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) –1; б) –5; в) 1; г) 5.

9. Даний визначник $\begin{vmatrix} 0 & a \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ дорівнює 7, якщо a дорівнює:

а) –2; б) 0; в) –1; г) 1.

10. Добуток матриць $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Відповіді: 1- б, 2- в, 3- г, 4- б, 5- в, 6- а, 7- г, 8- г, 9- в, 10- б.

5.3 Елементи векторної алгебри

Вектором $\vec{AB}$ називається напрямлений відрізок у просторі, який має певну довжину; точка A приймається за початок, а точка B – за кінець вектора.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ – це довжина відрізка, яка позначається як $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Якщо вектор позначений через $\vec{a}$, то його модуль позначається як $|\vec{a}|$.

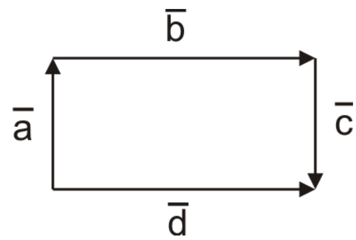
Вектор, довжина якого дорівнює нулю, називають *нульовим вектором* та позначають $\vec{0}$. Нульовий вектор не має напрямку.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, розташовані на однієї прямій або на паралельних прямих, називаються ***колінеарними***. Колінеарні вектори можуть мати однаковий або протилежний напрямок. Нульовий вектор вважають колінеарним до будь-якого вектора.

Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними $\left(\vec{a}=\vec{b}\right)$, якщо вони мають рівні модулі, а також колінеарні та напрямлені в одну сторону.

Вектор $(-\vec{a})$ називається протилежним вектору $\vec{a}$, якщо їх модулі однакові, а напрямки – протилежні.

На рисунку справа вектори утворюють прямокутник. Рівність $\vec{b}=\vec{d}$ є правильною, але $\vec{a}\neq\vec{c}$, оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{c}$ – протилежні, $\vec{a}=-\vec{c}$.

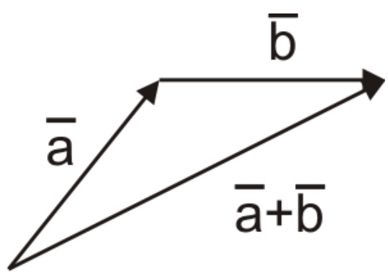


Вектори, розташовані на одній площині або на паралельних площинах називаються ***компланарними***.

Лінійні операції над векторами.

Під лінійними операціями над векторами розуміють операції додавання та віднімання векторів, а також множення вектора на число.

Сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ називається вектор $\overrightarrow{AC}$, який починається у точці *A* і закінчується у точці *C*: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Тобто сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, що з'єднує початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладено від кінця вектора $\vec{a}$. Такий спосіб додавання векторів називають ***правилом трикутника***.



Суму векторів $\vec{a}+\vec{b}$ можна також знайти за ***правилом паралелограма***, якщо врахувати, що $\vec{b_1}=\vec{b}$, $\vec{a_1}=\vec{a}$.

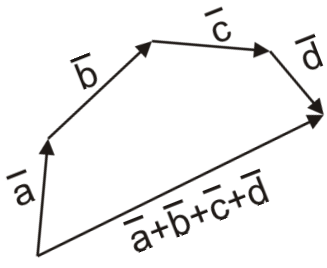
Завдання для здобувачів:

Виконайте рисунок для додавання векторів за правилом паралелограма.

Віднімання векторів зводиться до додавання протилежного вектора $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

Запишемо основні властивості дії додавання векторів:

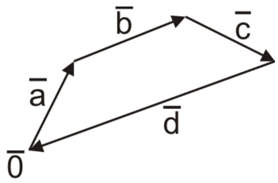
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.



Зауважимо, що сума декількох векторів знаходиться послідовним додаванням двох із них, наприклад:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=((\vec{a}+\vec{b})+\vec{c})+\vec{d}.$$

Геометрично сума декількох векторів знаходиться їх послідовним відкладенням один за одним так, щоб початок наступного співпадав з кінцем попереднього. Сумою є вектор, що з'єднуватиме початок першого вектора з кінцем останнього. Якщо така послідовність векторів дає замкнену ламану, то сумою векторів є $\vec{0}$.



Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\vec{c}$, колінеарний до вектора $\vec{a}$, який має довжину $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ та той же напрямок, що і вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$ і протилежний напрямок, якщо $\lambda<0$: $\vec{c}=\lambda\,\vec{a}$. Запишемо інакше: добутком вектора $\vec{a}$ $(\vec{a}\neq\vec{0})$ на число $k\,(k\neq 0, k\in R)$ називають вектор $\vec{b}$, для якого виконуються умови:

а) $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$;

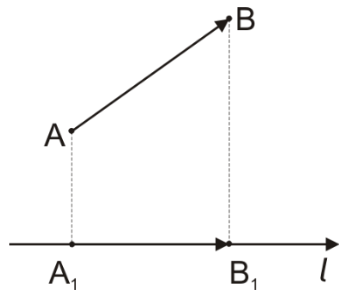
б) $\vec{a}\parallel\vec{b}$, при чому $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ – співнапрямлені, якщо $k>0$; $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ – протилежно напрямлені, якщо $k<0$. Звідси, очевидно, що необхідною і достатньою умовою колінеарності векторів є співвідношення $\vec{a}=k\vec{b}$ (*колінеарні вектори мають пропорційні координати, справедливе і обернене твердження*).

Запишемо основні властивості дії множення вектора на число:

1. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$.
2. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$.
3. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.
4. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Проекції вектора $\vec{a}$ на осі *Ox*, *Oy* та *Oz* декартової прямокутної системи координат називають координатами вектора a_x, a_y та a_z, так що $\vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$.

Проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l зветься різниця $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця (x_2) та початку (x_1) вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь.



Вектори одиничної довжини $\vec{i}, \vec{j}$ і $\vec{k}$, які співпадають з додатними напрямками осей *Ox*, *Oy* та *Oz* відповідно, називають ортами. Орти утворюють декартовий ортогональний базис, в якому

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Лінійні операції над векторами еквівалентні арифметичним діям з їхніми координатами:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \left\{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\right\},$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left\{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\right\}.$$

Якщо відомі координати точок $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$ і $M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$, то вектор $\overrightarrow{M_1 M_2}$ має вигляд:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(x_2 - x_1\right) \cdot \vec{i} + \left(y_2 - y_1\right) \cdot \vec{j} + \left(z_2 - z_1\right) \cdot \vec{k},$$

а точка $M\left(x, y, z\right)$, яка ділить відрізок $M_1 M_2$ у заданому співвідношенні $\lambda = M_1 M / M M_2$, має координати:

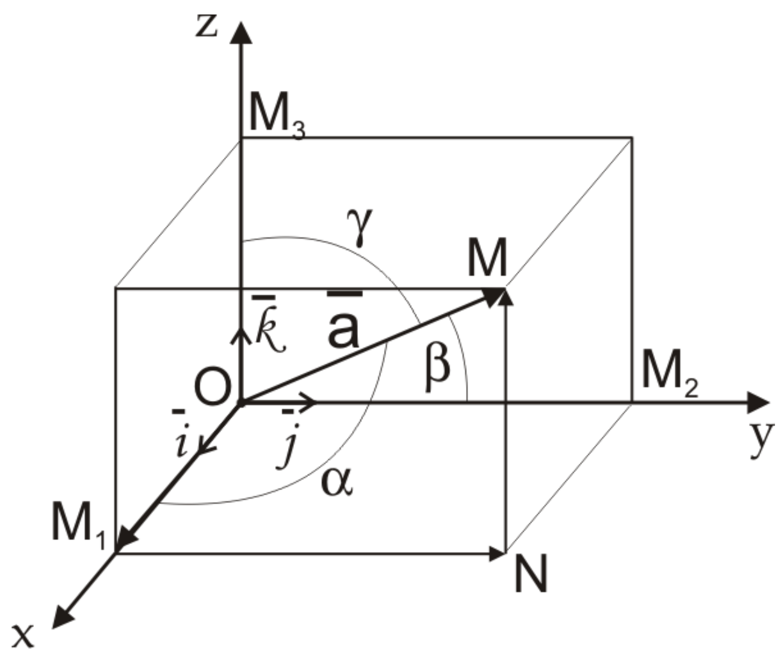
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Зверніть увагу. Розглянемо останні твердження більш детально.

Декартова система координат. Лінійні операції в координатах

Задамо у просторі прямокутну систему координат *Oxyz*. Таку систему називають *декартовою системою*, а координати вектора в такій системі називають *декартовими координатами*. Виділимо на координатних осях

Ox, *Oy* та *Oz* одиничні вектори (орти), які позначимо $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$.



Оберемо довільний вектор $\vec{a}$ у просторі та розмістимо його з початку координат: $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$. Знайдемо проекції вектора на координатні осі. Проведемо через кінець вектора $\overrightarrow{OM}$ площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо відповідно як M_1, M_2 та M_3. Отримаємо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді пр$_x\,\vec{a}=\left|OM_1\right|$, пр$_y\,\vec{a}=\left|OM_2\right|$, пр$_z\,\vec{a}=\left|OM_3\right|$. За визначенням суми декількох векторів знаходимо $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1N}+\overrightarrow{NM}$.

Але, оскільки $\overrightarrow{M_1N}=\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OM_3}$, то $\vec{a}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\overrightarrow{OM_3}$. Відмітимо, що $\overrightarrow{OM_1}=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2}=\left|\overrightarrow{OM_2}\right|\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3}=\left|\overrightarrow{OM_3}\right|\vec{k}$. Позначимо проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox, Oy та Oz відповідно як a_x, a_y та a_z. Тоді отримаємо основну формулу числення, що має назву ***розклад вектора за ортами координатних осей***:

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}.$$

Дана векторна рівність також записується у вигляді $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$.

Знаючи проекції вектора $\vec{a}$, можна легко знайти вираз для модуля вектора. На основі теореми про довжину діагоналі прямокутного паралелепіпеда можна записати $\left|\overrightarrow{OM}\right|^2=\left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2+\left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2$. Тобто $\left|\vec{a}\right|^2=a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2$. Звідси

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}.$$

Таким чином, ***модуль вектора*** дорівнює квадратному кореню із суми квадратів його проекцій на осі координат.

Оскільки лінійні операції над векторами зводяться до відповідних лінійних операцій над проекціями цих векторів, то можна записати:

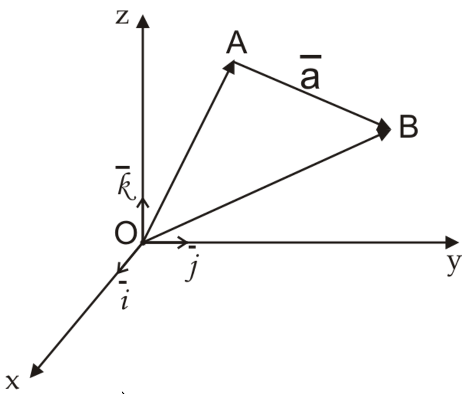
1. $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$,

або коротко $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)$. Тобто *при додаванні (відніманні) векторів їх однойменні координати додаються (віднімаються)*.

2. $\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k}$, або $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. Тобто *при множенні вектора на скаляр (число) координати вектора множать на цей скаляр*.

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат $Oxyz$

Знайдемо координати вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$. Маємо



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) =$$
$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$$

Звідси випливає, що ***координати вектора*** дорівнюють різниці відповідних координат його кінця та початку: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_2, z_2 - z_1)$.

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Проекція на вісь *ОУ* вектора, протилежного до вектора $\bar{a}$ (-1; 3; 2) буде дорівнювати:

а) 3; б) 1; в) 5; г) –3.

2. Проекція на вісь *ОХ* вектора суми векторів $\bar{a}$ (0; -1; 2) і $\bar{b}$ (3; 1; 4) буде дорівнювати:

а) 2; б) –2; в) 0; г) 3.

3. Квадрат добутку модулей векторів $\bar{a}$ (-2; 0; 1) і $\bar{b}$ (0; 1; -1) дорівнює:

а) 5; б) 3; в) 9; г) 10.

4. Вектори $\bar{a}$ (3; -1; -4) і $\bar{b}$ (1,5; -0,5; *z*) колінеарні. Чому дорівнює *z*?

а) 2; б) 1; в) –2; г) –1.

5. При якому значенні x вектори $\overline{a}\,(4;\,0;\,1)$ і $\overline{\mathrm{b}}$ $(x;\,0;\,-2)$ колінеарні?

а) 5; б) –8; в) 3; г) 7.

6. Вектор $\overline{a}$ (1; 2; 3) дорівнює сумі векторів $\overline{\mathrm{b}}$ (3; 0; 1) і $\overline{c}$ (-2; 2; c_z), тоді c_z дорівнює:

а) 2; б) 4; в) 0; г) 3.

7. Нехай вектор $\overline{\mathrm{b}}$ (6; 8), а довжина вектора $\overline{\lambda b}$=5. Тоді λ дорівнює:

а) 0,5; б) 1; в) 2; г) 30.

Відповіді: 1- г, 2- г, 3- г, 4- в, 5- б, 6- а, 7- а.

Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів

Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається ***число*** $\vec{a}\cdot\vec{b}\equiv\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, яке дорівнює добутку модулів помножених векторів на косинус кута φ між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi .$$

З означення випливає, що скалярний добуток перпендикулярних векторів дорівнює нулю, справедливе і обернене твердження.

Скалярний добуток двох векторів можна знайти через їх координати, а саме:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z .$$

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$ називається ***вектор*** $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$, який визначається наступним чином:

1) модуль вектора $\vec{c}$ чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на помножених векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ як на сторонах, тобто:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right);$$

2)вектор $\vec{c}$ перпендикулярний векторам-множникам;

3) напрямок вектора $\vec{c}$ такий, що якщо дивитися з його кінця вздовж вектора, то обертання по найкоротшому шляху від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти руху годинникової стрілки.

Векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$ виражається через координати векторів $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$ $\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$ за допомогою визначника:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Мішаним або векторно-скалярним добутком $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трьох векторів $\vec{a}=\left\{a_x;a_y;a_z\right\}$, $\vec{b}=\left\{b_x;b_y;b_z\right\}$ і $\vec{c}=\left\{c_x;c_y;c_z\right\}$ з точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда *V*, побудованого на цих векторах, як на ребрах:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\pm V.$$

Зверніть увагу.

Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має вигляд $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, або

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.$$

Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ має вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Завдання для здобувачів:

Подумайте, чому мішаний добуток компланарних векторів дорівнює нулю (для відповіді необхідно врахувати геометричний зміст компланарних векторів).

Приклад 13. Дано координати трьох точок:

A (3;0;-5), *B* (6;2;1), *C* (12;-12;3). Необхідно:

1) записати вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ у системі орт і знайти модулі цих векторів;

2) знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

Розв'язання.

1. Якщо дані точки $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ і $M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то вектор через орти $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ виражається так:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1\right)\cdot\vec{i}+\left(y_2-y_1\right)\cdot\vec{j}+\left(z_2-z_1\right)\cdot\vec{k}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}.$$

Підставляючи у цю формулу координати точок *A* та *B*, маємо:

$$\overrightarrow{AB}=(6-3)\cdot\vec{i}+(2-0)\cdot\vec{j}+(1+5)\cdot\vec{k}=3\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}.$$

Так само

$$\vec{AC} = (12-3)\cdot\vec{i} + (-12-0)\cdot\vec{j} + (3+5)\cdot\vec{k} = 9\vec{i} - 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Модуль вектора $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ обчислюється за формулою

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Підставляючи у записану формулу визначені раніше координати векторів $\vec{AB}$ та $\vec{AC}$, знаходимо їх модулі:

$$\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7 \qquad \left|\vec{AC}\right| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 8^2} = 17.$$

2. Косинус кута α, утвореного векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює відношенню їх скалярного добутку на добуток їх модулів:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Оскільки скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами, дорівнює сумі попарних добутків їх відповідних координат, то

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC} = 3\cdot 9 + 2\cdot(-12) + 6\cdot 8 = 51.$$

Звідси маємо:

$$\cos\alpha = \cos\angle\left(\vec{AB};\vec{AC}\right) = \frac{51}{7\cdot 17} \approx 0{,}4286; \quad \alpha \approx 64°37'.$$

Приклад 14. Задано координати вершин піраміди $ABCD$: т. $A(4;2;\ -1)$, т. $B(3;3;1)$, т. $C(1;\ -4;2)$, т. $D(2;\ -4;8)$. Засобами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра AB;
2) кут між ребрами AB і AC;
3) площу грані ABC;
4) об’єм піраміди $ABCD$.

Розв’язання.

1. Знайдемо довжину ребра AB як модуль вектора $\overrightarrow{AB}$. Для цього спочатку знайдемо його координати.

$\overrightarrow{AB}\ (3-4; 3-2;\ 1-(-1))$, маємо $\overrightarrow{AB}\ (-1;1;2)$.

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$ – довжина ребра AB.

2. Кут між ребрами AB і AC знайдемо за допомогою скалярного добутку векторів. Оскільки $\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right) = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot cos\varphi$, де φ – кут між заданими векторами, що мають спільний початок (у нас це вершина A), то

$$cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}.$$

Скалярний добуток векторів знайдемо за їх координатами $\overrightarrow{AB}\ (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC}\ (-3;\ -6; 3)$, тоді

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = -1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-6) + 2 \cdot 3 = 3 - 6 + 6 = 3$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}$$

$$cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{6}\ \cdot \sqrt{54}} = \frac{3}{\sqrt{6}\ \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{3}{3 \cdot 6} = \frac{1}{6}$$

$\varphi = arccos\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6} > 0$, отже φ – гострий кут.

3. Площу грані ABC знайдемо, застосовуючи векторний добуток, а саме:

$$S = \frac{1}{2}\left|[\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}]\right|$$

$\overrightarrow{AB}\ (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC}\ (-3;\ -6; 3)$. Знайдемо векторний добуток даних векторів:

$$[\ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 15i - 3j + 9k = \vec{c}$$

$\vec{c}(15;\ -3; 9)$, $|\vec{c}| = \sqrt{225 + 9 + 81} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{35} = 1{,}5\sqrt{35}\ \text{ кв. од.}$$

4. Об’єм піраміди $ABCD$ будемо шукати за геометричною властивістю мішаного добутку.

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD})\right|$$

$\overrightarrow{AB}\ (-1; 1; 2)$, $\overrightarrow{AC}\ (-3;\ -6; 3)$, $\overrightarrow{AD}(-2;\ -6; 9)$. Знайдемо мішаний добуток даних векторів:

$$(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -3 & -6 & 3 \\ -2 & -6 & 9 \end{vmatrix} = 54 - 6 + 36 - 24 - 18 + 27 = 69$$

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{6} \cdot |69| = \frac{1}{6} \cdot 69 = \frac{23}{2} \quad \text{куб. од.}$$

Розглянемо застосування елементів векторної алгебри на практиці

Нехай $\vec{q}(q_1, q_2, \dots, q_k)$ – вектор спожитих товарів, $\vec{c}(c_1, c_2, \dots, c_k)$ – вектор цін у даному місяці, $\overrightarrow{c_n}(c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{kn})$ – вектор цін у попередньому місяці. Знайти формулу для визначення індексу цін та індексу інфляції.

Очевидно, що індекс цін буде виражатись

$$p = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\overrightarrow{c_n} \cdot \vec{q}} \cdot 100\% .$$

Якщо перетворити останню формулу, то одержимо, що

$$100 \cdot (\vec{c} \cdot \vec{q}) = p \cdot (\overrightarrow{c_n} \cdot \vec{q}) \qquad \text{або} \qquad (100\vec{c} - p\overrightarrow{c_n})\vec{q} = 0 .$$

Звідси випливає, що індекс цін можна визначити як числовий коефіцієнт p, що робить вектор $\vec{q}$ ортогональним (перпендикулярним) до вектора $100\vec{c} - p\overrightarrow{c_n}$.

Індекс інфляції розраховується а формулою

$$i = p - 100 = \frac{\vec{c} \cdot \vec{q}}{\overrightarrow{c_n} \cdot \vec{q}} \cdot 100 - 100$$

або

$$i = \frac{(\vec{c} - \overrightarrow{c_n})\vec{q}}{\overrightarrow{c_n} \cdot \vec{q}} \cdot 100$$

Завдання для здобувачів:

Знайти сумарні затрати робочого часу T і вартість P виробленої продукції, якщо відомі вектори асортименту $\vec{q}(20; 40; 60; 10)$, затрат робочого часу $\vec{t}(5; 10; 7; 12)$ і цін $\vec{p}(30; 15; 40; 20)$.

Відповіді: $T = 1040$, $P = 3000$.

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Скалярний добуток векторів $\bar{a}(-4; 2)$ і $\bar{b}(1; -1)$ дорівнює:

а) 6; б) –2; в) 8; г) –6.

2. Якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то такі вектори називаються взаємно

а) паралельними;
б) колінеарними;
в) нульовими;
г) перпендикулярними.

3. Якщо $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, а кут між векторами дорівнює 60^0, тоді скалярний добуток цих векторів дорівнює:

а) 1; б) 6; в) 7; г) 12.

4. Якщо $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 2$, а кут між векторами дорівнює 30^0, тоді скалярний добуток цих векторів дорівнює:

а) 5; б) 3; в) 10; г) правильної відповіді немає.

5. Вектори $\bar{a}(x; -3)$ і $\bar{b}(2; 4)$ перпендикулярні, тоді x дорівнює:

а) 3; б) 5; в) 6; г) 9.

6. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$(3; 2; 1) і $\overline{b}$(-1; 0; -2) дорівнює:

а) 6; б) 5; в) –3; г) –5.

7. Вектори $\overline{a}$(λ; 2; 4) і $\overline{b}$ (1; 0; 4) перпендикулярні, тоді λ дорівнює:

а) –16; б) 4; в) 3; г) –4.

8. Скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів дорівнює:

а) 1; б) –1; в) 0; г) добутку їх модулів.

Відповіді: 1- г, 2- г, 3- б, 4- г, 5- в, 6- г, 7-а, 8- в.

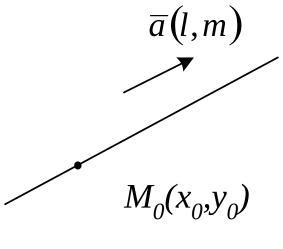
5.4 Площина та пряма у просторі

Лінією на площині Oxy зветься множина усіх її точок, що задовольняють певним геометричним умовам. Наприклад, усі точки, кожна з котрих розташована на однаковій відстані від сторін даного кута, утворюють бісектрису цього кута; усі точки, що однаково віддалені від якоїсь однієї точки, утворюють коло і т. ін.

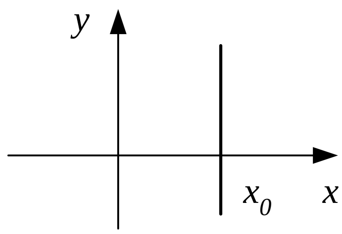
Рівнянням лінії називається рівняння $y=f\left(x\right)$, якому задовольняють координати точок $M\left(x,y\right)$, розташованих на лінії, і не задовольняють координати точок, які не належать цій лінії.

Основні ***види рівнянь прямої на площині***.

Канонічне рівняння прямої



$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$



1. Випадок $l=0$, тоді $x-x_0=0$, пряма паралельна осі *Oy*.

2. Випадок $l\neq 0$, тоді $y-y_0=\frac{m}{l}\left(x-x_0\right)$, якщо $\frac{m}{l}=0$, тоді $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$ – рівняння прямої, яка проходить через фіксовану точку. Розкриваючи дужки, отримаємо:

$y = kx + y_0 + kx_0$, якщо $y_0 + kx_0 = f$, то

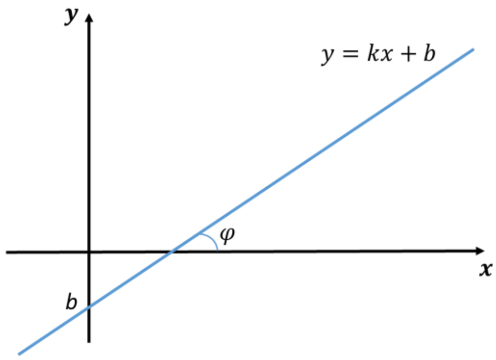
$y = kx + f$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*.

Нехай дана пряма перетинає вісь *Ox* в деякій точці *M*. Тоді кутом φ між віссю *Ox* і прямою є найменший кут, на який треба повернути вісь *Ox* навколо точки *M* проти руху годинникової стрілки до збігу її з прямою.

Рівняння вигляду

$$y = tg\varphi \cdot (x - x_1)$$

називається рівнянням прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1)$ у заданому напрямку. Число $k = tg\varphi$ називається кутовим коефіцієнтом прямої.



Якщо пряма перетинає вісь *Oy* у точці $B(0, b)$, то рівняння

$$y = kx + b$$

називається *рівнянням з кутовим коефіцієнтом*, а ордината b – відрізок, що відтинається прямою від осі *Oy*.

Нехай дві прямі l_1 і l_2, що перетинаються у точці *M*, визначаються відповідно рівняннями

$$y = k_1 x + b \text{ і } y = k_2 x + b,$$

а α – кут між прямими (обчислюється у напрямку від l_1 до l_2). Тоді справедлива формула

$$tg\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

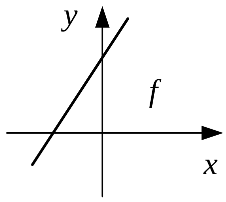
з якої одержуємо умови: 1) паралельності прямих: $k_1 = k_2$,

2) перпендикулярності прямих: $k_1 k_2 = -1$.

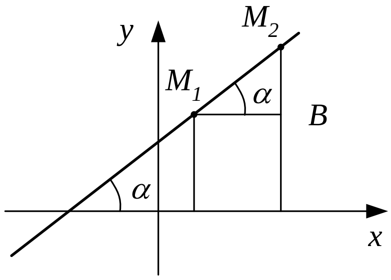
Нерівності $y > kx + b$ відповідають усі точки площини, розташовані вище прямої $y = kx + b$ (верхня півплощина), а нерівності $y < kx + b$ $ax + by + c = 0$ усі точки площини, розташовані нижче прямої (нижня півплощина).

Приклад 15. Знайти геометричний зміст коефіцієнтів k і f.

1. Якщо $x = 0$, то $y = f$, тобто f – відрізок, який відтинає пряма від осі Oy.



2. Нехай точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ належать прямій, тоді



$$- \begin{array}{l} y_2 = kx_2 + f \\ y_1 = kx_1 + f \end{array}$$

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

$$x_2 \neq x_1$$

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

З трикутника M_1BM_2: $tg\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, тоді $k = tg\alpha$.

Приклад 16. Записати рівняння прямої, яка утворює з додатним напрямом осі Ox кут 135° і проходить через початок координат.

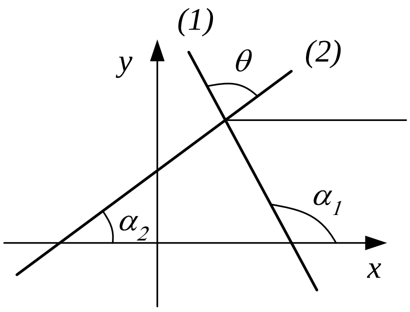
Розв'язання.

$\alpha = 135°$, $tg\alpha = tg135° = -1$

$O(0,0)$ – точка на прямій. Використаємо рівняння $y - y_0 = k(x - y_0)$, отримаємо $y = -x$.

Знайдемо *кут між прямими*, які задані рівняннями

$$y = k_1x + f_1 \quad \text{і} \qquad (1)$$



$$y = k_2x + f_2 \qquad (2)$$

$$\Theta = \alpha_1 - \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad tg\Theta = tg(\alpha_1 - \alpha_2)$$

$$tg\Theta = \frac{tg\alpha_1 - tg\alpha_2}{1 + k_1k_2},$$

звідки

$$tg\Theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}$$

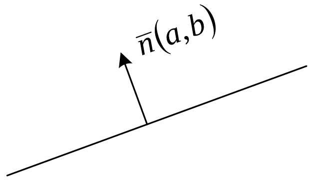
Ще раз пропишемо:

якщо $k_1 = k_2$, то $tg\Theta = 0$ і прямі паралельні.

Якщо $1 + k_1k_2 = 0$, то прямі перпендикулярні.

Зауваження. Чи справедливі обернені твердження?

Пряму на площині можна знайти як лінію перетину площини xOy і площини $ax+by+cz+d=0$, тобто отримаємо рівняння: $ax+by+c=0$, $\overline{n}(a,b)$ – нормальний вектор прямої (вектор, що є перпендикулярним до прямої).



$ax+by+c=0$ – *загальне рівняння прямої*

Приклад 17. Записати рівняння прямої, яка паралельна прямій $x-3y+5=0$ і проходить через точку $O(0{,}0)$.

Розв'язання.

Рівняння паралельної прямої має вигляд $x-3y+c=0$, пряма проходить через початок координат, тобто $c=0$, звідки $x-3y=0$.

Приклад 18. Дано вершини трикутника *ABC*: *A* (-4; 8), *B* (5; -4), *C* (10; 6). Знайти: 1) довжину сторони *AB*,

2) рівняння сторін *AB* і *AC* та їх кутові коефіцієнти,

3) внутрішній кут трикутника *A* у радіанах з точністю до 0,01,

4) рівняння висоти *CD*.

Розв'язання:

1. Відстань d між точками $M_1(x_1,y_1)$ та $M_2(x_2,y_2)$ визначається з формули

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\,.$$

Підставляючи в цю формулу координати точок *A* і *B*, маємо

$$AB=\sqrt{\left(5-(-4)\right)^2+\left(-4-8\right)^2}=\sqrt{81+144}=15.$$

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1)$ і $M_2(x_2,y_2)$, має вигляд:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Підставляючи в формулу координати точок *A* і *B*, одержимо рівняння прямої *AB*:

$$\frac{x-(-4)}{5-(-4)}=\frac{y-8}{-4-8}, \quad \frac{x+4}{9}=\frac{y-8}{-12}, \quad \frac{x+4}{3}=\frac{y-8}{-4},$$

маємо канонічне рівняння прямої, можемо записати і загальне, скориставшись основною властивістю пропорції:

$$3y-24=-4x-16, \qquad 4x+3y-8=0.$$

Для визначення кутового коефіцієнта k_{AB} прямої *AB* розв'яжемо одержане загальне рівняння відносно y: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$. Звідси $k_{AB}=-\frac{4}{3}$. Аналогічно за координатами точок *A* та *C*, запишемо рівняння прямої *AC*.

$$\frac{x-(-4)}{10-(-4)}=\frac{y-8}{6-8}, \quad \frac{x+4}{14}=\frac{y-8}{-2}, \quad \frac{x+4}{7}=\frac{y-8}{-1},$$

$$x+7y-52=0.$$

Звідси $k_{AC}=-\frac{1}{7}$.

3. Кут α між двома прямими, кутові коефіцієнти яких дорівнюють k_1 і k_2, визначають з формули:

$$tg\alpha=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Кут α, утворений прямими *AB* та *AC*, знайдемо з записаної формули, підставляючи до неї $k_1=k_{AB}=-\frac{4}{3}$ та $k_2=k_{AC}=-\frac{1}{7}$.

$$tg\,A=\frac{-\frac{1}{7}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{1}{7}}{1+\frac{4}{21}}=\frac{\frac{25}{21}}{\frac{25}{21}}=1,\ \angle A=arctg1=45°\approx 0{,}79 \text{ рад.}$$

4. Оскільки висота *CD* перпендикулярна до *AB*, то кутові коефіцієнти цих прямих обернені за величиною та протилежні за знаком, тобто

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1)$ у заданому кутовим коефіцієнтом k напрямку, має вигляд:

$$y-y_1=k\cdot(x-x_1).$$

Підставимо координати точки *C* та кутовий коефіцієнт $k_{CD}=\frac{3}{4}$ одержимо рівняння висоти C*D*:

$$y-6=\frac{3}{4}(x-10),\quad 4y-24=3x-30,\quad 3x-4y-6=0$$

Рівняння висоти CD можна було записати і через нормальний вектор, яким буде $\overrightarrow{AB}(9;\ -12)$ та точку C, через яку проходить пряма. Отже, для висоти CD запишемо загальне рівняння:

$$9(x-10)-12(y-6)=0$$

$$9x-12y-18=0,\qquad 3x-4y-6=0.$$

Приклад 19. Дано рівняння прямої: $3x-5y+7=0$. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $N(-4;1)$, паралельно до даної прямої.

Розв'язання.

Оскільки пряма задана у загальному виді, нам відомий вектор нормалі до неї $\vec{n}(3;-5)$. Цей вектор буде також вектором нормалі і до паралельної прямої. Буде зручно скористатися рівнянням: $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}(a;b)$. Отримаємо: $3(x+4)-5(y-1)=0$.

$$3x-5y+17=0.$$

Приклад 20. Дано рівняння прямої: $3x-5y+7=0$. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $N(-4;1)$, перпендикулярно до даної прямої.

Розв'язання.

Вектор нормалі цієї прямої $\vec{n}(3;-5)$, буде напрямним вектором до шуканої прямої. Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ паралельно до вектора $\vec{p}(m;n)$. Отримаємо: $\frac{x+4}{3}=\frac{y-1}{-5}$ – канонічне рівняння прямої. Можемо перетворити дане рівняння у загальний вигляд: $5x+3y+17=0$.

Приклад 21. Дано прямі $3x-5y+7=0$ та $4x+y-2=0$. Знайти точку перетину прямих.

Розв'язання.

Координати точки перетину прямих задовольняють обом рівнянням, тому будемо шукати точку перетину за допомогою системи рівнянь:

$$\begin{cases}3x-5y+7=0\\ 4x+y-2=0\end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом додавання – помножимо обидві частини другого рівняння на 5: $\begin{cases}3x-5y+7=0\\ 20x+5y-10=0\end{cases}$ та складемо рівняння, отримаємо:

$23x-3=0$; $x=\dfrac{3}{23}$. Підставимо отримане значення у перше рівняння та знайдемо значення змінної y: $y=\dfrac{34}{23}$. Тобто точка перетину прямих $N\left(\dfrac{3}{23},\dfrac{34}{23}\right)$.

Основні ***види рівнянь площини у просторі***.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку M_0 (x_0, y_0, z_0) перпендикулярно до вектора $\bar{n}(a,b,c)$:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \text{ – \textit{рівняння площини}}$$

В рівнянні $\bar{n}(a,b,c)$ – нормальний вектор площини, а M_0 (x_0, y_0, z_0) – деяка фіксована точка.

Приклад 22. Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат і перпендикулярна до вектора $\overrightarrow{OA}$, де *O (0, 0, 0), A (2, -1, 3).*

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у вигляді загального рівняння, при цьому фіксована точка *O (0, 0, 0),* і $\vec{n}=\overrightarrow{OA}(2;-1;3)$:

$2(x-0)-1(y-0)+3(z-0)=0$,

тобто

$2x-y+3z=0$

Розкриваючи у рівнянні $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ дужки, одержимо *загальне рівняння площини:*

$$ax+by+cz+d=0$$

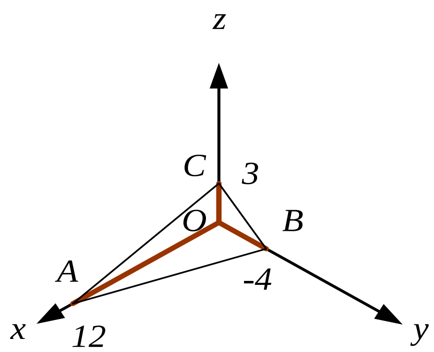
Різні випадки розміщення площини в просторі

1. Нехай всі коефіцієнти a, b, c, d у загальному рівнянні площини відмінні від нуля. Тоді $ax+by+cz=-d$, і поділивши обидві частини останнього рівняння на $-d$ та позначивши $-\dfrac{d}{a}=\alpha$, $-\dfrac{d}{b}=\beta$, $-\dfrac{d}{c}=\gamma$, одержимо рівняння площини у відрізках

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1,$$

де α, β, γ – відрізки, які відтинає площина на осях координат.

Приклад 23. Знайти об'єм тетраедра, який відтинається координатними площинами та площиною $x+3y+4z-12=0$.



Розв'язання:

Запишемо рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{12}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{3}=1$.

Тут *AO=12*, *BO=-4*, *CO=3*;

$$V=\frac{1}{3}CO\cdot S_{\Delta AOB};\qquad S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4=24\,(\text{кв. од.})$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 24=24(\text{куб. од.})$$

У загальному випадку, коли площина відтинає на осях координат відрізки α, β, γ, об'єм V утвореного тетраедра можна знайти так $V=\frac{1}{6}(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)$

2. Нехай, наприклад, $a=0$, $b=0$, $c\neq 0$. Тоді $\bar{n}\parallel\overline{OZ}$, а площина є паралельною до координатної площини *Oxy*. Її рівняння має вигляд:

$$cz+d=0.$$

При $d=0$ площина проходить через початок координат. Отже, $z=0$ – рівняння координатної площини *Oxy*.

Аналогічно: $ax+d=0$ – рівняння площини паралельної *Oyz*, *x=0* – площини *Oyz;* $by+d=0$ – рівняння площини, паралельної *Oxz*, $y=0$ – площини *Oxz*.

3. Нехай, наприклад, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. Тоді $\bar{n} \perp Oz$, а саме площина $ax + by + d = 0$ паралельна осі Oz.

Рівняння $ax + by = 0$ визначає площину, яка проходить через вісь Oz.

Зауваження. Дві площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $(\bar{n}_1\ \bar{n}_2) = 0$, а паралельні тоді і тільки тоді, коли $\bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2$, де $\bar{n}_1$ і $\bar{n}_2$ – нормальні вектори цих площин (тобто, коли скалярний добуток нормальних векторів дорівнює нулю, площини перпендикулярні, коли їхні нормальні вектори колінеарні, то площини паралельні).

$$\pi \perp \pi \leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \leftrightarrow (\bar{n}_1\ \bar{n}_2) = 0$$
$$\pi \parallel \pi \leftrightarrow \pi_1 \parallel \bar{n}_1 \in (F\lambda)\bar{n}_1 = \lambda \pi_2$$

Приклад 24. Визначити значення l при якому площини $3x - 5y + lz - 3 = 0$ і $x + 3y + 2z + 5 = 0$ будуть перпендикулярними.

Розв’язання.

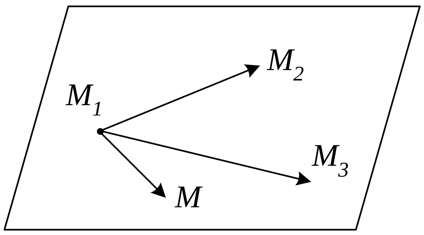
Запишемо координати нормальних векторів даних площин: $\bar{n}_1(3,-5,l)$, $\bar{n}_2(1,3,2)$, з умови їх перпендикулярності: $(\bar{n}_1\ \bar{n}_2) = 0$ маємо:

$$3 - 15 + 2l = 0, \qquad 2l = 12, \qquad l = 6$$

Приклад 25. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки, що не лежать на одній прямій.

Розв’язання.

Нехай дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, а точка $M(x, y, z)$ – довільна точка шуканої площини.



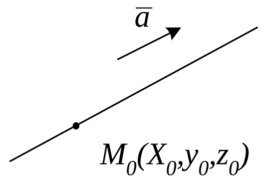
Тоді вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{M_1M_3}$ – компланарні. Необхідною і достатньою умовою компланарності трійки векторів є рівність нулю їх мішаного добутку $\left(\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3}\right) = 0$. Отже, *рівняння площини, яка проходить через три дані точки*, в координатній формі має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Рівняння прямої у просторі

Канонічне рівняння прямої .

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n},$$



де x_0, y_0, z_0 – координати фіксованої точки M_0 прямої, $\bar{a}(l, m, n)$ – напрямний вектор прямої (ненульовий вектор, паралельний даній прямій).

Приклад 26. Скласти канонічне рівняння осі *Ox*.

Розв’язання.

За напрямлений вектор осі *Ox* можна взяти вектор $\bar{i}(1,0,0)$, а за фіксовану точку – початок координат $O(0,0,0)$. Звідси маємо:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Зверніть увагу. Нулі в знаменниках у даному записі не означають дію ділення, це відношення координат векторів. Тобто це означає, що у відповідних відношеннях і чисельники треба прирівняти до нуля.

В даному випадку маємо:

$$\begin{cases} y = z, \\ z = 0. \end{cases}$$

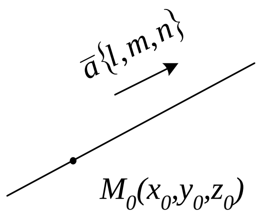
Одержали рівняння осі *Ox* як лінії перетину координатних площин *Oxz* та *Oxy*.

Загальне рівняння прямої в просторі:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d = 0. \end{cases}$$

При цьому пряму розглядають як лінію перетину двох площин.

Параметричне рівняння прямої в просторі:

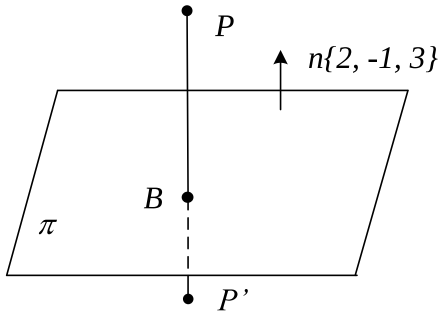


До цього рівняння легко перейти від канонічного рівняння прямої, якщо рівні між собою відношення прирівняти до t і з кожного відношення записати змінні x, y, z як функції від t.

$$x = x_0 + lt,$$
$$y = y_0 + mt,$$
$$z = z_0 + nt$$

Приклад 27. Знайти точку P', симетричну точці $P(5,2,-1)$ відносно площини $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Розв'язання.



1) Перевіримо, що точка P не належить даній площині π:

$$2 \cdot 5 - 1 \cdot 2 + 3(-1) + 23 \neq 0 .$$

2) Проведемо пряму PP', перпендикулярну до площини π:

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3} .$$

3) Знайдемо точку B перетину прямої PP' і даної площини π. Для цього розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{3} = t, \\ 2x - y + 3z + 23 = 0. \end{cases}$$

Перейдемо до параметричних рівнянь прямої:

$$\begin{cases} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

і підставимо знайдені вирази для x, y, z у рівняння площини:

$$2(2t+5)-(-t+2)+3(3t-1)+23=0,$$

звідки маємо: $t=-2$. Отже, координати точки *B*: $x_B=1$, $y_B=4$, $z_B=-7$ і $B(1,4,-7)$.

Точка *B* – проекція точки *P* на дану площину *π*.

4) Для знаходження точки P' скористаємося формулами ділення відрізка навпіл:

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_P+x_{P'}}{2}, \\ y_B=\dfrac{y_P+y_{P'}}{2}, \\ z_B=\dfrac{z_P+z_{P'}}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{P'}=2x_B-x_P, \\ y_{p'}=2y_B-y_P, \\ z_{P'}=2z_B-z_P, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{P'}=-3, \\ y_{p'}=6, \\ z_{P'}=-15, \end{cases}$$

Отже, $P'(-3,6,-15)$.

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Пряма $(p+1)x+(p^2+4)y-6=0$ паралельна до осі Ox, якщо p дорівнює:

   а) –2; б) –1; в) 1; г) 2.

2. Пряма $(p-4)x+(p+3)y+4=0$ паралельна до осі Oy, якщо p дорівнює:

   а) –4; б) –3; в) 3; г) 4.

3. Прямій $5x+2y-14=0$ належить точка:

   а) (1; 2); б) (1;-2); в) (2; 2); г) (5; 1).

4. Пряма $4x+y+2a-6=0$ проходить через початок координат, якщо a дорівнює:

   а) 0; б) –3; в) 3; г) 2.

5. Прямі $2x+my-3=0$ і $4x+6y+13=0$ паралельні, якщо m дорівнює:

   а) –3; б) 1; в) 2; г) 3.

6. Прямі $5x-2y+10=0$ і $mx+5y-15=0$ перпендикулярні, якщо m дорівнює:

а) –2; б) 2; в) 3; г) 1.

7. Дано точки $A(2; b)$ і $B(4; -1)$. Точка $M(3; 1)$ буде серединою відрізка AB, якщо b дорівнює:

а) –1; б) –2; в) 2; г) 3.

Відповіді: 1- б, 2- б, 3- в, 4- в, 5- г, 6- б, 7- г.

5.5 Нескінченно малі і нескінченно великі, їхні властивості. Теореми про границі

Нескінченно малі і нескінченно великі, їхні властивості.

Нескінченно великі

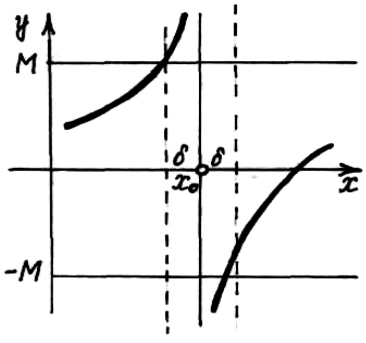
Розглянемо випадки такої «граничної поведінки» функції $y=f(x)$, коли вона при $x\to a$ необмежено зростає за абсолютною величиною. В цих випадках кажуть, що функція $f(x)$ є при $x\to a$ нескінченно великою величиною.

Функція $y=f(x)$ називається ***нескінченно великою величиною*** при $x\to a$, якщо для всіх значень x, які достатньо мало відрізняються від a, відповідні значення функції $f(x)$ за абсолютною величиною перевищують будь-яке наперед задане скільки завгодно велике додатне число.

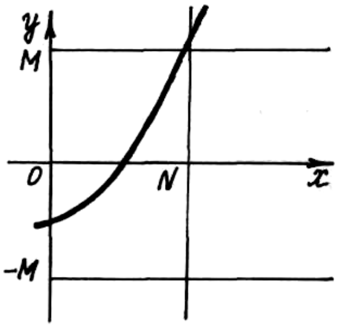
Якщо функція $f(x)$ – нескінченно велика величина при $x\to a$, то це записують так: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Дане означення нескінченно великої величини вказує, що як тільки аргумент x достатньо близько підійде до a, абсолютна величина функції $f(x)$ стане як завгодно великою.

Той факт, що функція $y=f(x)$ при $x\to a$ є нескінченно великою величиною, геометрично ілюструється таким чином а): довільно задамо додатне число M; тоді знайдеться такий δ-окіл точки $x=a$, що частина графіка функції $y=f(x)$, яка відповідає цьому δ-околу, буде знаходитись зовні смуги, обмеженої прямими $y=-M$, $y=M$.



Випадок, коли $x\to+\infty$, показаний на наступному рисунку.



Функція $f(x)$, яка при $x \to a$ є нескінченно великою величиною, не має границі в звичному понятті. Але, відображаючи ту закономірність в її граничній поведінці, яка міститься в необмеженому зростанні $|f(x)|$, кажуть, що функція $f(x)$ прямує до нескінченності або має своєю границею нескінченність.

Припустимо, що нескінченно велика величина $y = f(x)$ в деякому околі точки $x = a$ набуває або тільки додатні, або тільки від'ємні значення. Цю особливість в граничній поведінці функції $f(x)$ виражають так: функція $f(x)$ прямує до додатної або відповідно до від'ємної нескінченності.

Записують це наступним чином: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Умовність цих виразів і записів необхідно завжди мати на увазі і пам'ятати, що нескінченність (∞) не є число, тому і казати про будь-які дії над ∞ не має смислу.

Не можна плутати стале дуже велике число з нескінченно великою величиною.

Нескінченно малі

Функція, яка прямує до нуля при $x \to a$, називається ***нескінченно малою величиною*** при $x \to a$.

Кажуть також, що ця функція є нескінченно малою величиною в околі точки a.

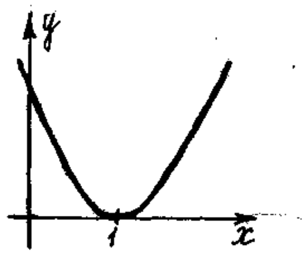
Прикладами нескінченно малих величин можуть бути функції: $y = x^2$ при $x \to 0$, $y = x - 1$ при $x \to 1$, $y = \dfrac{1}{x}$ при $x \to \infty$, $y = 2^x$ при $x \to -\infty$.

Не можна плутати стале дуже мале число з нескінченно малою величиною. Єдиним числом, яке розглядається в якості нескінченно малої величини, є нуль (тому що границя сталої дорівнює їй самій).

Нескінченно мала величина є величиною обмеженою.

Функція $\alpha = \alpha(x)$ називається *нескінченно малою при* $x \to a$ *або при* $x \to \infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Приклад 1. Функція $\alpha = (x-1)^2$ *є нескінченно малою при* $x \to 1$, *оскільки* $\lim\limits_{x\to 1} \alpha = \lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$



Властивості нескінченно малих і нескінченно великих.

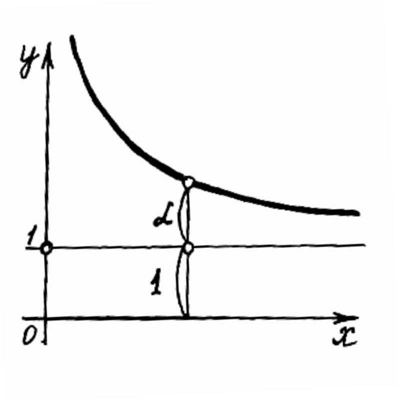
Між нескінченно великими і нескінченно малими величинами існує простий зв'язок, хоча перші з них представляють собою функції, які не мають границі, а другі – функції, які мають границі.

Якщо функція $f(x)$ – нескінченно велика величина, то $\frac{1}{f(x)}$ – нескінченно мала величина; якщо $\varphi(x)$ – нескінченно мала величина, то $\frac{1}{\varphi(x)}$ – нескінченно велика величина.

Важливими для подальшого є наступні теореми.

Теорема. Якщо функція має границю, то її можна представити як суму сталої, яка дорівнює її границі, і нескінченно малої величини.

Теорема. Якщо функцію можна представити як суму сталої і нескінченно малої величини, то сталий доданок є границя функції.



Приклад 2. Нехай дана функція $y=1+\frac{1}{x}$*, тоді* $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$*, і навпаки, оскільки* $\lim\limits_{x\to\infty} y=1$*, то змінну* y *можна представити у вигляді суми границі 1 і нескінченно малої* α*, яка дорівнює в даному випадку* $\frac{1}{x}$*, тобто* $y=1+\alpha$.

Якщо $\alpha=\alpha(x)$ прямує до нуля при $x\to a$ (або при $x\to\infty$) і не перетворюється на нуль, то $y=\frac{1}{\alpha}$ прямує до нескінченності.

Теорема.

Алгебраїчна сума двох, трьох і взагалі певної кількості (кінцевої) нескінченно малих є функція нескінченно мала.

<u>Зауваження.</u> Спеціально зроблене застереження про кінцеву кількість доданків має суттєве значення. Справа в тому, що в математичному аналізі доводиться розглядати особливі суми, в яких змінюються і самі доданки, і їх кількість (наприклад такі суми нескінченно малих величин, що із зменшенням кожного доданку кількість доданків збільшується). До таких сум теорема не відноситься.

Теорема.

Добуток нескінченно малої функції $\alpha=\alpha(x)$ на обмежену функцію $z=z(x)$ при $x\to a$ (або $x\to\infty$) є нескінченно мала величина (функція).

Наслідок 1.

Якщо $\lim \alpha = 0$, $\lim \beta = 0$, то $\lim \alpha\beta = 0$, оскільки $\beta(x)$ є величина обмежена. Це справедливо для будь-якої кінцевої кількості множників.

Наслідок 2.

Якщо $\lim \alpha = 0$ і $c = const$, то $\lim c\alpha = 0$.

Теорема.

Частка $\frac{\alpha(x)}{z(x)}$ від ділення нескінченно малої величини $\alpha(x)$ на функцію, границя якої не дорівнює нулю, є величина нескінченно мала.

Теореми про границі.

Знаходження границі функції на основі тільки означення границі викликає часто певні труднощі. Тому на практиці для знаходження границі функції користуються наступними теоремами.

Теорема.

Границя алгебраїчної суми двох, трьох і взагалі певної кількості змінних дорівнює алгебраїчній сумі границь цих змінних:

$$\lim(u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k.$$

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Теорема.

Границя добутку двох, трьох і взагалі певної кількості змінних дорівнює добутку границь цих змінних: $\lim u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_k = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \cdot \ldots \cdot \lim u_k$.

Наслідок.

Сталий множник можна виносити за знак границі.

Приклад 4.

$$\lim_{x\to 2} 5x^3 = 5\lim_{x\to 2} x^3 = 5 \cdot 8 = 40.$$

Теорема.

Границя частки двох змінних дорівнює частці границь цих змінних, якщо границя знаменника не дорівнює нулю: $\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$, якщо $\lim v \neq 0$.

Приклад 5.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x+5}{4x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)} = \frac{3\lim\limits_{x\to 1} x + 5}{4\lim\limits_{x\to 1} x - 2} = \frac{3\cdot 1 + 5}{4 \cdot 1 - 2} = \frac{8}{2} = 4.$$

В цьому прикладі ми шукали границю раціональної функції за умови, що аргумент прямує до кінцевого значення (яке не перетворює знаменник дробу в нуль). Тут ми скористалися теоремою про границю дробу, оскільки границя знаменника при $x \to 1$ *відмінна від нуля. Для того, щоб знайти таку границю, достатньо у вираз функції підставити замість незалежної змінної її граничне значення. (Далі ми побачимо, що цей простий спосіб відшукання границі відноситься до будь-якої елементарної функції, якщо тільки гранична точка належить до області визначення функції).*

Якщо ж границя знаменника є нуль, тоді теорема про границю дробу не може бути застосована. В цьому випадку потрібно використовувати спеціальні підходи.

Існують різноманітні ознаки існування границі функції, які доводиться застосовувати тоді, коли безпосередньо відшукати границю буває важко. Наведемо у вигляді теорем деякі з таких ознак.

Теорема.

Якщо між відповідними значеннями функцій $u = u(x)$, $z = z(x)$, $v = v(x)$ виконуються нерівності $u \le z \le v$, при цьому $u(x)$ і $v(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$) прямують до однієї й тієї ж границі A, то $z = z(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$) прямує до тієї ж границі.

Теорема.

Якщо при $x \to a$ (або при $x \to \infty$) функція y набуває невід'ємні значення $y \ge 0$ і при цьому прямує до границі A, то A є невід'ємне число: $A \ge 0$.

Теорема.

Якщо між відповідними значеннями двох функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, які прямують до границь при $x \to a$ (або при $x \to \infty$), виконується нерівність $v \ge u$, то має місце $\lim v \ge \lim u$.

Теорема.

Якщо змінна величина v зростаюча, тобто будь-яке її наступне значення більше за попереднє, і якщо вона обмежена, тобто $v < M$, то ця змінна величина має границю $\lim v = a$, де $a \le M$.

Границя многочлена.

Розглянемо приклад. Нехай $p(x)$ – многочлен, цілий відносно x, із сталими коефіцієнтами:

$$p(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + ... + a_{k-1} x + a_k \qquad (a_0 \ne 0).$$

Поставимо питання про його границю при $x \to +\infty$. Якщо б усі коефіцієнти цього многочлена були б додатні (від'ємні), то одразу зрозуміло, що границею $p(x)$ буде $+\infty(-\infty)$. Але у випадку коефіцієнтів різних знаків одні члени прямують до $+\infty$, інші до $-\infty$, і маємо невизначеність $\infty-\infty$.

Для розкриття цієї невизначеності представимо $p(x)$ у вигляді $p(x)=x^k\left(a_0+\frac{a_1}{x}+...+\frac{a_{k-1}}{x^{k-1}}+\frac{a_k}{x^k}\right)$. Оскільки всі доданки в дужках, починаючи з другого, при необмеженому зростанні x будуть нескінченно малими, то вираз в дужках має границею $a_0 \neq 0$; перший же множник прямує до $+\infty$. В такому випадку весь вираз прямує до $+\infty$ або $-\infty$, в залежності від знака a_0.

Завдання для здобувачів:

Встановіть $\lim p(x)$ при $x\to-\infty$ (враховуючи в цьому випадку парність або непарність показника k).

В усіх випадках границя многочлена $p(x)$ співпадає з границею його старшого члена a_0x^k.

Завдання для закріплення у тестовій формі

Позначимо 0 – нескінченно малу величину, ∞ – нескінченно велику величину, C – кінцеву ненульову величину. Визначте, чому дорівнює співвідношення:

1. $\frac{\infty\cdot 0}{C}$.

   а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

2. $\frac{\infty\cdot C}{0}$.

   а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

3. $\frac{\infty+0}{C}$.

   а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

4. $\frac{C\cdot 0}{\infty}$.

   а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

5. $\frac{\infty+C}{0}$.

а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

6. $\frac{\infty \cdot C}{\infty}$.

а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

7. $\frac{C \cdot 0}{0}$.

а) 0; б) C; в) ∞; г) невизначеність.

Відповіді: 1- г, 2- в, 3- в, 4- а, 5- в, 6- г, 7- г.

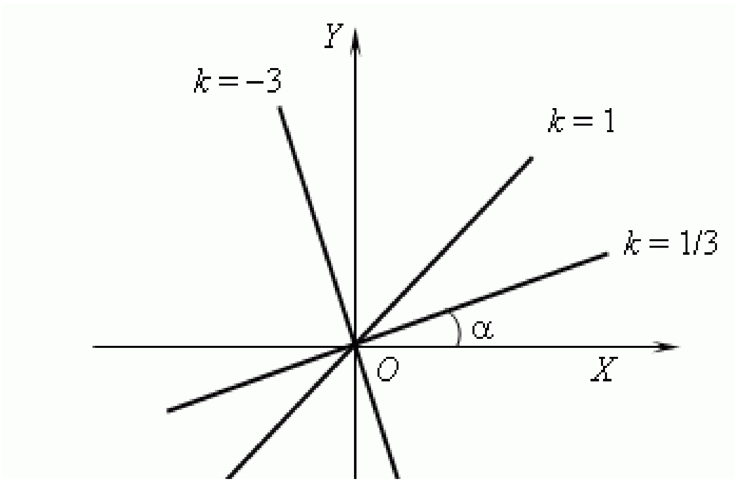
5.6 Границя функції та її неперервність. Поняття похідної

Графіки. Елементарні функції та їх властивості

Графіком функції $\boldsymbol{f}$ називають множину усіх точок координатної площини, де $\boldsymbol{y = f(x)}$, а $\boldsymbol{x}$ належить області визначення функції.

При графічному заданні функцій для будь-якого $\boldsymbol{x_0}$ з області визначення легко знайти відповідне значення $\boldsymbol{y_0 = f(x_0)}$ функції. Якщо змінні $\boldsymbol{y}$ і $\boldsymbol{x}$ прямо пропорційні, то функціональна залежність між ними виражається рівнянням: $\boldsymbol{y = kx}$, де $\boldsymbol{k}$ – постійна величина (коефіцієнт пропорційності).

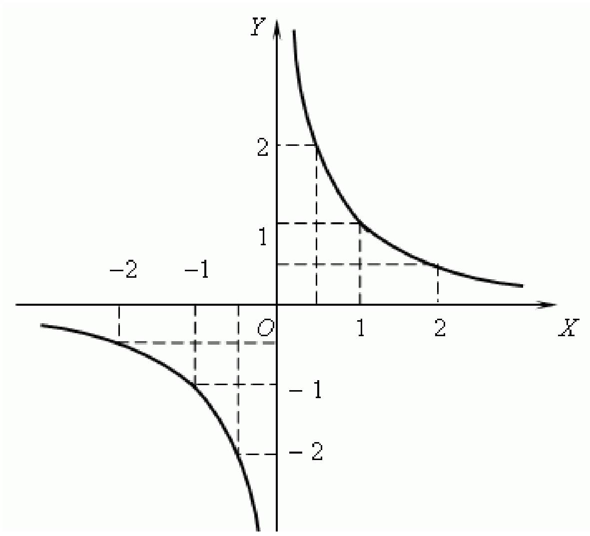
Графік прямої пропорційності – пряма лінія, що проходить через початок координат і утворює з віссю *Ox* кут, тангенс якого дорівнює $\boldsymbol{k}$: $\boldsymbol{tg\ a = k}$. Тому, коефіцієнт пропорційності називається також кутовим коефіцієнтом. На рисунку показано три графіки для $\boldsymbol{k}$ = 1/3, $\boldsymbol{k}$ = 1 і $\boldsymbol{k}$ = -3



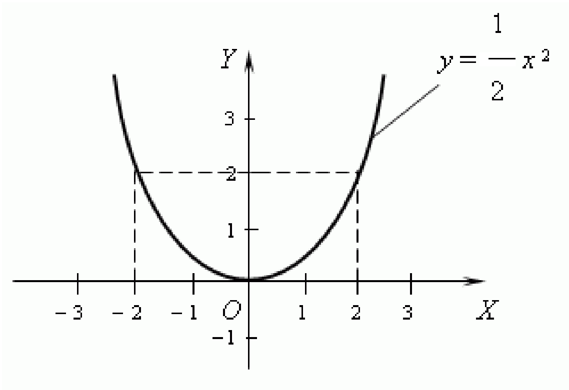
Обернена пропорційність. Якщо змінні ***y*** і ***x*** обернено пропорційні, то функціональна залежність між ними виражається рівнянням:

$\boldsymbol{y = k / x}$, де $\boldsymbol{k}$ – постійна величина.

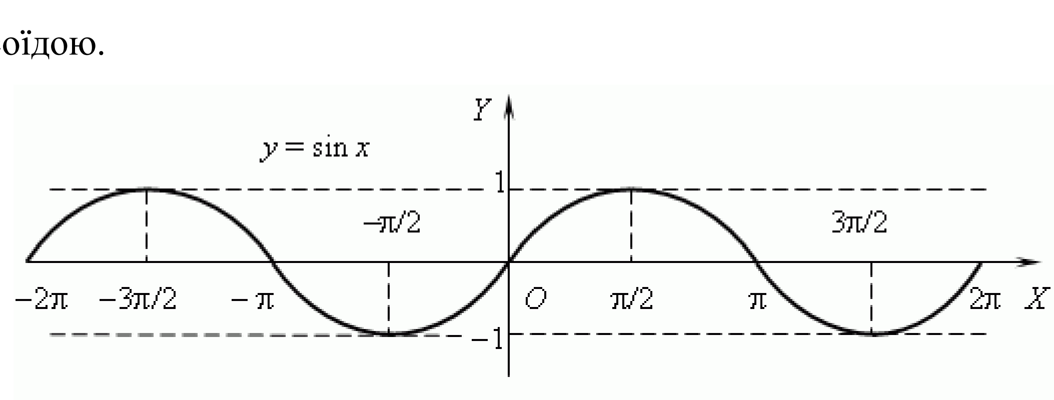
Графік оберненої пропорційності – гіпербола. У цієї кривої дві вітки (як показано на рисунку справа):



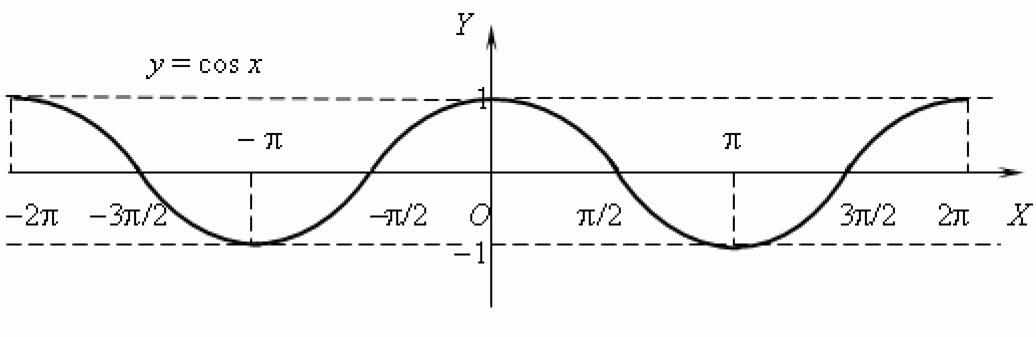
Квадратична функція. Це функція: $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, де $\boldsymbol{a, b, c}$ – постійні, $\boldsymbol{a} \neq 0$. У найпростішому випадку, коли $\boldsymbol{b = c = 0}$, маємо $\boldsymbol{y = ax^2}$. Графік цієї функції квадратична парабола – крива, що проходить через початок координат. Кожна парабола має вісь симетрії Oy, яка називається віссю параболи. Точка ***O*** перетину параболи з її віссю називається вершиною параболи.



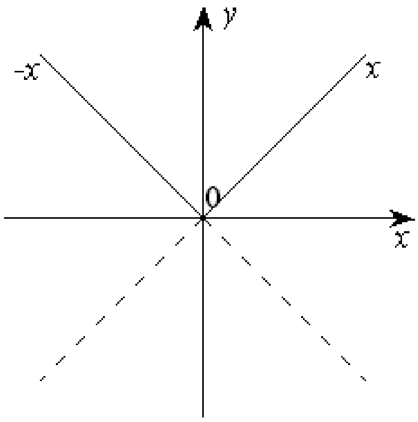
Тригонометричні функції. При побудові тригонометричних функцій використовується радіанна міра вимірювання кутів. Тоді функція $\boldsymbol{y = \sin x}$ представляється графіком на рисунку нижче. Ця крива називається синусоїдою.



Графік функції $y = \cos x$ представлено на рисунку нижче; це також синусоїда, отримана в результаті переміщення графіка $y = \sin x$ вздовж осі Ox вліво на $\pi/2$.



$y(-x) = |-x| = |x|$ – парна функція



Побудувати графік функції

$$y = |x| = \begin{cases} x, & якщо\, x \geq 0 \\ -x, & якщо\, x < 0 \end{cases}$$

нерозривна функція

Функція $y = y(x)$ називається *парною*, якщо для всіх x із симетричної області визначення $y(-x) = y(x)$.

Графік парної функції є симетричним відносно осі Oy.

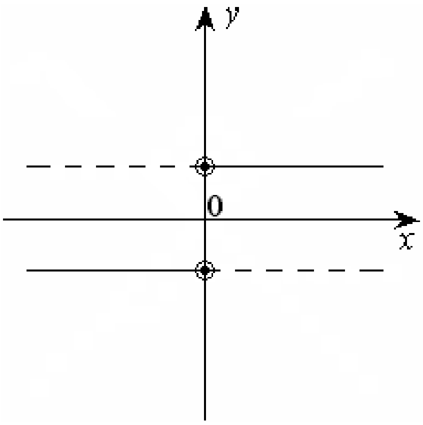
Якщо функція парна, то її достатньо побудувати тільки для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити відносно осі Oy.

Завдання для здобувачів:

Побудувати графіки функцій $y = |-x|$, $y = \frac{|-x|}{x}$, $y = \frac{x}{|x|}$, $y = |x^2 - 7|x| + 12|$,

$y = \frac{x^2 - 7x + 12}{|x+4|}$, $y = |x^2 - 7x + 12|$.

Побудувати графік функції $y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & якщо\, x > 0 \\ -1, & якщо\, x < 0 \end{cases}$



Область визначення: $x \neq 0$.

Треба розглянути два випадки:

1) $x > 0$, $y = \frac{x}{x} = 1$

2) $x < 0$, $y = -\frac{x}{x} = -1$

функція, яка має розрив у точці з абсцисою $x = 0$.

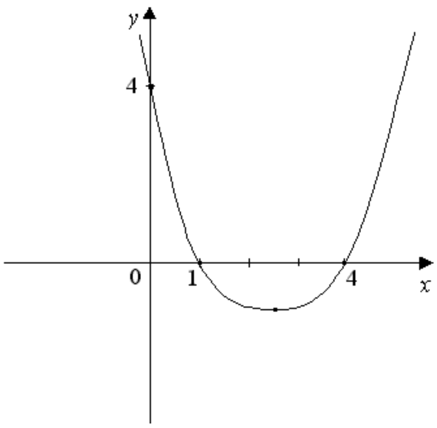
Функція $y = y(x)$ називається *непарною*, якщо для всіх x із області визначення $y(-x) = -y(x)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

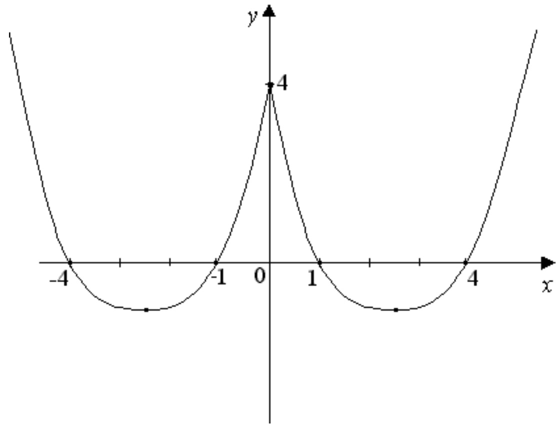
Побудувати графіки:

а) $y = x^2 - 5x + 4$, для побудови параболи достатньо знайти вершину та точки перетину з осями.

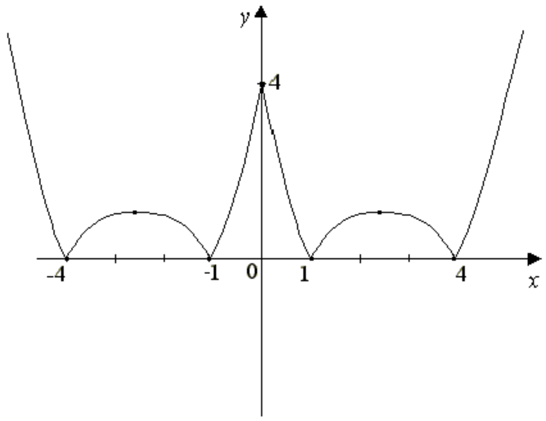
$y = 0$, $x^2 - 5x + 4 = 0$, D = 9,
$x_1 = 1$, $x_2 = 4$.
$x = 0$, $y = 4$.



б) $y = x^2 - 5|x| + 4$, перевіримо, що ця функція парна
$y(-x) = (-x)^2 - 5|-x| + 4 = x^2 - 5|x| + 4 = y(x)$.



в) $y = |x^2 - 5|x| + 4|$, $|x^2 - 5|x| + 4| \geq 0$



г) $y = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{|x - 3|} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{|x-3|}$

Область визначення функції: $x \neq 3$

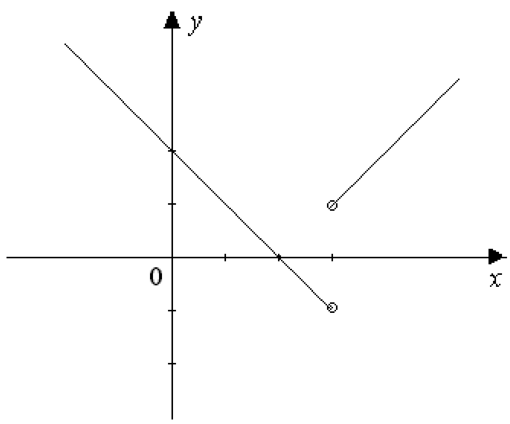
1) $x - 3 > 0$, $x > 3$

$$y = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)} = x - 2$$

2) $x - 3 < 0$, $x < 3$

$$y = \frac{(x-3)(x-2)}{-(x-3)} = -x + 2$$

$$y = \begin{cases} x - 2, \ \text{якщо}\ x > 3 \\ -x + 2, \text{якщо}\ x < 3 \end{cases}$$



Показникова функція

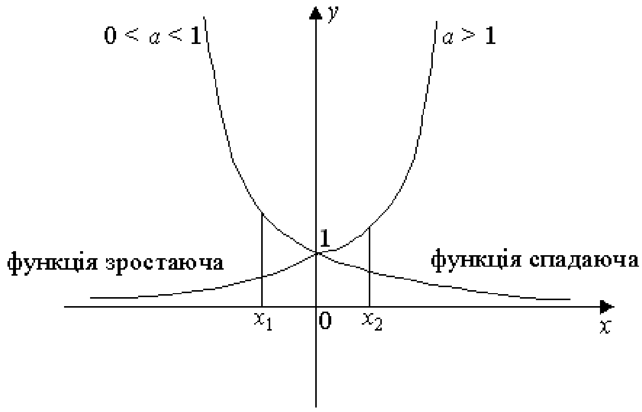
$y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

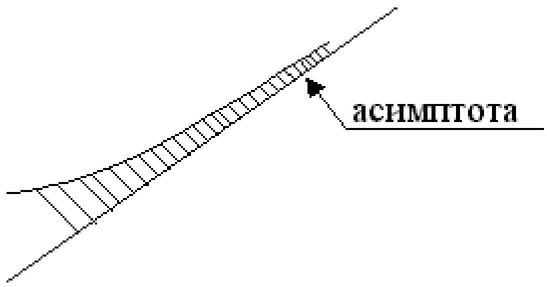
(якщо $a = 1$ маємо

$y = 1^x = 1$ – не розглядаємо).

Область визначення показникової функції: уся числова пряма.

Функція неперервна і має горизонтальну асимптоту.





Асимптота – така пряма для кривої, що відстань між точками кривої та прямої наближається до нуля.

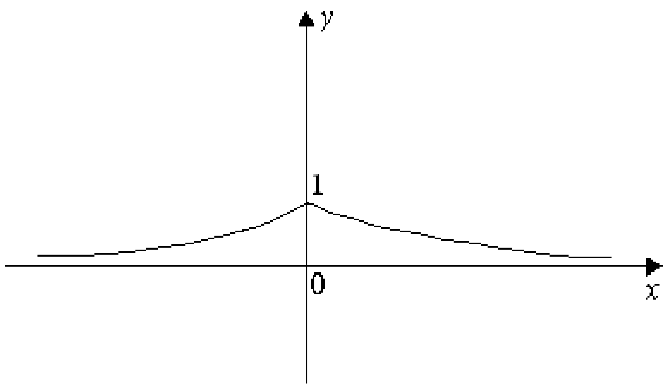
Показникова функція зростає, якщо $a > 1$.

Функція називається зростаючою, якщо виконується: $x_1 < x_2$, то $y(x_1) < y(x_2)$ і навпаки $x_1 > x_2$, то $y(x_1) > y(x_2)$.

Якщо $0 < a < 1$, то показникова функція буде спадною.

Функція називається спадаючою, якщо виконується: $x_1 < x_2$, то $y(x_1) > y(x_2)$ і навпаки $x_1 > x_2$, то $y(x_1) < y(x_2)$.

Побудуємо графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$. Функція парна, тому її достатньо побудувати для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити відносно осі Oy.



Завдання для здобувачів:

Побудувати графіки функцій

1) $y = e^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{|x|}$; 3) $y = x^3$; 4) $y = x^4$;

5) $y = |\sin x|$; 6) $y = \sqrt{|x|}$; 7) $x + |x| = y + |y|$;

8) повторити властивості і графіки функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, записати їх властивості;

9) пригадати визначення логарифма, методи розв'язування логарифмічних та показникових рівнянь;

10) повторити означення обернених функцій та приклади обернених функцій.

Логарифмічна функція

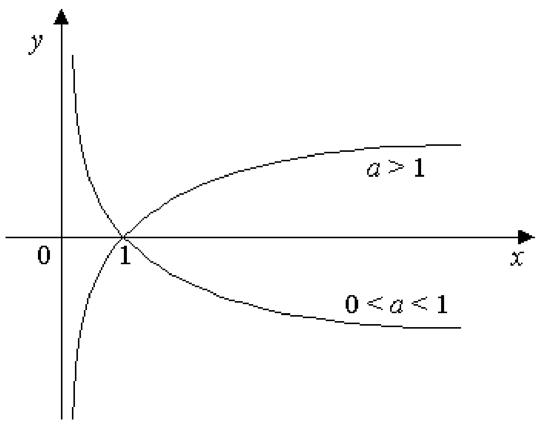
$$y = \log_a x \begin{pmatrix} a \neq 1 \\ a > 0 \\ x > 0 \end{pmatrix}$$

Показникова та логарифмічна функції взаємно обернені.

Логарифмом числа b за основою a називається степінь N, в яку треба підвести основу a, щоб отримати b: $\log_a b = N \Leftrightarrow a^N = b$.

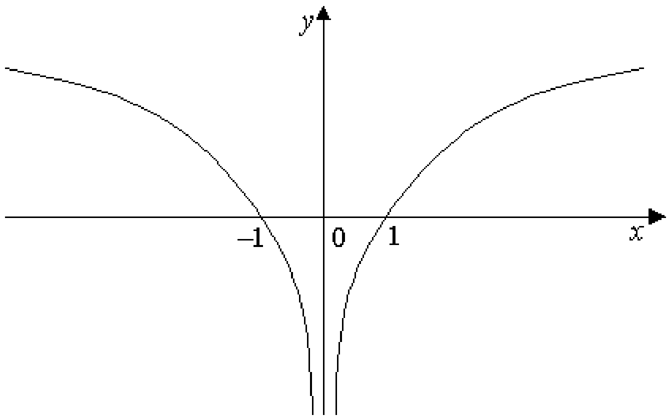
Область визначення: $x > 0$.

Функція зростаюча при $a > 1$ та спадаюча при $0 < a < 1$, має вертикальну асимптоту Oy, проходить через точку (0;1).



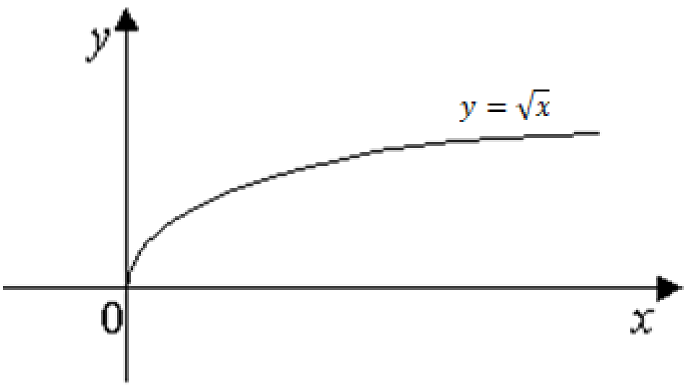
Побудувати графік $y = \ln |x|$ – натуральний логарифм: $\log_e x = \ln x$

e – це Неперове число, $e \approx 2{,}71$.



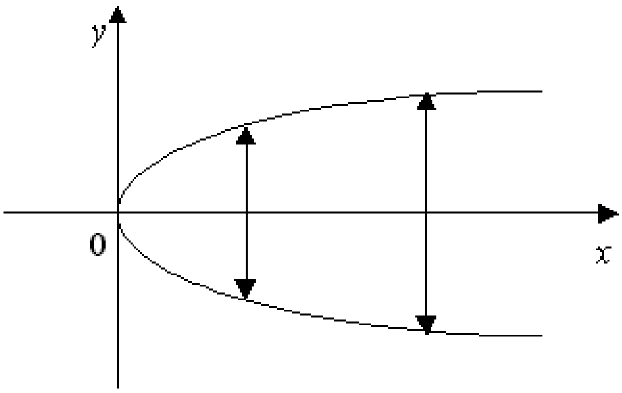
$y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$\left.\begin{array}{l} y = x^{1/2} \\ y = x^3 \\ y = x^4 \end{array}\right\}$ степеневі функції



x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

$y^2 = x$ – геометричне місце точок.



y^2 – це не функція, тому що кожному значенню x із області визначення відповідає два значення y.

Нехай задані дві множини X та $У$ і закон, за яким кожному елементу з множини X відповідає один єдиний елемент з множини $У$. Такі дві множини та закон називаються функцією. Множина X – це множина визначення, а $У$ – множина значень функції.

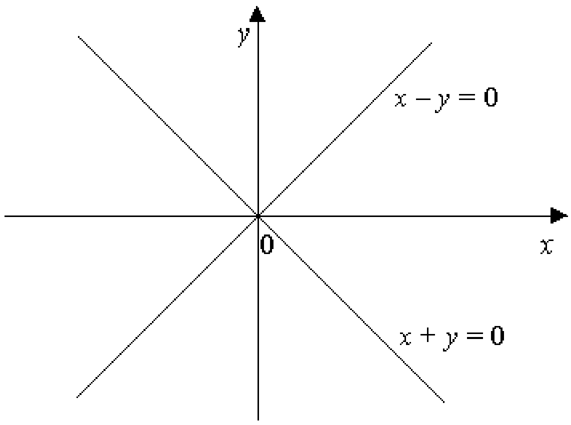
Основні способи задання функцій: графічний, табличний, аналітичний.

Побудова геометричних місць точок

$x^2 = y^2$, $x^2 - y^2 = 0$, $(x - y)(x + y) = 0$,

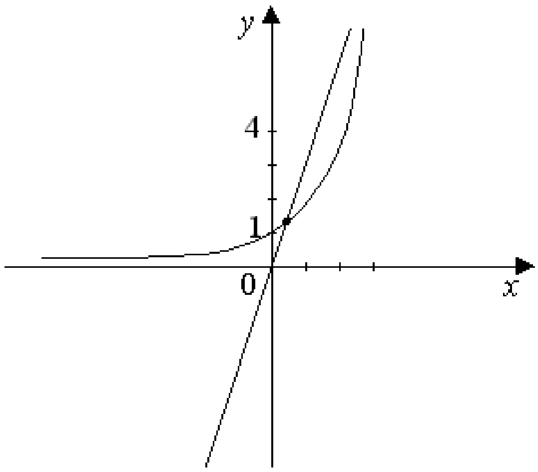
$x - y = 0$

$x + y = 0$



Розв’язати графічно рівняння: $4x = 2^x$.

Загальна ідея така: будуємо два графіка і знаходимо точку їх перетину:
$y = 4x$
$y = 2^x$



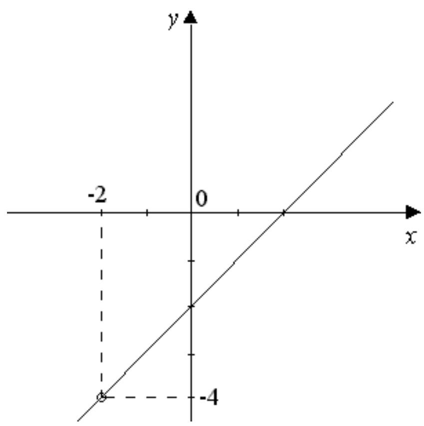
Границя функції та її неперервність

Для знаходження границі функції $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ при $x \to -2$, розглянемо спочатку її графік.

$y = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = x - 2$ $\qquad\qquad$ $y = x - 2$

$x + 2 \neq 0$

$x \neq -2$



$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$$

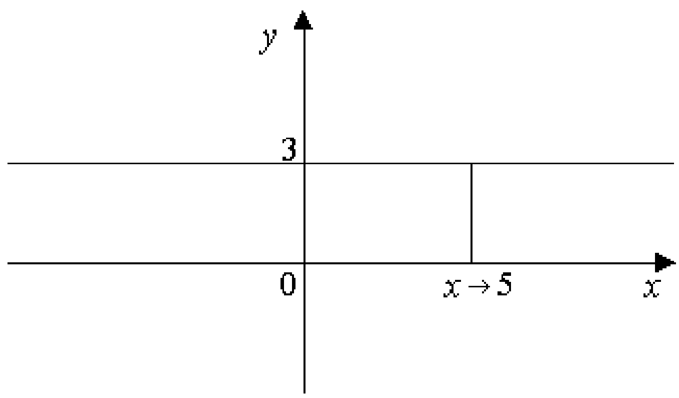
Ще раз запишемо теореми про границі функції з прикладами, базуючись на розумінні поняття функції.

Границею постійної функції є значення цієї функції.

$y = C$ (постійна функція)

Наприклад, $y = 3$

$\lim\limits_{x \to 5} C = 3$



Границя суми двох функцій дорівнює сумі границь.

$$\lim_{x\to a}(u(x)+v(x))=\lim_{x\to a}u(x)+\lim_{x\to a}v(x)$$

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2+x\right)=\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x=1+1=2$$

Функції під знаком границі – неперервні.

Границя добутку функцій дорівнює добутку границь.

$$\lim_{x\to a}(u(x)\cdot v(x))=\lim_{x\to a}u(x)\cdot\lim_{x\to a}v(x)=u(x)\cdot v(x)$$

Границя дробу

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}v(x)}, \text{ якщо } \lim_{x\to a}v(x)\neq 0$$

Приклад 1. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{\sin x}{\cos x}$ – ? $\lim\limits_{x\to \pi/4}\cos x=\cos \pi/4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\neq 0$, тобто

$$\lim_{x\to \pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to \pi/4}\sin x}{\lim\limits_{x\to \pi/4}\cos x}=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=1.$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$

Перевіряємо границю знаменника: $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$, тобто правилом границі дробу користуватись не можна.

Приклад 3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}=$

1) Перевіряємо границю знаменника:

$$\lim_{x\to -1}\left(x^3+x^2+x+1\right)=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=0$$

2) Розкладаємо вираз на множники:

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+x^2+x+1}=\frac{x^2(x+1)-(x+1)}{x2(x+1)+(x+1)}=\frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x+1)\left(x^2+1\right)}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

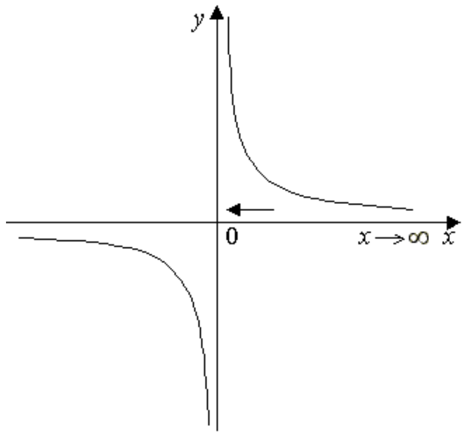
3) Знову перевіряємо границю знаменника:

$$\lim_{x\to -1}\left(x^2+1\right)=\left(-1\right)^2+1=2$$

4) Оскільки границя знаменника не дорівнює нулеві, можемо скористатись правилом про знаходження границі дробу:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{\left(-1\right)^2-1}{\left(-1\right)^2+1}=\frac{0}{2}=0$$

$$y=\frac{1}{x}$$



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

Границя дробово-раціональної функції при $x\to a$

Для знаходження границі дробово-раціональної функції при $x\to a$ достатньо у вираз функції підставити замість незалежної змінної її граничне значення a. Але цей прийом використовується лише за умови, що знаменник дробу при цьому не перетворюється на нуль.

Приклад 1. Знайти $\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}$. *Оскільки* $x\to 4$, *то чисельник дробу прямує до числа* $5\cdot 4+2=22$, *а знаменник – до числа* $2\cdot 4+3=11$.

Отже, $\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}=\frac{22}{11}=2$.

Якщо гранична точка $x=a$ належить до області означення функції, то знаходження границі функції зводиться до безпосередньої підстановки значення $x=a$ у функцію $f(x)$.

Якщо ж точка $x=a$ не належить до області означення функції і границя знаменника є нуль, тоді теорема про границю дробу, яку ми використовували раніше не може бути застосована. Перейдемо до розгляду таких випадків. Особливо часто це буває при відшуканні границі відношення $\frac{u}{v}$, коли границя знаменника дорівнює нулю. При цьому, якщо границя чисельника не дорівнює нулю, то відношення $\frac{u}{v}$ є величиною нескінченно малою, відношення $\frac{u}{v}$ є величиною нескінченно великою і $\lim\frac{u}{v}=\infty$.

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$.

При $x\to 1$ *знаменник дробу прямує до нуля, а чисельник до нуля не прямує (чисельник прямує до одиниці). Отже, границя оберненої величини є нуль, тобто* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{0}{1}=0$. *Звідси на підставі теореми будемо мати* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty$.

Якщо ж і чисельник і знаменник одночасно прямують до нуля, то для знаходження границі необхідні додаткові перетворення або спеціальні дослідження.

Також додаткового дослідження вимагають випадки, коли функція не визначена в граничній точці і коли аргумент x прямує до нескінченності.

Границя дробово-раціональної функції при $x\to\infty$.

Якщо $x\to\infty$, то дробово-раціональна функція прямує або до нуля, або до нескінченності, або до кінцевого числа, відмінного від нуля. Все залежить від того, чи буде степінь чисельника меншою за степінь знаменника, більшою за неї або дорівнювати їй.

Насправді, в раціональному дробі

$$y=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$$

розділимо чисельник і знаменник на x^n:

$$y=\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-1-n}+\ldots+a_mx^{-n}}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots+b_nx^{-n}};$$

при $x \to \infty$ знаменник прямує до b_0, а чисельник – до нуля, якщо $m < n$, до ∞, якщо $m > n$, і до a_0, якщо $m = n$. Зрозуміло, що границя буде одна й та ж сама при довільному прямуванні x до ∞.

Таким чином, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} 0, & якщо\ m < n, \\ \infty, & якщо\ m > n, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & якщо\ m = n. \end{cases}$

Використовуючи це правило, можна досить швидко знайти границю дробово-раціональної функції при $x \to \infty$.

Перший випадок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5 + 13x^2 - 10}{3x^5 - 4x^3 + 7x} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| \quad \text{(невизначеність)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^5 + 13x^2 - 10\right) = \infty, \ \lim_{x\to\infty}\left(3x^5 - 4x^3 + 7x\right) = \infty$$

Ділимо чисельник і знаменник на найвищу степінь x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1 + \overset{\nearrow 0}{\dfrac{13}{x^3}} - \overset{\nearrow 0}{\dfrac{10}{x^5}}}{3 - \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{7}{x^4}} = \frac{1}{3},$$ оскільки границя знаменника

$$\lim_{x\to\infty}\left(3 - \underset{\searrow 0}{\frac{4}{x^2}} + \underset{\searrow 0}{\frac{7}{x^4}}\right) = 3 \neq 0$$

Другий випадок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4 + 3x^2 - 2}{x^6 - 3x + 1} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{2}{x^6}}{1 - \dfrac{3}{x^5} + \dfrac{1}{x^6}} = \frac{0}{1} = 0$$

Третій випадок:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3 + 4x^2 + 2}{x^2 + 2x + 4} = \left\|\frac{\infty}{\infty}\right\| = \lim_{x\to\infty}\frac{x + 4 - \dfrac{2}{x^3}}{1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x + 4}{1} = \infty$$

Границі ірраціональних виразів.

Для того, щоб позбутися ірраціональності дробу, треба помножити чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз.

Приклад 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

В прикладі має місце невизначеність $\left(\frac{0}{0}\right)$*. Помноживши чисельник і знаменник дробу на вираз, спряжений чисельнику* $\sqrt{x+4}+2$ *ми позбуваємось ірраціональності в чисельнику і невизначеності.*

Інший спосіб позбутися ірраціональності – ввести заміну, позначивши вираз з коренем новою змінною.

Приклад 2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}\left|\begin{array}{l}\text{Заміна } \sqrt{x}=t,\\ \text{тоді } x=t^2, \text{при}\\ x\to 4 \quad t\to 2\end{array}\right|=\lim_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$$

$$=\lim_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=32.$$

Якщо обчислюється границя при $x\to\infty$, то доцільніше в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь x.

Приклад 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{9x^4+2x^3}}{x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x}}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3.$$

Приклад 4.

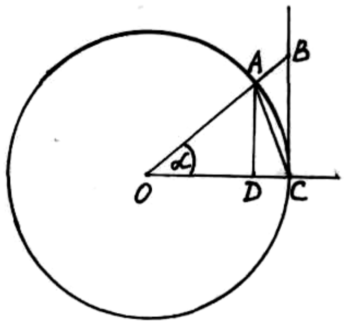
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{2}=1$$

(розкрили невизначеність $\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{2x+1}}{x}=\left\|\frac{\infty}{\infty}\right\|=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(2x+1)}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x}{x\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}=\frac{2}{1}=2$$



Чудові границі.

Перша чудова границя

Функція $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ не визначена при $\alpha=0$, оскільки чисельник і знаменник дробу перетворюються на нуль. Знайдемо границю цієї функції при $\alpha\to 0$.

Розглянемо коло з радіусом 1 (воно називається одиничне коло); позначимо центральний кут α і припустимо, що він міститься в межах $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ (Оскільки $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ є парною функцією, то достатньо розглянути випадок, коли $\alpha>0$.) З рисунку безпосередньо випливає, що

площа $\Delta AOC <$ площі сектора $AOC <$ площі ΔBOC (1).

Площа $\Delta AOC=\frac{1}{2}OC\cdot AD=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$

Площа сектора $AOC=\frac{1}{2}OC\cdot A\breve{C}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\alpha=\frac{1}{2}\alpha$.

Площа $\Delta BOC=\frac{1}{2}OC\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tg\,\alpha=\frac{1}{2}tg\,\alpha$

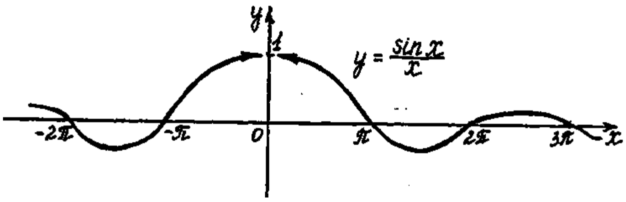
Отже, нерівності (1) після скорочення на $\frac{1}{2}$ записуються так: $\sin\alpha<\alpha<tg\,\alpha$.

Розділивши усі члени нерівності на $\sin\alpha$, отримаємо: $1<\frac{\sin\alpha}{\alpha}<\frac{1}{\cos\alpha}$ або $1>\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha$.

З геометричного означення косинуса зрозуміло, що $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha=1$, а $\lim_{\alpha\to 0}1=1$.

Отже, змінна $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ міститься між двома величинами, які мають одну й ту ж саму границю, яка дорівнює 1; таким чином, на підставі ознаки існування границі виводимо, що $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$. Цю границю часто називають *першою чудовою границею*.

Графік функції $y=\dfrac{\sin x}{x}$ зображено на рисунку.



Першу чудову границю часто використовують, якщо під знаком границі стоять тригонометричні або обернені тригонометричні функції.

Друга чудова границя.

Розглянемо змінну величину $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, де n – зростаюча змінна величина, яка набуває значення з натурального ряду чисел 1, 2, 3, …

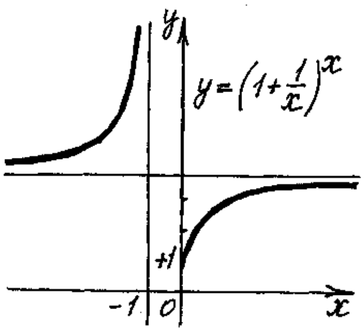
Змінна величина $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ має границю.

Границя змінної величини $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ називається *числом e* (читати: експонента): $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

Число e – ірраціональне і тому не може бути точно виражено яким-небудь кінцевим дробом. Наближено воно дорівнює $e=2,718...$.

Функція $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при x, який прямує до нескінченності, прямує до границі e: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ (2).

Рівність (2) називають *другою чудовою границею*.



Графік функції $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ зображено на рисунку.

Якщо в рівності (2) покласти $\dfrac{1}{x}=\alpha$, то при $x\to\infty$ маємо $\alpha\to 0$ (але $\alpha\neq 0$) і ми отримуємо

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$$

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Значення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-3x+1}$ дорівнює:

а) 2; б) ∞; в) 0; г) 0,5.

2. Значення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-3}{2x^2-3x+1}$ дорівнює:

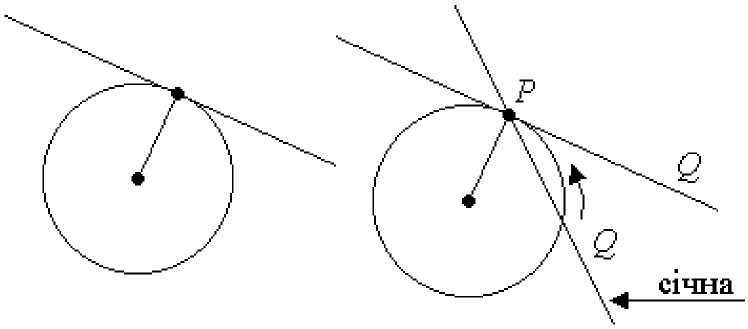
а) 2; б) ∞; в) 0; г) 0,5.

3. Значення границі $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{2x^2-3x+1}$ дорівнює:

а) 4; б) ∞; в) 1,5; г) 0,5.

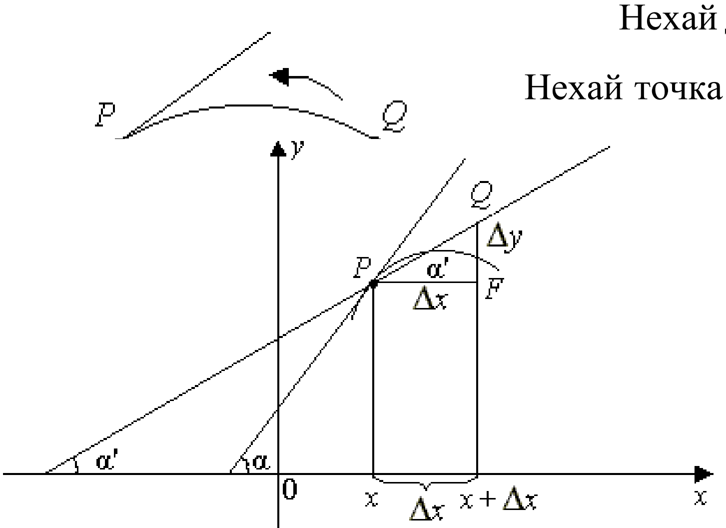
Відповіді: 1- г, 2- б, 3- в.

Означення похідної. Похідна та її геометричний зміст. Означення дотичної.



Приклад дотичної (дотична до кола).

Дотична до кола – це пряма, яка перпендикулярна радіусу в точці дотику до кола.



Нехай дана крива $\wp$, точка Q і січна PQ. Нехай точка Q прямує по кривій $\wp$ до точки P. Граничне положення січної PQ називається дотичною до кривої $\wp$ в точці P.

$$\wp : y = y(x)$$

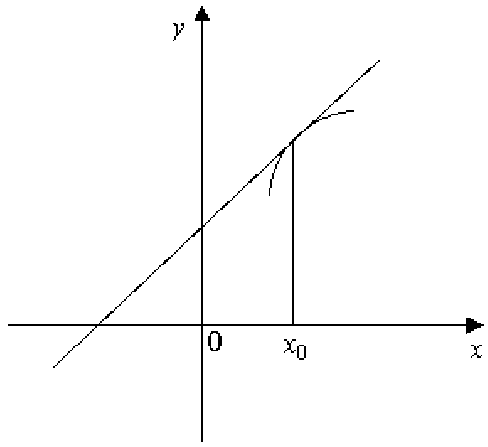
Нехай Р з абсцисою x – довільна точка кривої $\wp$. Дамо x приріст Δx, який приведе до приросту функції $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$.

Візьмемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha'$.

Нехай точка Q прямує до точки P, тобто приріст аргументу прямує до нуля. Звідси:

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x) = k$ – означення похідної (геометричний зміст)

$Q \to P$, а $\Delta x \to 0$, $tg\alpha' = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to tg\alpha = k$, де α – це кут між дотичною і додатним напрямом осі Ox. Звідси $y'(x)$ – це кутовий коефіцієнт дотичної.



Запишемо рівняння дотичної до кривої $y = y(x)$ в точці x_0.

$y - y_0 = k(x - x_0)$

k – кутовий коефіцієнт

$k = y'(x)$

Рівняння дотичної матиме вигляд: $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

Приклад. Записати рівняння дотичної до кривої $y = 2 - 4x - 3x^2$ в точці $x_0 = -2$, зробити малюнок.

$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$

$y(-2) = 2 - 4(-2) - 3(-2)^2 = -2$

$y(-2) = -2$

Знаходимо похідну:

$y' = (2 - 4x - 3x^2)' = (2)' - (4x)' - (3x^2)' = 0 - 4x' - 3(x^2)' = 0 - 4 - 6x.$

Похідна суми дорівнює сумі похідних.

Похідна постійної дорівнює нулеві.

Постійний множник можна виносити з-під знака похідної.

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\qquad\qquad$ $x' = 1$

$y' = -4 - 6x$

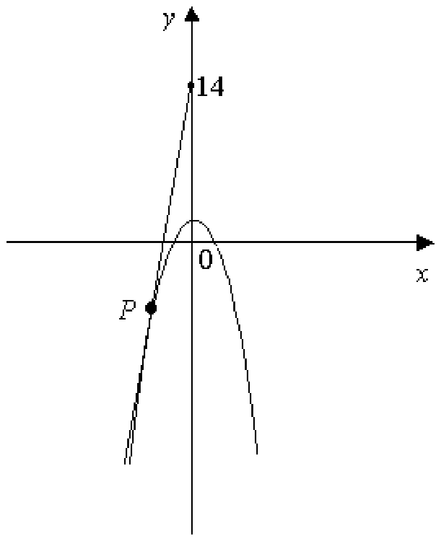
Знаходимо $y'(-2) = -4 - 6(-2) = 8$.

Записуємо рівняння дотичної

$y + 2 = 8(x + 2),$

$y + 2 = 8x + 16,$

$y = 8x + 14.$



Диференціальне числення функції однієї змінної

Теорема про похідну добутку

$(uv)' = u'v + v'u$

$y = e^x \cdot \sin x$

$y' = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

$(e^x)' = e^x \qquad (\sin x)' = \cos x$

Теорема про похідну дробу

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \qquad v^2 \neq 0$$

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Приклад. Знайти похідну від функції $y = \sin 2x$.

$y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$

Беремо похідну від функції синус, а потім множимо на похідну від «складностей».

$$y=\sqrt{x^2+1}$$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x^2+1\right)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Розв'язати нерівність: $f'(x)<g'(x)$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x} \qquad g(x)=5x+\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\left(x^2+1\right)'\cdot x-\left(x^2+1\right)\cdot x'}{x^2}=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+1\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

$$g'(x)=(5x)'+\left(\frac{1}{x}\right)'=5-\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2}<5-\frac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases}1<5\\ x\neq 0\end{cases} \qquad x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$$

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Похідна функції $y=e^{x^2+3}$ має вид:

   а) xe^{x^2+3}; б) $2xe^{x^2+3}$; в) $-2xe^{x^2+3}$; г) e^{x^2+3}.

2. Похідна функції $y=sin(2x^2-1)$ має вид:

   а) $cos(2x^2-1)$; б) $-4xcos(2x^2-1)$;
   в) $4xcos(2x^2-1)$; г) $xcos(2x^2-1)$.

3. Похідна функції $y=\sqrt{8x+1}$ в точці $x_0=3$ дорівнює:

   а) 0,5; б) 0,8; в) 1; г) 1,5.

4. Похідна функції $y=\sqrt[3]{3x+5}$ в точці $x_0=1$ дорівнює:

   а) 0,25; б) 0,5; в) 0,75; г) 1,25.

5. Похідна функції $y=\sqrt{5x^2-9}$ в точці $x_0=3$ дорівнює:

   а) 1; б) 1,5; в) 2; г) 2,5.

6. Похідна функції $y=\sqrt[3]{3x-7}$ в точці $x_0=5$ дорівнює:

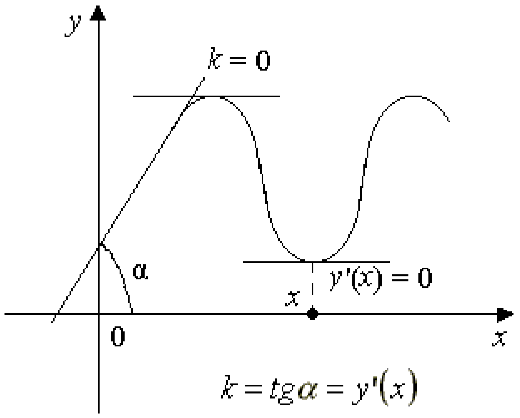
   а) 0,25; б) 0,75; в) 1,25; г) 1,75.

Відповіді: 1- б, 2- в, 3- б, 4- а, 5- г, 6- а.

5.7 Застосування похідної при дослідженні функцій. Асимптоти графіку функції. Загальна схема дослідження функцій

Використання похідної до розв’язування задач

Задача №1. На графіку функції $y = x(x-4)^3$ знайти точки, в яких дотична паралельна осі Ox.



Точки, в яких похідна функції дорівнює нулеві, називаються критичними. Тільки в критичних точках функція може досягати свого екстремального значення: або мінімального, або максимального.

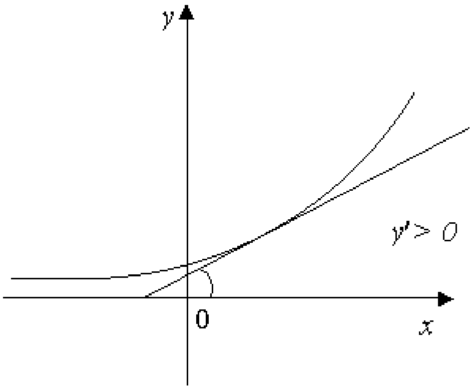
$y' = x'(x-4)^3 + x\cdot((x-4)^3)' = (x-4)^3 + x\cdot 3(x-4)^2 = (x-4)^2(x-4+3x) = 4(x-4)^2(x-1)$

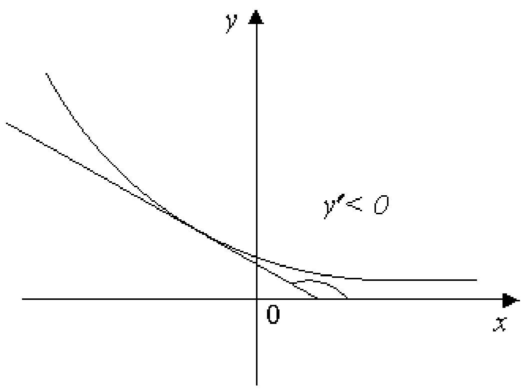
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 1$

$y(4) = 0 \qquad y(1) = -27$

$A\ (4;0), \qquad B\ (1; -27).$

Задача №2. Довести, що на графіку функції $y = x^3 + x^2 + x + 1$ немає точок, дотичні в яких були би паралельні осі Ox.



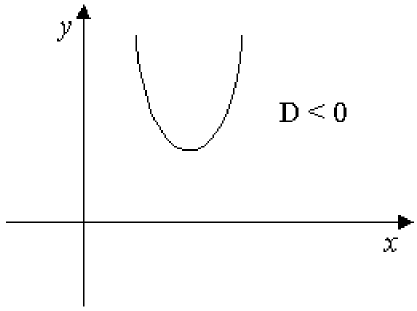


Якщо похідна більше нуля, то функція буде зростаючою, а якщо похідна менше нуля, то функція спадаюча.

$y' = 3x^2 + 2x + 1$

$D = 4 - 12 = -8 < 0$

Це означає, що похідна всюди більше нуля, тобто функція є зростаючою, точок, де дотична паралельна осі Ox у неї не може бути.



Задача №3. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

1) Область визначення функції: вся числова вісь

2) $y(-x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x$ (функція не парна і не непарна)

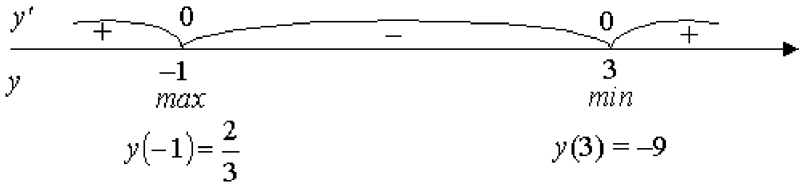
3) знаходимо точки екстремуму:

$y' = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

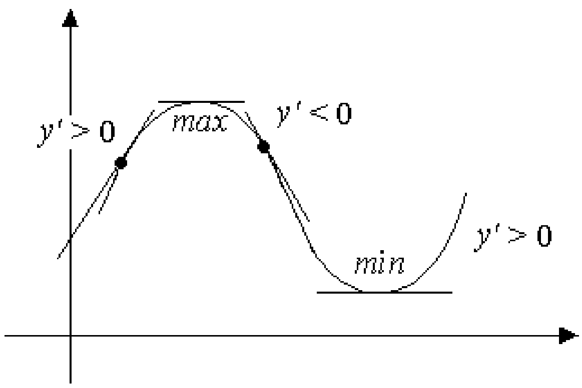
$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_1 = -1,$

$x_2 = 3$



Для дослідження функції в критичних точках треба знайти знаки похідних зліва і справа від критичних точок. Якщо в критичній точці похідна змінює знак з “+” на “–”, то це є точка максимуму, а якщо – з “–” на “+”, то це точка мінімуму.



4) знаходимо точки перетину з координатними осями:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = -9$

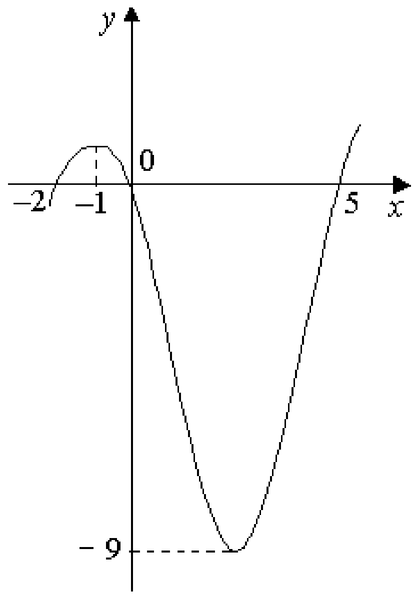
$$y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3x - 9) = 0$$

$$x = 0 \qquad x^2 - 3x - 9 = 0$$

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{45}}{2} \approx \frac{3+7}{2} = 5, \qquad x_2 = \frac{3-\sqrt{45}}{2} \approx \frac{3-7}{2} = -2$$

За отриманими даними можемо побудувати графік функції (схематично).



Задача №4. Побудувати графік функції $y = \frac{x^4}{4} - x^3$.

1) область визначення – вся числова вісь;

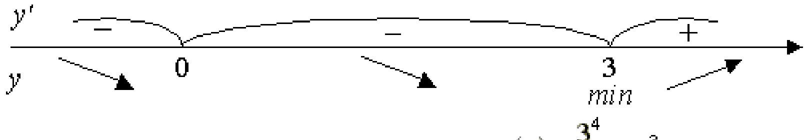
2) функція не є парною і не є непарною;

3) дослідимо функцію на екстремум:

$$y' = \frac{4x^3}{4} - 3x^2 = x^3 - 3x^2$$

$$y = x^2 \cdot (x - 3)$$

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 3$$



$$y(3) = \frac{3^4}{4} - 3^3 = -24{,}5$$

В критичній точці $x = 0$ знак не змінюється, ця точка не є ні максимумом, ні мінімумом.

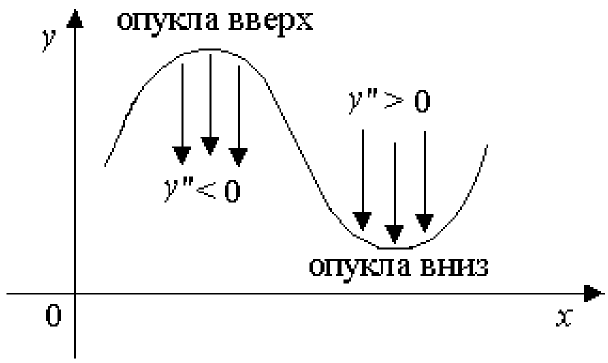
4) знайдемо точки перетину з координатними осями:

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad y(0) = 0$

$y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^4}{4} - x^2 = x^2\left(\dfrac{x^2}{4} - 1\right) = 0$

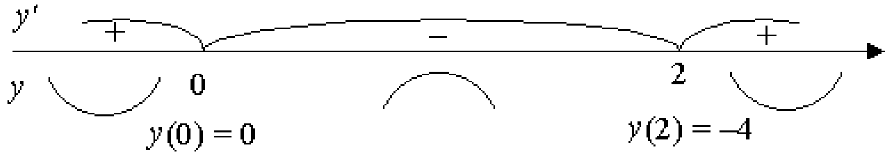
$$x_1 = 0; \qquad x_2 = \frac{1}{2}; \qquad x_3 = -\frac{1}{2}$$

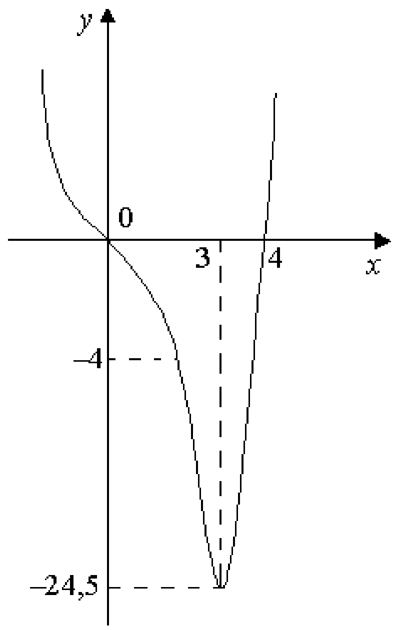
Точка, в якій змінюється опуклість, називається точкою перегину функції, в самій точці друга похідна дорівнює нулеві. Друга похідна – це похідна від першої похідної.



5) $y'' = (y')' = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \qquad x_2 = 2$





Задача № 5. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

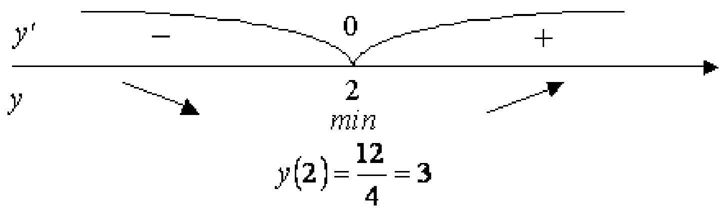
1) Область визначення: $x \neq 0$.

Вертикальна асимптота. Для того, щоб встановити її існування, треба, виходячи з області визначення, знайти границю функції при $x \to 0$. Якщо вона буде прямувати до нескінченності, то це і буде означати, що $x = 0$ – вертикальна асимптота. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+4}{x^2} = +\infty$, отже, $x = 0$ – вертикальна асимптота.

2) Функція не парна і не непарна.

3) $y' = \frac{(3x^2+4)x^2 - 2x(x^3+4)}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^4}$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$



Знаходження похилої асимптоти функції

$y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty}\left(y(x) - kx\right)$$

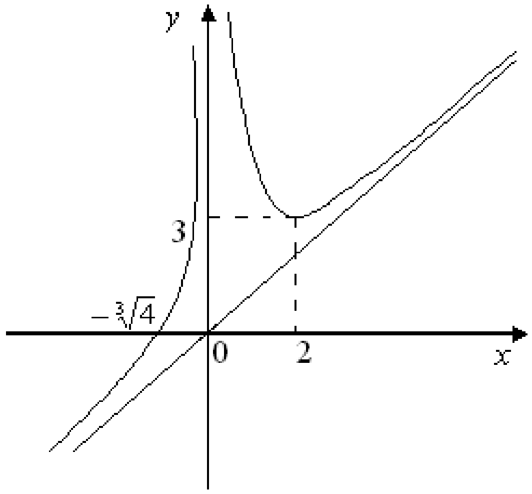
$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^3}}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4-x^3}{x^2} = 0$$

$y = x$

4) $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 + 4 = 0$

$x = -\sqrt[3]{2}$



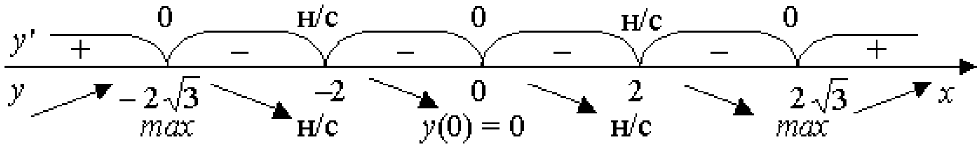
Задача №6. Побудувати графік функції $y = \dfrac{2x^3}{x^2 - 4}$.

1) Область визначення: $x^2 - 4 \neq 0$, $x \neq \pm 2$, прямі $x = \pm 2$ – вертикальні асимптоти.

2) $$y' = \frac{\left(2x^3\right)'\left(x^2-4\right) - \left(x^2-4\right)' \cdot 2x^3}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{6x^2\left(x^2-4\right) - 2x \cdot 2x^3}{\left(x^2-4\right)^2} =$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^2 - 4x^4}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^4 - 24x^2}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^2\left(x^2-12\right)}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{2x^2\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right)}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2\sqrt{3}, \quad x_3 = -2\sqrt{3}$



$$y\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{2 \cdot \left(-2\sqrt{3}\right)^3}{\left(-2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = \frac{2 \cdot \left(-\sqrt{12}\right)^3}{\left(-\sqrt{12}\right)^2 - 4} = -6\sqrt{3}$$

$$y\left(2\sqrt{3}\right) = \frac{2 \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^3}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 4} = 6\sqrt{3}$$

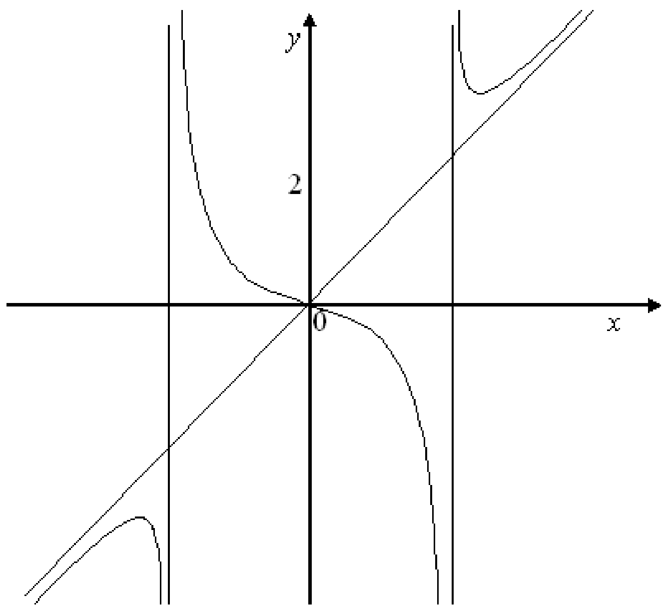
3) $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x\left(x^2-4\right)} = 2$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2-4} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2-4} = 0$$

$y = 2x$ – асимптота

4) $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$



Розглянемо застосування похідної на практиці

Врожайність ячменю, як функція азотних і фосфорних добрив, записується рівнянням $y = 14 + 8n - 3{,}2n^2 + 7{,}2p - 2{,}4p^2 + 1{,}6np$, де n і p – дози азотного і фосфорного добрив у *ц* діючої речовини на *га*; y – врожайність *ц/га.* Необхідно:

1) визначити дозу фосфору, яка дасть максимальну врожайність, якщо n не вноситься ($n = 0$);

2) визначити дозу фосфору, яка дасть максимальну врожайність, якщо доза $n = 1{,}5$ *ц/га*;

3) не задаючи наперед дози ні одної, ні іншої поживної речовини, знайти такі їх значення, які при спільній дії, дадуть максимальну різницю між грошовою оцінкою продукції та витратами, що залежать від кількості добрив.

Припустимо, що ціна на ячмінь 15 *грн/ц*, витрати у зв'язку і застосуванням 1 *ц* азотного добрива – 60 *грн*, фосфорного – 45 *грн*.

Розв'язання.

1. Оскільки за умовою 1 задачі n добриво не вноситься, врожайність, як функція фосфорного добрива, тепер буде визначатись рівнянням $y = 14 + 7{,}2p - 2{,}4p^2$. Для знаходження p максимальної врожайності візьмемо похідну від y по p та прирівняємо її до 0:

$y'(p) = 0 + 7{,}2 - 2 \cdot 2{,}4p = 7{,}2 - 4{,}8p = 0$, откуда $p = 1{,}5$

$$y = 14 + 1{,}5 \cdot 7{,}2 - 2{,}4 \cdot 1{,}5^2 = 19{,}4$$

2. Для розв'язання другої задачі у вихідне рівняння замість n підставимо його значення 1,5:

$$y = 14 + 8 \cdot 1{,}5 - 3{,}2 \cdot 1{,}5^2 + 7{,}2p - 2{,}4p^2 + 1{,}6 \cdot 1{,}5p$$

Візьмемо похідну від цього виразу по p, прирівняємо до 0, отримаємо $p = 2$. У порівнянні з попередньою задачею доза p, що необхідна для максимальної врожайності збільшилась. Пояснюється це явище, яке називається взаємодією факторів, у даному випадку – двох видів добрив. Взаємодія факторів виражається у тому, що ефективність одного фактору (у нашому випадку p) підвищується із збільшенням рівня іншого фактору (у нашому випадку азоту)

3. Запишемо вираз, який означає описану різницю:

$$K = 15(14 + 8n - 3{,}2n^2 + 7{,}2p - 2{,}4p^2 + 1{,}6np) - 60n - 45p$$

$$\begin{cases} K'(n) = 15(8 - 6{,}4n + 1{,}6p) - 60 = 0 \\ K'(p) = 15(7{,}2 - 4{,}8p + 1{,}6n) - 45 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}6p - 6{,}4n + 4 = 0 \\ -4{,}8p + 1{,}6n + 4{,}2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 1,(18) \\ n \approx 0{,}92 \end{cases}.$$

Завдання для закріплення у тестовій формі

1. Графік функції $y = x^3 + 6x^2 + 9x - 3$ має точку перегину, абсциса якої дорівнює: А. 1; В. 0; С. -1; Д. -2.
2. Похідна функції $y = \sqrt{2x-1}$ в точці $x_0 = 1$ дорівнює: А. 0; В. 0,5; С. 1; Д. 1,5.
3. Графік функції $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 6$ має точку перегину, абсциса якої дорівнює: А. 1; В. 2; С. 3; Д. 4.
4. Графік функції $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ має точку перегину, абсциса якої дорівнює: А. 1; В. 2; С. 3; Д. 4.
5. Похідна функції $y = \sqrt[3]{6x-4}$ в точці $x_0 = 2$ дорівнює: А. 0; В. 0,5; С. 2; Д. 3.
6. Графік функції $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3{,}5$ має точку перегину, абсциса якої дорівнює: А. 0; В. 0,5; С. 1; Д. 1,5.
7. Графік функції $y = x^3 + 9x^2 + 24x + 10$ має точку перегину, абсциса якої дорівнює: А. -2; В. -3; С. -4; Д. -5.

5.8 Невизначений інтеграл

Інтегральне числення

Означення первісної: функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на певному інтервалі, якщо похідна цієї функції дорівнює $f(x)$: ($F'(x) = f(x)$).

Приклад 1. $f(x) = x^2$

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C$$

Перевіримо: $F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + C' = x^2$

$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ – невизначений інтеграл

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ називається її первісна. Невизначений інтеграл і первісна – одне і теж.

Правила дій з інтегралами:

1. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів.

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Знайти інтеграл $\int (\sin x + e^x)dx = \int \sin x dx + \int e^x dx = -\cos x + e^x + C$

2. Постійну можна винести з-під знаку інтегралу

$$\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$$

Приклад 2. $\int \frac{2}{x}dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln|x| + C$

Приклад 3. $\int e^{-x^{2/2}}dx$ – такий інтеграл, наприклад, не може бути записаний у вигляді первісної.

Таблиця інтегралів:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1;$

2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C;$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + C;$

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg x + C.$

Безпосереднє інтегрування базується на застосуванні табличних інтегралів, властивостей невизначеного інтеграла та найпростіших перетворень підінтегрального виразу. Наприклад:

$$\int \left(2\sqrt[3]{x} - \frac{3}{x} + 4e^x\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{3}}dx - 3\int \frac{dx}{x} + 4\int e^x dx =$$

$$= \frac{3}{2} x^{\frac{4}{3}} - 3\ln|x| + 4e^{x} + C.$$

Інтегрування частинами.

Якщо є дві функції від змінної x $u(x)$ та $v(x)$, то

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du.$$

Для того, щоб скористатися формулою інтегрування частинами необхідно виконати таку послідовність дій:

1) розбити підінтегральний вираз на два множники u та dv;

2) знайти du диференціюванням $u(x)$;

3) знайти v інтегруванням dv.

4) Важливою умовою правильного використання формули інтегрування частинами є вибір множників u та dv. Загальних вказівок на цей рахунок немає, але існують правила для окремих випадків:

1. Якщо підінтегральний вираз містить в собі добуток функцій типу a^{x}, $\cos x$, $\sin x$ на степеневу функцію, то за u треба брати степеневу функцію.

Приклад 4.

$$\int x\cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = u' \cdot dx = dx \\ v = \int dv = \\ = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C;$$

2. Якщо підінтегральний вираз є добутком логарифмічної або оберненої тригонометричної функції на степеневу, то за u треба брати логарифмічну або обернену тригонометричну функції.

Приклад 5.

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

Інтегрування за допомогою підстановки.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі здійснюється за допомогою підстановок двох типів: $x = \varphi(t)$ або $t = \alpha(x)$.

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Введення нової змінної дозволяє привести інтеграл до більш простого або до табличного. Для того, щоб виконати заміну змінної, треба весь підінтегральний вираз $f(x)dx$ виразити через нову змінну t, а після знаходження нового невизначеного інтеграла знову повернутися до старої змінної x.

Приклад 6.

$$\int \cos(2x+1) dx.$$

Зробимо підстановку $2x+1=t$. Візьмемо диференціали від обох частин рівності $2dx = dt$, тобто $dx = \frac{1}{2} dt$. Замінимо $2x+1$ та dx на їх вирази через t. Тоді початковий інтеграл буде мати вигляд:

$$\int \cos(2x+1) dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C.$$

Приклад 7.

$$\int \sin \quad 4xdx = \left| \begin{array}{c} 4x = t \\ x = \dfrac{t}{4} \\ dx = \left(\dfrac{t}{4}\right)' dt = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{4} dt = -\frac{1}{4}\cos t + C = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$$

Приклад 8.

$$\int x\sqrt{x+1} \quad dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2 - 1 \\ dx = \left(t^2 - 1\right)' dt = 2tdt \end{array} \right| = \int \left(t^2 - 1\right) t \cdot 2tdt =$$

$$= \int \left(2t^4 - 2t^2\right) dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Метод підстановки зручно застосовувати, коли підінтегральна функція містить функцію та її ж похідну, а саме:

$$\int f\left(\ \varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x) \quad dx = \int f(t) dt$$

Приклад 9.

$$\int \cos x e^{\sin x} dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ dt = (\sin x)' dx = \cos x dx \end{array} \right| = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$$

Приклад 10.

$$\int ctgxdx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

Приклад 11.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + C.$$

5.9 Визначені та невласні інтеграли

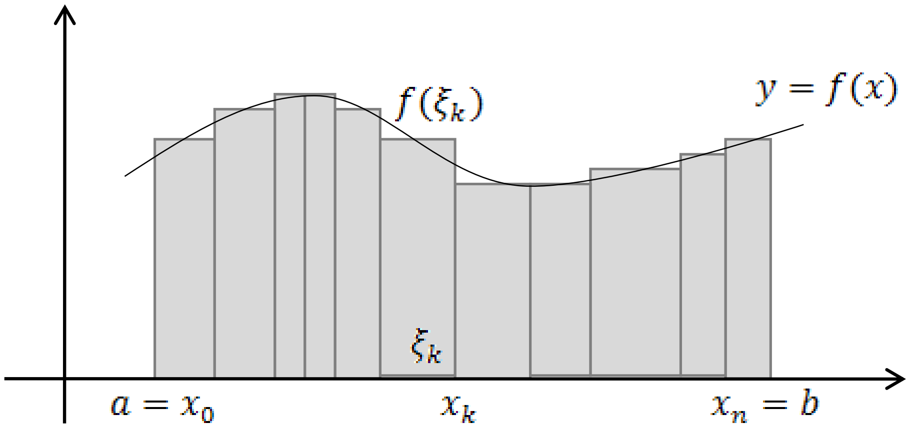
Нехай функція $f(x)$ є похідною від функції $F(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$; тоді $F(x)$ називають первісною функцією для $f(x)$. Наприклад, функція $3x^2$ є похідною від x^3, а x^3 є первісною для $3x^2$. Взагалі основна задача диференціального числення – це задача про знаходження похідної, основна задача інтегрального числення – це задача про знаходження первісної для заданої функції. Звернемо увагу, що будь-яка задана функція має не одну первісну, наприклад, $(x^3)' = 3x^2$, але і $(x^3 + 5)' = 3x^2$. Отже, будь-які дві первісні однієї і тієї ж самої функції відрізняються одна від одної на постійний доданок. Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$. Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$ і навпаки. Іншими словами, невизначений інтеграл – це загальна первісна, яка містить довільну константу, при кожному численному значенні якої отримуємо частинну первісну.

При розв'язанні багатьох задач стає потреба сумувати нескінченно велику кількість нескінченно малих доданків. Це приводить до одного з центральних понять математики – поняттю визначеного інтеграла. Наприклад, нехай необхідно обчислити площу криволінійної трапеції, що обмежена прямими $y = 0$, $x = a$, $x = b$ та графіком функції $y = f(x)$.

Якщо розбити увесь інтервал $a \le x \le b$ змін для x на маленькі проміжки за допомогою точок ділення $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ і прийняти висоту на кожному з цих малих проміжків постійною, то отримаємо наближений вираз для площі криволінійної трапеції

$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, де $(\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k)$.

Геометричний зміст правої частини – це площа ступінчатої фігури, що зображена на рисунку і отримана у результаті заміни кожного з n стовпчиків, на які розбита криволінійна трапеція, прямокутником з тією ж основою і з висотою, що дорівнює однієї з висот стовпчика. За граничного переходу, при нескінченному подрібненні розбиття, отримаємо



$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Як нам відомо, границя, до якої прямує інтегральна сума

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

при нескінченому подрібненні проміжків розбиття, називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ за інтервалом інтегрування $a \le x \le b$ і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_{k.}$$

Для обчислення визначеного інтеграла запишемо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ де } F'(x) = f(x).$$

Приклад 1.

$$\int_1^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20\ .$$

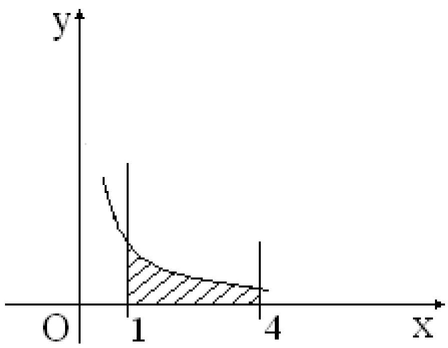
Як зазначалось вище, площа криволінійної трапеції, що обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, справа та зліва, відповідно, прямими $x=b$ і $x=a$, знизу – віссю *Ox*, знаходиться за формулою:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b y\,dx.$$

Приклад 2.

Знайти площу криволінійної трапеції, яка обмежена лініями $xy=1$, $x=1$, $x=4$, $y=0$.

Побудуємо задані лінії та заштрихуємо вказану криволінійну трапецію .



За формулою $S=\int_a^b f(x)dx$ маємо:

$$S=\int_1^4 \frac{1}{x}dx=\ln|x|\,\Big|_1^4=\ln 4-\ln 1=\ln 4.$$

Завдання для закріплення у тестовій формі

Обчислити визначений інтеграл

1. $\int_0^1 x^3dx$ а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{1}{3}$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$ а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{1}{4}$.

3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin 3x\,dx$ а) $\frac{2}{3}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{4}{5}$.

4. $\int_{1}^{2} x^4 dx$ а) 3,4; б) 2,1; в) 6,2; г) 7,3.

5. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx$ а) 1; б) 2; в) 3; г) $\frac{3}{2}$.

6. $\int_{2}^{4} x^2 dx$ а) $17\frac{4}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{2}$; г) 18.

7. $\int_{1}^{4} \sqrt{\text{x}}\ dx$ а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{13}{2}$; в) $\frac{14}{3}$; г) $\frac{9}{2}$.

8. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$ а) 0; б) 1; в) 2; г) $\frac{3}{2}$.

9. $\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

10. $\int_{0}^{3} x^5 dx$ а) 100; б) 131,5; в) 115,4; г) 121,5.

11. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$ а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) 0; г) $\frac{\pi}{2}$.

Відповіді: 1- а, 2- б, 3- в, 4- в, 5- а, 6- б, 7- в, 8- б, 9- в, 10- г, 11- г.

Невласні інтеграли з нескінченними межами та інтеграли від необмежених функцій. Збіжні та розбіжні інтеграли.

Вище визначений інтеграл розглядався для скінченого проміжку інтегрування $[a,\ b]$ та обмеженої функції $f(x)$. Узагальнимо поняття визначеного інтеграла на випадок нескінченного проміжку інтегрування або необмеженої функції, тому будемо розглядати два види невласного інтеграла.

Невласним інтегралом від неперервної функції $f(x)$ у межах від a до $+\infty$ називається границя визначеного інтеграла $\int_{a}^{A} f(x)dx$ за умови, що $A \to \infty$:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int_{a}^{A} f(x)dx.$$

Якщо границя існує, то невласний інтеграл збігається, якщо не існує, то невласний інтеграл є розбіжним.

Приклад 1.

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{A\to+\infty}arctg\,x\Big|_0^A=\lim_{A\to+\infty}\left(arctgA-arctg0\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Аналогічно визначаються невласні інтеграли від функції $f\left(x\right)$ у межах інтегрування $\left(-\infty,\ a\right]$ та $\left(-\infty,\ +\infty\right)$:

$$\int_{-\infty}^{a}f\left(x\right)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f\left(x\right)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_B^A f\left(x\right)dx.$$

Приклад 2.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_B^A\frac{1}{1+x^2}dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}arctg\,x\Big|_B^A=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\left(arctgA-arctgB\right)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

Властивості невласного інтеграла. Ознаки збіжності невласного інтеграла

Із властивостей визначеного інтеграла та границі функції легко виводяться такі властивості невласного інтеграла:

1. Якщо збігаються інтеграли $\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx$ та $\int_a^{+\infty}g\left(x\right)dx$, то також збігається інтеграл

$$\int_a^{+\infty}\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)dx=\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx\pm\int_a^{+\infty}g\left(x\right)dx.$$

2. Нехай $k\neq0$ – деяка довільна стала, тоді із збіжності або розбіжності інтеграла $\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx$ виходить відповідно збіжність або розбіжність, інтеграла

$$\int_a^{+\infty}kf\left(x\right)dx=k\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx.$$

Дані властивості є справедливими і для інтегралів $\int_{-\infty}^{a}f\left(x\right)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f\left(x\right)dx$ та $\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x\right)dx=\lim_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}}\int_B^A f\left(x\right)dx$.

Невласний інтеграл від необмеженої функції

Розглянемо тепер функцію $f(x)$, яка задана на скінченному проміжку $[a,\ b)$, але є необмеженою на цьому проміжку. Припустимо, що функція $f(x)$ обмежена на будь-якому відрізку $[a,\ b-\delta]$, де $\delta > 0$, але необмежена на інтервалі $(b-\delta,\ b)$. Точка b називається особливою точкою.

Невласним інтегралом функції $f(x)$ в проміжку від a до b, якщо b – особлива точка функції $f(x)$, називається границя визначеного інтеграла від функції $f(x)$ в проміжку від a до $b-\delta$ за умови, що $\delta \to 0$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx.$$

Аналогічно для функції $f(x)$, яка обмежена на відрізку $[a+\delta,\ b]$ і необмежена на інтервалі $(a,\ a+\delta)$, визначається невласний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx,$$

де a – особлива точка функції $f(x)$.

Якщо особливі точки функції $f(x)$ лежать усередині проміжку інтегрування, то даний інтеграл розбивається цими точками на суму відповідних інтегралів.

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Особлива точка $x=1$, тоді за формулою $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_a^{b-\delta} f(x)dx$ маємо:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\int_0^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\delta\to 0}\arcsin x\Big|_0^{1-\delta} =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\arcsin(1-\delta) - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Література

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів: навчальний посібник: Вид. 4-те, перероб. та доп. – Київ: Центр навчальної літератури, 2005. – 448 с.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. Наука, 1985. – 383 с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1,2. – М.: Наука, 1986. – Ч.1 – 303 с., Ч.2 – 415 с.
4. Дубовик В. П., Юрик І. С. Вища математика. К.: 1993. – 356 с.
5. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов. М.: 1998. – 457 с.
6. Кудрявцев В. А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. М.: 1978. – 381с.
7. Математика: Підручник для студентів екон. спеціальностей вищ. навч. закладів / В.М. Лейфура, Г.І. Голодницький, Й.І. Файст; За ред. В.М. Лейфури. – К.: Техніка, 2003. – 640с.
8. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: 1982. – 335 с.
9. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1972.
10. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2 т. – М.: Наука, 1985.
11. Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г. Математика в экономике. М.: Финансы и статистика, 1999.