2. Математичне моделювання раціонів харчування, що містять збалансований кальцій / В. М. Михайлов [та ін.] // Обладнання та технології харчових виробництв : темат. зб. наук. праць / Донецький нац. ун-т економіки і торгівлі ім. М. Туган-Барановського. – Донецьк, 2011. – С. 105–110.

3. Про створення раціонів одноразового споживання зі збалансованим вмістом кальцію та максимальним вмістом йоду / Ж. А. Крутовий [та ін.] // Прогресивна техніка та технології харчових виробництв, ресторанного та готельного господарств і торгівлі. Економічна стратегія і перспективи розвитку сфери торгівлі та послуг : Міжнар. наук.-практ. конф., 19 травня 2011 р. : [тези: у 4 ч.]. / редкол. : О. І. Черевко [та ін.]. – Х. : ХДУХТ, 2011. – Ч. 2. – С. 78–79.

4. Химический состав пищевых продуктов / под ред. И. М. Скурихина и В. А. Шатернинова. – М. : Лёгкая и пищевая промышленность, 1984.

Отримано 30.03.2012. ХДУХТ, Харків.

УДК 514.748.4

М.С. Софронова, канд. фіз.-мат. наук

ЗВ’ЯЗОК МІЖ ПОБУДОВОЮ N-ПОЛІТОПА ТА ОПУКЛОЇ ОБОЛОНКИ СКІНЧЕННОЇ МНОЖИНИ ТОЧОК У R^n

Запропоновано метод побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n*, що дозволяє розв’язувати задачі, які не вимагають опису всіх підграней межі опуклої оболонки. Описано основні процедури побудови опуклої оболонки, зображеної у вигляді n-політопа, що заданий перетином замкнених півпросторів. Наведено чисельні результати роботи методу за n=4; 5.*

Предложен метод построения выпуклой оболочки конечного множества точек в R^n*, позволяющий решать задачи, не требующие описания всех подграней границы выпуклой оболочки. Описаны основные процедуры построения выпуклой оболочки, представленной в виде n-политопа, заданного пересечением замкнутых полупространств. Приведены численные результаты работы метода при n=4; 5.*

In article the method of construction of a convex hull of points finite set in R^n*, allowing is offered to solve problems not requiring descriptions all subfaces of*

border of a convex hull. The basic procedures of construction of a convex hull submitted as n-polytope, given by crossing closed half-spaces are described. The numerical results of operation of a method at n=4; 5 are received.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Задача побудови опуклої оболонки не лише є центральною у низці додатків, але й дозволяє вирішити ряд питань обчислювальної геометрії, на перший погляд не пов'язаних із нею. До задач, що пов'язані з побудовою опуклої оболонки можна віднести задачі, які виникають у статистиці, економіці, дослідженні операцій тощо.

Побудова опуклої оболонки скінченної множини точок, і особливо у випадку точок на площині, вже досить широко і глибоко досліджено (методи обходу Грехема, Джарвіса, швидкі методи побудови опуклої оболонки тощо) і має додатки, наприклад, в розпізнаванні образів, обробці зображень, а також у задачах компонування і розкрою матеріалів [1].

Для побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n $(n > 3)$ на теперішній час відомо декілька методів [1–4], що ґрунтуються на теоремі McMullen, Shephard [5] про те, що опукла оболонка скінченної множини точок у R^n є опуклим n-політопом. І навпаки, кожен опуклий n-політоп є опуклою оболонкою деякої скінченної множини точок.

Під опуклим n-вимірним політопом (надалі n-політопом) мається на увазі непорожня континуальна обмежена n-вимірна поліедральна множина, за умови, що ця множина не є підмножиною ніякого простору меншої розмірності [6].

Серед методів побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n $(n > 3)$ можна виділити метод "загортання подарунка" та метод "під-над". Ці методи породжують повний опис межі (граф граней) опуклої оболонки. Проте існує низка задач, у яких такий опис не потрібен. До таких задач, наприклад, відноситься задача, спочатку описана Фрименом як "задача про плаваючі курси валют". Математична постановка цієї задачі (її ще називають "задачею про максимуми") полягає у визначенні усіх максимальних елементів деякої скінченної множини S точок з R^n для заданого відношення домінування [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав достатню вивченість питання побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n $(n > 3)$ методами, що передбачають повний опис її межі (графа граней). Процедура опису підграней не викликає труднощів у припущенні симпліціальності результуючого n-політопа. У загальному випадку процедура опису підграней ускладнюється й істотно впливає на часову складність алгоритму.

Мета та завдання статті – розробка методу побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n, який є в деякому розумінні модифікацією методу "під-над" і який дозволяє вирішувати задачі, що не вимагають опису усіх підграней межі опуклої оболонки.

При цьому під "побудовою опуклої оболонки" у цій роботі матимемо на увазі побудову її у вигляді n-політопу, зображеного у вигляді перетину замкнених півпросторів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Сформулюємо наступну задачу. Є множина $A=\{A_1, A_2,..., A_m\} \subset R^n$ з m точок $A_i(x_{i1}, x_{i2},..., x_{in})$, i=1,2,...,m, $m \ge n+1$. Необхідно побудувати опуклу оболонку conv(A) множини точок A.

Основна ідея розробленого методу включає побудову на точках множини A початкової опуклої оболонки S^1 (n-вимірного симплексу (надалі n-симплексу) S^1) і послідовності опуклих оболонок S^{h+1}, h=1,2,...,h_0–1, таких, що $S^1 \subset S^2 \subset ... \subset S^{h_0} = \mathrm{conv}(A)$. Побудова кожного S^{h+1}, h=1,2,…,h_0–1, здійснюється шляхом розгляду довільної гіперграні n-політопа S^h і знаходження зовнішньою до S^h точки з A, назвемо її A_0, з максимальним відхиленням від гіперплощини даної гіперграні. Тоді $S^{h+1} = \mathrm{conv}(S^h \cup \{A_0\})$. Якщо не існує жодної зовнішньої до S^h точки, отже цей n-політоп і є conv(A).

Зауваження 1. Під "побудовою n-політопа" мається на увазі опис його за допомогою недодатньо орієнтованих гіперплощин, тобто зображення n-політопа у вигляді перетину півпросторів, обмежених цими гіперплощинами.

Гіперплощина, за допомогою якої формується межа деякої замкненої опуклої точкової множини $T \subset R^n$, називатимемо недодатньо орієнтованою відносно множини T, якщо будь-яка точка множини T має недодатнє відхилення від цієї гіперплощини.

Зауваження 2. conv(A) – опукла оболонка точкової множини $A \subset R^n$, якщо $\mathrm{conv}(A) \subset R^n$, $\mathrm{conv}(A) \not\subset R^k, k \le n-1$.

Опишемо детальніше основні процедури побудови опуклої оболонки заданої множини точок у R^n.

Процедура 1. Перевірка коректності задання координат точок множини A. Вхідні дані: вимірність простору, кількість і координати точок множини A. Вихідні дані (у разі коректного задання множини A): множина габаритних точок і рівняння гіперплощини, побудованої на n точках цієї множини.

Переконуємося, що не всі точки належать одній гіперплощині. Формуємо множину габаритних точок $E \subseteq A$ за наступним правилом.

Точка $A'(x'_1, x'_2, ..., x'_n) \in E \subseteq A$, якщо виконуються умови:

а) $x'_k = \max(x_{1k}, ..., x_{mk})$ або $x'_k = \min(x_{1k}, ..., x_{mk})$, $k \in \{1, ..., n\}$;

б) $\forall A'_i, A'_j \in E: i \neq j \; A'_i \neq A'_j$.

Нехай $|E| = e$. Якщо $e \geq n$, будуємо гіперплощину π [7]: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n + a_0 = 0$ – одну з C_e^n можливих гіперплощин, яка проходить через n точок множини E. Аналогічно, якщо $e<n$ будуємо одну з C_m^n можливих гіперплощин, що проходить через n точок множини A.

Якщо жодну гіперплощину, що проходить через n точок множини E (чи A), побудувати неможливо, отже усі точки множини A належать k-вимірній площині ($\mathrm{conv}(A) \subset R^k$ ($k \leq n-2$)).

Процедура 2. Побудова n-симплексу S^1. Вхідні дані: рівняння гіперплощини; множина точок, на яких ця гіперплощина побудована. Вихідні дані: n-симплекс із описом вершин і гіперплощин, що беруть участь у формуванні його межі.

Нехай дана гіперплощина π, побудована на n точках $A_1^E, A_2^E, ..., A_n^E$. Знаходимо точку $A_0(x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n}) \in A$ таку, що:

$$\left|\delta_{A_0}(\pi)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{0k} + a_0\right| = \max_{\substack{A_i \in A \\ i=1,2,\dots,m}} \left\{\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{ik} + a_0\right|\right\}, \; \left|\delta_{A_0}(\pi)\right| \neq 0 .$$

Якщо такої точки не існує, то $\mathrm{conv}(A) \subset R^{n-1}$. Інакше формуємо множину $\tilde{A} = \{\tilde{A}_1, ..., \tilde{A}_{n+1}\} = \{A_1^E, ..., A_n^E, A_0\}$ і будуємо $\mathrm{conv}(\tilde{A})$ (n-симплекс S^1). Процедура побудови полягає у наступному.

1. Згенерувати з точок множини $\tilde{A}$ $(n+1)$ набори за n точками.

2. Побудувати на n точках $\tilde{A}_1^t, \tilde{A}_2^t, ..., \tilde{A}_n^t \in \tilde{A}$ кожного t-го набору, t=1,...,n+1, гіперплощини $\pi_t : a_1^t x_1 + ... + a_n^t x_n + a_0^t = 0$.

3. Забезпечити побудованим гіперплощинам π_t недодатню орієнтацію відносно множини $\tilde{A}$.

Процедура 3. Виключення з множини A точок, які є внутрішніми або межовими (але не є вершинами) n-політопа S^h, h=1,2,…,h_0. Вхідні дані: множина вершин і гіперплощин n-політопа, що беруть участь у формуванні його межі. Вихідні дані: множина точок, що виключені з розгляду.

Нехай $\gamma = \text{fr}S^h$, $\gamma_+ = R^n \setminus S^h$ і $\gamma_- = \text{int}S^h$.

Позначимо через $\bar{A}^{h-1}$ – множину точок з A, виключених із розгляду на етапах 1,2,., $h-1$ (при h=1 $\bar{A}^0 = \varnothing$), A^h – множина вершин n-політопа S^h, h=1,2,...,h_0 (при h=1 $A^1 = \tilde{A}$). Виключаємо з розгляду ті точки множини $A \setminus \bar{A}^{h-1}$, які належать множині $S^h \setminus A^h$, використовуючи наступне правило.

Точка $A''' \in S^h \setminus A^h$, якщо виконується одна з умов:

а) $\delta_{A'''}(\pi_t) < 0,\quad \delta_{A'''}(\pi_t) < 0,\ t = 1,2,..., f^h$ (тобто $A''' \in \gamma_-$), де f^h – кількість гіперплощин, що беруть участь у побудові межі n-політопа S^h, і при h=1 $f^1 = n+1$;

б) $\delta_{A'''}(\pi_l) = 0, l \in \{1,2,..., f^h\}$, і кількість l_0 таких гіперплощин π_l менше n, а для усіх інших ($f^h - l_0$) гіперплощин $\delta_{A'''}(\pi_l) < 0$, $l \in \{1,2,..., f^h\}$ (тобто $A''' \in \gamma \setminus A^h$).

Зауважимо, що за виконання умов:

$$\delta_{A'''}(\pi_l) = 0 \text{ при } l_0 \geq n,$$

$$\delta_{A'''}(\pi_l) < 0 \text{ для усіх інших } (f^h - l_0) \text{ гіперплощин},$$

точка A''' є вершиною n-політопа S^h. Виключені з розгляду точки включаємо до множини $\bar{A}^h$.

Нехай $H_{S^h} = \{\pi_t\}_{t=1}^{f^h}$ – множина гіперплощин π_t, $t = 1,2,..., f^h$, що беруть участь у формуванні межі n-політопа S^h.

Процедура 4. Побудова n-політопа S^{h+1}, $h=1,2,\ldots,h_0-1$. Вхідні дані: гіперплощина гіперграні, що розглядається, та множина вершин n-політопу S^h, на яких ця гіперплощина побудована. Вихідні дані: множина гіперплощин, що формують межу n-політопа S^{h+1}, та множина точок, на яких ці гіперплощини побудовані.

Для даної гіперплощини π_t , $t \in \{1,2,..., f^h\}$, необхідно:

1. Обрати точку $A_0(x_{01}, x_{02},..., x_{0n}) \in A \setminus \overline{A}^h$ з максимальним відхиленням від гіперплощини π_t . тобто таку, що

$$\delta_{A_0}(\pi_t) = \sum_{k=1}^{n} a_k^t x_{0k} + a_0^t = \max_{\substack{A_i \in A \setminus \overline{A}^h \\ i \in \{1,2,\ldots,m\}}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k^t x_{ik} + a_0^t \right\}.$$

2. Якщо $\delta_{A_0}(\pi_t) = 0$, то гіперплощина π_t є опорною до множини A і входить в опис (межі) опуклої оболонки цієї множини. Інформація про гіперплощину π_t заноситься у $H_{\mathrm{conv}(A)}$ – множину опорних гіперплощин і у в $P_{\mathrm{conv}(A)}$ – множину точок, на яких ці гіперплощини були побудовані. В цьому випадку S^{h+1} співпадає з S^h.

Якщо $\delta_{A_0}(\pi_t) > 0$, то серед гіперплощин $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{f^h}$ необхідно обрати ті, наприклад, $\pi_1^*,..., \pi_{g-1}^*$, $g-1 < f^h - 1$, для яких виконується умова $\delta_{A_0}(\pi_r) \geq 0,\ r \in \{1,..., f^h\}, r \neq t$. Нехай $H_{A_0} = \{\pi_1^*,..., \pi_g^*\} = \{\pi_1^*,..., \pi_t\}$ і $P_{A_0} = \bigcup_{s=1}^{g} P_{A_0}^s$ – множина точок з A^h , на яких побудовані гіперплощини множини H_{A_0} , де $P_{A_0}^s$ – множина точок із A^h (вершин n-політопа S^h), на яких побудована π_s^*, $s=1,2,\ldots,g$. Нехай $\left|P_{A_0}^s\right| = g_s'$, $\left|P_{A_0}\right| = g'$, тоді $\sum_{s=1}^{g} g_s' \geq g'$.

3. Згенерувати $\mu = \sum_{s=1}^{g} C_{g_s'}^n$ множин $\tilde{A}_d = \{\tilde{A}_{d1},..., \tilde{A}_{d(n+1)}\}$, де $\tilde{A}_{d1},..., \tilde{A}_{dn} \in P_{A_0}^{s'}$, $s' \in \{1,2,..., g\}$ та $\tilde{A}_{d(n+1)} = A_0$, $d = 1,2,..., \mu$. Побудувати $\mathrm{conv}(\tilde{A}_d)$ (n-симплекс $\tilde{S}_d$), $d = 1,2,..., \mu$, використовуючи раніше описану процедуру.

4. Для побудови n-політопа $S^{h+1} = conv\left(S^h \cup \bigcup_{d=1}^{\mu} \tilde{S}_d \right)$ необхідно:

4.1. Сформувати множину H^- усіх побудованих гіперплощин, що беруть участь у формуванні $\tilde{S}_d$, $d = 1,2,..., \mu$, $\left| H^- \right| = (n+1)\mu$.

4.2. Виключити з множини H^- гіперплощини $\tilde{\pi}$, що не є опорними для множини $\{A_0\} \cup P_{A_0} \cup A^h$, тобто для яких не виконується умова: $\forall \tilde{A} \in \{A_0\} \cup P_{A_0} \cup A^h \;\; \delta_{\tilde{A}}(\tilde{\pi}) \le 0$. Позначимо множину "виключених" гіперплощин через $\overline{H}^-$, тобто $\left| \overline{H}^- \right| = j_0$, $j_0 < (n+1)\mu$.

4.3. Сформувати множину гіперплощин $H_{S^{h+1}} = (H_{S^h} \cup H^-) \setminus \overline{H}^-$, що беруть участь у формуванні межі S^{h+1}.

4.4. Сформувати множину $A^{h+1} = (A^h \cup \{A_0\}) \setminus \overline{A}$, елементами якої є вершини n-політопа S^{h+1}, де $\overline{A} = \{\overline{A}_r\}_{r=1}^{r_0}, r_0 \in \mathrm{N}$ – множина точок із A^h, які є внутрішніми для множини $H_{S^{h+1}}$ або межовими, виключеними у п. 3.

У результаті отримаємо опис n-політопа S^{h+1}.

Процес побудови conv(A) припиняється після скінченного числа ітерацій h_0, коли не існує жодної зовнішньої до поточного n-політопу S^{h_0} точки, або, що те ж саме, виконується умова : $A = A^{h_0} \cup \overline{A}^{h_0}$.

Інформація про побудовану опуклу оболонку є набором рівнянь орієнтованих опорних гіперплощин (елементи множини $H_{\mathrm{conv}(A)}$) і набором точок, на яких ці гіперплощини побудовані – вершини n-політопу S^{h_0} (елементи множини $P_{\mathrm{conv}(A)}$).

Чисельні результати. У таблиці наведені результати побудови опуклої оболонки скінченної множини точок при n=4; 5. m – кількість точок множини A, v – кількість точок, на яких побудована conv(A)

(тобто кількість вершин n-політопа S^{h_0}), f – кількість опорних гіперплощин S^{h_0}. Зауважимо, що координати $A_i(x_{i1}, x_{i2},..., x_{in})$, $i=1, 2,..., m$, точок множини A обираються випадковим чином за умови, що $x_{ik} \in \mathrm{N}$, $x_{ik} \in [1,100]$, k=1, 2,…, n.

Таблиця – **Результати побудови опуклої оболонки в R^n**

n	***m***	***v***	***f***	***n***	***m***	***v***	***F***
4	20	14	45	5	20	19	144
	40	27	113		40	36	384
	60	38	180		60	49	562

Висновки. У статті запропоновано метод побудови опуклої оболонки скінченної множини точок у R^n, що є, в деякому розумінні, модифікацією методу "під-над". Головні особливості розробленого методу полягають у наступному: 1) алгоритм запропонованого методу є відкритим; 2) результатом роботи методу є побудована опукла оболонка – n-політоп, зображений у вигляді перетину замкнених півпросторів; 3) у методі не потрібен опис усіх k-граней n-політопа (k=0, 1,…, n–2), достатньо тільки знаходження опорних гіперплощин, що беруть участь у його зображенні; 4) як наслідок п. 3, у методі підтримується тільки список гіперплощин, що істотно зменшує тимчасову складність алгоритму; 5) розроблено правило, відповідно до якого точки з даної множини, що напевно не є вершинами опуклої оболонки, виключаються з розгляду в ході роботи алгоритму.

Список літератури

1. Препарата Ф. Вычислительная геометрия. Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.

2. Chazelle B. An Optimal Convex Hull Algorithm in Any Fixed Dimension / B. Chazelle // Discrete Comput. Geom. – 1993. – № 10. – P. 377–409.

3. Avis D. How good are convex hull algorithms / D. Avis, D. Bremner, R. Seidel // Comput. Geom. Theory and Appl. – 1997. – № 7. – P. 265–302.

4. Computational Geometry: Algorithms and Applications / M. de Berg [et al.]. – Springer-Verlag, Berlin ; Heidelberg, 1997.

5. McMullen P. Convex Polytopes and the Upper Bound Conjecture / P. McMullen, G. C. Shephard // Cambridge University Press. – Cambridge, 1971.

6. Софронова М. *n*-паралелепіпеди та *n*-політопи як об’єкти багатовимірних задач оптимізаційного геометричного проектування / М. Софронова // Прогресивні техніка та технології харчових виробництв

ресторанного господарства і торгівлі : зб. наук. пр. / ХДУХТ. – Харків, 2011. – Ч. 2. – С. 390–396.

7. Гордевский Д. З. Популярное введение в многомерную геометрию / Д. З. Гордевский, А. С. Лейбин. – Харьков, 1964. – 191 с.

Отримано 30.03.2012. ХДУХТ, Харків.

УДК 663.051

Г.О. Пестіна, канд. техн. наук, доц.

АРОМАТ ХАРЧОВИХ ПРОДУКТІВ: ХІМІЧНА ПРИРОДА ТА ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Проаналізовано хімічний склад ароматів деяких харчових продуктів та надано їх загальну характеристику. Визначено основні методи виділення та ідентифікації ароматичних речовин, шляхи створення нових ароматів.

Проанализирован химический состав ароматов некоторых пищевых продуктов, приведены их общие характеристики. Определены основные методы выделения и идентификации ароматических веществ, пути создания новых ароматов.

Chemical composition of aromas of some food products is analised, their general characteristic are resulted. The basic methods of selection and identification of aromatizers, ways of creation of new aromas are determined.

Постановка проблеми у загальному вигляді. На сьогоднішній день конкуренція в сфері виробництва харчових продуктів дуже висока і споживач постійно робить вибір між подібними продуктами. Уже не досить просто випускати новий тип продукції та вдало його рекламувати, необхідно наділяти його максимальними споживчими якостями, що буде спонукати споживача придбавати даний продукт знову й знову.

Люди створили потужну галузь промисловості, що покликана зберігати продукти харчування, переробляти і значно видозмінювати все те, що людина виростила сама або взяла у природи. А саме, консервувати, рафінувати, заморожувати, коптити, в''ялити, жарити, стерилізувати, пастеризувати, сушити, розпушувати, перетворювати в желе, підфарбовувати, насичувати вуглекислим газом, змішувати в неймовірних поєднаннях.