**УДК 621.928.13**

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СЕГРЕГАЦИИ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ ПРИ СЕПАРИРОВАНИИ ПЛОСКИМИ ВИБРАЦИОННЫМИ РЕШЕТАМИ

**Тищенко Л.Н. д.т.н., проф., Пивень М.В. к.т.н., доц.,**
**Харченко С.А. к.т.н., доц.**

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко*

*У статті розроблена математична модель процесу сегрегації зернових сумішей при сепаруванні плоскими вібраційними решетами. В моделі врахований вплив пористості та швидкості пошарового руху на процес сегрегації.*

**Постановка проблемы.** Процесс сепарирования зерновых смесей (ЗС) на решетах состоит из двух основных этапов: сегрегации и просеивания. Сегрегация – это процесс погружения в нижние слои (к поверхности решета) частиц меньших размеров и большей плотности и всплывание в верхние слои частиц больших размеров и меньшей плотности. Просеивание – это процесс прохождения мелких частиц через отверстия решета, поступивших на его поверхность вследствие сегрегации.

При сепарировании ЗС толстым слоем на решете, в режиме высокой производительности, эффективность процесса зависит преимущественно от интенсивности сегрегации. Если мелкие частицы, за время пребывания смеси на рабочем органе, не успеют выделиться из слоя и достигнуть поверхности решета, они не смогут просеяться через его отверстия. В результате засоренность зернового материала возрастает, качество разделения снижается. Таким образом, для расчета и управления качеством и производительностью сепарирования необходимо разработать математическую модель процесса сегрегации.

**Анализ последних исследований.** Математическое описание движения частиц внутри слоя сыпучей ЗС выполнено Я.И. Лейкиным и М.А. Идиным [1]. Получены аналитические зависимости для траекторий и скоростей частиц в их абсолютном и относительном движении.

А.Ф. Ульяновым получено выражение для ускорения всплывания крупного шара в смеси [2]. Обоснованы границы разделяемости компонентов смеси по удельному весу и размеру.

И.И. Блехманом получено уравнение относительного движения частицы в колеблющейся среде [3]. Установлены три взаимодействующие фактора, которые обуславливают погружение (всплывание) частицы в среде: отличие плотности частицы от плотности среды, несимметрия сил сопротивления при погружении (всплывании), несимметрия закона колебаний среды.

В этих работах допускалось, что законы движения частиц внутри слоя ЗС подчиняются уравнениям для движения вязкой жидкости. Однако, динамическое поведение сыпучей ЗС отличается от поведения вязкой жидкости, определяется трением между ее частицами, столкновениями и другими видами взаимодействий. ЗС совершает быстрые движения и ее динамическое состояние существенно зависит от размеров зерна, пористости слоя и скорости послойного движения.

**Цель.** Разработать математическую модель процесса сегрегации ЗС с учетом пористости и скорости послойного движения смеси.

Рассмотрим сыпучую ЗС, находящуюся на наклонном плоском вибрационном решете совершающем продольные колебания в своей плоскости (рис.1). Смесь состоит из сходовых и проходовых частиц. Сходовые частицы образуют несущий слой, их концентрация велика. Проходовые частицы отличаются от сходовых физико-механическими свойствами, их концентрация относительно мала, так что их взаимодействием друг с другом и их влиянием на движение сходовых частиц можно пренебречь.

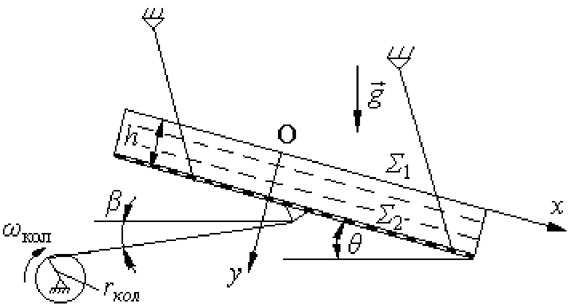


Рис. 1 – Расчетная схема плоскорешетного вибросепаратора

Для рассмотрения динамики сегрегации двухкомпонентной сыпучей ЗС используем общие соотношения динамики двухфазных сред [4]. Уравнения динамики для каждой из фаз имеют вид:

$$\rho_i \vec{a}_a^{(i)} = div\hat{T}^{(i)} + \vec{f}_{ji} + \rho_i \vec{g} \qquad (i = 1,\ 2), \tag{1}$$

где: $\rho_i$ – плотность среды $i$-ой фазы;

$\vec{a}_a^{(i)}$ – абсолютное ускорение частиц сплошной среды $i$-ой фазы;

$\hat{T}^{(i)}$ – тензор напряжений среды i-ой фазы;

$\vec{g}$ – плотность массовых сил тяжести;

$\vec{f}_{ji}$ – объемная плотность силы, с которой действует j-я среда на i-ю так, что выполняется третий закон Ньютона:

$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} = -\vec{f}\,. \tag{2}$$

Взаимодействие компонент между собой носит сложный характер, оно определяется силами Архимеда, Стокса, Магнуса и пр. В дальнейшем, следуя работе [4], будем называть первую компоненту, связанную с основным потоком зерна, несущей фазой (сходовая фракция), вторую – дисперсной (проходовая фракция), а ее частицы дисперсными частицами. В данной работе рассматривается случай, когда массовые плотности компонент $\gamma_1$ и $\gamma_2$ не сильно отличаются друг от друга, относительная скорость движения компонент невелика. В случае, если размер сходовой частицы больше размера частиц несущей фазы среди указанных сил доминируют силы Архимеда и Стокса. В случае, когда размер частиц дисперсной фазы меньше размера частиц несущей фазы, то силы Архимеда и Магнуса малы по сравнению с силой Стокса.

Число дисперсных частиц $n_2$ в единице объема меньше соответствующего числа частиц несущей фазы $n_1$, а, следовательно, объемная плотность дисперсной фазы $\nu_2$ *меньше объемной плотности несущей фазы* $\nu_1$. Объемная плотность – это переменная, характеризующая распределение твердой фазы в объеме слоя сыпучей смеси. Она представляет собой отношение объема всех зерен к объему слоя занимаемого этими зернами. Чем больше объемная плотность, тем более плотно упакованы зерна в слое и пористость будет меньше. Дисперсные частицы имеют форму шара с радиусом $a_{част}$, отличие же их реальной формы от сферической можно учитывать посредством поправочных эмпирических коэффициентов [4, 5]. Взаимодействием частиц дисперсной среды между собой можно пренебречь $\left(\hat{T}^{(2)}=0\right)$, а соответствующее выражение для объемной плотности силы $\vec{f}$ можно записать в виде:

$$\vec{f}=\nu_2 div\hat{T}^{(1)}+\nu_1 n_2 K_\mu \mu\, a_{част}\left(\vec{\upsilon}^{(1)}-\vec{\upsilon}^{(2)}\right), \tag{3}$$

где: $K_\mu$ – эмпирический коэффициент сопротивления движению дисперсной частицы;
$\mu$ – динамический коэффициент сдвиговой вязкости;
$\vec{\upsilon}^{(1)},\vec{\upsilon}^{(2)}$ – относительные скорости движения компонент смеси.

Тогда, с учетом сделанных предположений уравнения динамики двухфазной среды при сепарировании плоским решетом можно записать следующим образом:

$$\gamma_1\nu_1\left[\frac{\partial\vec{\upsilon}^{(1)}}{\partial t}+\left(\partial\vec{\upsilon}^{(1)}\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon}^{(1)}\right]=div\hat{T}^{(1)}+\gamma_1\nu_1\vec{g}, \tag{4}$$

$$\gamma_2\nu_2\left[\frac{\partial\vec{\upsilon}^{(2)}}{\partial t}+\left(\vec{\upsilon}^{(2)}\cdot\nabla\right)\vec{\upsilon}^{(2)}\right]=\nu_2 div\hat{T}^{(1)}+K_\mu a_{част}\mu\,\nu_1 n_2\left(\vec{\upsilon}^{(1)}-\vec{\upsilon}^{(2)}\right)+\gamma_2\nu_2\vec{g}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\nu_1}{\partial t}+div\left(\nu_1\vec{\upsilon}^{(1)}\right)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial n_2}{\partial t}+div\left(n_2\vec{\upsilon}^{(2)}\right)=0, \tag{7}$$

где $t$ – время.

Учитывая следующую зависимость $\nu_2$ от параметра $a_{част}$:

$$\nu_2 = \frac{4}{3} n_2 \pi a_{част}^3, \qquad (8)$$

можно заметить, что в уравнении (5) все слагаемые содержат сомножитель $\nu_2$, следовательно, можно получить соотношение его не содержащее

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}^{(2)}}{\partial t} + \left(\vec{\upsilon}^{(2)} \cdot \nabla\right)\vec{\upsilon}^{(2)} = \frac{1}{\gamma_2} div \hat{T}^{(1)} + \frac{3K_\mu \mu \nu_1}{4\gamma_2 \pi a_{част}^2}\left(\vec{\upsilon}^{(1)} - \vec{\upsilon}^{(2)}\right) + \vec{g}\,. \qquad (9)$$

Следует заметить, что уравнения (4, 6) не содержат неизвестные, связанные с дисперсной фазой и могут решаться независимо от уравнений (5, 7). После определения величин $\nu_1$, $\vec{\upsilon}^{(1)}$ соотношения (7, 9) представляют собой другую независимую систему уравнений относительно неизвестных $\vec{\upsilon}^{(2)}, n_2$ (а, следовательно, и $\nu_2$). Таким образом задача динамики двухфазного потока разбивается на две подзадачи: 1-ю – определение характеристик движения потока несущей фазы (соотношения 4, 6) и 2-ю – описание движения дисперсных частиц в слое ЗС (соотношения 7, 9).

Решение первой задачи выполнено в работе [6]. Получены уравнения определяющие характеристики движения потока: пористость, выраженную через объемную плотность уравнением $\varepsilon = 1 - \nu_1$ и скорость послойного движения смеси.

$$\frac{d}{dy}\left[\alpha\psi\left(\frac{d\nu_1}{dy}\right)^2\right] - \gamma_1 g \cos\theta \nu_1 = 0, \qquad (10)$$

$$\frac{d}{dy}\left[\mu\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)\right] + \gamma_1 g \sin\theta \nu_1 = 0, \qquad (11)$$

где: $\alpha$ – феноменологический коэффициент;

$\psi = \Phi + 2$;

$\Phi = \left[\left(1 + f^2\right)^{1/2} / f - 1\right]$;

$f = f_0\left(1 + e^{-B}\right)/2$;

$f$ – динамический коэффициент внутреннего трения;

$f_0$ – коэффициент внутреннего трения при отсутствии вибрации;

$B = r_{колB}\omega_{кол}^{\ 2} / g$; $r_{колB} = r_{кол}\sin(\beta + \theta)$;

$\theta$ – угол наклона решета к горизонту;

$\beta$ – угол направления колебаний;

$\omega_{кол}$ – циклическая частота колебаний решета;

$r_{кол}$ – радиус кривошипа вибровозбудителя (амплитуда колебаний);

$\upsilon$ – относительная скорость несущей фазы;

$y$ – текущее значение координаты в декартовой системе.

Уравнения 1, 2 дополняются граничными условиями на поверхностях ограничивающих слой сыпучей ЗС. На этих поверхностях выполняется условие непрерывности напряжений вдоль направления нормали $\vec{n}$:

– на свободной поверхности слоя $\Sigma_1$ напряжение должно обращаться в ноль, так как, действием воздуха на динамику сыпучей смеси пренебрегаем:

$$\vec{n} \cdot \hat{T}^{(1)} = 0 . \tag{12}$$

– на поверхности решета $\Sigma_2$, имеет место равенство касательных напряжений $T_{кас} = \left(\vec{n} \cdot \hat{T}^{(1)}\right)_\tau$ потока сыпучей смеси силе сопротивления решета движению потока, приходящейся на единицу площади:

$$\left(\vec{n} \cdot \hat{T}^{(1)}\right)_\tau = F_{сопр\Sigma_2} , \tag{13}$$

где: $\vec{n}$ – нормаль к поверхности $\Sigma_2$.

Для определения параметров движения дисперсных частиц обозначим через $\Delta\vec{\upsilon}^{(r)}$ разность скоростей:

$$\Delta\vec{\upsilon}^{(r)} = \vec{\upsilon}^{(2)} - \vec{\upsilon}^{(1)}, \tag{14}$$

представляющую собой относительную скорость движения дисперсных частиц в слое ЗС. Будем рассматривать осесимметричное относительное движение. Относительная скорость движения $\Delta\vec{\upsilon}^{(r)}$ мала по сравнению со скоростью несущей среды $\Delta\vec{\upsilon}^{(r)} << \left|\vec{\upsilon}^{(1)}\right|$. Тогда уравнение относительно неизвестных нормальной $u$, и продольной $w$ составляющих вектора скорости $\vec{\upsilon}^{(2)}$ относительного движения дисперсных частиц в линеаризованном виде можно представить:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3K_\mu \mu \nu_1}{4\pi\, a_{част}^2 \gamma_2} u = \left(1 - \gamma_1 \nu_1 / \gamma_2\right) g \cos\theta , \tag{15}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3K_\mu \mu \nu_1}{4\pi\, a_{част}^2 \gamma_2} w + \frac{d\upsilon}{dy} u = \left(1 - \gamma_1 \nu_1 / \gamma_2\right) g \sin\theta . \tag{16}$$

Соотношения (14), (16) представляют собой систему уравнений в частных производных первого порядка гиперболического типа. Семейство характеристик для этих уравнений определяется уравнениями:

$$x - \upsilon t = const . \tag{17}$$

Следовательно, граничные условия необходимо ставить при $x = 0$. В качестве граничных и начальных условий выберем однородные условия:

$$u = w = 0 \qquad при\; x = 0 , \tag{18}$$

$$u = w = 0 \qquad при\; t = 0 . \tag{19}$$

Это означает, что в начальный момент времени и на входе решета дисперсные частицы двигаются вместе с несущей средой.

Для решения задачи (15)-(19) воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной x. Обозначим через U, W образы функций u, w:

$$U(t,y,p)=\int_0^\infty e^{-px}u(t,x,y)dx\,, \tag{20}$$

$$W(t,y,p)=\int_0^\infty e^{-px}w(t,x,y)dx, \tag{21}$$

где: $p$ – комплексная переменная.

Уравнения (15), (16) переходят в уравнения для образов, представляющих собой обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка:

$$\frac{dU}{dt}+(\upsilon p+A)U=\frac{C\cdot g\cos\theta}{p}\,, \tag{22}$$

$$\frac{dW}{dt}+(\upsilon p+A)W+\frac{d\upsilon}{dy}U=\frac{C\cdot g\sin\theta}{p}, \tag{23}$$

с начальными условиями:

$$U=W=0 \quad npu\ t=0\,. \tag{24}$$

Здесь приняты для краткости следующие обозначения:

$$A=\frac{3K_\mu \mu\nu_1}{4\pi\, a^2_{част}`\gamma_2},\ C=1-\frac{\gamma_1\nu_1}{\gamma_2}\,. \tag{25}$$

Задача (22), (24) допускает аналитическое решение вида:

$$U(t,y,p)=\frac{Cg\cos\theta}{\upsilon}\left(g\,\frac{1}{p(p+A/\upsilon)}\right)\left(1-e^{-At}e^{-\upsilon tp}\right), \tag{26}$$

$$W(t,y,p)=\frac{Cg\sin\theta}{\upsilon}\left(g\,\frac{1}{p(p+A/\upsilon)}+\frac{Cg\cos\theta}{\upsilon}\frac{d\upsilon}{dy}\frac{1}{p(p+A/\upsilon)^2}\right)\left(1-e^{-At}e^{-\upsilon tp}\right). \tag{27}$$

Переходя от образов в последних соотношениях к оригиналам, придем к выражениям для $u(t,x,y)$, $w(t,x,y)$:

$$u(t,x,y)=\frac{Cg\cos\theta}{A}\left[1-e^{-Ax/\upsilon}-Hev(x-\upsilon t)\left(e^{-At}-e^{-Ax/\upsilon}\right)\right], \tag{28}$$

$$w(t,x,y)=\frac{Cg\sin\theta}{A}\left(1-e^{-\frac{Ax}{\upsilon}}\right)-\frac{Cg\cos\theta}{A}\frac{d\upsilon}{dy}\left[\left(\frac{x}{\upsilon}+\frac{1}{A}\right)e^{-\frac{Ax}{\upsilon}}-\frac{1}{A}\right]-Hev(x-\upsilon t)\times$$
$$\times\left\{\frac{Cg\sin\theta}{A}\left(e^{-At}-e^{-\frac{Ax}{\upsilon}}\right)+\frac{Cg\cos\theta}{A}\frac{d\upsilon}{dy}\left[te^{-\frac{Ax}{\upsilon}}+\frac{e^{-At}-e^{-\frac{Ax}{\upsilon}}}{A}-\frac{x}{\upsilon}e^{-\frac{Ax}{\upsilon}}\right]\right\}, \tag{29}$$

где:

$$Hev(\xi)=\begin{cases}0 & (\xi<0)\\ 1 & (\xi>0)\end{cases} \text{ – функция Хевисайда.} \qquad (30)$$

В случае, когда размер частиц дисперсной фазы меньше размера частиц несущей фазы, то силы Архимеда и Магнуса малы по сравнению с силой Стокса и в полученных выражениях составляющая $C$ равна единице.

Анализ уравнений (15), (16) для относительных скоростей $u$ и $w$ показывает, что их выражения быстро стремятся к асимптотическим выражениям при возрастании $t$ и $x$. Фактически при $t$ >0,01 с и $x$ >1 см $u$ и $w$ не зависят от $t$ и $x$ и определяются выражениями:

$$u=u(y)=\frac{Cg\cos\theta}{A}, \qquad (31)$$

$$w=w(y)=\frac{Cg\,sin\,\theta}{A}-\frac{Cg\,cos\,\theta}{A^2}\frac{d\upsilon}{dy}. \qquad (32)$$

Эффективность сегрегации определяется соотношением $u/u^*$, где $u^*$ – скорость при которой все частицы выделятся из слоя на длине решета $L$. Т.е., при скорости $u=u^*$ эффективность будет $\eta=1$ (100%). При $u<u^*$ не все частицы успеют выделиться из слоя – $\eta<1$. При $u>u^*$ все частицы выделятся из слоя на меньшей длине решета – $\eta>1$. Значение $u^*$ соответствует скорости, при которой траектория частицы с координатами ($y=0$, $x=0$) на входе решета проходит через конец плоскости решета ($y=h$, $x=L$).

Движение частиц описывается дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt}=\upsilon+w,\quad x(0)=0, \qquad (33)$$

$$\frac{dy}{dt}=u,\quad y(0)=y_0, \qquad (34)$$

из которых следует уравнение для траекторий частиц:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\upsilon+w}{u},\quad x(y_0)=0. \qquad (35)$$

Учтем то, что $A$ при изменении $y$ меняется слабо. Тогда решение уравнения (35) можно представить в виде:

$$x(y)=tg\theta(y-y_0)+\frac{\upsilon(y_0)-\upsilon(y)}{A}+\frac{1}{g\cos\theta}\int_{y_0}^{y}\frac{A\upsilon}{C}(x)dx. \qquad (36)$$

После подстановки $y=h$ в соотношение (36) получаем уравнение для нахождения $u^*$:

$$tg\theta(h-y_0)+\frac{(\upsilon(y_0)-\upsilon(h))\,u^*}{Cg\cos\theta}+\frac{1}{g\cos\theta}\int_{y}^{h}\frac{g\cos\theta\upsilon}{u^*}(x)dx-L=0. \qquad (37)$$

Таким образом, получена математическая модель процесса сегрегации позволяющая установить закономерности нормальной и продольной составляющей скорости внутрислоевого движения частицы, определять ее траекторию и эффективность сегрегации. В модели учтено влияние пористости и скорости послойного движения на процесс сегрегации.

**Список использованных источников**


1. Лейкин Я.И., Идин М.А. К теории процесса самосортирования сыпучих материалов на горизонтальной поверхности с круговыми поступательными колебаниями // Труды ВНИИЗ. – М.: ВНИИЗ, 1970. – Вып.69. – С. 63 – 76.
2. Ульянов А.Ф. Основы сепарации семенных смесей процессом механического вскруживания. – Труды СИМЭСХ. – Саратов: СИМЭСХ, 1951. - Вып. 10. -С.43-51.
3. Блехман И.И., Гортинский В.В., Птушкина Г.Е. Движение частицы в колеблющейся среде при наличии сопротивления типа сухого трения // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963. – №4. – С. 31 – 41.
4. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
5. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. – М.: Мир, 1971. – 536 с.
6. Тищенко Л.Н., Пивень М.В. К исследованию движения зерновой смеси на решете под действием вибрации // Науковий вісник НАУ. - К.: НАУ.- 2002.-Вип.49. - С.329-336.


**Аннотация**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА СЕГРЕГАЦИИ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ ПРИ СЕПАРИРОВАНИИ ПЛОСКИМИ ВИБРАЦИОННЫМИ РЕШЕТАМИ**

Тищенко Л.Н., Пивень М.В., Харченко С.А.

*В статье разработана математическая модель процесса сегрегации зерновых смесей при сепарировании плоскими вибрационными решетами. В модели учтено влияние пористости и скорости послойного движения на процесс сегрегации.*

**Abstract**

**MATHEMATIC MODEL OF THE PROCESSES OF GRAIN MIXTURE SEGREGATION BY FLAT VIBRATION SIEVES SEPARATION**

L. Tischenko, M. Piven, S. Kharchenko

*Mathematic model of the processes of grain mixture segregation by flat vibration sieves separation has been devised in the article. The model deals with influence of the porosity and layer movement speed on processes of segregation.*