

## МЕТОД ПОШУКУ МНОЖИНИ ПАРЕТО В НЕЧІТКІЙ ФОРМІ

Тимчук С. О., Тимчук Д. С.

*Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка*

Запропоновано метод пошуку множини Парето при багатокритеріальній оптимізації при дискретно заданій множині альтернатив та нечіткій формі цільових функцій. Метод базується на побудові єдиної функції приналежності нечіткого поняття близькості до ідеального оптимуму спеціального виду, що обмежена багатомірним еліпсом. Ця функція використовується для формування відношення переваги при пошуку рішення що не домінується. Елементи множини Парето знаходяться при різних параметрах багатомірного еліпсу.

**Постановка проблеми.** Задача прийняття рішень в умовах багатокритеріальності та невизначеності приводить, як правило до наявності не одного, а множини рішень Парето, що формально рівноправні в заданих умовах пошуку. Пошук рішень Парето в загальному випадку виливається в організацію процесу попарних порівнянь між собою всіх альтернатив, що обумовлює великі витрати процесорного часу. В задачах, де є необхідність проводити оптимізаційні дослідження при поточній зміні множини альтернатив, фактор часу є обмежуючим. Для таких задач актуальним є використання методів що економлять процесорний час та ресурси комп'ютера.

**Аналіз останніх досліджень.** Пошуковий метод оптимізації в умовах багатокритеріальності має сенс, коли пошук множини рішень що не домінуються здійснюється з відходом від схеми попарних порівнянь між собою всіх альтернатив. В багатьох випадках не ставиться задача пошуку множини Парето. Здійснюється пошук єдиного рішення [1, 2]. Для цього вводиться єдина цільова функція за рахунок алгебраїчного чи спеціального згортання цільових функцій. При пошуку множини Парето задача багаторазово вирішується при різних умовах пошуку.

У випадку наявності цільових функцій в нечіткій формі природною додатковою цільовою функцією є функція приналежності стратифікованих нечітких функцій цілі. Рішення знаходиться за допомогою схем нечіткого логічного виводу в різній формі [3].

Такий підхід з формуванням умов переваги в матричній формі був реалізований [4] в задачі пошуку оптимальної структури системи розподільчих електромереж і показав, що за допомогою такого підходу можна не знайти єдиного рішення при пошуку чергового елемента множини Парето. Причина полягає в тому, що функція приналежності рішення розраховується за узагальненими логічними операціями Заде. Область пошуку обмежена поверхнею багатомірною паралелепіпеду, що в умовах нелінійної межі множини Парето не дає гарантії отримання єдиного рішення.

**Мета статті.** Розробка методу отримання множини Парето в нечіткій формі за рахунок спеціальної побудови єдиної функції приналежності нечіткого поняття близькості до ідеального оптимуму.

**Основні матеріали дослідження.**

Нехай  $f_1^0, \dots, f_n^0$  - оптимальні значення кожної цільової функції на множині альтернатив. В загаль-

ному випадку вони досягаються при різних альтернативах  $x \in X$ , де  $X$  - множина альтернатив.

Задача пошуку єдиного рішення що не домінується є узагальненням однокритеріальної задачі, що наведена в [5] і формулюється у наступному виді:

$$\begin{aligned} f_i(x) &\lesssim Z_i, \quad \varphi_i(x) \leq 0, \quad x \in X, \\ \mu(x) &= \max(0, 1 - \sqrt{R(x)}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } R(x) = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i(x) - f_i^0)^2}{(Z_i - f_i^0)^2}, \quad n = 1, \dots, n$$

$f_i(x)$  - цільові функції,  $\varphi_i(x)$  - обмеження.

В даному випадку функція приналежності  $\mu(x)$  характеризує близькість рішення до ідеального оптимуму. Її вигляд для випадку мінімізації двох цільових функцій наведено на рис. 1. Очевидно, що така інтегральна функція нелінійна, нормаль до неї має протилежний напрямок нормалі до межі множини Парето, що обумовлює можливість отримання єдиного рішення.

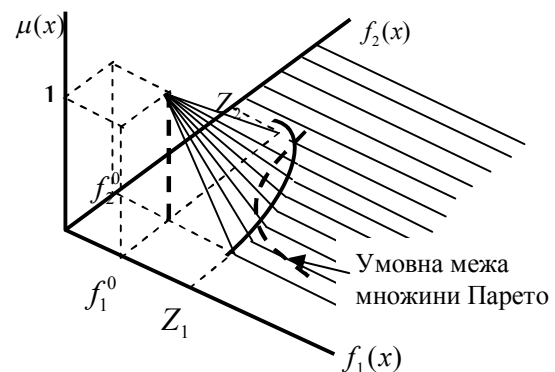


Рисунок 1 – Вид функції приналежності в задачі (1) у випадку двох цільових функцій

Функція  $R(x)$  - дає точки багатомірних еліпсів, що можуть знаходитись всередині, на межі або за межами багатомірного еліпсу в області значень цільових функцій. Функція  $R(x)$  має наступний вид

$$\sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_i^0)^2}{(Z_i - f_i^0)^2} = 1. \quad (2)$$

Даний еліпс обмежує область пошуку єдиного рішення.  $Z_i$  – значення цільових функцій, які особа що приймає рішення вважає припустимими. Одночасно ці значення визначають полувісі багатовимірного еліпсу (2).

Єдине рішення задачі (1) повинно задовольняти умові

$$\mu(x_0) = \max_x (\mu(x)). \quad (3)$$

Тобто обирається те рішення з множини альтернатив, яке має відображення в області змін цільових функцій, що якнайближче розташоване до точки  $(f_1^0, \dots, f_n^0)$ .

Алгоритм пошуку єдиного рішення в цьому випадку досить простий і має наступний вигляд.

- 1 Введення множини  $X$ ;
- 2 Пошук  $f_i^0$ , введення  $Z_i, i=1, \dots, n$ ;
- 3 Розрахунок функцій  $\mu(x)$  на множині  $X$ ;

4 Отримання рішення  $x_0: \mu(x_0) = \max_x (\mu(x))$ .

Очевидно, що в даному випадку в нечіткій формі реалізовано ідею згортання цільових функцій. Роль інтегральної функції цілі відіграє функція приналежності  $\mu(x)$ .

Параметри еліпсу  $Z_i$  виконують функцію, аналогічну ваговим коефіцієнтам в функції Лагранжа. Відмінність в тому, що  $Z_i$  мають фізичний сенс і задаються в розмірному виді. Для паритетної участі цільових функцій в отриманні рішення необхідно виконання наступної умови

$$\frac{Z_i - f_i^0}{f_{i \max} - f_{i \min}} = \lambda = const, \quad (4)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad \lambda = [0, 1].$$

Зміна константи  $\lambda$  приводить до еквідистантній зміні еліпса (2).

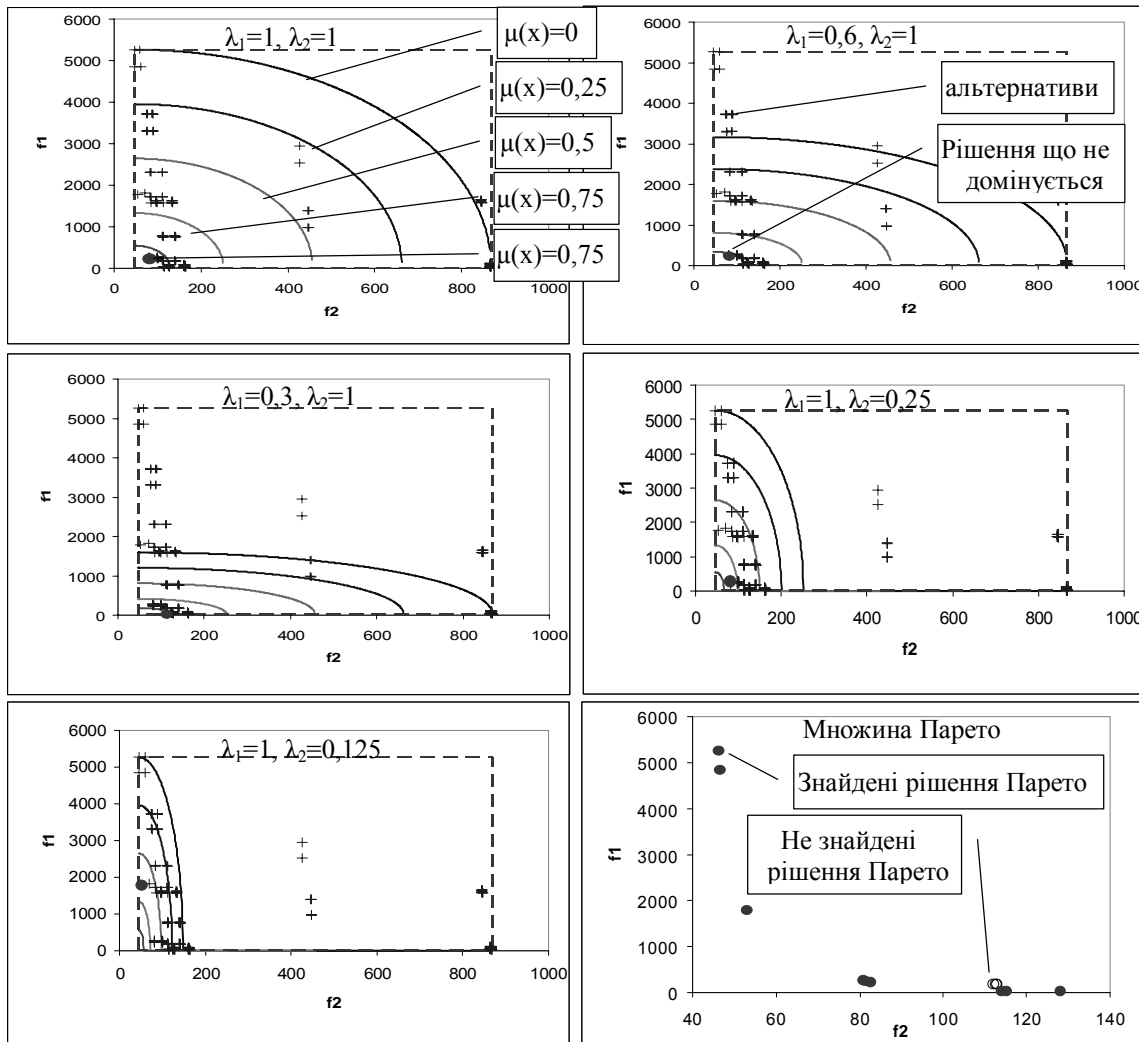


Рисунок 2 – Ілюстрація до роботи алгоритму пошуку множини Парето у випадку двох цільових функцій

Порушення умови (4) на користь будь-яких цільових функцій приведе до отримання іншого єдиного рішення з перевагою в бік відповідної цільовою фун-

кції. Ця обставина покладена в основу метода пошуку множини Парето в умовах нечітко заданих функцій цілі.

Перепишемо (1) з урахуванням (4).

$$\begin{aligned} f_i(x) &\lesssim Z_i, \quad \varphi_i(x) \leq 0, \quad x \in X, \\ \mu(x) &= \max(0, 1 - \sqrt{R(x)}), \\ \text{де } R(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{(f_i(x) - f_i^0)^2}{\lambda_i^2 (f_{i\max} - f_{i\min})^2}, \quad n = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

Для задачі (5) алгоритм пошуку множини Парето має наступний вигляд.

- 1 Введення множини  $X$ ;
- 2 Пошук  $f_i^0$ , введення  $Z_i, i=1, \dots, n$ ;
- 3 Введення комбінації значень  $\lambda_i$ ;
- 4 Розрахунок функцій  $\mu(x)$  на множині  $X$ ;
- 5 Отримання рішення з множини Парето  $x_0 \in X_0 : \mu(x_0) = \max_x (\mu(x))$ .

6 Якщо перелік комбінацій значень  $\lambda_i$  не завершено, перейти до наступної комбінації та продовжити алгоритм з пункту 3;

7 Перевірка множини Парето  $X_0$  на наявність однакових рішень і вилучення таких.

На рис. 2 наочно видно процес та результат пошуку рішень Парето методом модифікації еліпсу. Розрахунки проведено на тестовій множині зі 140 альтернатив. Для зручності геометричної інтерпретації введено дві цільові функції. Кількість пошукових ітерацій дорівнювало 17. Тобто кожна ітерація проводилась для комбінації значень  $\lambda_1, \lambda_2$  з діапазону  $\{0.001, 1\}$ . Алгоритм пошуку множини Парето в даному випадку вдалося реалізувати засобами табличного процесора Microsoft Excel. Тобто всі ітерації виконувались паралельно і одночасно, то ж 10 різних рішень з множини Парето отримано практично миттєво (рис. 2).

Для контролю проведено пошук множини Парето за схемою попарних порівнянь між собою всіх альтернатив (19600 ітерацій) і отримано 12 рішень Парето. При реалізації алгоритму на мові Visual Basic витрати процесорного часу склали близько 4 хвилин. На рис. 2 показано, які з рішень не було знайдено методом модифікації еліпсу.

Слід зауважити, що при нечіткому підході не ставиться задача пошуку повної множини Парето, часто достатньо отримати підмножину, що містить рішення що не домінуються у деякій області навколо точки ідеального оптимуму. Але шляхом збільшення ітерацій є можливість отримати повну множину Парето, якщо умови дозволяють витрати зайвого часу.

Співвідношення між кількістю ітерацій при збільшенні кількості альтернатив буде зростати на користь метода модифікації еліпсу. Наприклад, при кількості альтернатив 660 множина Парето методом модифікації еліпсу (28 ітерацій) отримано за 1,5 хвилини при реалізації алгоритму на Visual Basic, а за схемою попарних порівнянь між собою всіх альтернатив (435600 ітерацій) результат отримано за 48 хвилин.

**Висновки.** Таким чином, запропонований метод нечіткого пошуку множини Парето, що базується на побудові нечіткої інтегральної цільової функції еліпсоїдної форми, яка не потребує нормалізації чи приведення до безрозмірного виду складових цільових

функцій, реалізується простими швидкодіючими алгоритмами. Це дає можливість застосовувати його в системах автоматизованого керування з функцією оптимізації, а також в оперативних експертних системах.

#### Список використаних джерел

1. Тимчук М. С. Современные методы поиска рациональных решений в задачах электроснабжения / М. С. Тимчук // Вісник ХДТУСГ. – 2004. – вип.27.- т.1.- С.62-68.
2. Лещинская Т. Б. Применение методов многокритериального выбора при оптимизации систем электроснабжения сельских районов / Т. Б. Лещинская // Электричество. – 2003. – №1. – С.14-22.
3. Mamdani E. H. A Linguistic Self-Organizing Process Controller / T. J. Procyk, E. H. Mamdani // Automatica.-1979.-Vol.15.-P.15-30.
4. Тимчук С. А. Методика принятия решения при выборе и анализе структуры распределительных сетей при нечетко заданной цели / С. А. Тимчук, Н. М. Черемисин, М. С. Грабовская // Энергетика и электрификация. – 2007. – №8. – С. 45 - 51.
5. Орловский С. А. Проблема принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М.: Наука, 1981. – 208 с.

#### Аннотация

#### МЕТОД ПОИСКА МНОЖЕСТВА ПАРЕТО В НЕЧЕТКОЙ ФОРМЕ

Тимчук С. А., Тимчук Д. С.

*Предложен метод поиска множества Парето при многокритериальной оптимизации в случае дискретно заданного множества альтернатив и нечеткой форме целевых функций. Метод основан на построении интегральной функции принадлежности нечеткого понятия близости к идеальному оптимуму специального вида, ограниченной многомерным эллипсом. Эта функция используется для формирования отношения предпочтения при поиске недоминируемых решений. Элементы множества Парето находятся при разных параметрах многомерного эллипса.*

#### Abstract

#### THE METHOD OF SEARCH THE PARETO SET IN FUZZY MODE

S. Tymchuk, D. Tymchuk

*The method of search of Pareto set is offered in case of discretely set of alternatives and the fuzzy form of criterion functions. The method is based on construction of integrated function of an accessory of indistinct concept of affinity to an ideal optimum of the special kind, limited to a multidimensional ellipse. This function is used for formation of the relation of preference by search of not dominated decisions. Elements of Pareto set are at different parameters of a multidimensional ellipse.*