УДК 631.363.636.085

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧНОСТИ СТРУКТУРЫ СМЕСИ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ

Шацкий В.В., д.т.н., Тисличенко А.С., инж
(Национальный научный центр «ИМЕСХ» НААН Украины)
Коломиец С.М., к.т.н.
(Таврический государственній агротехнологический университет)

Представлена математическая модель формирования количества частиц компонентов кормовой смеси при смешивании в порции постоянного объема.

Постановка проблемы. Качество кормов определяется наличием в порции, выдаваемой животному, всех необходимых питательных веществ и энергии при высоком уровне диетических свойств. Это зависит от качества смешивания, которое должно обеспечить присутствие в этой порции, необходимого количества компонентов рациона, представленных в виде измельченных частиц различного размера и, естественно, отличающиеся питательной и энергетической ценностями.

Ввиду того, что при смешивании компонентов их подача в смеситель имеет отклонение потоков по массе, которое обеспечивается в том числе и фракционным составом корма, то в случае отклонения одного компонента вызывает противоположное отклонение других компонентов по объему и массе в порции постоянного объема, выдаваемой животному.

Это является причиной изменения питательной и энергетической ценности порций корма, что существенно влияет на продуктивность животных.

Теоретически влияниее отклонения компонентов при смешивании на качество кормовой смеси не исследованы, что определяет проблему определения допустимых показателей качества функционирования технико-технологического обеспечения кормления животных. Важно выяснить влияние качества измельчения наиболее ценных зерновых материалов на качество смешивания и продуктивность животных.

Цель работы. Моделирование структуры смеси сыпучих материалов в процессе смешивания проводится с целью определения зависимости количества смешиваемых компонентов в порции, выдаваемой животному, от качества смешивания, с учетом неравномерности подачи, фракционного состава компонентов рациона и вероятностного распределения частиц корма в этой порции, даст основу для определения влияния качества смешивания на продуктивность животных.

Метод исследований. Процесс смешивания представляется как относительное стохастическое перемещение частиц компонентов рациона различного фракционного состава, без учета трения частиц. На основе чего определяется вероятность расположения одного компонента среди частиц другого (как правило основного компонента). Для этого используется метод дискретных элементов [1,2] и комбинаторику [3]. Целесообразность этих методов обусловлена тем, что они предполагают рассмотрение поведения дискретной внутренней структуры материала в гравитационном поле и происходящих в сыпучей среде стохастического перемещения и взаимодействие отдельных частиц.

Основная часть. Представим сыпучий материал состоящий из упругих частиц сферической формы, соприкасающихся между собой и пустот между ними, заполненных воздухом. Как правило, большинство сыпучих материалов имеют сложный фракционный состав, представляющий собой множество частиц с неупорядоченным случайным расположением. Объем определенного количества частиц не постоянен при различном заполнении, что объясняется различным расположением частиц в пространстве, что влияет на плотность и пористость этого материала.

Нами выдвинута гипотеза о том, что изменение количества одного компонента в порции не пропорционально влияет на изменение количества другого (других) компонента, что влияет на плотность порций одинакового объема.

Для подтверждения выдвинутой гипотезы проводятся эти теоретические исследования влияния количественного соотношения частиц разного размера в постоянном объеме порций на качественный состав кормовой смеси.

Процесс смешивания представим в потоке движущегося материала, в котором происходит хаотическое перемещение контрольных частиц относительно основного материала (которого больше) на каждом переходе из одного состояния в другое.

Количество C_n^k всех комбинаций расположения частиц *B* в объеме, заполненном частицами *A* (меньшего размера), определим исходя из вероятности расположения частиц n_B, соприкасаясь друг с другом, на основании статистики Бозе-Эйнштейна [3].

Предположим, что n_B одинаковых частиц распределяются по n ячейкам ($n_B \leq n$). Количество способов их распределения равно

$$C_{n_B+n-1}^{n_B} = \frac{(n_B + n - 1)!}{n_B!(n-1)!}, \qquad (1)$$

Пусть в какую-то определённую ячейку попало ровно k частиц. Количество вариантов, которыми оставшиеся n_B-k частиц могут быть распределены по n-1 оставшимся ячейкам

$$C_{n_B-k+n-2}^{n_B-k} = \frac{(n_B - k + n - 2)!}{(n_B - k)!(n-2)!}. \qquad (2)$$

Тогда вероятность того, что в определённую ячейку попало ровно k частиц, равна

$$P_{n_B} = \frac{C_{n_B - k + n - 2}^{n_B - k}}{C_{n_B + n - 1}^{n_B}} \tag{3}$$

Зная вероятность расположения частиц, а следовательно и их количество, находящихся в соприкосновении друг с другом, определяем объем, занимаемый частицами разного размера, в различном сочетании.

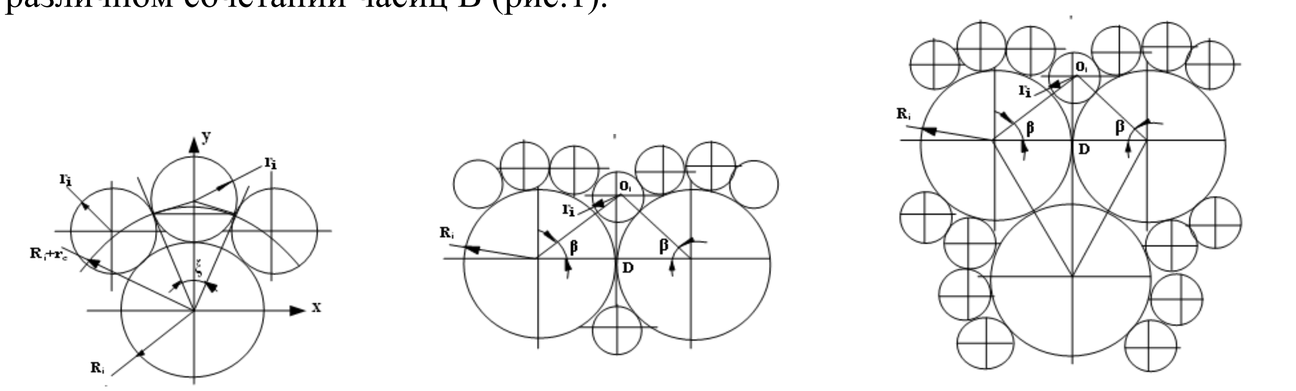
Для решения поставленной задачи в первую очередь необходимо определить объем, занимаемый одной частицей крупного размера и окружающих ее мелкими частицами.

Принимаем допущение, что частицы сыпучего материала имеют форму шара, размером соизмеримым с частицами этого материала.

Для моделирования структуры материала состоящего из различного по размерам частиц рассмотрим крайние случаи сочетания частиц – одинакового размера частиц и существенно отличающиеся.

Для расчета количества частиц в порции определенного неизменного объема принимаем допущение, что равновеликие частицы располагаются в объеме по схеме случайной упаковки, где частицы (шарики) занимают менее 52% пространства [4].

Рассмотрим сочетание элементов в виде шаров *B* с элементами *A* в различном сочетании часиц В (рис.1).



а) б) в)

Рисунок 1 – Схема расположения частиц

Площадь поверхности частицы *B*, приравненной к шару, окружают частицы *A* меньшего размера, соприкасаясь с ней и каждый с собой на радиусе R_B+r_c.($R_B+r_c = (R_B+r_A)\cos\xi$). Можно представить, что соприкосновение частиц А между собой происходит по условной сферической поверхности $S_{RA+}r_c$ радиусом R_B+r_c.

Элементарная площадка dS поверхности частицы в виде сферы в полярных координатах будет определяться радиусом - вектором R_B+r_c и углами по горизонтальной плоскости α и в вертикальной плоскости - $\pi/2-\xi$, представляется как $dS = Rd\alpha R\cos\xi d\xi$. Для полусферы эти углы определяются в диапазонах, соответственно, $0 \le \alpha \le 2\pi$ и $0 \le \xi \le \pi/2$, Тогда площадь поверхности $S_{RA+}r_c$ будет определяться как две полусферы

$$S_{R_B+r_c} = 2\int_0^{2\pi} \left[(R_B + r_A)\cos \arcsin \frac{r_A}{R_B + r_A}\right]^2 d\alpha \int_0^{\pi/2} \cos\xi d\xi, \qquad (4)$$

где S_{RA+rc}- площадь сферической поверхности, радиусом R_B+r_c;

r_A, R_B - радиусы частиц, соответственно, А и В;

ξ – угол между прямыми, проведенными из радиуса O_B через центр шара А и по касательной его поверхности, $\xi = arcsin\ r_A/(R_B+r_A)$.

Площадь S_{RA+rc} этой условной сферической поверхности пересекает частицы *А*, образуя в этих частицах сферу-сечение площадью S_{cA}. В этом случае углы изменяются в диапазонах $0 \le \alpha \le 2\pi$ *и* $0{,}5\pi\text{-}\xi \le \xi \le 0{,}5\pi$. Тогда, аналогично (4), площадь сферы- сечения определяется интегрированием $R^2cos\xi$, *где* $R = (R_B+r_A\ )cosarcsin(r_A/R_A+r_A))$

$$S_{cA} = \int_0^{2\pi} \left[(R_B + r_A)\cos \arcsin \frac{r_A}{R_B + r_A}\right]^2 d\alpha \int_{0,5\pi-\xi}^{0,5\pi} \cos\xi d\xi \qquad (5)$$

где S_{cA} - площадь сферы - сечения шара *А* сферической поверхностью радиусом $R_B+r_c = (R_B+r_A\ )cos\xi$.

Расположение частиц *А* на поверхности частицы *В* происходит с образованием пустот. Для определения количества этих пустот, приходящихся на каждую частицу *А*, условно ограничим каждую частицу *А* шестиугольником, которые могут располагаться на поверхности соприкасаясь между собою своими сторонами, равными $a = 2r_A\ cos\ \xi/2\ tg\pi/6$. С учетом ограничения шестиугольником окружности сферы – сечения радиусом $r_c'' = r_A cos\xi/2$ целесообразно пустоты между шестиугольником и поверхностью сферы – сечения учитывать коэффициентом $k_{ПА}$ увеличения площади сферы-сечения, который определяемым как отношение площади шестиугольника, описывающий круг к площади этого круга

$$k_{ПА} = 6r_i^2 tg\frac{\pi}{6} \Big/ \pi r_i^2 = 1{,}1033\,. \qquad (6)$$

Тогда количество частиц *А*, расположенных на частице *В*, с учетом пустот в объеме расположения частиц, определяется соотношением

$$n_{AB} = \frac{2\int_0^{0,5\pi} \cos\ \xi d\xi}{k_{ПА}\, \mathrm{k}_{\text{пv}} \int_{0,5\pi-\xi}^{0,5\pi} \cos\ \xi d\xi}\ _{\text{пv}} \qquad (7)$$

где $k_{пА}$ – коэффициент увеличения площади S_{cA} за счет ограничения ее шестиугольником;

k_{nv} – коэффициент условного объема на одну частицу *А*.

Дополняет выше приведенный вариант расположения частиц на сферической поверхности вариант расположения частиц A рядами параллельными диаметральному ряду. В этом случае частицы могут располагаться как шар на шаре (вариант 2.1) так и во впадинах соседних рядов (вариант 2.2).

Эти варианты расположения определяют расстояние между рядами частиц, а следовательно и углы ξ между лучами от центра частицы В проведенными через центры соседних частиц A. Для варианта 2.1 угол ξ определяется как $\xi = 2arcsin\, r_A/(R_B+r_A)$, а для варианта 2.2 – по $\xi' = 2arcsin\, r_A/2(R_B+r_A)tg\pi/6$.

В виду того, что практически невозможно учесть расположение частиц по поверхности, то целесообразно принять для расчетов среднее значение угла $\xi_{cp} = (\xi+\xi')/2$. Тогда количество рядов n_p частиц А определяется делением 2π на средний угол ξ_{cp}, $n_p = 4\pi/(\xi+\xi')$.

Приняв ряд частиц A, расположенный на диаметре частицы B за нулевой, а следующие занумерованные по-порядку, получаем выражение для определения горизонтальной составляющей x_k'' расстояния между центрами частиц B и A в k-ом ряду ($k= 1,2...n_p$) - $x_k'' =/(R_B+r_A)cos(k\xi_{cp}$ и выражение определения радиуса условной сферической поверхности, на которой расположены точки соприкосновения соседних частиц A по k-ому ряду

$$R_{TC_k} = (R_B + r_A)\cos(\mathrm{k}\,\overline{\xi})\cos\xi_k^{\Gamma}, \qquad (8)$$

где $2\xi_k^{\Gamma}$ – угол между прямыми, проведенными из радиуса O_B через центры соседних частиц A в k - ом ряду

$$\xi_{\mathrm{k}}^{\Gamma} = \arcsin\frac{r_A}{(R_B + r_A)\cos(k\overline{\overline{\xi}})}, \qquad (9)$$

Количество частиц A, расположенных в k-ом ряду определяется по выражению

$$n_{A_{B\mathrm{K}}}^{\Gamma} = \frac{2\pi}{\arcsin\dfrac{r_A}{(R_B + r_A)\cos(k\overline{\overline{\xi}})}} \qquad (10)$$

Количество частиц A контактирующих с частицей B определяется суммированим частиц по рядам n_p.

Расчеты, проведенные по определению количества частиц A, расположенных рядами на поверхности частицы B, показывают, что их количество находится в степенной зависимости от соотношения размеров контактирующих (рис.2).

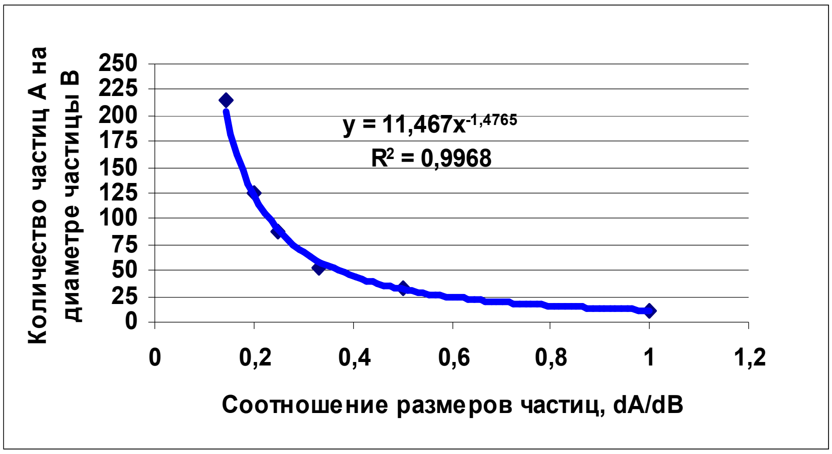


Рисунок 2 - Зависимость количества частиц *А,* расположенніх на диаметре частиці В, от соотношения размеров частиц *А* и *В*

Количество частиц в зависимости от площади сферической поверхности S_{RA+rc} определяется линейной зависимостью *y= 0,2424x+2,8045*. Вместе с тем площадь, занимаемая частицей *А* на условной сферической поверхности радиусом R_B+r_c увеличивается по логарифмической зависимости *y=0,2312Ln(x)+2,3963*.

Полученная теоретическая зависимость коэффициента увеличения условного объема на одну частицу (рис.3), показывает, что в диапазоне соотношения размеров контактирующих частиц 0,5…1,0, что имеет место в практике, коэффициент k_{nv} составляет 1,10…1,12 . который можно использовать в формуле (7).

Расчетные данные количества частиц по двум вариантам показывает высокую сходимость полученных результатов (табл.1). Следовательно эти методы можно использовать в моделировании структуры смеси сыпучих материалов.

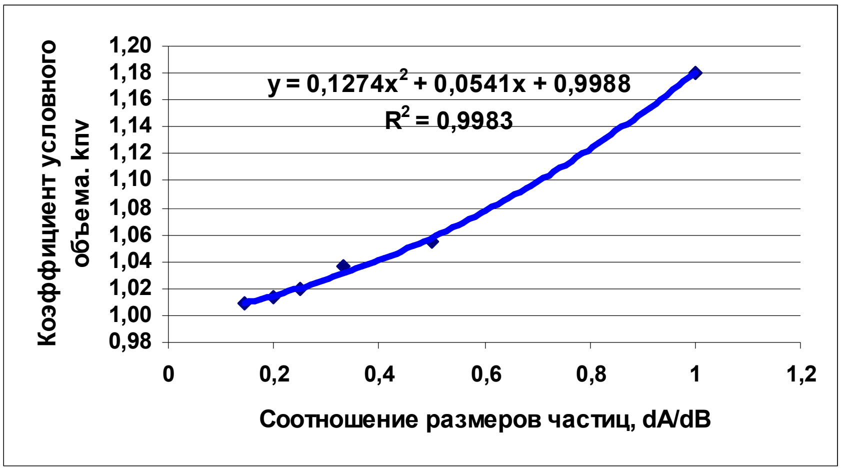


Рисунок 3 - Зависимость коэффициента условного объема от соотношения размеров контактирующих частиц

Таблица 1 – Количество частиц А контактирующих с частицей В

Радиус частицы Ra	1	1	1	1	1	1

Радиус частицы Rb	1	2	3	4	5	7
nш 2 вариант (по рядам)	11,77	31,99	52,22	88,27	124,16	215,16
nш 1 вариант (хаотически)	12,08	28,30	50,97	80,11	115,72	206,36

Количство частиц A в i –ом ряду для случая их расположения в рядах по геометрической прогрессии

$$n_{A_{ip}} = \mathrm{n}_{\mathrm{A}_{\mathrm{dB}}} q^{n_{pi}-1}, \tag{11}$$

где q – знаменатель геометрической прогрессии;

n_{pi} – номер ряда частиц A.

Для этого случая количество частиц, расположенных на поверхности частицы B, определяется по выражению

$$n_{A_B} = 2\mathrm{n}_{\mathrm{A}_{\mathrm{dB}}} \frac{1-q^{n_{pi}}}{q} - \mathrm{n}_{\mathrm{A}_{\mathrm{dB}}}, \tag{12}$$

Зная количество частиц A контактирующих с частицей B и площадь сферической поверхности радиусом R_B+r_c возможно определить плотность распределения частиц A на поверхности частицы B.

Для определения количества частиц A, располагающихся вокруг двух частиц B (рис.1б), определим зону контакта, в которую не могут попасть частицы A.

Частицы A во впадине контакта двух частиц B располагаются своими центрами по радиусу $R_{OA} = ДО_1$ (рис.2), равным $\beta = \arccos[R_i/(R_i - r_i)]$.

Площадь сферического сегмента одной частицы B, ограниченного углом 2β-2ξ , в которую не попадают частицы A, равна

$$S_{cB_2} = \int_0^{2\pi} \left[(R_B + r_A)\cos\arcsin\frac{r_A}{R_B + r_A} \right]^2 d\alpha \int_{0,5\pi-\beta+\xi}^{0,5\pi} \cos\xi d\xi \tag{13}$$

Тогда количество частиц A, окружающих две контактирующих частицы B определяется, с учетом количества частиц A не поместившихся в зоне контакта двух частиц B

$$n_{A_{B2}} = \frac{2\left(2\int_0^{0,5\pi}\cos\xi d\xi - \int_{0,5\pi-\beta*\xi}^{0,5\pi}\cos\xi d\xi\right)}{k_{ПА}\,\mathrm{k}_{\mathrm{пv}} \int_{0,5\pi-\xi}^{0,5\pi}\cos\xi d\xi} \tag{14}$$

При кучном расположении трех частиц B (рис 1в) количество частиц A контактирующих с тремя частицами B определяется исключением количества частиц A из зоны контакта трех частиц B

Площадь сферического сегмента одной частицы *B*, ограниченного углом *π/3+2β-2ξ* , в которую не попадают частицы *A*, равна

$$S_{cB_3} = \int_{0}^{2\pi} \left[(R_B + r_A)\cos \arcsin \frac{r_A}{R_B + r_A} \right]^2 d\alpha \int_{0,5\pi-\pi/3-\beta+\xi}^{0,5\pi} \cos \xi d\xi \qquad (15)$$

Тогда количество частиц *A*, окружающих две контактирующих частицы *B* определяется, с учетом количества частиц *A* не поместившихся в зоне контакта двух частиц *B*

$$n_{A_{B3}} = \frac{3\left(2\int_{0}^{0,5\pi} \cos\xi d\xi - \int_{0,5\pi-\pi/3-\beta+\xi}^{0,5\pi} \cos\xi d\xi \right)}{k_{ПА}\mathrm{k}_{\text{пv}} \int_{0,5\pi-\xi}^{0,5\pi} \cos\xi d\xi} \qquad (16)$$

Для расчета количества элементов в порции определенного постоянного объема V_1 принимаем допущение, что равновеликие частицы располагаются в этом объеме хаотически, где частицами в виде шаров занимается менее 52% пространства [4].

$$V_1 = (n_B V_{B1} - \mathrm{n}_{\mathrm{A_B}} V_{A1})\mathrm{k}_{ПА}\mathrm{k}_{\text{пv}} + \frac{(\mathrm{n}_{\mathrm{A}} - \mathrm{n}_{\mathrm{A_B}})V_{A1}}{k_{П\mathrm{V}}}, \qquad (17)$$

где n_A, n_B – часло частиц *A* и *B*, сответственно;

n_{AB} – число частиц *A*, контактирующих с частицей (частицами) *B*;

V_{A1}, V_{B1} – объемы частиц *A* и *B*, соответственно.

Непропорциональное изменение количества n_{Ax} частиц *A* в порции происходит по двум причинам: - по изменению количеству блоков *nB* контактирующих частиц в в зависимости от от общего их количества в порции и в связи с изменяющимся объемом свободно расположенных частиц А, а следовательно плотностью частиц *A*, и как следствие их количества и массы.

Тогда количество блоков *nB* определяется как $n_{блтB} = \overline{n_B} P_{iB}$. В связи с тем, что количество блоков *nB* изменяется в связи с неравномерным распределением частиц *B* в порциях, то и изменяется количество n_{Ax} свободных (без контакта с частицами *B*) частиц *A*.

Количество свободных частиц А определяется из (15) при условии формирования структуры в постоянном единичном объеме *V1*

$$n_{Ax} = \frac{k_{ПV}}{V_{A1}}(V_1 - (n_B V_{B1} - \mathrm{n}_{\mathrm{A_B}} V_{A1})\mathrm{k}_{ПА}\mathrm{k}_{\text{пv}} + \frac{\mathrm{n}_{\mathrm{A_B}} V_{A1}}{\mathrm{k}_{\text{ПV}}}), \qquad (18)$$

а их масса определяется на основе показательного распределения плотности в объеме порции по высоте по выражению

$$m_П = a^2 \rho_o \int_o^h \mathrm{e}^{kx}\, dx \int_o^a dh\,.$$

где a сторона куба;

h- высота порции;

k – коэффициент пропорциональности.

Используя полученные зависимости возможно возможно определять изменения количественного соотношения частиц A и B в постоянном объеме порции при изменении одного из них в пределах допустимой неравномерности ввода компонента рациона в смеситель.

При объемном дозировании формируется геометрический размер порции при сохранении плотности материала на i –ом уровне при соответствующем количестве n_B. В нашем случае при заданном количестве n_B частиц B изменению подлежат количество n_A частиц A, как правило за счет свободных от контакта с частицами B.

Тогда масса частиц A определяется как

$$m_{\sum A} = V1\rho_{\sum} - m_{\sum B}\,, \tag{19}$$

а количество частиц частиц A -

$$n_A = (V1\rho_{\sum} - m_{\sum B}) / m_A\,, \tag{20}$$

где $m_{\sum A}, m_{\sum B}$ -масса частиц А и В;

$V1$-единичный оюем порции смеси компонентов, см^3;

$\rho_{\sum}$ - плотность материала порции, г/см^3.

При массовом дозировании массу M_n порции возможно представить суммой масс компонентов, каждая из которых представляется как произведение объема $V1$ компонентов на условную плотность ρ_{Ay} их рассредоточения по этому объему. Тогда масса порции для двухкомпонентной смеси равна

$$M_П = V1\rho_{Ay} + V1\rho_{By} = V1(\rho_{Ay} + \rho_{By}), \tag{21}$$

где ρ_{Ay}, ρ_{By} – условная плотность распределения частиц А и В в объеме $V1$, первая из которых определяются по выражению

$$\rho_{Ay} = +\rho_{\sum} - \frac{m_{\sum B}}{V1} \tag{22}$$

Полученные формулы предоставляют возможность на основе моделирования определить зависимость влияния качества смешивания компонентов рациона, с учетом качества их подачи и вероятностного распределения количества частиц этих компонентов в порции корма, выдаваемой животному, на динамичность структуры смешиваемых компонентов рациона и продуктивность животных.

Выводы. Разработанная модель динамичности структуры смеси сыпучих материалов дает возможность создать модель механизированного процесса смешивания компонентов смеси с определением параметров процесса и технического средства его осуществления.

Список литературы

1. Карлин С. Основы теории случайных процессов/ Карлин С. /Пер. с анг.,Под редакц. Коваленко И.Н./ М. Мир. 1971.- С.61.

2. Хокни Р. Численное моделирование методом частиц./Хокни Р., Иствуд Дж. / Пер. с анг.,М. Мир. 1987.- 640с.

3. Комбинаторика. Число сочетаний/ natalymath.narod.ru/combinatory.html.

4. Слоэн Н. ДЖ. А. Упаковка шаров/ Scientific American, Издание на русском языке/№ 3 · март 1984 · с. 72–82.

5. Бараз В.Р. Строение и физичесие свойства кристаллов/Учебное пособие/Бараз В.Р., Левченко В.П., Повзнер А.А./Екатеринбкрг. УГТУ-УПИ, 2009. 164с.

Анотація

Математичне моделювання динамічності структури суміші сипких матеріалів

Шацький В.В., Тісліченко О.С. Коломієць С.М.

Представлена математична модель формування кількості частинок компонентів кормової суміші при змішуванні в порції постійного об'єму.

Abstract

Mathematical design of dynamic quality of structure of mixture of friable materials

V. Shatsky, A Tislichenko, S.Kolomiec'

The mathematical model of forming of amount of particles of components of forage mixture is presented at mixing in portion of permanent volume.