УДК 631.362.2

МЕТОД РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ЕГО РЕЗАНИИ

Нанка О.В., доцент
(Харьковский национальной технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка)

Изложен метод решения смешанной задачи теории упругости применительно к определению напряженного состояния упругого полупространства при его резании твердым штампом.

Постановка проблемы. Как отмечалось ранее [1] раздавливание (или резание) упругого тела осуществляется другим более твердым (в пределе абсолютно твердым и называемом штампом) телом. В процессе нагружения тела поверхность контакта тела и штампа меняется и является заранее неизвестной величиной, что приводит к сложной математической задаче определения решения в области, конфигурация которой неизвестна. Задачи такого типа относятся к контактным задачам теории упругости. Ниже рассматривается контактная задача о действии штампа, имеющего вид бесконечно длинного клина (ножа) на упругое полупространство. Данная постановка задачи позволит выявить характерные особенности напряженно деформированного состояния, которые , очевидно, будут иметь место и для тел конечного размера.

Результаты исследований. Предположим, что давление $p = p(x)$ штампа на тело в зоне контакта известно. Тогда соотношения (7)-(9), (12), представляют собой вторую краевую задачу равновесия теории упругости. Ее решение может быть определено с привлечением принципа суперпозиции и решения, так называемой, задачи Фламана [2]. Последняя связана с напряженным состоянием полуплоскости при действии сосредоточенной силы Q, направленной вдоль оси Oy и приложенной в точке $A(\xi,0)$ (рис.1).

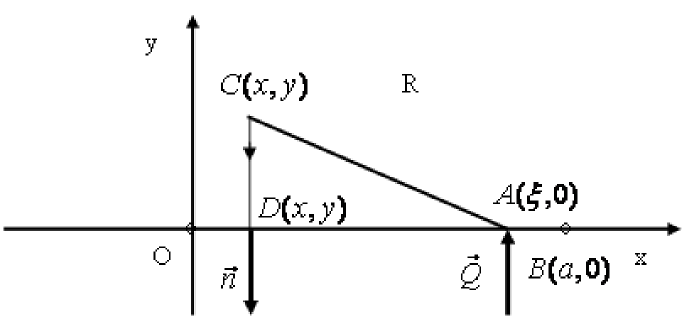

Рисунок 1 - Схема действия сосредоточенной силы Q, направленной вдоль оси Oy, приложенной в точке $A(\xi,0)$ твердого тела со стороны штампа

Для решения задачи вводится скалярная функция $F = F(x,y)$, называемая функцией Эри, через которую выражаются компоненты тензора напряжений в виде:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{1}$$

Тогда для произвольной функции F уравнения равновесия (7) [1] будут выполняться тождественно. Для определенности этой функции требуется привлечения дополнительного соотношения. Таким соотношением служит уравнение Лапласа для следа σ тензора напряжений σ

$$\Delta\sigma = 0, \tag{2}$$

которое вытекает из уравнений Бельтрами-Мичелла, имеющих следующий вид при отсутствии объемных сил [3]:

$$\sigma_{ik} = -\frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \qquad (i,k = 1,2,3) \tag{3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ - оператор Лапласа, $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.
Уравнение (2) получается из (3) суммированием последних при $k = i$ с изменением i от 1 до 3.

Если учесть соотношения (6) [1], (1), то можно получить уравнение для F в виде бигармонического уравнения:

$$\Delta^2 F \equiv \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}. \tag{4}$$

В случае действия на границе сосредоточенной нормальной силы Q в точке $A(\xi,0)$ нормальные напряжения $q(x)$ выражаются через дельта-функцию в виде:

$$q(x) = Q\delta(x,\xi). \tag{5}$$

Необходимые граничные условия для бигармонического уравнения (4) получим из (12) [1], с привлечением соотношений (1):

$$\sigma_y(x,0) \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,0) = -Q\delta(x,\xi). \tag{6}$$

Учитывая то, что напряжения через функцию F определяются с точностью до линейного многочлена по переменным x,y, интегрируя дважды (6) по x, с учетом свойств дельта-функции, получим следующее граничное условие:

$$F(x,0) = -QxHev(x\text{-}\xi), \tag{7}$$

где $Hev(x\text{-}\xi)$ представляет собой функцию Хэвисайда [4].

Второе условие вытекает из соотношений (8), (10) [1], (отсутствие касательных напряжений на $\sum_0$) и имеет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,0) = 0 .$$

Последнее соотношение, проинтегрировав по x, имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,0) = 0 . \tag{8}$$

Бигармоническую функцию F, удовлетворяющую условию (8) можно представить в виде [3]:

$$F(x,y) = \varphi(x,y) - y\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}, \tag{9}$$

где φ является гармонической функцией, и, как видно, из условия (7) удовлетворяющей граничному условию:

$$\varphi(x,0) = -QxHev(x\text{-}\xi). \tag{10}$$

Теоретическое определение функции Эри F сводится к решению уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле (10). Окончательно выражение для F имеет следующий вид [2, стр.519]:

$$F(x,y) = Q\frac{x-\xi}{\pi} arctg\frac{y}{x-\xi} . \tag{11}$$

Закон Гука, связывающий тензоры напряжений и деформаций, позволяет после нахождения σ определить компоненты вектора перемещений $\vec{u}$. В частности, вертикальная составляющая $v(x,y)$ имеет следующий вид [2, стр.518]:

$$v(x, y) = -\frac{Q}{2\pi\mu}\left[2(1-\nu)\ln r + \cos^2\left(arctg\frac{y}{x-\xi}\right)\right], \tag{12}$$

где

$$r = r(x,y,\xi) = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2} \tag{13}$$

- расстояние между точками A и C (рис.1).

Зная решение задачи Фламана, можно найти решение для напряженного состояния, вызванного распределенным нормальным напряжением $p(x)$, действующим на границе $\sum_0$, рассматривая напряжения на элементарном участке длины $d\xi$ как сосредоточенную силу величины $p(\xi)d\xi$. Принцип суперпозиции приводит к интегрированию выражения (11) для указанных элементарных напряжений по участку $(0 \le \xi \le a)$:

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^a (x-\xi) arctg\frac{y}{x-\xi} q(\xi)d\xi . \tag{14}$$

Аналогично, для соотношения (12) принцип суперпозиции дает выражение:

$$v(x,y) = -\frac{1}{2\pi\mu}\int_0^a \left[2(1\text{-}\nu)\ln r + \cos^2\left(arctg\,\frac{y}{x-\xi}\right)\right] q(\xi)d\xi\ . \tag{15}$$

Для граничных точек $y = 0$, если отбросить слагаемые, связанные с движением упругого тела как твердого, получаем соотношение:

$$v(x,0) = \beta\int_0^a \ln\frac{1}{|x-\xi|} q(\xi)d\xi\ , \tag{16}$$

где $\beta = (1-\nu)/\pi\pi$.

Тогда граничное условие (11) дает следующее уравнение относительно $q(x)$:

$$\int_0^a \ln\frac{1}{|x\text{-}\xi|} q(\xi)d\xi = \frac{1}{\beta} f(x). \tag{17}$$

Данное уравнение представляет собой интегральное уравнение первого рода, относящееся к разряду некорректно поставленных задач, процесс решения которых связан с неустойчивостью счета [5].

Пусть поверхность штампа в поперечном сечении представляется прямой линией и для ненагруженного состояния описывается уравнением:

$$y = \begin{cases} -xctga & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}. \tag{18}$$

Пусть штамп погружается внутрь тела на глубину δ. Тогда вертикальные перемещения $v(x,0)$ точек линии $\sum_0$ будут равны

$$v(x,0) = f(x) = \delta - xctg\alpha\ . \tag{19}$$

Введем в рассмотрение потенциал простого слоя ω, имеющий следующий вид для плоских задач [5]:

$$\omega(x,y) = \int_0^a \ln\frac{1}{r(x,y,\xi)} q(\xi)d\xi\left(r(x,y,\xi) = \sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}\right). \tag{20}$$

Этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа во всей плоскости xOy кроме отрезка $0 \leq x \leq a$:

$$\Delta\omega = 0, \tag{21}$$

с граничным условием

$$\omega(x,0) = \varphi(x) \equiv \frac{1}{\beta} f(x) \ \left(\sum{}_0\right). \tag{22}$$

Данные соображения позволяют обойти проблему решения интегрального уравнения (17) следующим образом. Если решена задача (21),

(22) то выражение для функции $q(x)$ можно найти, используя свойство потенциала простого слоя. А, именно, выберем направление CD движения точки плоскости так, чтобы она пересекала отрезок OB в направлении единичной нормали $\vec{n} = (0 -1)$. Обозначим внутренний и внешний пределы производной потенциала простого слоя по нормали через:

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial n}\right|_{y \to -0} = \lim_{y \to 0, y<0} \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial n}, \qquad \left.\frac{\partial \omega}{\partial n}\right|_{y \to +0} = \lim_{y \to 0, y>0} \frac{\partial \omega(x,y)}{\partial n} \tag{23}$$

соответственно. Выражение для нормальной производной потенциала простого слоя, определяемое для точки C, принадлежащей границе $\sum$, называется прямым значением этой производной и обозначается как:

$$\overline{\frac{\partial \omega}{\partial n}} = \frac{\partial \omega}{\partial n}(x,0)$$

Прямое и предельные значения потенциала простого слоя связаны между собой соотношениями

$$\left.\frac{\partial \omega}{\partial n}\right|_{y \to \mp 0} = \pm \pi q(x) + \overline{\frac{\partial \omega}{\partial n}}. \tag{24}$$

Учитывая направление нормали $\vec{n} = (0\text{-}1)$, можно заметить, что

$$\overline{\frac{\partial \omega}{\partial n}} = -\frac{\partial \omega}{\partial y}(x,0) = \int_0^a q(\xi) \frac{\partial}{\partial y} \ln \left.\frac{1}{r(x,y,\xi)}\right|_{y=0} d\xi = \int_0^a \left.\frac{y}{r(x,y,\xi)}\right|_{y=0} q(\xi) d\xi = 0 \tag{25}$$

Тогда согласно (24) получаем выражение, определяющее распределение давления на поверхности $\sum_0$:

$$q(x) = \frac{1}{\pi} \left.\frac{\partial \omega}{\partial y}\right|_{y \to +0}. \tag{26}$$

Выводы. Предполагая, что давление штампа на тело в зоне контакта известно, тогда решение краевой задачи равновесия теории упругости может быть определено с привлечением принципа суперпозиции и решения, так называемой задачи Фламана, которая связана с напряженным состоянием полуплоскости при действии сосредоточенной силы.

Списоклитературы

1. Нанка, О.В. Фізична та математична постановки задачі про подрібнення зернових кормів способом різання [Текст] / О.В. Нанка // Техніко-

економічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України. Збірник наукових праць УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого, Вип. 16 (30) - Дослідницьке: УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого. 2013. - С. 463 - 470.

2. Лурье, А.И. Теория упругости [Текст] / А.И. Лурье. - М.: Наука, 1970. - 939 с.

3. Новацкий, В.П. Теория упругости [Текст] / В.П. Новацкий. - М.: Мир, 1975. - 872 с.

4. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1970. - 720 с.

5. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсений. - М.: Наука, 1974. – 223 с.

6. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики [Текст] / С.Н. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов. - М.: Изд-во "Высшая школа", 1970. - 712 с.

Анотація

Метод вирішення змішаної задачі торії пружності при визначенні напруженого стану твердого тіла при його різанні

Нанка О.В.

Викладений метод вирішення змішаної задачі теорії пружності до визначення напруженого стану пружного твердого тіла при його різанні твердим штампом.

Abstract

The method of solution of the mixed problem of elasticity tory in determining the stress state of solids at its cutting

O.Nanka

The method solving the mixed problem of elasticity theory to determine the stress state of an elastic solid body with its cutting hard stamp.