

## О ТРАЕКТОРИИ ПОЛЁТА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

**Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф., Ольшанский С.В., асп.**  
*(Харьковский национальный технический университет сельского  
хозяйства имени Петра Василенко)*

*Выведены формулы для расчёта кинематических характеристик полёта вращающейся сферической частицы вокруг вертикальной оси в неподвижной газовой среде с учётом действия силы Магнуса, возникающей вследствие вращения тела*

**Проблема.** Одним из способов интенсификации процесса аэродинамического разделения зерновых смесей является закрутка зёрен в поле воздушного потока. В отличие от условий обычной баллистики, полёт вращающихся частиц происходит под действием силы Магнуса, которая искривляет траекторию движения. Эффект, обусловленный силой Магнуса, зависит не только от величины и направления вектора угловой скорости. Он также связан с другими параметрами частицы, её размерами, плотностью и пр. Частицы с различными параметрами имеют траектории различной кривизны, что позволяет использовать это обстоятельство для их разделения в ходе движения. Поэтому разработка теоретических моделей полёта вращающихся частиц представляет практический интерес в деле аэродинамического сепарирования зерновых смесей.

**Краткий анализ современных публикаций.** Работы, связанные с баллистикой вращающихся частиц содержатся в обзорной части диссертации [1]. Из последних публикаций по этой проблеме отметим [2,3]. В общем случае, при квадратичной зависимости аэродинамического сопротивления от скорости полёта частицы, расчёт траекторий сводится к решению нелинейной системы дифференциальных уравнений [4] численно на компьютере. Построение аналитических решений вызывает существенные затруднения. В случае полёта зёрен на сравнительно небольшие расстояния, при надлежащем выборе коэффициента аэродинамического сопротивления, линейная модель сопротивления воздушной среды не даёт больших расхождений с нелинейной моделью, но приводит к замкнутым расчётным формулам. Поэтому

использование линейной модели сопротивления среды в приближённых расчётах становится очевидным.

**Целью** данной статьи является получение формул для расчёта скорости и траектории полёта сферической частицы, вращающейся вокруг вертикальной оси, и анализ влияния различных параметров на кинематические характеристики в рамках линейной модели.

**Постановка задачи и её решение.** Пусть сферическая частица радиуса  $r$  имеет массу  $m$ . Её вращение происходит во времени  $t$  с переменной угловой скоростью  $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ , направленной против оси  $oz$ , показанной на рисунке 1.

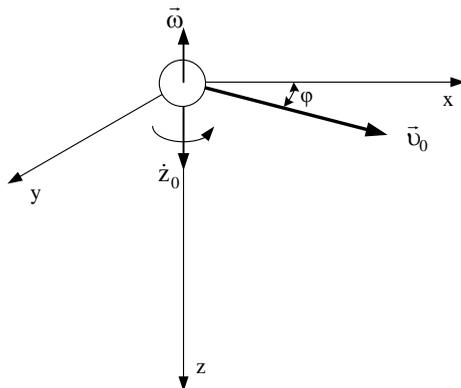


Рис. 1. Расчётная схема

Координаты траектории полёта центра масс однородной частицы определяются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{y} - k_1 r^2 \dot{x}; \\ m\ddot{y} &= -\frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{x} - k_1 r^2 \dot{y}; \\ m\ddot{z} &= mg - k_1 r^2 \dot{z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\delta$  - плотность воздушной (газовой) среды;  $k_1$  - положительная постоянная, характеризующая “лобовое” сопротивление движению частицы;  $g$  - ускорение свободного падения; точка над символом означает производную по времени  $t$ .

В системе (1) слагаемые с множителем  $\omega$  учитывают действие

силы Магнуса, с  $k_1$  - действие силы сопротивления среды, а с  $g$  - действие силы веса.

Поскольку масса сферической частицы связана с её плотностью  $\rho$  соотношением

$$m = \frac{4}{3} \pi \rho r^3,$$

после деления уравнений в (1) на  $m$ , получаем

$$\ddot{x} = \frac{2\delta}{\rho} \omega \dot{y} - k\dot{x}; \quad \ddot{y} = -\frac{2\delta}{\rho} \omega \dot{x} - k\dot{y};$$

$$\ddot{z} = g - k\dot{z}; \quad k = 3k_1 (4\pi\rho r)^{-1}.$$

Систему (2) решаем при начальных условиях:

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \varphi; \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \varphi; \quad \dot{z}(0) = z_0;$$

$$x(0) = y(0) = z(0).$$

Здесь  $\vec{v}_0$  - проекция начальной скорости центра масс на горизонтальную плоскость  $xoy$ ;  $\varphi$  - угол, который составляет  $\vec{v}_0$  с осью  $ox$ ;  $\dot{z}_0$  - проекция начальной скорости на ось  $oz$ .

Из третьего уравнения системы (2), с учётом (3), находим

$$\dot{z}(t) = \frac{g}{k} + \left( \dot{z}_0 - \frac{g}{k} \right) \exp(-kt);$$

$$z(t) = \frac{1}{k} \left\{ gt + \left( \dot{z}_0 - \frac{g}{k} \right) [1 - \exp(-kt)] \right\}.$$

Общее решение первого и второго уравнений в (2) ищем в виде

$$\dot{x}(t) = f(t) [c_1 \sin(\theta(t)) + c_2 \cos(\theta(t))];$$

$$\dot{y}(t) = f(t) [c_1 \cos(\theta(t)) - c_2 \sin(\theta(t))],$$

где  $f(t), \theta(t)$  - неизвестные функции;  $c_1, c_2$  - произвольные постоянные.

Подставив (5) в (2), получаем дифференциальные уравнения

$$\dot{f} = -kf; \quad \dot{\theta} = \frac{2\delta}{\rho} \omega,$$

из которых следует, что

$$f = \exp(-kt); \quad \theta = \frac{2\delta}{\rho} \int_0^t \omega(t) dt. \quad (6)$$

Для определения функции  $\theta(t)$  нужно знать зависимость  $\omega(t)$ . Её получим из дифференциального уравнения вращения шара

$$\frac{8}{15} \pi \rho r^5 \dot{\omega} = -M_c = -8\pi \mu r^3 \omega, \quad (7)$$

в котором  $\mu$  - динамический коэффициент вязкости воздуха. Момент сопротивления вращению шара во вязкой среде  $M_c$  определён по формуле из работы [5].

Решив уравнение (7) при начальном условии  $\omega(0) = \omega_0$ , находим

$$\omega(t) = \omega_0 \exp(-\lambda t), \quad (8)$$

причём  $\lambda = 15\mu(\rho r^2)^{-1}$ .

Согласно (6) и (8)

$$\theta(t) = a[1 - \exp(-\lambda t)],$$

где  $a = 2\delta\omega_0(\rho\lambda)^{-1}$ .

Общее решение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \exp(-kt) \{c_1 \sin[a(1 - \exp(-\lambda t))] + c_2 \times \\ &\quad \times \cos[a(1 - \exp(-\lambda t))]\}; \\ \dot{y}(t) &= \exp(-kt) \{c_1 \cos[a(1 - \exp(-\lambda t))] - c_2 \times \\ &\quad \times \sin[a(1 - \exp(-\lambda t))]\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Учитывая (9), из начальных условий (3) находим

$$c_1 = \nu_0 \sin \varphi; \quad c_2 = \nu_0 \cos \varphi.$$

Вычисление траектории центра масс сводим к формулам

$$x(t) = D_1 I_1(t) + D_2 I_2(t); \quad y(t) = D_2 I_1(t) - D_1 I_2(t),$$

в которых

$$D_1 = \nu_0 \sin(a - \varphi); \quad D_2 = \nu_0 \cos(a - \varphi);$$

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &= \int_0^t \exp(-kt) \sin(a \exp(-\lambda t)) dt; \\
 I_2(t) &= \int_0^t \exp(-kt) \cos(a \exp(-\lambda t)) dt.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Введением новой переменной интегрирования

$$\xi = a \exp(-\lambda t); \quad dt = -\frac{d\xi}{\lambda \xi},$$

квадратуры (10) преобразуем в обобщённые интегралы Френеля [6]

$$I_1 = \frac{1}{\lambda a^\alpha} \int_\xi^a \xi^{\alpha-1} \sin \xi d\xi; \quad I_2 = \frac{1}{\lambda a^\alpha} \int_\xi^a \xi^{\alpha-1} \cos \xi d\xi,$$

где  $\alpha = k/\lambda > 0$ .

В области произвольных положительных значений  $\alpha$  эти интегралы выражаются через гипергеометрические функции, т.е.

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &= \frac{1}{\lambda(\alpha+1)a^\alpha} \left[ a^{\alpha+1} {}_1F_2\left(\frac{\alpha+1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3+\alpha}{2}; -\frac{a^2}{4}\right) - \xi^{\alpha+1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times {}_1F_2\left(\frac{\alpha+1}{2}; \frac{3}{2}, \frac{3+\alpha}{2}; -\frac{\xi^2}{4}\right) \right]; \\
 I_2(t) &= \frac{1}{\lambda \alpha a^\alpha} \left[ a^\alpha {}_1F_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2+\alpha}{2}; -\frac{a^2}{4}\right) - \xi^\alpha \times \right. \\
 &\quad \left. \times {}_1F_2\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2+\alpha}{2}; -\frac{\xi^2}{4}\right) \right].
 \end{aligned}$$

При целых значениях  $\alpha$   $I_1(t)$  и  $I_2(t)$  представляются через элементарные функции. Например, при  $\alpha = 1$ :

$$I_1(t) = \frac{1}{\lambda a} (\cos \xi - \cos a); \quad I_2(t) = \frac{1}{\lambda a} (\sin a - \sin \xi).$$

В случае полужелых  $\alpha$  квадратуры (10) сводятся к элементарным функциям и затабулированным интегралам Френеля. Так при  $\alpha = 1/2$ :

$$I_1 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda \sqrt{a}} [S(a) - S(\xi)]; \quad I_2 = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda \sqrt{a}} [C(a) - C(\xi)].$$

Таблицы  $S(\xi)$  и  $C(\xi)$  опубликованы в [7] и других изданиях по специальным функциям.

Расчёт траектории частицы существенно упрощается, если не учитывать изменение её угловой скорости вращения при полёте. В рамках такой упрощённой модели:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \exp(-kt)[c_1 \sin(bt) + c_2 \cos(bt)]; \\ \dot{y}(t) &= \exp(-kt)[c_1 \cos(bt) - c_2 \sin(bt)]; \\ x(t) &= c_1 I_1(t) + c_2 I_2(t); \quad y(t) = c_1 I_2(t) - c_2 I_1(t); \quad (11) \end{aligned}$$

$$I_1(t) = \frac{1}{k^2 + b^2} \{b - \exp(-kt)[k \sin(bt) + b \cos(bt)]\};$$

$$I_2(t) = \frac{1}{k^2 + b^2} \{k - \exp(-kt)[k \cos(bt) - b \sin(bt)]\};$$

$$b = 2\delta\omega_0\rho^{-1}.$$

К этим результатам приводит предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  в полученных выше решениях, а формулы для вычислений  $\dot{z}(t)$  и  $z(t)$  имеют прежний вид (4).

Результаты расчётов и выводы. Определим баллистические характеристики частицы радиуса  $r = 0,001528$  м; при  $\dot{z}_0 = 0$ ;  $\varphi = 0$ ;  $k = 0,15$  с<sup>-1</sup>;  $v_0 = 1$  м/с и различных  $\rho$  и  $\omega$ . Радиус частицы принят таким, как в работе [8] для зерна пшеницы.

Расчёты проводим по формулам (4) и (11).

Численные результаты в виде графиков представлены на рис.2-5. Цифрами 1,3,3,4 отмечены траектории, рассчитанные при  $\rho = 900; 1100; 1350; 1500$  кг/м<sup>3</sup> соответственно. Графики на рис. 2,3 получены при  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>, а на рис. 4,5 – при  $\omega = 500$  с<sup>-1</sup>. С увеличением угловой скорости  $\omega$  траектории полёта частиц стали существенно отклоняться от вертикальной плоскости  $xoz$ . Отклонение больше у частиц, имеющих меньшую плотность  $\rho$ . Таким образом эффект Магнуса можно использовать для интенсификации пневмосепарирования зерна, если закручивать частицы с большими угловыми скоростями.

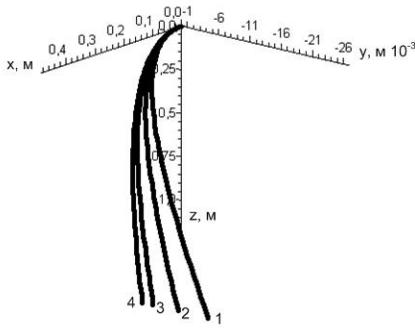


Рис. 2 – Траектории частицы при  $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$  и различных  $\rho$

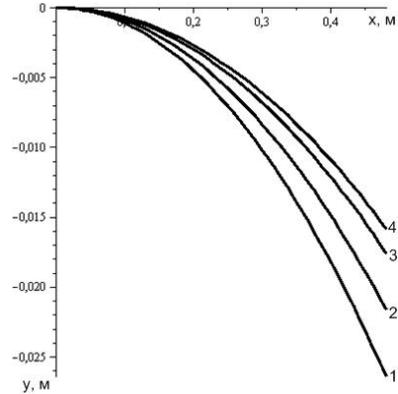


Рис. 3 – Проекция траекторий на плоскость  $xoy$

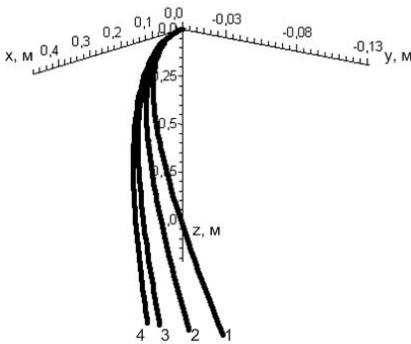


Рис. 4 – Траектории частицы при  $\omega_0 = 500 \text{ с}^{-1}$  и различных  $\rho$

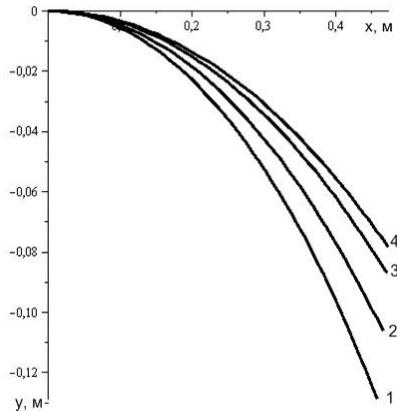


Рис. 5 – Проекция траекторий на плоскость  $xoy$

### Список литературы

1. Злочевский В.Л. Интенсификация процесса аэродинамического разделения зерновых материалов: диссертация доктора техн. наук. 05.20.01 – Барнаул, 1985.– 387 с.
2. Онищенко Б.В. Теоретичні дослідження процесу осідання краплі // Сільськогосподарські машини: Зб. наук. ст.– Вип. 18. Луцьк: ЛНТУ.– С. 330 – 340.

3. Богомолов А.В. Учёт вращения частицы зерновой смеси при движении её в воздушном потоке // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних та харчових виробництв. Вісник ХДТУСГ. Харків: ХДТУСГ, 2002.– Вип. 9.– С. 5 – 14.

4. Сагитов М.Н. О движении вращающегося шара. Сборник трудов соискателей и аспирантов. Министерство высшего и среднего специального образования Казахской ССР, Т. 1, ч.2, 1963.– С. 42– 49.

5. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИТТЛ, 1955.– 520 с.

6. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М. Наука, 1981.– 800 с.

7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.– 344 с.

8. Тищенко Л.Н. Интенсификация сепарирования зерна. Харьков: Основа, 2004.– 224 с.

### **ПРО ТРАЄКТОРІЮ ПОЛЬОТУ СФЕРИЧНОЇ ЧАСТКИ, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ**

*Виведено формули для розрахунку кінематичних характеристик польоту сферичної частки, яка обертається навколо вертикальної вісі у нерухомому газовому середовищі з урахуванням дії сили Магнуса, що виникає внаслідок обертання тіла.*

### **ABOUT A TRAJECTORY OF FLIGHT OF A ROTATING SPHERICAL PARTICLE**

*Formulas for calculation of kinematic characteristics of flight of a rotating spherical particle round a vertical axis in the motionless gas environment with the account of action of force Magnusa arising owing to rotation of a body are deduced.*