с одной степенью свободы использован метод энергетического баланса. Приближенно реализовано два варианта этого метода.

Ключевые слова: *свободные затухающие колебания, метод энергетического баланса, квадратичное сопротивление, кубически-нелинейная характеристика упругости.*

Abstract

FREE EXTINGUISHED OSCILLATOR OSCILLATIONS WITH COMBINED RESISTANCE

The free oscillations of a linearly elastic oscillator are considered in the presence of a resistance force, which includes three components. To study the free vibrations of a system with one degree of freedom, the energy balance method is used. Two versions of this method are approximately implemented.

Keywords: *damped free oscillations, combined nonlinear resistance, energy balance method, amplitude of amplitude, recurrence relation.*

УДК 539.3:534.1

ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц., Сліпченко М.В., к.т.н., доц.

(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка)

Розглянуто коливання осцилятора з сухим тертям при степеневій залежності відновлюючої сили від переміщення системи. Встановлено, що затухання амплітуд розмахів, їх кількість, а також тривалість розмахів у часі залежить від значення показника нелінійності та від амплітуд коливань системи. Виведено формули для обчислень амплітуд розмахів і їх тривалості у часі. Наведено приклади розрахунків.

Ключові слова: *вільні затухаючі коливання, сухе тертя, нелінійно-пружний осцилятор.*

Постановка задачі та огляд літературних джерел. Незважаючи на значні досягнення в теорії коливань [1] залишаються актуальними подальші дослідження особливостей коливального руху нелінійних систем. Тому продовжують виходити з друку публікації, присвячені цій тематиці. Із робіт, виконаних в останні роки в Україні, відзначимо [2-5], де зібрано чималі списки літературних джерел і проведено їх аналітичний розгляд. У вказаних публікаціях наведено точний розв'язок рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності при степеневій залежності відновлюючої сили від переміщення осцилятора. Цей розв'язок виражено через відомі спеціальні Ateb-функції, а одержані формули для частоти і періоду коливань, пов'язані з обчисленням Гама-функцій. Тут розглядаємо вплив на коливання двох нелінійностей, відповідно у виразі сили пружності та у виразі сили сухого тертя.

Метою статті є одержання та апробація розрахункових формул для обчислення амплітуд коливань і тривалостей розмахів нелінійно-пружної системи з одним ступенем вільності при наявності сухого тертя.

Викладення основного матеріалу.

Коливальні переміщення системи $x = x(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} x^{2n+1} = -fg\,\mathrm{sign}(\dot{x}), \tag{1}$$

де m – маса осцилятора; c – коефіцієнт жорсткості нелінійної пружини; $2n+1$ – показник нелінійності $(n = 0,1,2,...)$; f – коефіцієнт сухого тертя; g – прискорення вільного падіння; t – час; крапка над x означає похідну по t.

При $n = 0$ рівняння (1) описує коливання лінійно-пружної системи з сухим тертям.

Початковими умовами до (1) приймаємо:

$$x(0) = -a_0;\ \dot{x}(0) = 0, \tag{2}$$

де a_0 – амплітудне відхилення осцилятора вліво від положення рівноваги $x = 0$, а горизонтальна вісь $0x$ спрямована вправо.

При цьому вважаємо, що виконується умова руху

$$a_0 > a_* = \left(\frac{fmg}{c}\right)^{\frac{1}{2n+1}}.$$

Тут $2a_*$ – ширина області застою, зумовлена тертям Кулона.

Розглянемо перший розмах, коли $t \in (0; t_1]$; $\dot{x} \ge 0$; $-a_0 \le x \le a_1$. На цьому проміжку часу $\mathrm{sign}(\dot{x}) = 1$ і (1) зводиться до рівняння першого порядку:

$$\upsilon \frac{d\upsilon}{dx} = -fg - \frac{c}{m} x^{2n+1}, \tag{3}$$

у якому $\upsilon = \dot{x}$ – швидкість руху.

Проінтегрувавши (3), знаходимо його розв’язок з точністю до сталої C_1:

$$\upsilon = \sqrt{2} \left(C_1 - \frac{c}{2(n+1)m} x^{2n+2} - fgx \right)^{1/2}. \tag{4}$$

Розв'язок (4) задовольняє умовам (2), коли

$$C_1 = \frac{c a_0^{2n+2}}{2(n+1)m} - fga_0 .$$

Отже формула швидкості (4) набуває вигляд:

$$\upsilon = \sqrt{2} \left[\frac{c}{2(n+1)m} \left(a_0^{2n+2} - x^{2n+2} \right) - fg\left(a_0 + x \right) \right]^{1/2}. \tag{5}$$

Осцилятор зупиниться в кінці першого розмаху при $x = a_1$. Тому, згідно з (5):

$$\frac{c}{2(n+1)m} \left(a_0^{2n+2} - a_1^{2n+2} \right) - fg\left(a_0 + a_1 \right) = 0 . \tag{6}$$

Це нелінійне рівняння для визначення амплітудного відхилення a_1 системи вправо на першому розмасі.

Структура рівняння (6) збережеться і для інших розмахів. Узагальнивши (6), одержуємо:

$$\frac{c}{2(n+1)m} \left(a_{j-1}^{2n+2} - a_j^{2n+2} \right) - fg\left(a_{j-1} + a_j \right) = 0 ; \tag{7}$$

$$j = 1, 2, 3, ...$$

Тут j – номер розмаху.

Щоб знайти рекурентне співвідношення між a_j і a_{j-1}, потрібно розв’язати рівняння (7). Одержання аналітичного розв’язку можливе лише у двох випадках $n = 0$ і $n = 1$.

При $n = 0$ одержуємо відому залежність [6], [7]:

$$a_j = a_{j-1} - \frac{2\,fgm}{c} . \tag{8}$$

Різниця $a_j - a_{j-1}$ не залежить від амплітуд розмахів, що властиво лінійно-пружній системі.

При $n = 1$ (7) зводиться до кубічного рівняння:

$$a_j^3 - a_{j-1}a_j^2 + a_{j-1}^2 a_j + b - a_{j-1}^3 = 0\,, \tag{9}$$

де $b = \dfrac{4fgm}{c}$.

Користуючись відомим розв’язком Кардано [8], із (9) знаходимо:

$$a_j = \sqrt[3]{-q_j + \sqrt{q_j^2 + p_j^3}} + \sqrt[3]{-q_j - \sqrt{q_j^2 + p_j^3}} + \frac{a_{j-1}}{3}\,. \tag{10}$$

Тут $q_j = \dfrac{1}{2}\left(b - \dfrac{20}{27}a_{j-1}^3\right)$; $p_j = \dfrac{2}{9}a_{j-1}^2$.

У випадку нелінійно-пружної системи різниця $a_j - a_{j-1}$ залежить від амплітуди a_{j-1}, тобто темп затухання коливань залежить від значень амплітуд і зокрема від початкового відхилення a_0.

При $n > 1$ рівняння (7) доводиться розв’язувати наближеними методами. Розглянемо декілька з таких способів.

1. Якщо коливання затухають повільно, внаслідок малого коефіцієнта тертя, то відношення

$$\frac{\delta_j}{a_{j-1}} = \frac{a_{j-1} - a_j}{a_{j-1}} \ll 1\,.$$

Тоді, розгорнувши a_j^{2n+2} в біноміальний ряд, з точністю до $\left(\delta_j / a_{j-1}\right)^2$, одержуємо:

$$a_{j-1}^{2n+2} - a_j^{2n+2} = \left[(2n+2)\right]\frac{\delta_j}{a_{j-1}} - (n+1)(2n+1)\frac{\delta_j^2}{a_{j-1}^2} + O\left(\frac{\delta_j^3}{a_{j-1}^3}\right).$$

Підставивши цей вираз в (7) наближено приходимо до квадратичного рівняння, що має розв'язок:

$$\delta_j = A_j - \sqrt{A_j^2 - B_j}\,. \tag{11}$$

При цьому $A_j = \dfrac{1}{2n+1}\left(a_{j-1} + \dfrac{fmg}{ca_{j-1}^{2n}}\right)$; $B_j = \dfrac{4fmg}{(2n+1)ca_{j-1}^{2n-1}}$.

Обчислене по формулі (11) значення δ_j можна уточнити повторним використанням (11). Для цього треба додатково знайти $\lambda_j = 1 - \dfrac{2n}{3}\cdot\dfrac{\delta_j}{a_{j-1}}$, потім $A_j = A_j / \lambda_j$; $B_j = B_j / \lambda_j$ і скориговані значення A_j, B_j підставити в (11).

Далі легко знайти амплітуду a_j по рекурентній формулі:

$$a_j = a_{j-1} - \delta_j . \tag{12}$$

У випадку $n=0$: $A_j = a_{j-1} + \dfrac{fmg}{c}$; $B_j = \dfrac{4fmg}{c} a_{j-1}$ і формули (11), (12) зводяться до залежності (8).

Рівняння (7) з більш високою точністю можна розв'язувати методом ітерацій. Розглянемо два варіанти цього методу.

2. Елементарними перетвореннями рівнянню (7) надаємо вигляд:

$$a_j = \left[a_{j-1}^{2n+1} - 2(n+1)\frac{fmg}{c} \cdot \frac{a_{j-1} + a_j}{a_{j-1}^{n+1} + a_j^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n+1}} . \tag{13}$$

При $n=0$ формула (13) переходить в (8). Для більших n із (13) одержуємо ітераційну формулу:

$$a_{jk+1} = \left[a_{j-1}^{n+1} - 2(n+1)\frac{fmg}{c} \cdot \frac{a_{j-1} + a_{jk}}{a_{j-1}^{n+1} + a_{jk}^{n+1}} \right]^{\frac{1}{n+1}} , \tag{14}$$

в якій $k = 1, 2, 3, \ldots$ – номер ітерації.

За початкове наближення доцільно взяти:

$$a_{j1} = \left[a_{j-1}^{n+1} - 2(n+1)\frac{fmg}{c} \cdot \frac{1}{a_{j-1}^{n}} \right]^{\frac{1}{n+1}} . \tag{15}$$

Підставивши його у праву частину в (14), знаходимо a_{j2}, потім a_{j3} і т.д., поки не буде досягнута задана точність.

3. Нелінійне рівняння (7) можна також розв'язувати відомим методом Ньютона, що характеризується швидкою збіжністю процесу ітерацій. У відповідності з цим методом:

$$a_{jk+1} = \frac{(2n+1)a_{jk}^{2n+2} + a_{j-1}^{2n+2} - ba_{j-1}}{(2n+2)a_{jk}^{2n+1} + b} , \tag{16}$$

де $k = 1, 2, 3, \ldots$

За початкове наближення a_{j1} можна брати $a_{j1} = a_{j-1}$ або обчислювати його по формулі (15).

Зазначимо, що окрім наведених, при розв'язуванні (7) можна використовувати й інші числові методи [9].

Зупинимось далі на обчисленні тривалостей розмахів у часі t_j. Виходячи з того, що:

$$t_j = \int_{-a_{j-1}}^{a_j} \frac{dx}{\upsilon(x)}, \tag{17}$$

Підставимо в (17) узагальнений вираз (5):

$$\upsilon(x) = \sqrt{2}\left[\frac{c}{2(n+1)m}\left(a_{j-1}^{2n+2} - x^{2n+2}\right) - fg\left(a_{j-1} + x\right)\right]^{1/2}.$$

Після переходу до безрозмірної змінної інтегрування, одержуємо:

$$t_j = \frac{\sqrt{(n+1)m}}{\sqrt{c}a_{j-1}^n} \cdot \int_{-1}^{\eta_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2} - 2\lambda_j(1+\xi)}}. \tag{18}$$

Тут $2\lambda_j = \frac{1-\eta_j^{2n+2}}{1+\eta_j}$; $\eta_j = \frac{a_j}{a_{j-1}}$; $\xi = \frac{x}{a_{j-1}}$; $\xi = 1, 2, 3, \ldots$

Аналітичне обчислення інтегралів в (18) можливе лише для $n = 0$ і воно приводить до відомої формули:

$$t_j = \pi\sqrt{\frac{m}{c}},$$

коли тривалість усіх розмахів одинакова і не залежать від амплітуд коливань та від початкового відхилення a_0 осцилятора від положення рівноваги.

При $n > 0$ інтеграл в (18) доводиться знаходити числовими методами на комп’ютері. В додаток до нього можна запропонувати двобічну аналітичну оцінку:

$$t_j^* < t_j < t_j^{**}. \tag{19}$$

До нижньої межі:

$$t_j^* = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{a_{j-1}^n}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{n+1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2}\right)} - \frac{\pi}{2} + \arcsin\eta_j\right] \tag{20}$$

приводить використання виразів:

$$\int_{-1}^{\eta_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2} - 2\lambda_j(1+\xi)}} > \int_{-1}^{\eta_j} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}};$$

$$\int_{-1}^{\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}}=\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}}-\int_{\eta_j}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}};$$

$$\int_{\eta_j}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}}<\int_{\eta_j}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}}=\frac{\pi}{2}-\arcsin\eta_j;$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{n+1}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}\right)},$$

де $\Gamma(z)$ – гама-функція.

Верхню межу:

$$t_j^{**}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{a_{j-1}^{n}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\eta_j^{n}(n+1)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}\right)}+\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\lambda_j-\eta_j}{1-\lambda_j}\right] \quad (21)$$

одержали, прийнявши до уваги, що:

$$\int_{-1}^{\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}-2\lambda_j(1+\xi)}}=$$

$$=\int_{-1}^{-\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}-2\lambda_j(1+\xi)}}+\int_{-\eta_j}^{\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}-2\lambda_j(1+\xi)}};$$

$$\int_{-1}^{-\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}-2\lambda_j(1+\xi)}}<\int_{-1}^{-\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}-2\lambda_j(1+\xi)}}=$$

$$=\int_{-1}^{-\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{\left(1-\lambda_j\right)^2-\left(\xi+\lambda_j\right)^2}}=\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{\lambda_j-\eta_j}{1-\lambda_j};$$

$$\int_{-\eta_j}^{\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{2n+2}-2\lambda_j(1+\xi)}}<\int_{-\eta_j}^{\eta_j}\frac{d\xi}{\sqrt{\eta_j^{2n+2}-\xi^{2n+2}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{(n+1)\eta_j^{n}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Розглянемо результати розрахунків з використанням викладеної теорії. Для проведення обчислень приймали $m = 3$ кг; $f = 0,2$; $a_0 = 0,06$ м. При $n = 1$ (кубічна нелінійність) задавали $c = 10^6$ Н/м^3, а при $n = 0$ (лінійна пружина) $c = 3600$ Н/м. Вказані значення c забезпечували рівність значень відновлюючої сили у стартовому положенні, створюваних лінійною і нелінійною пружинами. Отже, для порівняння коливальних процесів, виходили з однакових стартових умов.

Результати обчислень амплітуд розмахів різними способами при $n = 1$ записано в табл.. 1. В другому стовпці таблиці вказано a_j до яких приводить формула (10). Наближені значення a_j, обчислені по формулі (11) відповідно з уточненням і без нього наведено в стовпцях три і чотири. В двох останніх стовпцях таблиці розмістили амплітуди розмахів, одержані ітераційними методами, з проведенням чотирьох ітерацій.

Таблиця 1

Результати обчислень a_j різними способами при $n = 1$

j	Значення $100\,a_j$, м				
	формула (10)	формула (11)	формула (11)	формула (14)	Формула Ньютона (16)
1	5,6536	5,6536	5,6522	5,6536	5,6536
2	5,2587	5,2587	5,2548	5,2587	5,2587
3	4,7937	4,7939	4,7844	4,7937	4,7937
4	4,2159	4,2168	4,1919	4,2159	4,2159
5	3,4164	3,4234	3,3192	3,4164	3,4164
6	1,8606	–	–	1,8607	1,8606

Порівняє показує, що формула (11) з уточненням забезпечує задовільну точність, а при проведенні чотирьох ітерацій по формулі (14) або по формулі (16) одержуємо практично точні результати.

Про швидкість збіжності ітерацій можна робити висновок за даними розрахунків в табл. 2 і табл. 3.

Таблиця 2

Результати ітерацій по формулі (14) при $n=1$

k	Значення $100\,a_j$, м					
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
1	5,6539	5,5291	4,7946	4,2180	3,4232	1,9114
2	5,6536	5,2587	4,7937	4,2161	3,4170	1,8672
3	5,6536	5,2587	4,7937	4,2159	3,4164	1,8614
4	5,6536	5,2587	4,7937	4,2159	3,4164	1,8607

Таблиця 3

Результати ітерацій по формулі (16) при $n=1$

k	Значення $100\,a_j$, м					
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
1	5,6817	5,2969	4,8495	4,3074	3,6019	2,5375
2	5,6536	5,2591	4,7946	4,2186	3,4287	2,0266
3	5,6536	5,2587	4,7937	4,2159	3,4164	1,8719
4	5,6536	5,2587	4,7937	4,2159	3,4164	1,8606

Розрахунки підтверджують, що при малих j маємо дуже швидку збіжність ітерацій, а зі зростанням j вона дещо сповільнюється.

З метою порівняння темпів затухання коливальних процесів в осциляторах з різними нелінійностями в табл. 4 наведено значення амплітуд розмахів, обчисленні при $n=0$ (формула 8).

Таблиця 4

Результати обчислень a_j при $n=0$

j	$100\,a_j$, м	j	$100\,a_j$, м	j	$100\,a_j$, м
1	5,673	7	3,711	13	1,749
2	5,346	8	3,384	14	1,422
3	5,019	9	3,057	15	1,095
4	4,692	10	2,730	16	0,768
5	4,365	11	2,403	17	0,441
6	4,038	12	2,076	18	0,114

Як бачимо, при $n=0$ маємо повільніше затухання коливань, ніж при $n=1$. Кількість розмахів до повної зупинки осцилятора з лінійною пружністю,значно більша, ніж в осцилятора х кубічно-нелінійною пружиною, бо незважаючи на одинакові стартові умови, у другому випадку значно ширша область застою. Якщо при $n=0$ $2a_* = 3,27 \cdot 10^{-3}$ м, то при $n=1$ $2a_* \approx 3,61 \cdot 10^{-2}$ м. Тому осцилятор з кубічно-нелінійною пружиною попадає в область застою значно раніше , ніж осцилятор з лінійною пружиною.

При $n=0$ тривалості розмахів у часі одинакові і становлять $t_j \approx 0,0907$ с, незалежно від j. При $n=1$ значення t_j залежать від j. Це підтверджують результатами обчислень, записані в табл. 5.

Таблиця 5

Тривалості розмахів та їх оцінки

j	t_j, c	t_j^*, c	t_j^{**}, c	$\frac{1}{2}\left(t_j^* + t_j^{**}\right)$, c
1	0,110	0,093	0,128	0,111
2	0,118	0,097	0,139	0,118
3	0,127	0,102	0,155	0,129
4	0,142	0,109	0,179	0,144
5	0,166	0,116	0,228	0,172
6	0,220	0,117	0,432	0,275

Вказані значення t_j одержали по (18) числовим інтегруванням на комп'ютері, а їх оцінки обчислені по формулах (20) і (21). Спостерігається зростання t_j зі збільшенням j і виконуються нерівності (19). Півсума $\left(t_j^* + t_j^{**}\right)$ близька до t_j.

Вище припускали, що рух осцилятора спричинений початковим відхиленням його від положення рівноваги на a_0. Але викладена теорія без суттєвих змін може бути використана і тоді, коли рух спричинений миттєвим початковим імпульсом $m\dot{x} = m\upsilon_0$ при $x=0$. У цьому випадку константа C_1 в (4) дорівнює $0,5\upsilon_0^2$, тому:

$$\upsilon(x) = \sqrt{2}\left(\frac{\upsilon_0^2}{2} - \frac{c}{2(n+1)m}x^{2n+2} - fgx\right)^{1/2}. \qquad (22)$$

Коливальний рух осцилятора можливий лише при виході його із області застою, тобто при:

$$\upsilon_0 > \upsilon_0^* = \sqrt{2}\left(\frac{c}{2(n+1)m} a_*^{2n+2} + fga_* \right)^{1/2}.$$

Користуючись (22), легко знайти ту початкову швидкість υ_0, що забезпечує задане амплітудне відхилення a_0, бо:

$$\upsilon_0 = \sqrt{2}\left(\frac{c}{2(n+1)m} a_0^{2n+2} + fga_0 \right)^{1/2}.$$

Для прийнятих вище числових даних маємо $\upsilon_0^* = 0,098$ м/с; $\upsilon_0 = 2,134$ м/с при $n = 0$ і $\upsilon_0^* \approx 0,298$ м/с; $\upsilon_0 \approx 1,548$ м/с при $n = 1$.

Щоб звести дію початкового імпульсу до еквівалентного початкового відхилення, тобто знайти a_0 по відомому υ_0, доводиться розв'язувати алгебраїчне рівняння:

$$a_0^{2n+2} + 2\alpha_n a_0 - \beta_n = 0, \tag{23}$$

у якому $\alpha_n = \dfrac{fg(n+1)m}{c}$; $\beta_n = \dfrac{(n+1)m}{c}\upsilon_0^2$.

Аналітичний розв'язок (23) можливий лише при $n = 0$. Він приводить до формули:

$$a_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0} - \alpha_0,$$

де $\alpha_0 = \dfrac{fmg}{c}$; $\beta_0 = \dfrac{m}{c}\upsilon_0^2$.

У випадку $n > 0$ рівняння (23) доводиться розв'язувати числовими методами.

Висновки. Дослідження показало, що для розрахунку амплітуд вільних коливань нелінійно пружного осцилятора з сухим тертям можна використати перший інтеграл нелінійного диференціального рівняння руху. Розрахунки показали, що темп затухання коливань і область застою залежать від степеня нелінійності пружності. Збільшення показника степеня призводить до розширення області застою та зменшення кількості розмахів, спричинених початковим відхиленням осцилятора від положення рівноваги.

Список літератури

1. Ларин А.А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А.А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.

2. Митропольский Ю.А. Избранные труды: в 2 т. / Ю.А. Митропольский. – Киев: Накова думка, 2012. – 504 с

3. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления в 2 т. / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин.– Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. – Т1 – 716 с.

4. Шатохин В.М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин / В.М. Шатохин. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.

5. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П.Я. Пукач. – Львів: Львівська політехніка, 2014. – 288 с.

6. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

7. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016. – 264 с.

8. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 832 с.

9. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельников. – М.: Бином, 2001. – 630 с.

Аннотация

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С СУХИМ ТРЕНИЕМ

Рассмотрены колебания осциллятора с сухим трением при степенной зависимости восстанавливающей силы от перемещения системы. Установлено, что затухание амплитуд размахов, их количество, а также продолжительность размахов во времени зависит от значения показателя нелинейности и от амплитуд колебаний системы. Выведены формулы для вычислений амплитуд размахов и их продолжительности во времени. Приведены примеры расчетов.

Ключевые слова: *свободные затухающие колебания, сухое трение, нелинейно-упругий осциллятор.*

Abstract

DYNAMICS OF NONLINEAR ELASTIC OSCILLATORS WITH DRY FRICTION

Oscillations of an oscillator with dry friction are considered with a power-law dependence of the restoring force on the displacement of the system. It was found that the damping of the amplitude of the ranges, their number, as well as the duration of the ranges in time, depends on the value of the nonlinearity index and on the amplitudes of the oscillations of the system. Formulas are derived for calculating the amplitudes of the ranges and their duration in time. Examples of calculations are given.

Key words: *free damped oscillations, dry friction, nonlinear elastic oscillator.*

УДК 621.793; 538.73; 538.9

ПОВЫШЕНИЕ ИЗНОСОСТОЙКОСТИ УЗЛОВ ТРЕНИЯ ПУТЕМ УМЕНЬШЕНИЯ АДГЕЗИОННОЙ АКТИВНОСТИ МАТЕРИАЛА

Спольник А.И., д. физ.-мат. н., проф., Гайдусь А.Ю., к.т.н., доц., Калиберда Л.М., доц.

(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенка)

Рассмотрены некоторые аспекты адгезионного взаимодействия, которые имеют отношение к процессу трения в узлах механизмов и машин пищевой и перерабатывающей промышленности. В рамках электронной теории конденсированного состояния проанализирована роль межатомного взаимодействия поверхностных атомов твердых тел в процессе адгезии. Проанализировано влияние ряда покрытий на силу трения контактирующих тел. Показано, что адгезию и силу трения значительно уменьшают покрытия из карбидов и нитридов d-переходных металлов IV-VI групп.

Введение. Обеспечение предприятий пищевой и перерабатывающей промышленности современным и высокотехнологичным отечественным оборудованием является необходимым условием роста конкурентоспособности выпускаемой продукции, сохранения продовольственной безопасности страны и развития экспортного потенциала. Улучшение эксплу атационных