Міністерство освіти і науки України
Харківський національний аграрний університет
ім. В.В. Докучаєва

М.Й. Коваленко, Д.І. Масленніков

Теорія імовірностей і математична статистика

Навчальний посібник

Харків – 2020

УДК 519.2
ББК 22.18
К 75

Рекомендовано до видання вченою радою ХНАУ ім. В.В. Докучаєва
(протокол № 4 від 26 червня 2020 р.)

Р е ц е н з е н т и:

Д.В. Чібісов, доктор фіз.-мат. наук, професор Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна;
В.К. Горкавий, професор кафедри статистики та економічного аналізу ХНАУ ім. В.В. Докучаєва

Коваленко М.Й., Масленніков Д.І.
К 75 **Теорія імовірностей і математична статистика:** навч. посіб. / М.Й. Коваленко, Д.І. Масленніков. – Харків: ХНАУ, 2020. – 162 с.

У посібнику наведено до кожної теми необхідні теоретичні відомості і формули, подані розв'язання типових задач, завдання для контролю знань та самостійної роботи.

Призначається для здобувачів вищої освіти бакалаврського та магістерського рівнів соціально-поведінкових наук різної форми навчання.

УДК 519.2
ББК 22.18

,

ПЕРЕДМОВА

Будь яке соціологічне дослідження – це дослідження властивостей і характеристик певних об'єктів і зв'язків (залежностей) між ними. Загальною основою розробки і застосування статистичних методик є діалектичний метод пізнання, відповідно до якого суспільні явища і процеси розглядаються у розвитку взаємозв'язку і причинної обумовленості. Тому діяльність соціолога достатньо складна і відповідальна, йому необхідно виявляти, описувати, проводити порівняння важливих соціологічних характеристик, а виходячи від направлення дослідження, що проводяться висувати гіпотези про зв'язок і залежність між властивостями і явищами, підтверджувати чи заперечувати їх.

В підготовці фахівців-соціологів професійна освіта не можлива без включення в навчальний план викладання математичних дисциплін в тому числі теорії імовірностей і математичної статистики. Пояснюється це в першу чергу тим, що визначальна частина соціальних закономірностей має статистичний характер, а їх дослідження неможливе без використання теоретико-імовірнісного та математичного апарата. Практика давно підтвердила ефективність такого використання в базових моделях соціальних наук статистичного аналізу даних. Теорія імовірностей і математична статистика дає можливість сформулювати, що таке «суттєві відмінності», «суттєва залежність», та дозволяє уникнути ненадійних висновків, вивчити деякі аспекти репрезентативності вибірки, побудувати імовірнісні моделі соціальних явищ, оцінити характеристики розподілу за емпіричними даними і обґрунтувати практичне рішення.

В навчальному посібнику поряд з методично-теоретичною частиною наведено більше 50 прикладів розв'язання типових задач та більше 400 задач, які можна використовувати для самостійної роботи чи контролю знань за будь-якої форми навчання: очної, заочної чи дистанційної. Він також може бути корисним і для широкого кола слухачів як основа для подальшого вивчення і практичного застосування теорії імовірностей і математичної статистики.

Бажаємо успіху у подоланні вершини знань.

Частина І. ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Глава 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

Всюди у природі ми спостерігаємо якісь явища, що виникають за певних сукупностей умов. Будемо називати ці явища подіями, а сукупності умов символічно позначимо буквою *S*. Наприклад, факт проростання насінини, посадженої у землю, є подією, а наявність у ґрунті потрібних для проростання вологи, гумусу, температури тощо − сукупністю умов *S*.

Усі події можна поділити на вірогідні, неможливі та випадкові. **Вірогідною** (*U)* є подія, яка обов'язково відбудеться у разі створення сукупності умов *S*. Наприклад, восени листя з беріз у лісі обпадає. Тут вірогідна подія – обпадання листя, а сукупність умов *S* – осінь, холод, скорочення денного часу. **Неможливою** (*V*) є подія, яка ніколи не відбувається за умов *S*. Наприклад, у середніх широтах проліски не розквітають у січні. Тут неможлива подія – розквітання пролісків у лісі, сукупність умов *S* – середні широти, січень, зима, морози.

Випадковою (*A, B, C, D* тощо) є подія, яка за сукупності умов *S* може відбутись або ні. Наприклад, кількість опадів у травні може бути достатньою для гарного врожаю або ні; підкинута в гору металева монета (умова *S*) може впасти на підлогу як гербом (подія *A*), так і цифрою (подія *B*) тощо.

Якщо випадкові події можуть відтворюватися за однакових умов *S* багато разів, то їх досить велика кількість завжди проявляє певні закономірності, вивченням яких і займається теорія імовірностей. Цій дисципліні притаманні наведені нижче терміни.

Випробування – спроба спостерігати або уявно моделювати якусь подію за певної сукупності умов *S*.

Тоді *подія* – результат проведеного випробування. Наприклад, саджання зернятка в землю – випробування (експеримент), факт його проростання – подія (*A*), відсутність проростання – теж подія (*B*).

Події називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появлення усіх інших в одному й тому ж випробуванні. Наприклад, яблуко може бути солодким (подія *A*) або кислим (подія *B*). Подія „солодке" несумісна з подією „кисле" для одного й того ж яблука, тобто A несумісне з B. У протилежному разі події вважають *сумісними.*

Події називають *єдино можливими*, якщо поява в результаті випробування однієї і тільки однієї з них − вірогідна подія. Єдино можливі події попарно несумісні. Наприклад, у разі кидання гральної кості на підлогу зверху може з'явитися тільки якась одна кількість вічок – одне, два, три, чотири, п'ять або шість. Тобто тут ми маємо шість *єдино можливих* елементарних подій.

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші. Наприклад, для гральної кості випадання будь-якої кількості вічок *рівноможливе.*

§ 1. Класичне визначення імовірності

Імовірністю $P(A)$ події A називають відношення числа m наслідків випробування, що сприяють події A, до загальної кількості n усіх єдино можливих і *рівноможливих* елементарних наслідків випробування:

$$P(A) = \frac{m}{n} \, .$$

Підкреслимо, що класична імовірність – результат розрахунків, які відповідають уявному моделюванню випробувань (експериментів).

Властивості імовірності:

1. Імовірність довільної події належить інтервалу від 0 до 1:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

2. Імовірність вірогідної події $P(U) = 1$.

3. Імовірність неможливої події $P(V) = 0$.

Приклад 1. Здобувач знає відповіді на 30 питань із 40 питань програми. Яка імовірність того, що він правильно відповість на випадково витягнутий білет з одним питанням програми?

Розв'язання. Нехай правильна відповідь на білет – подія A. Оскільки повне число наслідків випробування $n=40$, а таких, що сприяють відповіді $m = 30$, то $P(A) = 30/40 = 0{,}75$.

Приклад 2. У скриньці містяться шість пронумерованих кубиків. Навмання по одному виймають усі кубики. Знайти імовірність того, що номери на кубиках будуть у зростаючому порядку (подія A).

Розв'язання. Кількість усіх елементарних наслідків випробування (виймання) дорівнює числу переставлень з 6 елементів ($n = P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$). Сприятливим для шуканої події A є лише один (m=1) випадок: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Звідси: $P(A)$ = 1/720.

§ 2. Елементи комбінаторики в теорії імовірностей

Під час розв'язання задач, пов'язаних із класичним визначенням імовірності, виникають труднощі в підрахунку кількості наслідків у випробуванні як деякої множини чи підмножини.

Розділ математики, у якому вивчають способи складання множин і підмножин та визначення їх кількості, називається **комбінаторикою**.

Кожна конкретна підмножина, складена із елементів заданої скінченної множини, називається **сполукою**. Якщо визначено, який елемент множини за яким слідує або якому передує, то множина називається упорядкованою. А якщо в упорядкованій множині змінити розташування елементів, то отримаємо іншу, відмінну від попередньої множину.

Серед сполук виділено такі: розміщення, переставлення та сполучення (комбінації).

Розміщеннями з n елементів по m називають упорядковані підмножини, кожна з яких містить m елементів із n елементів цієї множини. Розміщення відрізняються між собою порядком елементів або самими елементами.

Покажемо, скільки розміщень без повернення елементів по m у кожному можна скласти із n елементів цієї множини. На перше місце можна записати будь-який елемент із n. Отже, маємо n можливостей. На другому місці – будь-який елемент, крім вибраного на перше місце. Таким чином, при вибраному першому елементі для вибору другого маємо $(n-1)$ можливостей, тобто для вибору двох елементів маємо $n(n-1)$ можливостей. При кожному виборі перших двох елементів для вибору третього елемента маємо $n-2$ можливостей і т. ін. На останнє m-не місце можна записати будь-який елемент, крім вибраних m – 1 елементів на попереднє місце, тобто для його вибору маємо $n-(m-1)=n-m+1$ можливостей. Звідси випливає, що всього розміщень із n по m елементів:

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)...(m-n+1).$$

Отриманий вираз складається з m натуральних співмножників, найбільший із яких дорівнює n. Помноживши і розмістивши отриманий вираз на $(m-n)$!, отримаємо:

$$\mathrm{A}_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Переставлення. Розміщення із n елементів по n називають **переставленнями**. Тобто переставлення − це упорядкована множина із n елементів по n. Переставлення відрізняються одне від одного тільки порядком елементів. Число переставлень позначають P_n. Загальна кількість переставлень із n елементів дорівнює :

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{A}_n^n = n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Сполучення. Сполученнями із n елементів по m називаються сполуки, кожна із яких містить m елементів із цієї множини n елементів і відрізняється від інших хоча б одним елементом.

У сполученнях мають місце самі елементи множини, а не їх порядок у сполуці. Важливо, які конкретно елементи множини входять у кожну сполуку.

Число сполучень, тобто число всіх відмінних множин довжиною m із заданої множини, яка містить n елементів, позначають C_n^m. Якщо ми візьмемо всі сполучення із n елементів по m і в кожному із них упорядкуємо елементи всіма можливими способами, тобто з кожного сполучення отримаємо всі можливі переставлення, то отримаємо всі розміщення із n елементів по m.

Отже, $\mathrm{A}_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Звідси : $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m}$ або $C_n^m = \dfrac{P_n}{P_m P_{n-m}}$

і $$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

З останньої формули можна довести такі властивості сполучень:

$$1.\ C_n^m = C_n^{n-m}; \quad 2.\ C_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} = 1; \quad 3.\ C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = C_n^m .$$

Задачі на застосування комбінаторики в теорії імовірностей

Приклад 1. Слово „інтеграл” складено з букв розрізаної азбуки. Навмання виймають три картки і кладуть у ряд одну за одною в порядку появи. Яка ймовірність дістати при цьому слово „гра”.

Розв'язання. У разі утворення простору елементарних подій Ω розглядають всі впорядковані трьохелементні підмножини восьмиелементної множини (букв, що утворюють слово „інтеграл”). Тоді :

$$\mathrm{N}(\Omega) = A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336,$$

а сприятливим для шуканої події A є лише один випадок: коли підряд буде вийнято букви „г” і „р” і „а”. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{336} \approx 0{,}003.$$

Приклад 2. Задано відрізки, довжина яких 2, 5, 6 і 10 см. Яка імовірність того, що з навмання взятих трьох відрізків можна побудувати трикутник?

Розв'язання. Кількість усіх елементарних рівноможливих наслідків дорівнює числу сполучень з чотирьох елементів множини

$$M = \{2;5;6;10\}$$

по три, тобто :

$$N(\Omega) = C_4^3 = 4.$$

Оскільки трикутник можна побудувати лише тоді, коли сума довжин будь-яких двох сторін більша за довжину третьої, то сприяють події *A* лише ті випадки, коли ця умова виконується. Такими випадками є :

$$E_1 = \{2,5,6\} \; i \; E_2 = \{5,6,10\}.$$

Отже, *N(A)*=2 і –

Приклад 3. У скриньці міститься шість занумерованих кубиків. Навмання по одному виймають усі кубики. Знайти імовірність того, що номери на кубиках будуть у зростаючому порядку.

Розв'язання. Кількість усіх елементарних наслідків дорівнює числу переставлень із шести елементів : P_6 =6!= 1·2·3·4·5·6=720.

Сприятливим для шуканої події *A* є лише один випадок, коли підряд буде взято кубики зі зростаючими номерами. Звідси шукана імовірність:

$$P(A) = \frac{1}{720}.$$

Приклад 4. У скриньці є кульки – шість білих і чотири чорних. З них навмання беруть дві кульки. Яка імовірність того, що обидві кульки будуть: а) білого кольору; б) чорного кольору; в) одного кольору.

Розв'язання. Кількість усіх можливих наслідків випробування дорівнює числу пар, які можна утворити з десяти кульок, тобто числу сполучень з десяти по два:

$$n = C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45 .$$

Кількість наслідків, які сприяють появі двох кульок: а) білого кольору (подія A) дорівнює $C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$; б) чорного кольору ($B$) – $C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$; в) одного кольору $(C = A + B)$ – $C_6^2 + C_4^2 = 21$. Тоді шукані імовірності дорівнюють відповідно: а) $P(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$; б) $P(B) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$; в) $P(A+B) = P(C) = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$.

§ 3. Відносна частота. Стійкість відносної частоти

Відносна частота з'являється тоді, коли випробування – реальний експеримент, а не уявне моделювання усіх можливих наслідків.

Відносною частотою події називають відношення числа випробувань, у яких подія A відбулася, до загальної кількості фактично проведених випробувань, у яких подія A і відбулася, і не відбулася:

$$W(A) = \frac{m}{n} ,$$

де m – кількість появ події; n – загальна кількість випробувань (експериментів).

Численні спостереження свідчать, що якщо експерименти проводити в однакових умовах, коли в кожному випадку кількість випробувань досить велика, то відносна частота подій виявляє властивість стійкості. Це означає, що в різних експериментах відносна частота змінюється мало (тим менше, чим більше проведено випробувань). При цьому вона коливається навколо деякого сталого числа, яке назвали статистичною, або практичною, імовірністю:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n} ,$$

де m і n – ті, що зазначені вище.

Далі без доказу приймається, що класична і статистична імовірності мають однакові $P(A)$.

Дві події називають *незалежними*, якщо імовірність однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася друга; у протилежному випадку події називають *залежними.*

Приклад 1. Монету кинули два рази. Імовірність появи герба в першому випробуванні (подія A) не залежить від появи чи непояви герба у другому випробуванні (подія B). Одночасно імовірність появи герба у другому випробуванні не залежить від результатів першого випробування. Отже, події A і B – незалежні.

Приклад 2. Здобувач вивчив тільки 30 питань із 40 питань екзаменаційної програми. На екзамені він отримує білет з двома питаннями програми. Нехай подія A – правильна відповідь на перше запитання білета, B – правильна відповідь на друге запитання. Якщо подія A відбулася, то $P(B) = 29/39$, оскільки одне знайоме питання здобувач уже вичерпав. Якщо подія A не відбулася (відповіді на перше питання здобувач не знає), то $P(B) = 30/39$, адже число незнайомих питань скоротилося на одиницю, а знайомих – не змінилося. Як бачимо, $P(B)$ залежить від того, відбулася подія A чи ні. Отже, у цьому випадку події A і B залежні.

Глава 2. АЛГЕБРА ПОДІЙ

§ 1. Теореми складання і множення імовірностей

Сумою $\boldsymbol{A+B}$ подій A і B називають подію, що містить у собі появу події A або події B, або обох цих подій разом $A \cdot B$:

$$A + B = \text{ або } \bar{A} \text{ або } \bar{B} \text{ або } A \cdot B.$$

Сумою декількох подій називають подію, що полягає у появі хоча б однієї з цих подій.

Наприклад, щоб спіймати рибу, рибалка закинув вудочку з двома гачками. Нехай A – потрапляння риби на перший гачок, B – на другий. Тоді $A+B$ – факт вилову риби на вудочку будь-яким гачком.

Теорема. Імовірність появи будь-якої з двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Доведення. Нехай $n-$ спільне число можливих елементарних наслідків випробування;

$m_1 -$ число наслідків, що сприяють події A;

$m_2 -$ число наслідків, що сприяють події B.

Кількість елементарних наслідків, що сприяють появі або події А, або події В, дорівнює $m_1 + m_2$. Отже:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}.$$

Ураховуючи, що $\frac{m_1}{n}=P(A)$ і $\frac{m_2}{n}=P(B)$, отримаємо:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідок. Імовірність появи однієї з декількох попарно несумісних подій (будь-якої) дорівнює сумі імовірностей цих подій:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Приклад 1. Мішень має форму круга, поділеного на три сектори − червоного, синього і білого кольору. Імовірність того, що стрілець з одного пострілу влучить у червоний сектор, дорівнює 0,2; у синій – 0,4 , у білий – 0,3. Яка імовірність улучення в мішень з одного пострілу?

Розв'язання. Подія A – улучення в червоний сектор, $P(A)=0{,}2$. Подія B – улучення в синій сектор, $P(B)=0{,}4$. Подія C – улучення в білий сектор, $P(C)=0{,}3$. Оскільки всі три події несумісні (улучення у будь-який сектор виключає попадання в інші), то:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}4+0{,}3=0{,}9.$$

Добутком двох подій A і B називають подію $A\cdot B$, що полягає в сумісній появі і A, і B:

$$AB = \text{ і } A, \text{ і } B.$$

Добутком декількох подій називають подію, що полягає в сумісній появі всіх цих подій:

$$ABC = \text{ і } A, \text{ і } B, \text{ і } C; \qquad ABCD = \text{ і } A, \text{ і } B, \text{ і } C, \text{ і } Д.$$

Наприклад, у кошику є гриби двох видів – маслюки і сироїжки, зібрані в лісі. Серед кожного виду є гриби гарні і червиві. Якщо подія A – витягнути гарний гриб з кошика, а подія B – поява сироїжки, то подія AB – поява нормальної (нечервивої) сироїжки.

Теорема. Імовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Доведення. Нехай $n-$ число можливих елементарних наслідків випробування, в яких подія A відбувається або ні;

$n_1 -$ число наслідків, які сприяють події A $(n_1 \le n)$;

$m-$ число можливих елементарних наслідків випробування, в яких подія B відбувається або ні;

$m_1 -$ число наслідків, що сприяють події B $(m_1 \le m)$.

Спільне число можливих елементарних наслідків випробування (у яких відбувається і A, і B або A – є, B – ні, або B – є, A – ні, або немає ані A, ані B) дорівнює $n \cdot m$. З цього числа $n_1 \cdot m_1$ наслідків сприяє сумісній появі і А, і В. Отже, імовірність сумісної появи подій A і B така:

$$P(AB) = \frac{n_1\, m_1}{n\, m} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m}.$$

Ураховуючи, що $\frac{n_1}{n} = P(A)$ $і$ $\frac{m_1}{m} = P(B)$, маємо:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Наслідок. Імовірність сумісної появи декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1\, A_2 ... A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) ... P(A_n).$$

Приклад 1. Знайти імовірність сумісної появи двох одиниць при одному киданні двох гральних кубиків.

Розв'язання. Імовірність появи одного вічка на першому кубику (подія A):

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

Імовірність появи одного вічка на другому кубику (подія B):

$$P(B) = \frac{1}{6}.$$

Оскільки події A і B незалежні, то шукана імовірність згідно з теоремою добутку дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Приклад 2. У кожному з двох ящиків є по 10 динь. У першому ящику − вісім жовтих динь, у другому − сім жовтих динь, а всі інші − жовто-зелені. З кожного ящика навмання виймають по одній дині. Знайти імовірність того, що обидві дині будуть жовтими.

Розв'язання. Імовірність того, що з першого ящика витягнуть жовту диню (подія A):

$$P(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Імовірність того, що з другого ящика витягнуть жовту диню (подія B):

$$P(B) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Оскільки події A і B незалежні, то шукана імовірність (згідно з теоремою добутку) дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

§ 2. Повна група подій. Протилежні події

Повною групою називають сукупність єдино можливих подій випробування.

Приклад 1. Кидають гральний кубик. Події A_1 (випадає одне вічко), A_2 (два вічка), A_3 (три), A_4 (чотири), A_5 (п'ять), A_6 (шість) утворюють повну групу.

Теорема. Сума імовірностей несумісних подій A_1, A_2, ... , A_n, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Доведення. Оскільки поява однієї з подій повної групи вірогідна, а імовірність вірогідної події дорівнює одиниці, то:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(U) = 1.$$

Будь-які дві події повної групи несумісні. Отже, можна використати теорему складання:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Приклад 2. Дно круглої коробки поділено на три сектори з площами 20 $см^2$, 30 $см^2$ і 50 $см^2$ відповідно. У коробку кидають маленьку кульку і дивляться, у якому секторі вона зупиниться. Які події при цьому утворюють повну групу?

Розв'язання. Нехай подія A – зупинка кульки в першому секторі, подія B – у другому, подія C – у третьому. Оскільки ніяких інших можливостей зупинки немає, події A, B і C утворюють повну групу. Знайдемо імовірність цих подій. Повна площа дна коробки 100 $см^2$. Імовірність зупинки в якомусь секторі тим більша, чим більша його площа. Отже,

$$P(A)=\frac{20\,см^2}{100\,см^2}=0{,}2;\quad P(B)=\frac{30\,см^2}{100\,см^2}=0{,}3;\quad P(C)=\frac{50\,см^2}{100\,см^2}=0{,}5\,.$$

При цьому теорема про суму імовірностей подій, що утворюють повну групу, виконується:

$$P(A)+P(B)+P(C)=0{,}2+0{,}3+0{,}5=1.$$

Протилежними називають дві єдино можливих події, які утворюють повну групу. Якщо одна з двох протилежних подій позначена як A, то другу прийнято позначати як $\overline{A}$.

Приклад 1. Поява герба або цифри при киданні монети – протилежні події. Якщо A – поява герба, то $\overline{A}$ – цифри.

Приклад 2. Насінину висаджують у землю. Події „насінина проросла" і „насінина не проросла" – протилежні події.

Теорема. Сума імовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Доведення. Протилежні події утворюють повну групу, а сума імовірностей подій, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці.

Зауваження. Якщо імовірність однієї з двох протилежних подій позначена як p, то імовірність другої буде q. Таким чином:

$$p+q=1.$$

Приклад 3. Імовірність того, що день буде хмарний, $p=0{,}8$. Знайти імовірність того, що день буде ясний.

Розв'язання. День „хмарний" і день „ясний" – події протилежні. Тому шукана імовірність:

$$q=1-\rho=1-0{,}8=0{,}2.$$

§ 3. Складні події

Найпростішими прикладами складних подій відносно простих подій A і B є добуток AB і сума $A+B$, оскільки вони утворюються не менше ніж із двох подій.

Поширеним є поняття тільки однієї події з двох, трьох чи більшої кількості простих подій.

Приклад 1. Імовірності появи кожної з двох незалежних подій A_1 і A_2 відповідно дорівнюють p_1 і p_2. Знайти імовірність появи тільки однієї з цих подій.

Розв'язання. Поява тільки першої події A_1 рівнозначна появі події $A_1 \cdot \overline{A}_2$ (відбулася перша і не відбулася друга події).

Введемо позначення:

$B_1 -$ відбулася тільки подія A_1, тобто $B_1 = A_1\overline{A}_2$;

$B_2 -$ відбулася тільки подія A_2, тобто $B_2 = A_2\overline{A}_1$.

Таким чином, щоб знайти імовірність тільки однієї з подій A_1, A_2, будемо шукати імовірність $P(B_1 + B_2)$ появи однієї, будь-якої з подій B_1, B_2.

Оскільки події B_1, B_2 несумісні, то працює теорема складання:

$$P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2).$$

Події A_1 і A_2 незалежні, тому незалежні й події $A_1\overline{A}_2$, до яких застосуємо теорему добутку:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) = p_1 \cdot q_2.$$

Аналогічно:

$$P(B_2) = P(A_2\overline{A}_1) = P(A_2)P(\overline{A}_1) = p_2 \cdot q_1.$$

Звідси отримаємо шукану імовірність:

$$P(B_1 + B_2) = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1.$$

Якщо незалежних подій три $-$ A_1, A_2, A_3, і вони відбуваються з імовірностями p_1, p_2, p_3 відповідно, то імовірність тільки однієї з них, будь-якої, обчислюють за формулою, подібною до попередньої:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = p_1q_2q_3 + p_2q_1q_3 + p_3q_1q_2,$$

де $B_1 = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $B_2 = A_2\overline{A}_1\overline{A}_3$, $B_3 = A_3\overline{A}_1\overline{A}_2$,

$$P(B_1) = P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3,$$

$$P(B_2) = P(A_2)P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_3) = p_2 \cdot q_1 \cdot q_3,$$

$$P(B_3) = P(A_3)P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = p_3 \cdot q_1 \cdot q_2.$$

Приклад 2. Два стрільці стріляють по мішені. Перший з них влучає (подія A_1) з імовірністю $p_1 = 0{,}9$, другий влучає (подія A_2) з імовірністю $p_2 = 0{,}8$. Знайти імовірність того, що: а) влучить тільки перший; б) влучить тільки другий; в) влучить тільки один з них.

Розв'язання. Якщо $P(A_1) = 0{,}9$, то імовірність промаху для першого дорівнює $P(\overline{A}_1) = q_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Аналогічно, імовірність промаху для другого стрільця $P(\overline{A}_2) = q_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Нехай подія $B_1 -$ влучення в мішень тільки першого $(B_1 = A_1\overline{A}_2)$, $B_2 -$ влучення тільки другого ($B_2 = A_2\overline{A}_1$), а $B_3 = B_1 + B_2 = A_1\overline{A}_2 + A_2\overline{A}_1$ – влучення тільки одного, байдуже якого стрільця. Тоді:

а) $P(B_1) = P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) = p_1 q_2 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 = 0{,}18$;

б) $P(B_2) = P(A_2\overline{A}_1) = P(A_2)P(\overline{A}_1) = p_2 q_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}1 = 0{,}08$;

в) $P(B_3) = P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = 0{,}18 + 0{,}08 = 0{,}26$.

Досить часто потрібно знайти ймовірність появи хоча б однієї події з декількох подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних у сукупності. Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$ незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей протилежних подій $A_1 A_2 ... A_n$:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)\ P(\overline{A}_2)\ ...\ P(\overline{A}_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 ... q_n.$$

Доведення. Позначимо через А подію, що складається з появи хоч би однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$. Подія A_1 і $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ (жодна з подій не відбулася) протилежні. Отже, сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 ... \overline{A}_n) = 1.$$

Звідси, використовуючи теорему добутку, отримаємо:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2 ... \overline{A}_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) ... P(\overline{A}_n),$$

або $$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n.$$

Частинний випадок. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ мають однакову імовірність, що дорівнює p, то імовірність хоча б однієї з цих подій:

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Приклад 1. Імовірність проростання насінини, висадженої у землю, дорівнює 0,8. Яка імовірність того, що з трьох таких насінин, висаджених у землю, проросте хоч одна?

Розв'язання. Подія A – проростання насінини, $P(A) = p = 0{,}8$. Подія $\overline{A}$ – непроростання, і $P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Подію B – проростання хоча б однієї з трьох – знаходять за формулою:

$$P(B) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) = 1 - q^3 = 0{,}992,$$

де індексами „1”, „2” і „3” послідовно позначено всі три насінини.

Приклад 2. Устрій (сигналізатор) спрацює при пожежі в приміщенні з імовірністю $p = 0{,}8$. Скільки сигналізаторів треба встановити в елеваторі, щоб сигнал про початок пожежі надійшов з імовірністю понад 0,992.

Розв'язання. Нехай в елеваторі встановлено n сигналізаторів про пожежу. Сигнал до пожежників надійде тоді, коли спрацює хоч один з них (подія А). Кожний окремий устрій під час пожежі не спрацьовує з імовірністю $q=1-p=0{,}2$. Тому:

$$P(A)=1-q^n=1-(0{,}2)^n.$$

З умови $P(A)>0{,}992$ маємо:

$1-(0{,}2)^n>0{,}992$, або $(0{,}2)^n<0{,}008=(0{,}2)^3$ і нерівності виконуються при $n>3$, тобто треба встановити більше трьох сигналізаторів.

§ 4. Залежні події. Умовна імовірність

Нехай події A і B залежні. Тоді **умовною імовірністю** $P_A(B)$ називають імовірність події *B*, обчислену у припущенні, що подія А вже відбулася.

Приклад 1. У скриньці п'ять білих і п'ять чорних кульок. Зі скриньки двічі виймають навмання по одній кульці, не повертаючи їх у скриньку. Знайти імовірність появи білої кульки при другому випробуванні (подія *B*), якщо при першому випробуванні витягнули чорну кульку (подія *A*).

Розв'язання. Після першого випробування в скриньці залишили 9 кульок, з них 5 білих. Шукана імовірність:

$$P_A(B)=\frac{5}{9}.$$

Теорема. Імовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, обчисленої у припущенні , що перша подія вже відбулася:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).$$

Доведення. Нехай:

$n-$ число можливих елементарних наслідків випробування, у яких подія A відбувається або ні;

n_1- число наслідків, які сприяють події А ($n_1\le n$);

$m-$ число елементарних наслідків випробування, у яких відбувається подія *B*, у припущенні, що подія A вже відбулася, тобто ці наслідки сприяють появі AB ($m\le n_1$).

Імовірність сумісної появи подій A і B:

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1} .$$

Беручи до уваги, що $\frac{n_1}{n} = P(A)$ і $\frac{m}{n_1} = P_A(B)$, отримаємо:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) .$$

Зауваження. Оскільки події AB і BA однакові, $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A)$, то справедлива рівність:

$$P(A)P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) .$$

Наслідок. Імовірність сумісної появи декількох залежних подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності всіх інших, причому імовірність кожної подальшої події обчислюють у припущенні, що всі попередні події вже відбулися:

$$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) ,$$

де $P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ − імовірність події A_n, обчислена у припущенні, що події A_1, A_2, ..., A_{n-1} відбулися.

Для трьох залежних подій будемо мати:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) P_{AB}(C) .$$

Приклад 2. У ящику 10 лампочок, причому тільки сім з них стандартні. Наугад беруть зразу дві лампочки. Яка імовірність того, що вони обидві стандартні?

Розв'язання. Нехай подія A – перша з узятих лампочок є стандартною, подія B – друга теж стандартна. Спочатку ми маємо сім стандартних на 10 лампочок усього. Тому:

$$P(A) = \frac{7}{10} = 0{,}7 .$$

Після того як подія A відбулася, в ящику залишилися шість стандартних лампочок з дев'яти всього. Тому імовірність витягнути стандартну лампочку ще раз (коли перша вже стандартна) − це умовна імовірність:

$$P_B(A) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} .$$

Тоді шукана імовірність, згідно з теоремою добутку залежних подій, дорівнює:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15} .$$

Розглянемо тепер **теорему складання для сумісних подій**, коли поява однієї з них не виключає появи іншої в одному й тому ж випробуванні.

Теорема. Імовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доведення. Оскільки події A і B − сумісні, то $A+B$ відбудуться, коли відбудеться одна з таких трьох несумісних подій: $A\overline{B}$, $\overline{A}B$ або AB. З теореми складання імовірностей несумісних подій :

$$P(A+B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)+P(AB).$$

Подія A відбудеться, якщо відбудеться одна з двох несумісних подій: $A\overline{B}$ або AB. З теореми складання імовірностей несумісних подій маємо:

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB).$$

Звідси:

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB).$$

Аналогічно будемо мати:

$$P(B)=P(\overline{A}B)+P(AB),$$

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB).$$

Використовуючи ці формули у формулі $P(A+B)$, отримаємо:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Зауваження 1. Треба мати на увазі, що події А і В можуть бути як незалежними, так і залежними.

Для незалежних подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B);$$

для залежних подій: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P_A(B)$.

Зауваження 2. Якщо події A і B несумісні, то $P(AB)=0$. Тоді формула суми для несумісних подій набуде вже відомого вигляду:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Приклад 3. Два саджанці яблунь посадили в землю. Імовірність того, що перший з них приживеться (подія A) дорівнює: $p_1=0{,}8$, що приживеться другий (подія B) дорівнює: $p_2=0{,}7$. Знайти імовірність того, що приживеться хоча б один саджанець.

Розв'язання. Імовірність приживання для кожного саджанця не залежить від того, що буде з іншим деревцем. Тому події A і B незалежні. Імовірність AB (обидва саджанця прижилися):

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

Шукана імовірність:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}7 - 0{,}56 = 0{,}94.$$

Зауваження. Оскільки тут події A і B незалежні, то можна було б використати формулу: $P(A+B) = 1 - q_1 \cdot q_2$. Дійсно, $q_1 = P(\overline{A}) = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = p(\overline{B}) = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$; $P(A+B) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}06 = 0{,}94$.

§ 5. Формула повної імовірності. Формули Байєса

Нехай подія A може відбутися за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу. Нехай відомі імовірності цих подій та умовні імовірності $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), ..., P_{B_n}(A)$ події A. Щоб знайти при цьому імовірність подій A, слід скористатися теоремою.

Теорема. Імовірність події A, яка може відбутися лише за умови появи однієї з несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з цих подій на відповідну умовну імовірність події A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Цю формулу називають „формулою повної імовірності”.

Доведення. Згідно з умовою подія A може відбутися, якщо відбудеться одна з несумісних подій $B_1, B_2, ..., B_n$. Тобто поява події A означає здійснення однієї (будь-якої) з несумісних подій $B_1A, B_2A, ..., B_nA$. Користуючись для обчислення імовірності події A теоремою складання, одержимо:

$$P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + ... + P(B_nA).$$

Кожний з додатків отримаємо так. З теореми добутку імовірностей залежних подій маємо:

$$P(B_1A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A); \quad P(B_2A) = P(B_2) \cdot P_{B_2}(A); \ ...;$$
$$P(B_nA) = P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Підставляючи ці співвідношення у значення *P(A),* одержимо:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Приклад 1. Є дві партії насіння моркви. У кожній з них є насіння гарне і пошкоджене. Імовірність того, що взяте з першої партії насіння гарне, дорівнює 0,9 , а з другої – 0,7. Знайти імовірність того, що взяте навмання насіння (з навмання взятої партії) – гарне.

<u>Розв'язання</u>. Нехай подія A – взяте навмання насіння – гарне.

Насіння можна брати або з першої партії (подія B_1), або з другої (подія B_2).

Імовірність того, що насіння візьмуть з першої партії:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}.$$

Імовірність того, що насіння візьмуть з другої партії:

$$P(B_2) = \frac{1}{2}.$$

Умовна імовірність того, що з першої партії буде взяте гарне насіння:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9.$$

Умовна імовірність того, що з другої партії буде взяте гарне насіння:

$$P_{B_2}(A) = 0{,}7.$$

Шукана імовірність того, що взяте навмання насіння – гарне, за формулою повної імовірності дорівнює:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}8.$$

Оскільки у формулі повної імовірності заздалегідь невідомо, яка з подій $B_1, B_2, ..., B_n$ відбудеться, їх називають *гіпотезами.*

Припустимо, що проведено випробування, в результаті якого відбулася подія A. Тоді формули, за якими знаходять умовні імовірності будь-якої гіпотези B_i $(i = 1,\ 2,\ ...\ ,\ n)$, називають *формулами Байєса:*

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ ...\ + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Ці формули дозволяють переоцінити імовірності гіпотез після того, як стає відомим результат випробування, завдяки якому відбулася подія A.

Приклад 2. Десять здобувачів розв'язують задачу. Із них два навчаються на „відмінно”, п'ять – на „добре” і три – на „задовільно”.

Імовірність того, що задачу розв'яже відмінник дорівнює 0,9; той, хто вчиться на „добре" і „задовільно" – 0,8 і 0,5 відповідно.

Задачу розв'язано правильно. Яка імовірність того, що її розв'язав: а) відмінник; б) той, хто вчиться на „добре"; в) той, хто вчиться на „задовільно".

Розв'язання. Нехай подія A – правильний розв'язок задачі.

Припустимо, що це зробив: відмінник (гіпотеза B_1), той, хто вчиться на „добре" (гіпотеза B_2), той, хто вчиться на „задовільно" (гіпотеза B_3). Імовірності цих гіпотез дорівнюють: $P(B_1)=0{,}2$; $P(B_2)=0{,}5$; $P(B_3)=0{,}3$ (за формулою класичного визначення імовірності випадкової події). Умовні імовірності події A відомі:

$$P_{B_1}(A)=0{,}9; \qquad P_{B_2}(A)=0{,}8\ ; \qquad P_{B_3}(A)=0{,}5.$$

Імовірність події А знайдемо за формулою повної імовірності:

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}9+0{,}5\cdot 0{,}8+0{,}3\cdot 0{,}5=0{,}73.$$

За формулою Байєса проведемо уточнення (переоцінку) імовірностей гіпотез:

а) імовірність того, що задачу правильно розв'язав „відмінник":

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}9}{0{,}73}=0{,}2466;$$

б) імовірність того, що задачу правильно розв'язав той, хто вчиться на „добре":

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}5\cdot 0{,}8}{0{,}73}=0{,}5479;$$

в) імовірність того, що задачу правильно розв'язав той, хто вчиться на „задовільно":

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)P_{B_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot 0{,}5}{0{,}73}=0{,}2055.$$

Як бачимо, уточнені значення імовірностей гіпотез не збігаються з їх апріорними значеннями.

Контрольна робота № 1

Варіант 1

1. У колоді 36 карт. Виймають одну карту. Знайти імовірність того, що це буде туз.

2. Коефіцієнти використання робочого часу для двох комбайнів відповідно дорівнюють 0,9 і 0,8. Вважаючи, що зупинки в роботі кожного комбайна виникають випадково і незалежно, знайти відповідний час: 1) сумісної роботи комбайнів; 2) простою всіх комбайнів; 3) роботи хоча б одного комбайна.

3. У скриньці знаходяться 20 кульок, серед яких 12 білих та 8 чорних. Знайти імовірність того, що: 1) всі ці кульки білі; 2) серед них 3 кульки білі.

4. У двох ящиках є персики: у першому − 20 жовтих і 10 зелених, у другому − 15 жовтих і 12 зелених. З одного з цих ящиків (невідомо з якого) наугад виймають один персик. Знайти імовірність того, що: 1) це жовтий персик; 2) персик витягнули з першого ящика, якщо він жовтий.

Варіант 2

1. Здобувач вивчив 16 запитань із 34 за програмою. Знайти ймовірність того, що він відповість на одне задане запитання.

2. У двох скриньках по 10 кульок. У першій − 8 білих і 2 чорні, а в другій − 4 білі і 6 чорних. З кожної скриньки виймають по одній кульці. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидві кульки білі; 2) тільки одна кулька біла; 3) білих кульок немає; 4) хоча б одна кулька біла.

3. У групі 18 здобувачів, серед яких 12 хлопців. За списком наугад відбирають 5 осіб. Знайти імовірність того, що серед відібраних: 1) всі хлопці; 2) три хлопці.

4. Імовірності влучання у мішень для трьох стрільців дорівнюють: 0,8 − для першого; 0,6 − для другого; 0,4 − для третього. По мішені стріляє один із цих стрільців (невідомо який). Знайти: 1) імовірність влучання у мішень, якщо рівноможливі всі припущення відносно того, який стрілець стріляв; 2) імовірність того, що стріляв перший стрілець, якщо в мішень влучили.

Варіант 3

1. У скриньці 12 кульок. З них три червоні, шість блакитних і три чорні. Витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що це кольорова кулька.

2. У двох ящиках по 40 яблук. У першому − 4 пошкоджених яблука, а в другому – 8. З кожного ящика наугад виймають по одному яблуку. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидва яблука не-

ушкоджені; 2) тільки одне яблуко неушкоджене; 3) обидва ушкоджені; 4) хоча б одне яблуко неушкоджене.

3. У скриньці є 20 деталей, серед яких 4 браковані. Робітник наугад взяв 5 деталей. Знайти імовірність того, що: 1) всі ці деталі придатні; 2) серед них 2 деталі браковані.

4. У скриньку, де є 3 кульки, поклали одну білу кульку, після чого з неї наугад витягують одну кульку. Знайти імовірність того, що: 1) витягнута кулька біла, якщо рівноможливі всі припущення про початковий склад кульок за кольором; 2) спочатку у скриньці було 2 білі кульки, якщо витягнута кулька виявилася білою.

Варіант 4

1. Підкидають гральний кубик. Знайти імовірність того, що випаде парне число очок.

2. Два стрільці стріляють по мішені. Імовірності влучання дорівнюють: для першого стрільця − 0,6; для другого − 0,7. Знайти імовірність того, що: обидва стрільці влучать у мішень; 2) влучить у мішень тільки один стрілець; 2) обидва стрільці не влучать у мішень; 4) хоча б один стрілець влучить у мішень.

3. Серед 12 яблук 4 червиві. Наугад взяли 5 яблук. Знайти імовірність того, що: 1) серед них немає червивих; 2) два яблука червиві.

4. Із заготовленого для посіву пшениці насіння перший сорт становить 40 %, другий сорт – 45 %, третій – 15 %. Схожість насіння першого сорту дорівнює 0,9; другого − 0,7; третього − 0,5. Знайти імовірність того, що: 1) зійде навмання взята насінина; 2) насінина першого сорту, якщо вона зійшла.

Варіант 5

1. У середньому в липні спостерігають три дощових дні. Знайти імовірність того, що 1 липня дощитиме.

2. У кожному з двох ящиків по 30 деталей. У першому ящику − 27, а в другому − 24 фарбованих деталей. Робітник з кожного ящика наугад взяв по одній деталі. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидві деталі фарбовані; тільки одна деталь фарбована; 3) немає фарбованих; 4) хоча б одна деталь фарбована.

3. Здобувач знає 25 із 35 питань програми. Знайти імовірність того, що здобувач знає з трьох запропонованих йому екзаменатором: 1) всі три питання; 2) тільки два питання.

4. У кожній з двох скриньок знаходяться 2 білі і 3 чорні кульки. З першої скриньки навмання витягається одна кулька, яка перекладається у другу скриньку. Після цього з другої скриньки витягається одна кулька. Знайти імовірність того, що: 1) це чорна кулька; 2) перекладена кулька була чорна, якщо з другої скриньки витягли чорну кульку.

Варіант 6

1. У ящику 27 деталей, серед яких 3 бракованих. Робітник витягає одну деталь. Знайти імовірність того, що це небракована деталь.

2. Схожість першої партії насіння 0,9, а другої − 0,8. З кожної партії навмання відбирають по одній насінині. Знайти імовірність того, що з них зійдуть: 1) обидві насінини; 2) тільки одна насінина; 3) жодна насінина; 4) хоча б одна насінина.

3. У корзині 10 плодів, з яких 3 уражені хворобою у прихованій формі. З корзини наугад послідовно виймають 3 плоди. Знайти імовірність того, що серед них: 1) немає ушкоджених; 2) один плід буде ушкодженим.

4. Два верстати-автомати виробляють однотипні деталі. Продуктивність першого верстата у 1,5 раза більша від продуктивності другого. Імовірність браку на першому верстаті становить 0,1, а на другому − 0,08. Навмання перевіряють одну деталь. Знайти імовірність того, що: 1) деталь буде придатною; 2) деталь вироблено першим верстатом, якщо вона придатна.

Варіант 7

1. У лототроні 26 кульок, помічених номерами від 1 до 26. Витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що номер кульки ділиться на 3.

2. У кожній з двох груп по 25 здобувачів. У першій − 15, а в другій − 10 хлопців. З кожної групи наугад відбирають по одному здобувачу. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидва хлопці; 2) тільки один хлопець; 3) тільки дівчата; 4) хоча б один хлопець.

3. У колоді 36 карт, навмання витягають три карти. Знайти імовірність того, що: 1) всі три карти мають трефову масть; 2) серед них є дві карти трефової масті.

4. У кожному з трьох ящиків міститься по 50 яблук. З них ушкоджених: у 1-му − 15, у 2-му − 5, у 3-му − 10 яблук. З одного

ящика (невідомо з якого) виймається одне яблуко. Знайти імовірність того, що: 1) це яблуко ушкоджене; 2) яблуко взяте з першого ящика, якщо воно виявилося ушкодженим.

Варіант 8

1. У колоді 36 карт. Виймають одну карту. Знайти імовірність того, що це буде карта трефової масті.

2. Деякий пристрій складається з двох незалежно працюючих елементів. Імовірність безвідмовної роботи (за термін t) першого та другого елементів відповідно дорівнюють 0,9 та 0,85. Знайти імовірність того, що за термін t безвідмовно будуть працювати: 1) обидва елементи; 2) тільки один елемент; 3) хоча б один елемент; 4) обидва елементи вийдуть з ладу.

3. У лототроні є 30 кульок, помічених номерами від одного до 30. Витягають 5 кульок. Знайти імовірність того, що гравець угадає: 1) всі 5 номерів; 2) три номери із п’яти.

4. У ящику є 6 деталей, вироблених на заводі № 1, 9 деталей, вироблених на заводі № 2 і 10 деталей, вироблених на заводі № 3. Імовірність браку на першому заводі 0,1; на другому − 0,05; на третьому − 0,08. З ящика наугад беруть одну деталь. Знайти імовірність того, що:1) деталь буде придатною; 2) деталь належить першому заводу, якщо вона придатна.

Варіант 9

1. У ящику 30 яблук, серед яких 5 із гниллю. Витягають одне яблуко. Знайти імовірність того, що це буде не гниле яблуко.

2. У майстерні два верстати. Імовірність поломки протягом дня для першого дорівнює 0,1; для другого − 0,05. Знайти імовірність того, що протягом дня: 1) обидва верстати працюватимуть без поломок; 2) тільки один верстат працюватиме без поломок; 3) зламаються обидва верстати; 4) хоча б в одному верстаті виникне поломка.

3. У ящику 18 деталей, серед яких 12 фарбованих. Робітник наугад взяв 4 деталі. Знайти імовірність того, що: 1) всі вони фарбовані; 2) серед них 2 деталі фарбовані.

4. У двох ящиках лежать персики: у першому 18 жовтих і 12 зелених, у другому 22 жовтих і 8 зелених. З одного з цих ящиків (невідомо з якого) наугад виймають один персик. Знайти імовірність того, що: 1) це жовтий персик; 2) персик витягли з першого ящика, якщо він жовтий.

Варіант 10

1. Підкидають гральний кубик. Знайти імовірність того, що випаде число очок, більше 4.

2. Коефіцієнти використовування робочого часу для двох комбайнів відповідно дорівнюють 0,95 та 0,8. Вважаючи, що зупинки в роботі кожного комбайна виникають випадково і незалежно, знайти відповідний час: 1) сумісної роботи комбайнів; 2) роботи тільки одного комбайна; 3) простою всіх комбайнів; 4) роботи хоча б одного комбайна.

3. У колоді 36 карт. Виймають три карти. Знайти імовірність того, що: 1) всі три карти тузи; 2) серед них є один туз.

4. Імовірності влучення у мішень для трьох стрільців дорівнюють: 0,9 − для першого; 0,8 − для другого; 0,5 − для третього. По мішені стріляє один із цих стрільців (невідомо який). Знайти: 1) імовірність влучання у мішень, якщо однаково можливі всі припущення відносно того, який стрілець стріляв; 2) імовірність того, що стріляв перший стрілець, якщо в мішень влучили.

Варіант 11

1. У групі 25 здобувачів. На екзамені отримали „5” три здобувачі; „4” − 9 здобувачів; „3” − 11 здобувачів. Інші здобувачі екзамен не склали. За списком відбирають одного здобувача. Знайти імовірність того, що він не склав екзамен.

2. У двох скриньках по 20 кульок. У першій − 8 білих і 12 чорних, а в другій − 14 білих і 6 чорних. З кожної скриньки виймають по одній кульці. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидві кульки білі; 2) тільки одна кулька біла; 3) білих кульок немає; 4) хоча б одна кулька біла.

3. Серед 15 яблук 5 червивих. Наугад взяли 4 яблука. Знайти імовірність того, що: 1) серед них немає червивих; 2) два яблука червиві.

4. Із заготовленого для посіву пшениці насіння першого сорту становить 30 %, другого сорту – 60 %, третього – 10 %. Схожість насіння першого сорту дорівнює 0,95; другого сорту − 0,8; третього − 0,6. Знайти імовірність того, що: 1) зійде навмання взята насінина; насінина першого сорту, якщо вона зійшла.

Варіант 12

1. Серед 100 лотерейних білетів два виграшних. Покупець придбав один білет. Знайти імовірність того, що він виграє.

2. У двох ящиках по 50 яблук. У першому − 8 уражених яблук, а в другому – 12. З кожного ящика наугад виймається по одному яблуку. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидва яблука не уражені; 2) тільки одне яблуко не уражене; 3) обидва уражені; 4) хоча б одне яблуко не уражене.

3. У групі 20 здобувачів, серед яких 12 хлопців. За списком наугад відбирають 4 особи. Знайти імовірність того, що серед відібраних: 1) всі хлопці; 2) два хлопці.

4. У скриньку, яка містить 4 кульки, поклали одну білу кульку, після чого з неї наугад витягують одну кульку. Знайти імовірність того, що: 1) витягнута кулька біла, якщо однаково можливі всі припущення про початковий склад кульок за кольором; 2) спочатку у скриньці були 3 білі кульки, якщо витягнута кулька виявилася білою.

Варіант 13

1. У лототроні 36 кульок, помічених номерами від 1 до 36. Витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що номер кульки більше 30.

2. Два стрільці стріляють по мішені. Імовірності влучання дорівнюють: для першого стрільця − 0,8; для другого − 0,6. Знайти імовірність того, що: 1) обидва стрільці влучать у мішень; 2) обидва стрільці не влучать у мішень; 3) влучить у мішень тільки один стрілець; 4) хоча б один стрілець влучить у мішень.

3. Серед 15 яблук 5 червивих. Навмання взяли 4 яблука. Знайти імовірність того, що: 1) серед них немає червивих; 2) два яблука червиві.

4. У кожній із двох скриньок є 2 білі і 4 чорні кульки. З першої скриньки навмання витягають одну кульку, яку перекладають у другу скриньку. Після цього з другої скриньки витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що: 1) це чорна кулька; 2) перекладена кулька була чорна, якщо з другої скриньки витягли чорну кульку.

Варіант 14

1. Серед 12 мішків насіння в двох мішках насіння некондиційне. Партію насіння приймають, якщо під час перевірки одного мішка у ньому виявиться кондиційне насіння. Знайти імовірність того, що цю партію насіння приймуть.

2. Схожість першої партії насіння – 0,95, а другої − 0,8. З кожної партії наугад відбирають по одній насінині. Знайти імовірність того,

що з них зійдуть: 1) обидві насінини; 2) тільки одна насінина; 3) жодна насінина; 4) хоча б одна насінина.

3. У скриньці є 18 кульок, серед яких 12 білих та 6 чорних. Зі скриньки наугад виймають 5 кульок. Знайти імовірність того, що: 1) всі ці кульки білі; 2) серед них 3 кульки білі.

4. Два верстати-автомати виробляють однотипні деталі. Продуктивність першого верстата у 2 рази більша продуктивності другого. Імовірність браку на першому верстаті становить 0,12, а на другому − 0,09. Наугад перевіряють одну деталь. Знайти імовірність того, що: 1) деталь буде придатною; 2) деталь вироблена першим верстатом, якщо вона придатна.

Варіант 15

1. У колоді 36 карт. Виймають одну карту. Знайти імовірність того, що це буде король.

2. У кожному з двох ящиків по 20 деталей. У першому ящику − 17, а в другому − 14 фарбованих деталей. Робітник з кожного ящика навмання взяв по одній деталі. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидві деталі фарбовані; 2) тільки одна деталь фарбована; 3) немає фарбованих; 4) хоча б одна деталь фарбована.

3. Серед 15 яблук 5 червиві. Наугад взяли 4 яблука. Знайти імовірність того, що: 1) серед них немає червивих; 2) 2 яблука червиві.

4. У кожному з трьох ящиків є по 40 яблук. З них червивих: у першому − 10, у другому −5, у третьому − 8 яблук. З одного з ящиків (невідомо, з якого) виймають одне яблуко. Знайти імовірність того, що: 1) це яблуко червиве; 2) яблуко взяли з першого ящика, якщо воно виявилося ураженим.

Варіант 16

1. Здобувач вивчив 18 запитань із 24 за програмою. Знайти імовірність того, що він відповість на одне задане запитання.

2. У кожній із двох груп по 20 здобувачів. У першій – 12 хлопців, у другій — 9 хлопців. З кожної групи навмання відбирають по одному здобувачу. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидва хлопці; 2) тільки один хлопець; 3) тільки дівчата; 4) хоча б один хлопець.

3. У корзині 20 плодів, з яких 5 уражені хворобою у прихованій формі. З корзини наугад послідовно виймають 4 плоди. Знайти імовірність того, що серед них: 1) немає уражених; 2) 2 плоди будуть ураженими.

4. У ящику є 8 деталей, вироблених на заводі № 1, 12 деталей, вироблених на заводі № 2, і 10 деталей, вироблених на заводі № 3. Імовірність браку на першому заводі 0,08; на другому− 0,05; на третьому − 0,06. З ящика навмання дістають одну деталь. Знайти імовірність того, що: 1) деталь буде придатною; 2) деталь належить першому заводу, якщо вона придатна.

Варіант 17

1. У скриньці 14 кульок. З них 3 червоні, 7 блакитних і 4 чорні. Дістають одну кульку. Знайти імовірність того, що це кольорова кулька.

2. Певний пристрій складається з двох незалежно працюючих елементів. Імовірність безвідмовної роботи (за термін t) першого та другого елементів відповідно дорівнюють 0,95 та 0,9. Знайти імовірність того, що за термін t безвідмовно будуть працювати: 1) обидва елементи; 2) тільки один елемент; 3) хоча б один елемент; 4) обидва елементи вийдуть з ладу.

3. З колоди, у якій 36 карт, навмання витягають 4 карти. Знайти імовірність того, що: 1) всі чотири карти мають пікову масть; 2) серед них є дві карти пікової масті.

4. У двох ящиках є персики: у першому − 25 жовтих і 15 зелених, у другому − 20 жовтих і 18 зелених. З одного з цих ящиків (невідомо, з якого) навмання виймають один персик. Знайти імовірність того, що: 1) це жовтий персик; 2) персик дістали з першого ящика, якщо він жовтий.

Варіант 18

1. Підкидають гральний кубик. Знайти імовірність того, що випаде непарне число очок.

2. У майстерні 2 верстати. Імовірність поломки протягом дня для першого верстата дорівнює 0,08; для другого − 0,12. Знайти імовірність того, що протягом дня: 1) обидва верстати працюватимуть без поломок: 2) тільки один верстат працюватиме без поломок; 3) зламаються обидва верстати; 4) хоча б в одному верстаті виникне поломка.

3. У ящику 20 деталей, серед яких 12 фарбованих. Робітник навгад взяв 3 деталі. Знайти імовірність того, що: 1) всі вони фарбовані; 2) серед них 2 деталі фарбовані.

4. Імовірності влучання у мішень для трьох стрільців дорівнюють: 0,95 − для першого, 0,85 − для другого, 0,7 − для третього. У мішень стріляє один з цих стрільців (невідомо який). Знайти: 1) імовірність влучання у мішень, якщо однаково можливі всі припущення відносно того, який стрілець стріляв: 2) імовірність того, що стріляв перший стрілець, якщо в мішень влучили.

Варіант 19

1. У середньому в серпні спостерігають 6 дощових днів. Знайти імовірність того, що в серпні дощитиме.

2. Коефіцієнти використовування робочого часу для двох комбайнів відповідно дорівнюють 0,85 і 0,75. Вважаючи, що зупинки в роботі кожного комбайна виникають випадково і незалежно, знайти відповідний час: 1) сумісної роботи комбайнів; 2) роботи тільки одного комбайна; 3) простою всіх комбайнів; 4) роботи хоча б одного комбайна.

3. У групі 25 здобувачів, серед яких 12 хлопців. За списком навгад відбирають 3 особи. Знайти імовірність того, що серед відібраних: 1) всі хлопці; 2) 2 хлопці.

4. У скриньку, яка містить 2 кульки, поклали одну білу кульку, після чого з неї навмання дістали одну кульку. Знайти імовірність того, що: 1) витягнута кулька біла, якщо однаково можливі всі припущення про початковий склад кульок за кольором; 2) спочатку у скриньці було 2 білі кульки, якщо кулька, яку дістали, виявилася білою.

Варіант 20

1. У ящику 24 деталі, серед яких 3 браковані. Робітник дістає одну деталь. Знайти імовірність того, що це не бракована деталь.

2. У двох скриньках по 15 кульок. У першій − 8 білих і 7 чорних, а в другій − 10 білих і 5 чорних. З кожної скриньки навмання виймають по одній кульці. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидві кульки білі; 2) тільки одна кулька біла; 3) білих кульок немає; 4) хоча б одна біла кулька.

3. Серед 18 яблук 6 червиві. Навмання взяли 3 яблука. Знайти імовірність того, що: 1) серед них немає червивих; 2) 2 яблука червиві.

4. Із заготовленого для посіву пшениці насіння першого сорту становить 50 %, другого – 30 %, третього сорту – 20 %. Схожість насіння першого сорту дорівнює 0,9; другого − 0,8; третього сорту −

0,65. Знайти імовірність того, що: 1) зійде навмання взята насінина; 2) насінина — першого сорту, якщо вона зійшла.

Варіант 21

1. У лототроні 26 кульок, помічених номерами від 1 до 26. Витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що номер кульки ділиться на 4.

2. У двох ящиках по 30 яблук. У першому − 6, а в другому − 10 пошкоджених яблук. З кожного ящика наугад виймається по одному яблуку. Знайти імовірності того, що серед них: 1) обидва яблука непошкоджені; 2) тільки одне яблуко непошкоджене; 3) обидва пошкоджені; 4) хоча б одне яблуко непошкоджене.

3. У скриньці є 18 деталей, серед яких 4 браковані. Робітник навмання взяв 3 деталі. Знайти імовірність того, що: 1) всі ці деталі придатні; 2) серед них одна бракована деталь.

4. У кожній з двох скриньок є 3 білі і 2 чорні кульки. З першої скриньки навмання витягають одну кульку, яку перекладають у другу скриньку. Після цього з другої скриньки витягають одну кульку. Знайти імовірність того, що: 1) це чорна кулька; 2) перекладена кулька була чорна, якщо з другої скриньки витягли чорну кульку.

Варіант 22

1. У колоді 36 карт. Виймають одну карту. Знайти імовірність того, що це буде карта пікової масті.

2. Два стрільці стріляють по мішені. Імовірності влучання дорівнює: для першого стрільця – 0,7, для другого − 0,4. Знайти імовірність того, що: 1) обидва стрільці влучать у мішень; 2) влучить у мішень тільки один стрілець; 3) обидва стрільці не влучать у мішень; 4) хоча б один стрілець влучить у мішень.

3. У лототроні є 20 кульок, помічених номерами від 1 до 20. Із лототрону виймають 4 кульки. Знайти імовірність того, що гравець угадає: 1) всі 4 номери; 2) 3 номери з 4.

4. Два верстати-автомати виробляють однотипні деталі. Продуктивність першого верстата у 3 рази більша від продуктивності другого. Імовірність браку на першому верстаті становить 0,15, а на другому − 0,08. Навмання перевіряють одну деталь. Знайти імовірність того, що: 1) деталь буде придатною; 2) деталь вироблена першим верстатом, якщо вона придатна.

Варіант 23

1. У ящику 40 яблук, серед яких 6 гнилих. Витягають одне яблуко. Знайти імовірність того, що це буде негниле яблуко.

2. Схожість першої партії насіння 0,8, а другої – 0,65. З кожної партії наугад відбирають по одній насінині. Знайти імовірності того, що з них зійдуть: 1) обидві насінини; 2) тільки одна насінина; 3) жодна насінина; 4) хоча б одна насінина.

3. У скриньці є 15 кульок, серед яких 10 білих та 5 чорних. Зі скриньки навмання виймають 4 кульки. Знайти імовірність того, що: 1) всі ці кульки білі; 2) серед них 2 кульки білі.

4. У ящику є 10 деталей, вироблених на заводі № 1, 12 деталей, вироблених на заводі № 2, і 18 деталей, вироблених на заводі № 3. Імовірність браку на першому заводі − 0,05; на другому − 0,08; на третьому − 0,04. Зі скриньки навмання витягають одну деталь. Знайти імовірність того, що: 1) деталь буде придатною; 2) деталь належить першому заводу, якщо вона придатна.

Варіант 24

1. Підкидають гральний кубик. Знайти імовірність того, що випаде число очок, менше ніж 4.

2. У кожному з двох ящиків по 15 деталей. У першому ящику − 12, у другому − 10 фарбованих деталей. Робітник з кожного ящика наугад взяв по одній деталі. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидві деталі фарбовані; 2) тільки одна деталь фарбована; 3) немає фарбованих; 4) хоча б одна деталь фарбована.

3. З колоди, у якій 36 карт, наугад витягають 5 карт. Знайти імовірність того, що: 1) всі п’ять карт мають бубнову масть; 2) серед них є дві карти бубнової масті.

4. У кожному з трьох ящиків є по 100 яблук. З них червивих: у першому − 15, у другому − 24, у третьому −18 яблук. З одного з ящиків (невідомо з якого) виймають одне яблуко. Знайти імовірність того, що: 1) це яблуко червиве; 2) яблуко взяли з першого ящика, якщо воно виявилося червивим.

Варіант 25

1. У групі 24 здобувачі. На екзамені оцінку „5” отримали 4 здобувачі, „4” − 8 здобувачів, „3” – 10 здобувачів. Інші здобувачі екзамен не склали. За списком відбирають одного здобувача. Знайти імовірність того, що він не склав екзамен.

2. Пристрій складається з двох незалежно працюючих елементів. Імовірність безвідмовної роботи (за термін *t*) першого та другого елементів відповідно дорівнюють 0,85 та 0,8. Знайти імовірність того, що за термін *t* безвідмовно будуть працювати: 1) обидва елементи; 2) тільки один елемент; 3) хоча б один елемент; 4) обидва елементи вийдуть з ладу.

3. У корзині 25 плодів, з яких 5 уражено хворобою у прихованій формі. З корзини наугад послідовно виймають 3 плоди. Знайти імовірність того, що серед них: 1) немає уражених; 2) 2 плоди будуть уражені.

4. Імовірності влучання в мішень для трьох стрільців дорівнюють: 0,7 − для першого, 0,9 − для другого, 0,4 − для третього. По мішені стріляє один з цих стрільців (невідомо який). Знайти: 1) імовірність влучання у мішень, якщо однаково можливі всі припущення відносно того, який стрілець стріляв; 2) імовірність того, що стріляв перший стрілець, якщо в мішень влучили.

Варіант 26

1. Серед 8 мішків насіння в двох мішках насіння некондиційне. Партію насіння приймають, якщо під час перевірки одного мішка у ньому виявиться кондиційне насіння. Знайти імовірність того, що цю партію насіння приймуть.

2. У кожній з двох груп по 24 здобувачі. У першій − 16, у другій − 12 хлопців. З кожної групи наугад відбирають по одному здобувачу. Знайти імовірність того, що серед них: 1) обидва хлопці; 2) тільки один хлопець; 3) тільки дівчата; 4) хоча б один хлопець.

3. У лототроні є 25 кульок, помічених номерами від 1 до 25. Із лототрону виймають 4 кульки. Знайти імовірність того, що гравець угадає: 1) всі 4 номери; 2) 2 номери з 4.

4. Із заготовленого для посіву пшениці насіння першого сорту становить 35 %, другого – 45 %, третього – 20 %. Схожість насіння першого сорту дорівнює 0,92; другого сорту — 0,75; третього − 0,65. Знайти ймовірність того, що: 1) зійде навмання взята насінина; 2) насінина − першого сорту, якщо вона зійшла.

Глава 3. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Нехай проводять декілька випробувань, причому імовірність події A в кожному з них не залежить від наслідків інших випробувань, тобто є випробування, *незалежні відносно події А*. У різних незалежних випробуваннях подія A може мати або різні імовірності, або однакові. Далі будемо розглядати лише такі незалежні випробування, де подія A має кожного разу одну й ту саму імовірність.

§ 1. Формула Бернуллі

Нехай проводять n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися або не відбутися. Припустимо, що імовірність появи події A в кожному випробуванні однакова і дорівнює p. Отже, імовірність непояви події A в кожному випробуванні теж стала і дорівнює $q = 1 - p$.

Як обчислити імовірність $P_n(k)$ того, що при n випробуваннях подія A відбудеться рівно k разів і, відповідно, не відбудеться $n-k$ разів? Якщо нас не цікавить, у якій послідовності події A і $\overline{A}$ чергуються між собою, то відповідь на запитання дає формула Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \equiv \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k},$$

де умовно приймають, що $0! = 1$.

Приклад 1. Схожість насіння дорівнює 80 %. Для дослідів відбирають п'ять насінин. Знайти імовірність того, що буде чотири паростки.

Розв'язання. Імовірність того, що одна будь-яка насінина проросте (подія *А*), дорівнює *P(A)* = p = 0,8. Відповідно, якщо вона не проросте (подія $\overline{A}$), то імовірність дорівнює $P(\overline{A}) = q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Оскільки проростання різних насінин – події незалежні, то імовірність $P_5(4)$ того, що з п'яти насінин проростуть чотири і не проросте одна, за формулою Бернуллі дорівнює:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}8)^4 \cdot (0{,}2)^1 = 5 \cdot 0{,}4096 \cdot 02 = 0{,}4096.$$

§ 2. Локальна теорема Лапласа

Користуватися формулою Бернуллі у разі великих значень n досить важко, адже для цього потрібні розрахунки з величезними числами. Наприклад, щоб знайти $P_{50}(20)$ при $n = 50,\ k = 20,\ p = 0{,}2$, потрібно обчислити вираз:

$$P_{50}(20) = \frac{50!}{20! \cdot 30!} \cdot (0{,}2)^{20} \cdot (0{,}8)^{30},$$

де $50! = 30414093 \cdot 10^{57}$; $30! = 26525286 \cdot 10^{25}$; $20! = 24329020 \cdot 10^{11}$.

У 1783 р. Лаплас довів теорему, за допомогою якої формулу Бернуллі при великих n і k можна значно спростити.

Теорема (без доведення). Якщо імовірність p появи події A в кожному випробуванні незмінна і відрізняється від нуля та одиниці, то імовірність $P_n(k)$ того, що подія A з'явиться в n випробуваннях рівно k разів, приблизно дорівнює (чим більше n, тим точніше):

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

$$\text{де} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

У кінці контрольних завдань розміщено значення функції $\varphi(x)$, що відповідають додатним значенням аргументу x (додаток А). Для від'ємних значень аргументу використовують ті самі таблиці, оскільки функція $\varphi(x)$ парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад. Імовірність влучення у мішень стрільцем при одному пострілі р = 0,75. Знайти імовірність того, що при 10 пострілах стрілець влучить у мішень вісім разів.

Розв'язання. Згідно з умовами задачі:

$n = 10,\ k = 8,\ p = 0{,}75,\ q = 0{,}25$. Використаємо асимптотичну формулу Лапласа:

$$P_{10}(8) \approx \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \cdot \varphi(x) = 0{,}7301 \cdot \varphi(x).$$

Знайдемо тепер значення x:

$$x = \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{npq}} = \frac{8 - 10 \cdot 0{,}75}{\sqrt{10 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 0{,}36.$$

З табл. 1 знаходимо $\varphi(0{,}36) = 0{,}3739$.Тоді шукана імовірність:

$$P_{10}(8) = 0{,}7301 \cdot 0{,}3739 = 0{,}273.$$

З точної формули Бернуллі можна знайти, що $P_{10}(8) = 0{,}282$. Така розбіжність відповідей (близько 0,009) пов'язана з тим, що у цьому прикладі значення n не дуже велике.

§ 3. Інтегральна теорема Лапласа

Припустимо знову, що проводять n випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A постійна і дорівнює $p (0 < p < 1)$. Як знайти при цьому імовірність $P_n(k_1,\, k_2)$ того, що подія A відбудеться в n випробуваннях не менше k_1 і не більше k_2 разів (тобто від k_1 до k_2 разів). На це питання відповідає інтегральна теорема Лапласа.

Теорема (без доказу). Якщо імовірність p появи події A в кожному випробуванні незмінна і відрізняється від нуля та одиниці, то імовірність $P_n(k_1,\, k_2)$ того, що подія A відбудеться в n випробуваннях від k_1 до k_2 разів, приблизно дорівнює визначеному інтегралу:

$$P_n(k_1,\, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot d\,z,$$

де $$x_1 = \frac{k_1 - n\,p}{\sqrt{npq}} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{k_2 - n\,p}{\sqrt{npq}}.$$

Якщо ввести функцію Лапласа $\Phi(x)$ згідно з визначенням

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot d\,z,$$

то інтегральну теорему Лапласа можна записати у зовсім простій формі:

$$P_n(k_1,\, k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

У кінці контрольних завдань наведено значення функції $\Phi(x)$ (дод. Б) для додатних значень x і для $x = 0$. При цьому для $x < 0$ використовують ту саму таблицю, враховуючи непарність функції: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. У дод. Б значення інтеграла обмежено умовою $x \le 5$, адже для $x > 5$ можна прийняти: $\Phi(x) = 0{,}5$.

Приклад. Частина плодів, заражених у прихованій формі, становить 20 %. Випадково відбирають 2500 плодів. Знайти імовірність того, що серед відібраних ураженими будуть не менше 480 і не більше 540 плодів.

Розв'язання. Імовірність того, що кожний випадково відібраний плід є ураженим (подія A), дорівнює $p = 0{,}2$. Тоді $q = 1 - p = 0{,}8$, $n = 2500$, $k_1 = 480$, $k_2 = 540$. Оскільки $n \cdot p = 500 >> 1$, можна скористатися інтегральною теоремою Лапласа. Значення аргументів дорівнюють:

$$x_1 = \frac{480-500}{\sqrt{500 \cdot 0{,}8}} = -\frac{20}{\sqrt{400}} = -1; \qquad x_2 = \frac{540-500}{\sqrt{400}} = \frac{40}{20} = 2.$$

Ураховуючи непарність функції Лапласа $\Phi(x_1) = \Phi(-1) = -\Phi(1)$ і використовуючи дані додатка Б: Ф(1) = 0,3413, Ф(2) = 0,4772, отримаємо шукану імовірність.

§ 4. Формула Пуассона. Найпростіший потік подій

Локальна теорема Лапласа не спрацьовує при дуже малих значеннях $p << 1$, коли добуток $n \cdot p = \lambda_o$ стає порівняним з одиницею, $\lambda_o \approx 1$, а також при $k \approx 1$. Якщо зробити припущення, що у разі зростання n величина λ_o не змінюється, то з формули Бернуллі можна вивести асимптотичну формулу Пуассона для обчислення імовірності $P_n(k)$ того, що при n повторних незалежних випробувань, подія A з'явиться рівно k разів:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda_o^k \cdot e^{-\lambda_o}}{k!}.$$

Існують спеціальні таблиці, з яких можна знайти $P_n(k)$ при заданих λ_o і k.

Приклад 1. Серед насіння проса 0,02 % бур'янів. Яка імовірність того, що при випадковому відборі 10000 насінин буде виявлено п'ять насінин бур'янів ?

Розв'язання. Оскільки $n = 10000 >> 1$, $p = 0{,}0002 << 1$, $k = 5$ і $n \cdot p = \lambda_o = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$, то слід скористатися формулою Пуассона. Тоді шукана імовірність буде:

$$P_{10000}(5) = \frac{2^5 \cdot e^{-2}}{5!} = \frac{32 \cdot e^{-2}}{120} = \frac{4}{15 \cdot e^2} \approx \frac{4}{15 \cdot 7{,}39} \approx 0{,}036.$$

Потоком (течією) подій називають послідовність подій, які настають у випадкові моменти часу. Приклади: надходження викликів на АТС, на пункт невідкладної медичної допомоги, прибуття літаків до аеропорту, поява покупців у крамниці тощо. Потоки подій можуть мати властивості стаціонарності, відсутності післядій та ординарності.

Стаціонарність – властивість, яка полягає в тому, що імовірність появи k подій за відрізок часу t є функцією, що залежить тільки від k і t і не залежить від початку відліку часу t.

Відсутність післядій – властивість, яка полягає в незалежності імовірності появи k подій на будь-якому відрізку часу t від того, з'являлися або ні події у моменти часу, що трапилися перед початком проміжку t.

Ординарність – властивість, яка полягає в тому, що за нескінченно малий проміжок часу t може з'явитися не більше однієї події.

Найпростішим (пуассоновським) потоком (течією) подій називають той, що має властивості стаціонарності, відсутності післядій та ординарності.

Інтенсивністю потоку (течії) λ називають середнє число подій, що відбуваються за одиницю часу.

Імовірність того, що за відрізок часу t відбудеться рівно k подій у випадку найпростішого потоку подій визначають формулою Пуассона:

$$P_t(k) = \frac{(\lambda \cdot t)^k \cdot e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Приклад. Середня кількість заявок, що надходять до складу протягом місяця, дорівнює двом. Знайти імовірність того, що протягом півмісяця надійде не більше однієї заявки.

Розв'язання. Поняття „не більше однієї" $(k \le 1)$ охоплює випадки $k=0$ i $k=1$. Оскільки інтенсивність потоку $\lambda = 2$ 1/місяць, то при $t = 0{,}5$ місяця маємо: $\lambda t = 1$. Тоді згідно з формулою Пуассона:

$$P_{0,5}(0) = \frac{1^0 \cdot e^{-1}}{0!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368\ , \qquad (0! = 1),$$

$$P_{0,5}(1) = \frac{1^1 \cdot e^{-1}}{1!} = \frac{1}{e} \approx 0{,}368\ .$$

Шукана відповідь:

$$P_{0,5}(k \le 1) = P_{0,5}(0) + P_{0,5}(1) = 2 \cdot 0{,}368 = 0{,}736.$$

Найпростіший потік подій на площині. Якщо події відбуваються у випадкових місцях площини і λ_1 – середня кількість подій, які трапляються на одиниці площі (інтенсивність подій), то імовірність того, що на площу S припадає рівно k подій, теж визначають формулою Пуассона:

$$P_S(k)=\frac{(\lambda_1\cdot S)^k\cdot e^{-\lambda_1\cdot S}}{k!}.$$

Приклад 2. На полі середня кількість бур'янів на 1 м^2 дорівнює трьом. Яка імовірність того, що на площі 0,5 м^2 знаходиться одна бур'янина ?

Розв'язання. Тут інтенсивність подій $\lambda_1=3\cdot 1/\text{м}^2, S=0{,}5\,\text{м}^2$, $k=1$. Тоді $\lambda_1 S=3\cdot 0{,}5=1{,}5$ і шукана імовірність становить:

$$P_{0,5}(1)=\frac{(1{,}5)^1 e^{-1{,}5}}{1!}=\frac{1{,}5}{e^{1{,}5}}\approx\frac{1{,}5}{4{,}48}\approx 0{,}33.$$

Найпростіший потік подій у об'ємі. Якщо події відбуваються у випадкових точках об'єму і λ_2 – середня інтенсивність подій, то імовірність того, що в об'ємі V відбудеться рівно k подій, знову визначають формулою Пуассона:

$$P_V(k)=\frac{(\lambda_2\cdot V)^k\cdot e^{-\lambda_2\cdot V}}{k!}.$$

Приклад 3. Десь у космічному просторі на 1 м^3 об'єму припадає в середньому два іони. Знайти імовірність того, що в 0,5 м^3 буде три іони.

Розв'язання. Інтенсивність подій $\lambda_2=2$ іон/м^3, $V-0{,}5\,\text{м}^3$, $k=3$. Тоді $\lambda_2 V=2\cdot 0{,}5=1$ і шукана імовірність дорівнює:

$$P_{0,5}(3)=\frac{1^3 e^{-1}}{3!}=\frac{1}{6\cdot e}\approx 0{,}061.$$

Контрольна робота № 2

Варіант 1

1. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. Роблять 6 пострілів. Знайти імовірність влучання в мішень: 1) п'ятьма пострілами; 2) не менше, ніж п'ятьма пострілами.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,25. Знайти імовірність того, що за 150 діб цього періоду споживання електроенергії буде нормальним протягом: 1) 100 діб; 2) не менше 120 діб.

3. Частка браку деяких виробів становить 0,02. Для перевірки відбирають 100 виробів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один бракований виріб; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Схожість насіння дорівнює 0,78. Для перевірки на схожість відбирають 600 насінин. Знайти імовірність того, що відносна частота сходів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 2 %.

Варіант 2

1. Імовірність перевитрати електроенергії за добу дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що з 5 діб споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) чотирьох діб; 2) не менше чотирьох діб.

2. Схожість насіння дорівнює 0,8. Для перевірки на схожість відбирають 400 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 310 насінин; 2) не менше 300 і не більше 350 насінин.

3. Завод відправив на базу 500 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі становить 0,002. Знайти імовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: 1) не більше одного виробу; 2) хоча б один виріб.

4. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,7. Знайти імовірність того, що при 200 пострілах відносна частота влучання в мішень відхилиться від імовірності не більше ніж на 5 %.

Варіант 3

1. Схожість насіння дорівнює 0,8. Для перевірки на схожість відбирають 6 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 5 насінин; 2) не менше 5 насінин.

2. Монету підкидають 100 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 50 разів; 2) не менше 40 і не більше 55 разів.

3. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що вироблена деталь бракована, дорівнює 0,01. Знайти імовірність того, що серед 200 відібраних на перевірку деталей буде: 1) не більше одного бракованого виробу; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що за 150 діб цього періоду відносна частота перевитрат відхилиться від імовірної не більше ніж на 5 %.

Варіант 4

1. Монету підкидають 8 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 4 рази; 2) 5 разів.

2. Гральний кубик підкидають 125 разів. Знайти імовірність того, що „6" випаде: 1) 20 разів; 2) не менше 20 і не більше 30 разів.

3. Частка автомобілів, що потрапляють в аварію на певній ділянці дороги дорівнює 0,0002. Знайти імовірність того, що серед 10000 автомобілів, що проїжджають по цій ділянці дороги, в аварію потрапить: 1) не більше одного автомобіля; 2) хоча б один автомобіль.

4. Схожість насіння дорівнює 0,8. Для перевірки на схожість відбирають 400 насінин. Знайти імовірність того, що відносна частота сходів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 4 %.

Варіант 5

1. Гральний кубик підкидають 6 разів. Знайти імовірність того, що „5" випаде: 1) один раз; 2) хоча б один раз.

2. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,2. Для перевірки випадково відбирають 100 плодів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) 20 уражених плодів; 2) не більше 25 уражених плодів.

3. Імовірність виграшу в лотерею становить 0,0002. Знайти імовірність того, що з 5000 лотерейних білетів виграє: 1) один білет; 2) хоча б один білет.

4. Монету підкидають 150 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи герба відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 6 %.

Варіант 6

1. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,25. Випадково відбирають 5 плодів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один уражений плід; 2) хоча б один уражений плід.

2. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Роблять 200 пострілів. Знайти імовірність влучання в мішень: 1) 155 пострілами; 2) не менше, ніж 150 і не більше, ніж 175 пострілами.

3. До торговельного кіоску за годину в середньому підходять шість покупців. Знайти імовірність того, що за 10 хвилин до торговельного кіоску підійде: 1) не більше одного покупця; 2) хоча б один покупець.

4. Гральний кубик підкидають 100 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи „1” відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 10 %.

Варіант 7

1. У приміщенні встановлено 5 протипожежних датчиків. Імовірність спрацювання при пожежі кожного з датчиків дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що при пожежі спрацюють: 1) три датчики; 2) хоча б один датчик.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,2. Знайти імовірність того, що за 140 діб цього періоду споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) 110 діб; 2) не менше 120 діб.

3. Під час визначення зараженості борошна виявлено, що в 1 кг є в середньому один шкідник. Знайти імовірність того, що у 2 кг борошна не буде жодного шкідника.

4. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,1. Для перевірки на ураженість випадково відбирають 200 плодів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи уражених плодів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 4 %.

Варіант 8

1. Здобувачу на іспиті запропоновано 6 тестових запитань. Кожне із запитань має 4 варіанти відповіді. Знайти імовірність того, що здобувач із 6 вкаже: 1) дві правильні відповіді; 1) хоча б одну правильну відповідь, якщо відомо, що здобувач до екзаменів не готувався і відповіді вказував випадково.

2. Схожість насіння дорівнює 0,9. Для перевірки на схожість відбирають 300 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 265 насінин; 2) не менше 260 і не більше 275 насінин.

3. Частка браку деяких виробів становить 0,01. Для перевірки відбирають 200 виробів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один бракований виріб; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що при 250 пострілах відносна частота влучання у мішень відхилиться від імовірності не більше ніж на 4 %.

Варіант 9

1. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Роблять 5 пострілів. Знайти імовірність влучання в мішень: 1) чотирма пострілами; 2) не менш ніж чотирма пострілами.

2. Монету підкидають 150 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 70 разів; 2) не менше 60 і не більше 80 разів.

3. Завод відправив на базу 1000 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі становить 0,002. Знайти імовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: 1) не більш одного виробу; 2) хоча б один виріб.

4. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,25. Знайти імовірність того, що за 150 діб цього періоду відносна частота перевитрат відхилиться від імовірності не більше ніж на 6 %.

Варіант 10

1. Імовірність перевитрати електроенергії за добу дорівнює 0,25. Знайти імовірність того, що за 5 діб споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) чотирьох діб; 2) не менше чотирьох діб.

2. Гральний кубик підкидають 120 разів. Знайти імовірність того, що „4” випаде: 1) 20 разів; 2) не менше 15 і не більше 30 разів.

3. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що вироблена деталь бракована, дорівнює 0,002. Знайти імовірність того, що серед 500 відібраних на перевірку деталей буде: 1) не більше одного бракованого виробу; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Схожість насіння дорівнює 0,85. Для перевірки на схожість відбирають 300 насінин. Знайти імовірність того, що відносна частота сходів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 5 %.

Варіант 11

1. Схожість насіння дорівнює 0,9. Для перевірки на схожість відбирають 5 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 4 насінини; 2) не менше 4-х насінин.

2. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,15. Для перевірки випадково відбирають 200 плодів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) 25 уражених плодів; 2) не більше 30 уражених плодів.

3. Частка автомобілів, що потрапляють в аварію на певній ділянці дороги, дорівнює 0,0001. Знайти імовірність того, що серед 10000

автомобілів, що проїжджають по цій ділянці дороги, в аварію потрапить: 1) не більше одного автомобіля; 2) хоча б один автомобіль.

4. Монету підкидають 200 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи герба відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 4 %.

Варіант 12

1. Монету підкидають 6 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 4 рази; 2) 5 разів.

2. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,75. Роблять 100 пострілів. Знайти імовірність влучання у мішень: 1) 80 пострілами; 2) не менше, ніж 70, і не більше, ніж 85 пострілами.

3. Імовірність виграшу в лотерею становить 0,0005. Знайти імовірність того, що з 2000 лотерейних білетів виграє: 1) один білет; 2) хоча б один білет.

4. Гральний кубик підкидають 150 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи одиниці відхилиться від сталої ймовірності не більше ніж на 8 %.

Варіант 13

1. Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти імовірність того, що „6" випаде: 1) один раз; 2) хоча б один раз.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,15. Знайти імовірність того, що за 145 діб цього періоду споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) 125 діб; 2) не менше 120 діб.

3. До торговельного кіоску за годину в середньому підходять 12 покупців. Знайти імовірність того, що за 10 хвилин до торговельного кіоску підійде: 1) не більше одного покупця; 2) хоча б один покупець.

4. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,15. Для перевірки на ураженість випадково відбирають 300 плодів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи уражених плодів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 5 %.

Варіант 14

1. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,2. Випадково відбирають 6 плодів. Знайти імовірність того,

що серед них буде: 1) один уражений плід; 2) хоча б один уражений плід.

2. Схожість насіння дорівнює 0,85. Для перевірки на схожість відбирають 500 насінин. Знайти імовірність того, що проростуть: 1) 420 насінин; 2) не менше 400 і не більше 430 насінин.

3. Під час визначення ураженості борошна виявлено, що в 1 кг є в середньому два шкідника. Знайти імовірність того, що у 2 кг борошна не буде жодного шкідника.

4. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,75. Знайти імовірність того, що при 160 пострілах відносна частота влучання у мішень відхилиться від імовірності не більше ніж на 7 %.

Варіант 15

1. У приміщенні встановлено 6 протипожежних датчиків. Імовірність спрацювання при пожежі кожного з датчиків дорівнює 0,75. Знайти імовірність того, що при пожежі спрацюють: 1) рівно 4 датчики; 2) хоча б один датчик.

2. Монету підкидають 300 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 145 разів; 2) не менше 140 і не більше 155 разів.

3. Частка браку деяких виробів становить 0,03. Для перевірки відбирають 100 виробів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один бракований виріб; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,15. Знайти імовірність того, що за 145 діб цього періоду відносна частота перевитрат відхилиться від імовірної не більше ніж на 6 %.

Варіант 16

1. Здобувачу на іспиті запропоновано 7 тестових запитань. Кожне із запитань має 4 варіанти відповіді. Знайти імовірність того, що здобувач вкаже: 1) 2 правильні відповіді: 1) хоча б одну правильну відповідь, якщо відомо, що здобувач до екзаменів не готувався і відповіді вказував випадково.

2. Гральний кубик підкидають 150 разів. Знайти імовірність того, що „1” випаде: 1) 30 разів; 2) не менше 22 разів.

3. Завод відправив на базу 200 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі становить 0,005. Знайти імовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: 1) не більше одного виробу; 2) хоча б один виріб.

4. Схожість насіння дорівнює 0,85. Для перевірки на схожість відбирають 600 насінин. Знайти імовірність того, що відносна частота сходів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 3 %.

Варіант 17

1. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Роблять 4 постріли. Знайти імовірність влучання у мішень: 1) трьома пострілами; 2) не менше ніж трьома пострілами.

2. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,14. Для перевірки випадково відбирають 400 плодів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) 55 уражених плодів; 2) не більше 60 уражених плодів.

3. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що вироблена деталь бракована, дорівнює 0,01. Знайти імовірність того, що серед 100 відібраних на перевірку деталей буде: 1) не більше одного бракованого виробу; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Монету підкидають 250 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появ герба відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 3 %.

Варіант 18

1. Імовірність перевитрати електроенергії за добу дорівнює 0,3. Знайти імовірність того, що з 5 діб споживання електроенергії буде нормальним протягом: 1) чотирьох діб; 2) не менше чотирьох діб.

2. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,6. Роблять 140 пострілів. Знайти імовірність влучання у мішень: 1) 85 пострілами; 2) не менше ніж 80 і не більше ніж 95 пострілами.

3. Частка автомобілів, що потрапляють в аварію на певній ділянці дороги, дорівнює 0,001. Знайти імовірність того, що серед 2000 автомобілів, що проїжджають по цій ділянці дороги, в аварію потрапить: 1) не більше одного автомобіля; 2) хоча б один автомобіль.

4. Гральний кубик підкидають 300 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи одиниці відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 6 %.

Варіант 19

1. Схожість насіння дорівнює 0,75. Для перевірки на схожість відбирається 8 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 6 насінин; 2) 5 насінин.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,23. Знайти імовірність того, що за 155 діб цього періоду споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) 120 діб; 2) не менше 125 діб.

3. Імовірність виграшу в лотерею становить 0,002. Знайти імовірність того, що з 500 лотерейних білетів виграє: 1) один білет; 2) хоча б один білет.

4. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,14. Для перевірки на ураженість випадково відбирають 130 плодів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи уражених плодів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 7 %.

Варіант 20

1. Монету підкидають 5 разів. Знайти імовірність того, що герб випаде: 1) 4 рази; 2) 3 рази.

2. Схожість насіння дорівнює 0,75. Для перевірки на схожість відбирають 180 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 130 насінин; 2) не менше 125 і не більше 140 насінин.

3. До торговельного кіоску за годину в середньому підходять 12 покупців. Знайти імовірність того, що за 5 хвилин до торговельного кіоску підійде: 1) не більше одного покупця; 2) хоча б один покупець.

4. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,9. Знайти імовірність того, що при 300 пострілах відносна частота влучання у мішень відхилиться від імовірності не більше ніж на 4 %.

Варіант 21

1. Гральний кубик підкидають 4 рази. Знайти імовірність того, що „3” випаде: 1) один раз; 2) хоча б один раз.

2. Монету підкидають 450 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде: 1) 220 разів; 2) не менше 215 і не більше 230 разів.

3. Під час визначення зараженості борошна виявлено, що у 2 кг є в середньому один шкідник. Знайти імовірність того, що в 4 кг борошна не буде жодного шкідника.

4. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,18. Знайти імовірність того, що за 155 діб цього періоду відносна частота перевитрат відхилиться від імовірної не більше ніж на 6 %.

Варіант 22

1. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,1. Випадково відбирають 4 плоди. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один уражений плід; 2) хоча б один уражений плід.

2. Гральний кубик підкидають 200 разів. Знайти імовірність того, що „6” випаде: 1) 35 разів; 2) не менше 30 і не більше 40 разів.

3. Частка браку деяких виробів становить 0,001. Для перевірки відбирають 2000 виробів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) один бракований виріб; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Схожість насіння дорівнює 0,88. Для перевірки на схожість відбирають 500 насінин. Знайти імовірність того, що відносна частота сходів відхилиться від сталої ймовірності не більше ніж на 2 %.

Варіант 23

1. У приміщенні встановлено 4 протипожежні датчики. Імовірність спрацювання при пожежі кожного з датчиків дорівнює 0,7. Знайти імовірність того, що при пожежі спрацюють: 1) 3 датчики; 2) хоча б один датчик.

2. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,25. Для перевірки випадково відбирають 150 плодів. Знайти імовірність того, що серед них буде: 1) 40 уражених плодів; 2) не більше 35 уражених плодів.

3. Завод відправив на базу 400 виробів. Імовірність пошкодження виробу в дорозі становить 0,0025. Знайти імовірність того, що в дорозі буде пошкоджено: 1) не більше одного виробу; 2) хоча б один виріб.

4. Монету підкидають 340 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появ герба відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 2 %.

Варіант 24

1. Здобувачу на заліку запропоновано 5 тестових запитань. Кожне із запитань має 4 варіанти відповіді. Знайти імовірність того, що здобувач вкаже: 1) дві правильні відповіді; 1) хоча б одну правильну відповідь, якщо відомо, що здобувач до заліку не готувався і відповіді вказував випадково.

2. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,9. Роблять 250 пострілів. Знайти імовірність влучання у мішень: 1) 220 пострілами; 2) не менше, ніж 215 і не більше, ніж 240 пострілами.

3. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що вироблена деталь бракована, дорівнює 0,025. Знайти імовірність того, що

серед 400 відібраних на перевірку деталей буде: 1) не більше одного бракованого виробу; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Гральний кубик підкидають 180 разів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи „1” відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 6 %.

Варіант 25

1. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,75. Роблять 5 пострілів. Знайти імовірність влучання у мішень: 1) трьома пострілами; 2) чотирма пострілами.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,1. Знайти імовірність того, що за 150 діб цього періоду споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) 130 діб; 2) не менше 140 діб.

3. Верстат-автомат штампує деталі. Імовірність того, що вироблена деталь бракована, дорівнює 0,025. Знайти імовірність того, що серед 400 відібраних на перевірку деталей буде: 1) не більше одного бракованого виробу; 2) хоча б один бракований виріб.

4. Частина плодів, уражених хворобою у прихованій формі, становить 0,13. Для перевірки на ураженість випадково відбирають 140 плодів. Знайти імовірність того, що відносна частота появи уражених плодів відхилиться від сталої імовірності не більше ніж на 8 %.

Варіант 26

1. Схожість насіння дорівнює 0,85. Для перевірки на схожість відбирають 5 насінин. Знайти імовірність того, що проросте: 1) 4 насінини; 2) 3 насінини.

2. Імовірність перевитрати електроенергії за добу в осінньо-зимовий період дорівнює 0,1. Знайти імовірність того, що за 150 діб цього періоду споживання електроенергії буде без перевитрат протягом: 1) 130 діб; 2) не менше 140 діб.

3. Імовірність виграшу в лотерею становить 0,0025. Знайти імовірність того, що з 400 лотерейних білетів виграє: 1) один білет; 2) хоча б один білет.

4. Імовірність влучання стрільцем у мішень при одному пострілі дорівнює 0,65. Знайти імовірність того, що у разі 150 пострілів відносна частота влучання у мішень відхилиться від імовірної не більше ніж на 8 %.

Глава 4. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Випадковою називається величина, яка в результаті експерименту може набутии одного і тільки одного можливого значення, яке наперед невідоме і залежить від випадкових факторів. Позначається випадкова величина великими латинськими буквами $X, Y, Z,$ значення цієї величини – відповідними маленькими x_1, x_2, y_1...

Приклад. Кількість пасажирів автобуса – це випадкова величина, якої набуває значення від 0 до, наприклад, 100.

Приклад. Відстань, на яку людина може кинути каміння, – випадкова величина. Вона може прийняти будь-яке значення в деякому інтервалі. Залежно від того, скільки значень набувають випадкові величини в скінченному інтервалі, вони поділяються на *дискретні* та *неперервні*.

§ 1. Дискретна випадкова величина

Випадкова величина називається дискретною, якщо вона набуває окремих ізольованих можливих значень. Кількість таких значень може бути як скінченною, так і нескінченною (у нескінченному інтервалі).

Для того, щоб визначити все про випадкову величину, недостатньо перелічити усі можливі значення, яких вона набуває, тому що кожне значення настає зі своєю ймовірністю. Тобто для того, щоб задати дискретну випадкову величину, необхідно перелічити усі її можливі значення та вказати ймовірність кожного значення. Таким чином, це поняття закону розподілу дискретної випадкової величини.

Законом розподілу дискретної випадкової величини називається співвідношення між можливими значеннями цієї величини і їх імовірностями. Його можна задати таблицею, аналітично або графічно.

Закон розподілу у *табличному* вигляді записують як таблицю з двох рядків. У першому розміщують усі можливі значення, у другому – їх імовірності.

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Оскільки при одному випробуванні здійснюється одна і тільки одна з подій $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$, то ці події становлять повну групу несумісних подій, отже, сума їх імовірностей дорівнює одиниці:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Приклад 1. У комплекті деталей 25 % нестандартних. Відбирають чотири деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості нестандартних деталей серед відібраних.

Розв'язання. За формулою Бернуллі маємо:

$$n = 4; \quad p = \frac{1}{4}; \quad q = 1 - p = \frac{3}{4}; \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

$$P_4(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256},$$

$$P_4(1) = C_4^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128},$$

$$P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64},$$

$$P_4(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{256}.$$

Тоді закон розподілу випадкової величини X має такий вигляд:

x	0	1	2	3	4
p	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

Контроль:

$$\frac{81}{256} + \frac{27}{64} + \frac{27}{128} + \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{1}{256}(81 + 108 + 54 + 12 + 1) = 1.$$

Приклад 2. У лотереї 100 білетів. Розігрують один виграш 50 грн, два – по 20 грн і 10 − по 1 грн. Знайти закон розподілу випадкової величини X – суми виграшу для одного білета.

Розв'язання. Випадкова величина X має чотири можливі значення: 50, 20, 1, 0. Імовірність кожного з них знаходять за класичним визначенням імовірності:

$$P_i = \frac{m_i}{n},$$

де $n = 100$ – загальна кількість білетів; m_i – кількість білетів з цим виграшем. Тоді маємо розподіл:

x	0	1	20	50
p	0,87	0,1	0,02	0,01

Для перевірки знайдемо суму імовірностей:

$$\sum_{i=1}^{i=4} P_i = 0{,}87 + 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}01 = 1.$$

Багатокутник розподілу

Багатокутник розподілу – це графічний засіб завдання закону розподілу. По горизонтальній осі відкладають значення x_i, по вертикальній – імовірності p_i. Таким чином, кожному можливому значенню випадкової величини відповідає точка на площині з координатами x_i, p_i. Якщо точки послідовно з'єднати відрізками, то отримана ламана називається *багатокутником розподілу.*

Приклад 3. Побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X, яку задано таблицею:

x	1	3	7
p	0,1	0,4	0,5

Розв'язання. Див. рис. 1

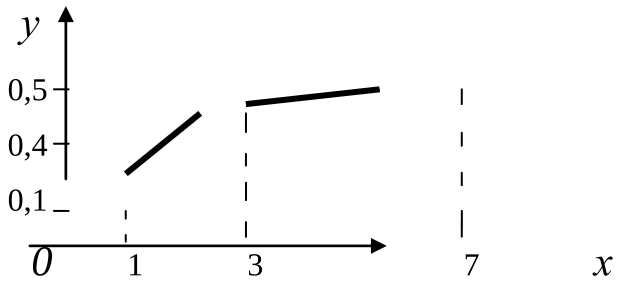


Рис. 1

Біномний розподіл

Нехай здійснюється n повторних незалежних випробувань, у кожному з яких подія A з'являється з імовірністю p. Знайдемо закон розподілу випадкової величини X – число появ події А у цих випробуваннях. Випадкова величина X може набути $n+1$ можливе значення: $x_1 = 0,\quad x_2 = 1, \ldots ,\ x_{n+1} = n$. Імовірність кожного значення знаходять за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k\ p^k q^{n-k}, \qquad \text{де} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Ця формула є аналітичним засобом завдання шуканого закону розподілу.

Біномним (біноміальним) називають розподіл імовірностей дискретної випадкової величини, що визначають за формулою Бернуллі.

x	0	1	...	n
p	$C_n^0 q^n$	$C_n^1 p q^{n-1}$	...	$C_n^n\ p^n$

Контроль:

$$C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + \ldots + C_n^n\ p^n = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Приклад 4. Імовірність схожості пшениці дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа проростих зерен з трьох висаджених у землю.

Розв'язання. Число проростих зерен k може набувати чотирьох значень: $k = 0, 1, 2, 3$. Оскільки імовірність проростання однієї зернини $p = 0{,}8$ $(q = 1 - p = 0{,}2)$ не залежить від проростання інших, то тут маємо справу з повторними незалежними випробуваннями, коли працює формула Бернуллі:

$$P_3(0) = C_3^0\,(0{,}8)^0 \cdot (0{,}2)^3 = 0{,}008,$$

$$P_3(1) = C_3^1\,(0{,}8)^1 \cdot (0{,}2)^2 = 0{,}096,$$

$$P_3(2) = C_3^2\,(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^1 = 0{,}384,$$

$$P_3(3) = C_3^3\,(0{,}8)^3 \cdot (0{,}2)^0 = 0{,}512.$$

Отже, шуканий закон розподілу – біномний.

x	0	1	2	3
p	0,008	0,096	0,384	0,512

Перевірка: $\sum p_i = 0{,}008 + 0{,}096 + 0{,}384 + 0{,}512 = 1.$

§ 2. Числові характеристики дискретної випадкової величини.

2.1. Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Для кожної випадкової величини існує декілька значень, які характеризують цю величину.

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називають суму добутків усіх її можливих значень на відповідні цим значенням імовірності. Тобто випадкова величина X має розподіл у вигляді:

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Тоді математичне сподівання знаходять за формулою:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \ .$$

Приклад 1. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини:

x	1	3	7
p	0,1	0,4	0,5

Розв'язання. $M(x) = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 + 1{,}2 + 3{,}5 = 4{,}8.$

Теорема 1. Математичне сподівання числа появи події А в одному випробуванні дорівнює імовірності появи події А в цьому випробуванні.

Доведення. Нехай дискретна випадкова величина X – число появ події А в цьому випробуванні. Значення цієї величини 0 – якщо подія не відбулася, 1 – якщо вона настала. Таким чином, закон розподілу випадкової величини X має такий вигляд:

x	0	1
p	q	p

де p – це імовірність появи події А; а $q = 1 - p$ – імовірність непояви цієї події. Тоді:

$$M(X) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p.$$

Зміст математичного сподівання

Припустимо, що випадкова величина X у n випробуваннях набуває значення $x_1 - m_1$ разів, значення $x_2 - m_2$ разів, ... значення $x_k - m_k$ разів. Тоді середнє арифметичне значення випадкової величини дорівнює:

$$\overline{X}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{n}=x_1\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+\ldots+x_k\frac{m_k}{n}.$$

За визначенням (див. тему 1) $\frac{m_i}{n}=w_i$ − відносна частота появи значення x_i в n-випробуваннях. Тоді:

$$\overline{X}=x_1w_1+x_2w_2+\ldots+x_kw_k.$$

При достатньо великому значенні n (тобто коли кількість випробувань велика) відносна частота появи події наближається до ймовірності цієї події $(w_i\approx p_i)$. Отже,

$$\overline{X}\approx x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k=M(X).$$

Таким чином, математичне сподівання показує середнє значення, якого набуває випадкова величина.

Властивості математичного сподівання

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталій величині: $M(C)=C$.

Доведення. Сталу величину C можна розглядати як дискретну випадкову величину з одним можливим значенням:

X	c
p	1

Тоді:

$$M(X)=C\cdot 1=C.$$

2. Сталий множник виноситься за знак математичного сподівання:

$$M(CX)=C\cdot M(X).$$

Доведення. Випадкова величина X має розподіл:

x	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Тоді за визначенням розподіл випадкової величини CX має такий вигляд:

CX	Cx_2	Cx_2	...	Cx_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Звідси:

$$M(CX)=Cx_1p_1+Cx_2p_2+\ldots+Cx_np_n=C(x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n)=$$
$$=CM(X).$$

Незалежними називають такі дві випадкові величини, коли закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набула друга величина. Декілька випадкових величин називають *взаємно незалежними*, якщо закони розподілу будь-якого числа з них не залежать від того, які можливі значення набули інші величини.

3. Математичне сподівання добутку незалежних величин дорівнює добутку математичних сподівань кожної величини:

$$M(XY) = M(X)\ M(Y).$$

Доведення. Доведемо цю властивість для найпростішого випадку, коли кожна з величин X та Y має два можливі значення:

x	x_1	x_2
p	p_1	p_2
Y	y_1	y_2
p	g_1	g_2

За визначенням випадкова величина $X\,Y$ має такий розподіл:

$X\,Y$	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
p	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Тоді:

$$M(X\,Y) = x_1y_1 \cdot p_1g_1 + x_1y_2 \cdot p_1g_2 + x_2y_1 \cdot p_2g_1 + x_2y_2 \cdot p_2g_2 =$$
$$= y_1g_1(x_1p_1 + x_2p_2) + y_2g_2(x_1p_1 + x_2p_2) = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1g_1 + y_2g_2) =$$
$$= M(X) \cdot M(Y).$$

Наслідок. Математичне сподівання трьох і більшого числа взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних сподівань цих величин.

$$M(XY\ \ldots\ Z) = M(X)M(Y)\ \ldots\ M(Z).$$

4. Математичне сподівання суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

Доведення. Доведемо, що властивість для величин X та Y, що мають по два значення.

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

і

Y	y_1	y_2
P	g_1	g_2

$$p_1 + p_2 = 1; \quad g_1 + g_2 = 1.$$

Тоді за визначенням суми подій величина $X + Y$ має такий розподіл:

$X+Y$	x_1+y_1	$x_1 + y_2$	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

Де p_{ij} − це імовірність сумісної появи значень $X = x_i$ та $Y = y_j$.

$M(X+Y) = (x_1+y_1)\,p_{11} + (x_1+y_2)p_{12} + (x_2+y_1)p_{21} + (x_2+y_2)p_{22} =$
$= x_1(p_{11}+p_{12}) + x_2(p_{21}+p_{22}) + y_1(p_{11}+p_{21}) + y_2(p_{12}+p_{22}).$

Окремо знайдемо суму $p_{11} + p_{12}$.

Подія $X = x_1$ може відбутися одночасно або з подією $Y = y_1$, або з $Y = y_2$. Тому, за визначенням суми подій, подія $(X = x_1)$ є сумою двох несумісних подій $(X + Y = x_1+y_1)$ або $(X + Y = x_1+y_2)$ і за теоремою про суму несумісних подій виконується рівність:

$$p_{11} + p_{12} = p_1.$$

Аналогічно доводять рівності:

$$p_{21} + p_{22} = p_2,$$
$$p_{11} + p_{21} = g_1,$$
$$p_{12} + p_{22} = g_2.$$

Підставивши їх у формулу $M(X + Y)$, маємо:

$$M(X+Y) = x_1p_1 + x_2p_2 + y_1g_1 + y_2g_2 = M(X) + M(Y).$$

Наслідок. Математичне сподівання суми трьох та більшого числа випадкових величин є сумою математичних сподівань кожної величини: $M(X + Y + ... + Z) = M(X) + M(Y) + ... + M(Z)$.

Необхідно взяти до уваги те, що четверта властивість для суми виконується для довільних випадкових величин, а аналогічно третя властивість для добутку – лише для незалежних.

Теорема 2. Математичне сподівання числа появ події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на імовірність появи події A в кожному випробуванні. Тобто для біноміного розподілу:

$$M(X) = n \cdot p.$$

Доведення. Нехай випадкова величина X − число появ події A в n-випробуваннях. Це число складається з числа появ події A в кожному випробуванні. Тобто, якщо позначимо випадкові величини

X_1 − число появ події A в першому випробуванні;

X_2 − число появ події A в другому випробуванні;

X_n − число появ події A в n-му випробуванні, то за визначенням суми події маємо:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n.$$

За четвертою властивістю:

$$M(X) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n),$$

А за теоремою 1:

$$M(X_i) = p; \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Тому: $M(X) = np$.

Відхилення випадкової величини від математичного сподівання.

Можна навести багато прикладів випадкових величин з однаковим математичним сподіванням:

X_1	1	-1
P	0,5	0,5

X_2	10	–10
p	0,5	0,5

$$M(X_1) = M(X_2) = 0.$$

Тому, крім математичного сподівання, потрібні ще інші числові характеристики.

Відхиленням називається різниця між випадковою величиною та її математичним сподіванням:

$$X - M(X).$$

Властивість. Математичне сподівання відхилення випадкової величини дорівнює нулю.

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Доведення. Користуючись властивостями математичного сподівання, маємо:

$$M(X - M(X)) = M(X) + M(-M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

У зв'язку з цією властивістю само відхилення не має значення як числова характеристика, тому її заміняють на квадрат відхилення.

2.2. Дисперсія дискретної випадкової величини

Дисперсією називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.

$X - M(X))^2] = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + ... + (x_n - M(X))^2 p_n$.

Приклад 1. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини:

X	1	3	7
p	0,1	0,4	0,5

Розв'язання. Спочатку знаходимо математичне сподівання:

$$M(X) = 1 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}4 + 7 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 + 1{,}2 + 3{,}5 = 4{,}8.$$

Тоді відхилення і квадрат відхилення матимуть такі розподіли:

X-$M(X)$	–3,8	–1,8	2,2
p	0,1	0,4	0,5

$(X\text{-}M(X))^2$	14,44	3,24	4,84
p	0,1	0,4	0,5

Звідси $D(X) = 14{,}4 \cdot 0{,}1 + 3{,}24 \cdot 0{,}4 + 4{,}84 \cdot 0{,}5 = 5{,}16$.

Теорема. Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом математичного сподівання:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Доведення. Користуючись властивостями математичного сподівання, маємо:

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = M[X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2] =$$
$$= M(X^2) - M(2XM(X)) + M((M(X))^2 = M(X^2) -$$
$$- 2M(X)M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2,$$

де $M(X^2) = x_1{}^2 p_1 + x_2{}^2 p_2 + ... + x_n{}^2 p_n$.

Приклад 2. Знайдемо дисперсію тієї ж самої випадкової величини:

X	1	3	7
p	0,1	0,4	0,5

за допомогою цієї теореми.

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}4 + 49 \cdot 0{,}5 = 28{,}2;$$
$$D(X) = 28{,}2 - (4{,}8)^2 = 5{,}16.$$

Властивості дисперсії

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю.

$$D = (C) = 0.$$

Доведення.

$$D(C) = M((C - M(C))^2) = M((C - C)^2) = M(0) = 0.$$

2. Сталий множник виносять за знак дисперсії піднесеним до квадрата:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Доведення.

$$D(CX) = M[(CX - M(CX))^2] = M[(CX - CM(X))^2] =$$
$$= M[C^2 (X - M(X))^2] = C^2 M[(X - M(X))^2] = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Доведення.

$$D(X+Y) = M[(X+Y)^2] - [M(X+Y)]^2 = M[X^2 + 2XY + Y^2] -$$
$$-(M(X) + M(Y))^2 = M(X^2) + 2M(X)M(Y) + M(Y^2) - (MX))^2 -$$
$$-2M(X)M(Y) - (M(Y))^2 = M(X^2) - (M(X))^2 + M(Y^2) - (M(Y))^2 =$$
$$= D(X) + D(Y).$$

Наслідок 1. Дисперсія суми трьох і більшого числа попарно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X+Y+\cdots+Z) = D(X) + D(Y) + \cdots + D(Z).$$

Наслідок 2._ Якщо до випадкової величини додати сталу, то дисперсія не зміниться:

$$D(X+C) = D(X).$$

Доведення.

$$D(X+C) = D(X) + D(C) = D(X) + 0 = D(X).$$

4. Дисперсія різниці двох випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин:

$$D(X-Y) = D(X) + D(Y).$$

Доведення:

$$D(X-Y) = D(X) + D(-Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = D(X) + D(Y).$$

5. Дисперсія – невід’ємна величина:

$$D(X) \geq 0.$$

Теорема. Дисперсія появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює добутку числа випробувань на імовірності появи та непояви події A в одному випробуванні. Тобто для біномного розподілу:

$$D(X) = npq.$$

Доведення. Нехай випадкова величина X − це число появ події A в n випробуваннях. Позначимо випадкові величини:

X_1 − число появ події А в першому випробуванні;
X_2 − число появ події А в другому випробуванні;
… −
X_n − число появ події А в n-му випробуванні.
$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$

Тоді за третьою властивістю маємо:

$$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = n \cdot D(X_i).$$

$$D(X_i) = M(X_i^2) - (M(X_i))^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 =$$
$$= p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Отже, в підсумку $D(X) = npq.$

2.3. Середнє квадратичне відхилення

*Середнім квадратичним відхиленням_* називається квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Середнє квадратичне відхилення (як і дисперсія) показує, наскільки в середньому відхиляється випадкова величина від свого середнього значення. Цю характеристику використовують тому, що вона тієї ж розмірності, що і сама випадкова величина, і її математичне сподівання (якщо, наприклад, випадкова величина вимірюється в метрах, то її математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення вимірюється також у метрах, а дисперсія – у квадратних метрах).

§ 3. Однаково розподілені випадкові величини

Розглянемо n попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які мають однаковий розподіл (тобто однакове математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$). Позначимо $\overline{X}$ − середнє арифметичне цих величин:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n).$$

Теорема 1. Математичне сподівання середнього арифметичного незалежних випадкових величин дорівнює математичному сподіванню кожної величини:

$$M(\overline{X}) = M(X).$$

Доведення.

$$M(\overline{X}) = M(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots X_n)) = \frac{1}{n}(M(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)) =$$
$$= \frac{1}{n}(M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot M(X) = M(X).$$

Теорема 2. Дисперсія середнього арифметичного незалежних випадкових величин дорівнює дисперсії кожної величини, поділеної на число величин: $D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X)$.

Доведення.

$$D(\overline{X}) = D(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)) = \frac{1}{n^2}D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$
$$= \frac{1}{n^2}(D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n)) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot D(X) = \frac{1}{n}D(X).$$

Наслідок. $$\sigma(\overline{X}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X).$$

Практичний зміст цих теорем у тому, що у разі проведення багатьох однакових вимірювань середнє значення випадкової величини, тобто математичне сподівання, не змінюється, а похибка, тобто середнє її квадратичне відхилення, зменшується.

Глава 5. НЕПЕРЕРВНА ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

Досі ми розглядали дискретні випадкові величини, кількість можливих значень яких – скінченно велика. Але існує велика кількість випадкових величин, число можливих значень яких є величиною нескінченною. Наприклад, значення такої випадкової величини, як відстань, на яку людина може кинути камінь, заповнюють деякий інтервал Записати закон розподілу цієї випадкової величини у вигляді таблиці неможливо, оскільки ми не спроможні записати всі її можливі значення. Тому для того, щоб задати таку випадкову величину, тобто співвідношення між значеннями, яких вона набуває, і їхніми імовірностями, необхідно використати певну функцію.

§ 1. Інтегральна функція розподілу

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X називається функція $F(x)$, яка визначає для кожного значення аргументу x імовірність того, що випадкова величина X набуде меншого значення, ніж x:

$$F(x) = P(X < x).$$

За допомогою інтегральної функції розподілу можливо задати як неперервну величину, так і дискретну.

Приклад. Скласти інтегральну функцію розподілу дискретної випадкової величини, яку задано законом розподілу:

X	1	2	4	5
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Розв'язання. Розіб'ємо числову вісь x на інтервали, обмежені значеннями випадкової величини X, і знайдемо інтегральну функцію розподілу на кожному інтервалі:

а) $x \le 1.$

Оскільки найменше значення випадкової величини є $X = 1$, то для будь-якого x із заданого інтервалу подія $(X < x)$ буде неможливою, тобто її імовірність дорівнює нулю: $P(X < x) = 0.$ Отже, за визначенням інтегральної функції розподілу:

$$F(x) = P(X < x) = 0.$$

б) $1 < x \le 2.$

Згідно із законом розподілу, для будь-якого x з цього інтервалу існує тільки одне значення випадкової величини $X = 1$, менше ніж x. Отже, подія $(X < x)$ відбувається з імовірністю появи події $(X = 1)$.

У підсумку:

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}2.$$

Аналогічно – для решти інтервалів:

в) $2 < x \le 4,$

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3.$$

г) $4 < x \le 5,$

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) = 0{,}6.$$

д) $x > 5,$

$$F(x) = P(X < x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 5) = 1.$$

Таким чином, інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$x \le 1$$

$$1 < x \le 2,$$

$$2 < x \le 4,$$

$$4 < x \le 5,$$

$$x > 5.$$

Побудуємо графік цієї функції (рис. 2).

Необхідно звернути увагу на те, що інтегральна функція розподілу дискретної випадкової величини має розриви.

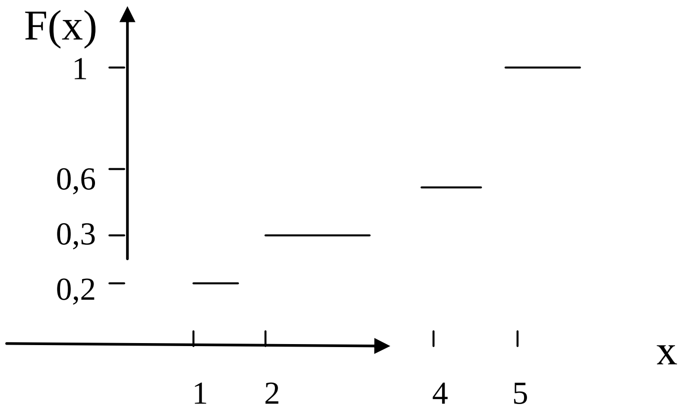


Рис. 2

Властивості інтегральної функції розподілу

1. Значення інтегральної функції розподілу належать відрізку [0; 1], тобто:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

Доведення. Ця властивість є наслідком визначення інтегральної функції розподілу як імовірності, значення якої знаходяться в такому ж проміжку.

2. Інтегральна функція розподілу – неспадна функція. Тобто якщо:

$$x_2 > x_1, \quad \text{то} \quad F(x_2) \ge F(x_1).$$

Доведення: Нехай $x_2 > x_1$. Подію $(X < x_2)$ можна записати як суму двох несумісних подій $(X < x_1)$ і $(x_1 \le X < x_2)$. Тоді за теоремою про суму несумісних подій маємо:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2),$$

або $F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$,

звідки $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Оскільки в лівій частині рівності невід’ємна величина (властивість імовірності), то і величина праворуч повинна бути невід’ємною:

$$F(x_2) - F(x_1) \ge 0, \quad \text{або} \quad F(x_2) \ge F(x_1).$$

Наслідок. Імовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить інтервалу $a;b$, дорівнює приросту інтегральної функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Приклад. Випадкова величина задана інтегральною функцією

розподілу $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le -, \quad 0, \\ 1, & \text{при } x > - . \end{cases}$

Знайти імовірність того, що ця випадкова величина набуде значення, яке належить інтервалу – – .

Розв'язання. Використаємо формулу наслідку другої властивості інтегральної функції розподілу:

$$P(\frac{1}{3} \le X < \frac{2}{3}) = F(\frac{2}{3}) - F(\frac{1}{3}) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Властивості неперервної випадкової величини

1. Імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде одного конкретного значення, дорівнює нулю:

$$P(X = a) = 0.$$

Доведення.

Запишемо імовірність того, що неперервна випадкова величина набуде значень в інтервалі $[a; a+\Delta x)$:

$P(a \le X < a + \Delta x) = F(a + \Delta x) - F(a),$

та спрямуємо до 0. Тоді у лівій частині рівності інтервал $[a; a+\Delta x)$ прямує до точки a, а права її частина – до нуля. Оскільки функція $F(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} F(a + \Delta x) = F(a).$ Отже, маємо

$$P(X = a) = F(a) - F(a) = 0.$$

Наслідок. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини до деякого інтервалу не залежить від того, відкритий цей інтервал чи закритий:

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b).$$

Доведення. Доведемо першу рівність $P(a < X \le b) = P(a < X < b)$. Поділ $(a < X \le b)$ є сумою двох несумісних подій:

$$(a < X \le b) = (a < X < b) + (X = b).$$

Тоді за теоремою про суму несумісних подій маємо:

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b) + P(X = b).$$

За першою властивістю $P(X = b) = 0.$ Отже,

$$P(a < X \le b) = P(a < X < b).$$

Решту рівностей доводять аналогічно.

2. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини належать інтервалу $(a;\ b)$, то інтегральна функція розподілу цієї величини дорівнює нулю зліва від цього інтервалу і одиниці – праворуч від нього:

1) $F(x) = 0, \quad x \le a;$

2) $F(x) = 1, \quad x \ge b.$

Доведення.

1. Нехай $x_1 \le a$, тоді подія неможлива і $P(X < x_1) = F(x_1) = 0.$

2. Якщо $x_2 \ge b$, то подія $(X < x_2)$ вірогідна і $P(X < x_2) = F(x_2) = 1.$

Наслідок: Границя інтегральної функції розподілу на „плюс нескінченності" дорівнює одиниці, на „мінус нескінченності" – нулю.

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Цей результат отримаємо з попереднього, якщо спрямуємо a до $-$, а b до Розглянувши властивості функції розподілу випадкової величини, можна зробити висновок: випадкова величина називається неперервною, якщо її інтегральна функція розподілу неперервна скрізь, а похідна цієї функції неперервна всюди, крім, можливо, скінченного числа точок.

§ 2. Диференціальна функція розподілу

Диференціальною функцією розподілу неперервної випадкової величини називається перша похідна від інтегральної функції розподілу цієї величини:

$$f(x) = F'(x).$$

Хоча інтегральну функцію розподілу використовують для опису обох – і дискретної, і неперервної випадкових величин – знаходити, а тому і розглядати диференціальну функцію розподілу дискретної випадкової величини немає сенсу, оскільки вона або дорівнює нулю, або не існує (не існує похідна в точках розриву функції $F(x)$).

Теорема. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуває значень на інтервалі $(a;\ b)$ і дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції розподілу в межах інтегрування від a до b :

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Доведення. Використаємо вже відомі нам властивості неперервної випадкової величини та інтегральної функції розподілу:

$$P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – інтегральна функція розподілу неперервної випадкової величини X. Оскільки функція $F(x)$ неперервна, запишемо для неї формулу Ньютона-Лейбніца:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx,$$

де $F'(x)$ за визначенням – це диференціальна функція розподілу $f(x)$.

Остаточно $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$

Приклад.

Неперервну випадкову величину X задано за допомогою диференціальної функції розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти імовірність того, що ця величина набуде значень в інтервалі:

а) – – ; б) – – .

Розв'язання.

а) $P\left(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} 2xdx = x^2 \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$

б) $P\left(\frac{1}{3} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} 2xdx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} 0dx = x^2 \Big|_{\frac{1}{3}}^{1} + 0 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{8}{9}.$

Якщо диференціальна функція розподілу $f(x)$ є похідною від інтегральної функції $F(x)$, то інтегральна функція розподілу є первісною від диференціальної функції. Але у кожної функції безліч первісних, тому знайдемо таку з них, яка б задовольняла властивості інтегральної функції розподілу:

$$F(x)=P(X<x)=P(- \qquad = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Інтегральна функція розподілу *F(x)* є невласним інтегралом зі змінною верхнею границею в межах від $-\infty$ до x від диференціальної функції розподілу.

Приклад. Неперервну випадкову величину задано диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x \le 1, \\ 2x, & \text{при } 1 < x \le \quad, \\ 0, & \text{при } x > \quad. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу цієї величини.

Розв'язання. Оскільки диференціальну функцію розподілу задають різними виразами на трьох інтервалах, то й інтегральну функцію можна визначити на кожному інтервалі окремо:

а) $x \le 1$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0.$$

б) $1 < x \le \sqrt{2}$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{x} f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dt+\int_{1}^{x} 2tdt=0+t^2\Big|_{1}^{x^2}=x^2-1.$$

в) $x > \sqrt{2}$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{1} f(t)dt+\int_{1}^{\sqrt{2}} f(t)dt+\int_{\sqrt{2}}^{x} f(t)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{1} 0\cdot dt+\int_{1}^{\sqrt{2}} 2tdt+\int_{\sqrt{2}}^{x} 0\cdot dt=0+t^2\Big|_{1}^{\sqrt{2}}+0=2-1=1.$$

У підсумку:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x^2 - 1, & 1 < x \le \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Властивості диференціальної функції розподілу

1. Диференціальна функція розподілу невід'ємна:

$$f(x) \ge 0.$$

Доведення. Оскільки інтегральна функція розподілу – неспадна функція (її друга властивість), то похідна цієї функції (тобто диференціальна функція розподілу) невід'ємна.

2. Невласний інтеграл від диференціальної функції розподілу в межах інтегрування від мінус до плюс нескінченності дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Доведення.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < +\infty).$$

Подія $(-\infty < X < +\infty)$ вірогідна, тому її імовірність дорівнює одиниці:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = P(U) = 1.$$

Імовірнісний зміст диференціальної функції розподілу

Запишемо диференціальну функцію розподілу як похідну від інтегральної функції, використовуючи визначення похідної:

$$f(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(a + \Delta x) - F(a)}{\Delta x}.$$

Тоді ми маємо можливість записати наближену рівність:

$F(a + \Delta x) - F(a) \approx f(a) \cdot \Delta x.$

Зліва позначений приріст інтегральної функції розподілу, який дорівнює відповідній імовірності:

$$F(a + \Delta x) - F(a) = P(a < X < a + \Delta x).$$

Звідси маємо:

$$P(a < X < a + \Delta x) \approx f(a) \cdot \Delta x.$$

Тобто імовірність того, що неперервна випадкова величина набуває деякого значення з малого інтервалу наближено дорівнює добутку довжини цього інтервалу на значення диференціальної функції розподілу в точці a. Тому диференціальну функцію можна розглядати як щільність імовірності випадкової величини в точці.

§ 3. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини називається невласний інтеграл у межах інтегрування від мінус до плюс нескінченності від добутку диференціальної функції розподілу $f(x)$ на її аргумент x:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Необхідно відмітити, що математичне сподівання дискретної і неперервної випадкових величин мають однакову структуру. Дійсно, якщо x – значення, якого набуває випадкова величина, то $f(x)dx$, наближено – імовірність того, що ця величина набуде значення в інтервалі $(x, x+dx)$. Тому замість суми добутків усіх можливих значень дискретної випадкової величини на відповідні імовірності використовуємо інтеграл добутку $xf(x)dx$ від мінус до плюс нескінченності (тобто інтегруємо за всіма можливими x).

Дисперсія неперервної величини

$$D(X) = M((X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot (x - M(X))^2 dx,$$

допоміжна формула:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2, \quad \text{де} \quad M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx.$$

Середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

Властивості математичного сподівання неперервної випадкової величини, *визначення і властивості* дисперсії та середнього квадратичного відхилення цієї ж величини збігаються з аналогічними визначеннями і властивостями для дискретної випадкової величини, які показано вище.

Приклад. Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ x^2, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.

Розв'язання. Спочатку знайдемо диференціальну функцію розподілу:

$$f(\text{x}) = F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 2x, & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Потім математичне сподівання:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{1} xf(x)dx + \int_{1}^{+\infty} xf(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x \cdot 2xdx + \int_{1}^{+\infty} x \cdot 0dx = 0 + \int_{0}^{1} 2x^2dx + 0 = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Для знаходження дисперсії скористаємося допоміжною формулою, яка більш раціональна у разі обчислень:

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0dx + \int_{0}^{1} x^2 \cdot 2xdx + \int_{1}^{+\infty} x^2 \cdot 0dx =$$

$$= 0 + \frac{x^4}{2}\Bigg|_0^1 + 0 = \frac{1}{2}, \qquad D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

Відповідно середнє квадратичне відхилення є:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Теоретичні моменти. Для дослідження законів розподілу випадкових величин розглядають такі числові характеристики, як початкові та центральні моменти k-го порядку, які були введені російським математиком П.Л. Чебишевим. Записані вище дві основні характеристики розподілу – математичне сподівання і дисперсія – являють собою частинні випадки моментів розподілу.

Початковим моментом порядку k – випадкової величини X називається математичне сподівання k-го ступеня цієї величини:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Початковий момент першого порядку є математичним сподіванням:

$$\nu_1 = M(X).$$

Центральним моментом порядку k випадкової величини X називається математичне сподівання k-го ступеня відхилення цієї величини від її математичного сподівання:

$$\mu_k = M((X - M(X))^k).$$

Центральний момент першого порядку дорівнює нулю:

$$\mu_1 = M(X - M(X)) = M(X) - M(X) = 0.$$

Центральний момент другого порядку дорівнює дисперсії випадкової величини:

$$\mu_2 = M((X - M(X))^2.$$

Користуючись властивостями математичного сподівання, будь-який центральний момент можна виразити через початкові, наприклад:

$$\mu_3 = M((X - M(X))^3 = M(X^3 - 3X^2M(X) + 3X \cdot (M(X))^2 -$$
$$-(M(X))^3) = M(X^3) - 3M(X^2) \cdot M(X) + 3M(X) \cdot (M(X))^2 -$$
$$- (M(X))^3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3.$$

Модою дискретної випадкової величини називається її значення, яке має найбільшу імовірність.

Модою неперервної випадкової величини називається точка максимуму диференціальної функції розподілу цієї величини.

Медіаною випадкової величини називається значення x_E, для якого імовірність того, що випадкова величина набуде значення менше, ніж x_E, дорівнює імовірності того, що вона набуде значення більше, ніж x_E. Тобто:

$$P(X < x_E) = P(X > x_E) = \frac{1}{2} \qquad \text{або} \quad F(x_E) = \frac{1}{2}.$$

Для неперервних випадкових величин існують ще дві числові характеристики – коефіцієнт асиметрії та ексцес.

Коефіцієнтом асиметрії неперервної випадкової величини називається відношення третього центрального моменту до куба середнього квадратичного відхилення: $A_S = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$.

Ця величина показує симетрію розподілу стосовно до його математичного сподівання (рис. 3):

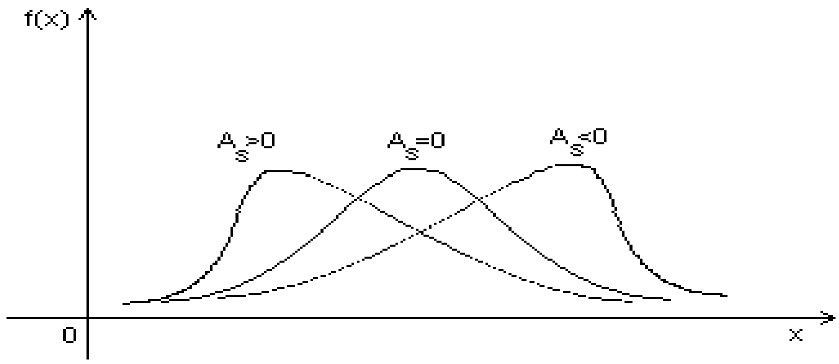


Рис. 3. Криві розподілу з різними коефіцієнтами асиметрії

Ексцесом називається відношення четвертого центрального моменту до четвертого степеня середнього квадратичного відхилення мінус три:

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Зміст цієї величини з’ясуємо пізніше.

Глава 6. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

§ 1. Рівномірний розподіл

Випадкова величина X розподілена рівномірно, якщо на інтервалі, якому належать усі можливі значення цієї величини, диференціальна функція розподілу має стале значення:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ при & x \le a, \\ c, \ при & a < x \le b, \\ 0, \ при & x > b.\end{cases}$$

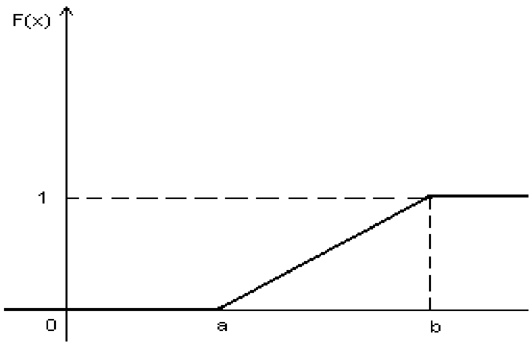
З умови $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

маємо: $\int\limits_a^b cdx = cx\Big|_a^b = c(b-a) = 1,$ тобто $c = \dfrac{1}{b-a}.$

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x > a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a < x \le b, \\ 1, & при \quad x > b.\end{cases}$$

Побудуємо графіки диференціальної та інтегральної функції розподілу (рис. 4, рис. 5):



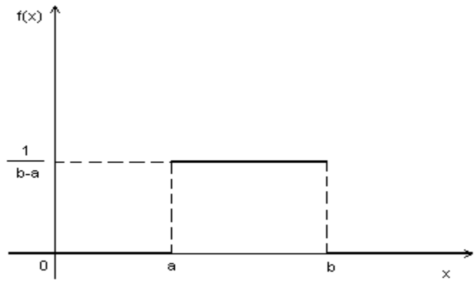


Рис. 4 Рис. 5

Приклад. Автобуси рухаються з інтервалом 10 хв. Знайти імовірність того, що пасажир, який прийшов на зупинку у випадковий момент часу, буде чекати не більше 3 хв.

Розв'язання. Якщо один автобус приїжджає в момент часу $t = 0$, то наступний у момент $t = 10$. Пасажир може прийти в довільний момент часу в інтервалі (0; 10). Отже, диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, \ при & x \le 0, \\ 0{,}1, \ при & 0 < x \le 10, \\ 0, \ при & x > 10.\end{cases}$$

$$P(0 < x < 3) = \int_0^3 0{,}1dx = 0{,}1x\Big|_0^3 = 0{,}3.$$

§ 2. Нормальний закон розподілу

Нормальним називається розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, який має диференціальну функцію розподілу у вигляді:

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a і σ − деякі числа (параметри розподілу).

Зовнішній вигляд диференціальної функції свідчить, що всі нормальні розподіли відрізняються один від одного двома параметрами: a і σ. Для того, щоб з'ясувати зміст цих величин, знайдемо математичне сподівання і дисперсію нормально розподіленої випадкової величини:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

За допомогою заміни $\dfrac{x-a}{\sigma} = y$ знаходимо інтеграл (громіздкі викладки пропускаємо) і $M(X) = a,$ аналогічно для дисперсії:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2.$$

Отже, a − це математичне сподівання, σ − середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини.

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}} d\,z.$$

Графік диференціальної функції нормального розподілу називається нормальною кривою або кривою Гаусса.

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} .$$

Властивості кривої Гаусса:

1. Функція визначена на всій числовій осі.
2. Значення функції тільки додатні.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x) = 0,$ тобто вісь Ox є горизонтальною асимптотою графіка.
4. Знайдемо похідну:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(-\frac{x-a}{\sigma^2} \right).$$

Оскільки $y' = 0$ при $x = a$, то це точка максимуму, і $y(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$

5. Залежність від x є тільки у вигляді $(x-a)^2$, тобто графік симетричний відносно прямої $x = a$.

6. Знайдемо другу похідну:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2} \right).$$

Оскільки $y'' = 0$ при $x = a \pm \sigma,$ то це дві точки перегину кривої:

$$y(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}.$$

Остаточно побудуємо графік (рис. 6).

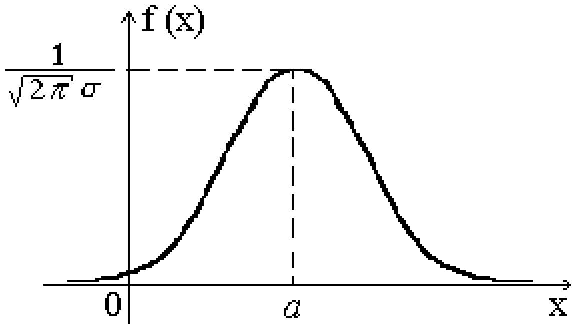


Рис. 6

З'ясуємо, як змінюється графік функції у разі зміни параметрів a та σ. У разі зміни a крива пересувається вправо або вліво. У разі зміни σ змінюється ордината точки максимуму:

$y_{\max} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$, тобто з ростом σ крива стає більш пологою.

Імовірність попадання нормально розподіленої випадкової величини до заданого інтервалу

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну $x - a = \sigma y$. Тоді здобудемо:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0} e^{-\frac{y^2}{2}}dy +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{0}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ – функція Лапласа.

Приклад. Нормально розподілена випадкова величина X має математичне сподівання $a = 10$ та дисперсію $\sigma^2 = 25$. Знайти імовірність того, що випадкова величина X набуде значення в інтервалі (0; 20).

Розв'язання. Підставляємо параметри нормального розподілу $a = 10$ і $\sigma = 5$ до формули імовірності потрапляння до інтервалу:

$$P(0 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-10}{5}\right) - \Phi\left(\frac{0-10}{5}\right) = 2\Phi(2) = 2\cdot 0{,}4772 = 0{,}9544.$$

Далі буде показано, що одночасна поява функції Лапласа у формулі нормального закону розподілу і в інтегральній теоремі Лапласа не є випадковою.

Імовірність заданого відхилення

Знайдемо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина набуде значення, яке відрізняється від її математичного сподівання a не більше, ніж на деяке число δ:

$$P(|X-a|<\delta).$$

Нерівність $|X-a|<\delta$ еквівалентна нерівності $a-\delta<X<a+\delta$. Тоді:

$$P(|X-a|<\delta)=P(a-\delta<X<a+\delta)=\Phi\left(\frac{a+\delta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\delta-a}{\sigma}\right)=$$

$$=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання характеризується тільки середнім квадратичним відхиленням цієї величини.

§ 3. Правило трьох сигм

Знайдемо імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання не більше, ніж на потрійне середнє квадратичне відхилення:

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 2\cdot 0{,}49865=0{,}9973.$$

А імовірність протилежної події – відхилення більше трьох середніх квадратичних відхилень − дорівнює 0,0027 (0,27 %).

Оскільки ця імовірність дуже мала, то таку подію можна вважати фактично неможливою. Сформулюємо правило трьох сигм.

Якщо випадкова величина розподілена нормально, то абсолютна величина її відхилення від математичного сподівання не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення.

Коефіцієнт асиметрії A_s для нормального закону розподілу дорівнює нулю, що підтверджує симетрію розподілу стосовно математичного сподівання.

Центральний момент четвертого порядку μ_4 визначає ексцес E. Для нормального закону розподілу:

$$\mu_4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^4 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = 3\sigma^4,$$

отже,

$$E = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Таким чином, остання числова характеристика (ексцес) показує, наскільки розподіл відрізняється від нормального (рис. 7).

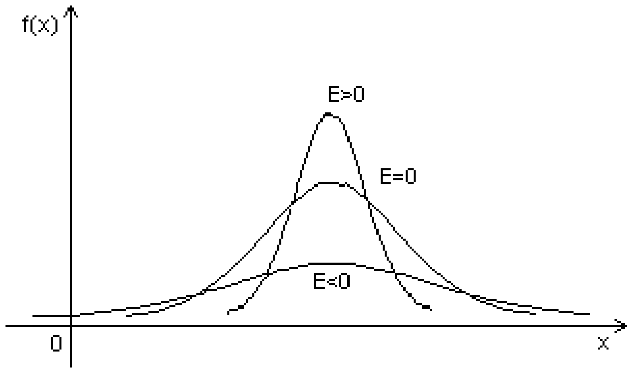


Рис. 7.

На рис. 7 пунктиром показаний нормальний розподіл; неперервними лініями – два інших розподіли з тим самим математичним сподіванням a.

Глава 7. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

§ 1. Принцип практичної впевненості

Якщо в певних умовах імовірність події дуже мала, то у разі одноразового виконання цих умов можна бути впевненим, що ця подія не настане і у практичній діяльності є неможливою.

Це ми знаємо із свого або чужого життєвого досвіду, тобто довести цей принцип неможливо. Також неможливо вказати математично верхню границю імовірності для фактично неможливої події, до того ж у різних ситуаціях ця величина може суттєво змінюватися. Крім того, якщо імовірність події A дуже мала, то імовірність протилежної події близька до одиниці, тому питання про фактично неможливу і практично вірогідну події легко зводяться одне до одного.

Рівень значущості – це імовірність, на яку вирішено не зважати в цьому випробуванні. У статистиці рекомендується користуватися рівнем значущості 0,05 − у попередніх дослідженнях і 0,001 − у кінцевих. Таким чином, у практичних дослідженнях важливо знати, в яких випадках можна гарантувати, що імовірність події виявиться або достатньо малою, або скільки завгодно близькою до одиниці.

Закон великих чисел – це сукупність положень, в яких стверджується, що з імовірністю достатньо близькою до одиниці, відхилення середнього арифметичного достатньо великої кількості випадкових величин від сталої величини – середнього арифметичного їх математичних сподівань – не перевищує наперед заданого, скільки завгодно малого додатного числа ε.

§ 2. Нерівність Чебишева

Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше, ніж деяке додатне ε не менша, ніж $1-\dfrac{D(x)}{\varepsilon^2}$.

$P($ —.

Доведення. Оскільки події $|X - M(x)| < \varepsilon$ і $|X - M(x)| \ge \varepsilon$ протилежні, то сума їх імовірностей дорівнює одиниці. Звідси маємо

$$P\left(|X - M(X)| < \varepsilon\right) = 1 - P\left(|X - M(X)| \ge \varepsilon\right). \quad (1)$$

Нерівність Чебишева виконується для будь-яких випадкових величин, але ми доведемо її тільки для дискретних. Розглянемо дискретну випадкову величину *X:*

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Дисперсія цієї величини має такий вигляд:

$$D(X) = \left(x_1 - M(X)\right)^2 p_1 + \left(x_2 - M(X)\right)^2 p_2 + \ldots + \left(x_n - M(X)\right)^2 p_n.$$

Залишимо в цій сумі тільки ті доданки, для яких виконується умова $|x_i - M(X)| \ge \varepsilon$ (ε − наперед задане). Оскільки в сумі всі доданки додатні, то сума зменшиться. Припустимо, що відкинуто перші k доданків (причому на випадкову величину X це не накладає додаткових умов, тому що завжди можна переставити місцями будь-які два значення).

$$D(X) \ge \left(x_{k+1} - M(X)\right)^2 p_{k+1} + \left(x_{k+2} - M(X)\right)^2 p_{k+2} + \ldots + \left(x_n - M(X)\right)^2 p_n.$$

Оскільки обидві частини нерівності:

$$|x_i - M(X)| \geq \varepsilon$$

додатні, то їх можна піднести до квадрата:

$$(x_i - M(X))^2 \geq \varepsilon^2.$$

Тоді отримаємо таку нерівність:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 (p_{k+1} + p_{k+2} + ... + p_n). \qquad (2)$$

За теоремою про суму імовірностей $p_{k+1} + p_{k+2} + ... + p_n$ – це імовірність того, що випадкова величина X набуде одного зі значень x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n, а при будь-якому з них виконується нерівність і в жодному іншому значенні ця нерівність не виконується, отже:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = p_{k+1} + p_{k+2} + ... + p_n.$$

Тоді нерівність (2) записується у вигляді:

$$D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon).$$

Звідси знаходимо:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Підставимо цю нерівність у формулу (1) і одержимо:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}.$$

Приклад. Схожість насіння дорівнює 70 %. Оцінити імовірність того, що у разі посіву 10000 насінин відхилення частки насіння, що зійшла від імовірності того, що зійде кожна із насінин, не перевершить 0,01.

Розв'язання. Позначимо випадкову величину X – кількість насінин, що зійшла; n = 10000 – загальна кількість насінин; $p = 0{,}7$ – імовірність того, що зійде одна насінина.

Частка насіння, що зійшла, буде $\dfrac{X}{n}$.

Величину X розподілено за біномним законом, тому $M(X) = np, \quad D(X) = npq.$

За властивостями математичного сподівання і дисперсії маємо:

$$M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n} M(X) = \frac{1}{n} \cdot np = p;$$

$$D\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} D(X) = \frac{1}{n^2} \cdot npq = \frac{pq}{n}.$$

Підставляємо ці вирази до нерівності Чебишева:

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Підставляємо значення $p=0{,}7;\ q=1-0{,}7=0{,}3;\ n=10000;$ $\varepsilon=0{,}01$.

$$p\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{0{,}7\cdot 0{,}3}{10000\cdot 0{,}01^2}=1-0{,}21=0{,}79.$$

§ 3. Теорема Чебишева

Якщо дисперсії незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ обмежені числом C, а їх кількість достатньо велика, то для будь-якого малого додатного ε імовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищує за абсолютною величиною ε, як завгодно близько наближається до одиниці. Іншими словами,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Доведення. Розглянемо випадкову величину X – середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

$$X=\frac{1}{n}\left(X_1+X_2+...+X_n\right).$$

За властивостями математичного сподівання маємо:

$$M(X)=M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}M(X_1+X_2+...+X_n)=$$
$$=\frac{1}{n}\left(M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)\right).$$

Випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ незалежні, тоді:

$$D(X)=D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}D\left(X_1+X_2+...+X_n\right)=$$
$$=\frac{1}{n^2}\left(D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)\right).$$

За умовою теореми:

$D(X_i)\leq C,\qquad i=1, 2, ..., n,$

тоді $\quad D(X) \le \frac{1}{n^2}(C + C + ... + C) = \frac{1}{n^2} \cdot nC = \frac{C}{n}.$

Застосуємо до величини X нерівність Чебишева:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2},$$

або

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Оскільки C та ε − сталі числа, то завжди існує таке значення N, що для всіх $n \ge N$ вираз $\frac{C}{n\varepsilon^2}$ буде менший, ніж наперед задане число δ. Якщо в останній нерівності перейти до границі при $n \to \infty$, то вважаючи, що імовірність не може перевищувати одиницю, одержимо шукану формулу.

Наслідок 1. Якщо незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ мають однакові математичні сподівання, дисперсії їх обмежені деяким сталим числом C, а їх число достатньо велике, то для будь-якого достатньо малого ε імовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від їх спільного математичного сподівання не перевищує ε, максимально наближена до одиниці:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - M(X_1)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доведення. За властивостями математичного сподівання маємо

$$M\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n)\right) = \frac{1}{n}\left(M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot nM(X_1) = M(X_1).$$

Тоді за теоремою Чебишева маємо:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - M(X_1)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Наслідок 2. Якщо імовірності p_i появи події А в i-му випробуванні не залежать від результатів попередніх випробувань, а їх число n достатньо велике, то імовірність того, що відносна частота появи події A буде мінімально відрізнятися від середнього арифметичного імовірностей p_i, буде як завгодно близько наближатися до одиниці:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|W_n - \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доведення. Позначимо випадкові величини X_i – поява події А в i – му іспиті. Тоді випадкова величина:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$

де x – це кількість появ події А в n випробуваннях. За визначенням, відносна частота появи події – це відношення кількості появ до кількості випробувань:

$$W_n = \frac{X}{n}.$$

За властивостями математичного сподівання:

$$M(X_i) = p_i,$$

$$M\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}.$$

Знайдемо дисперсію:

$D(X_i) = p_i q_i$ (див. „Числові характеристики біномного закону розподілу”).

Оскільки $0 \le p_i \le 1$, $0 \le q_i \le 1$, то $D(X_i) \le 1$. Отже, всі умови теореми Чебишева виконані.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|W_n - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Наслідок 3. Якщо імовірність p появи події А в кожному з n незалежних іспитів стала, а число іспитів достатньо велике, то імовірність того, що відносна частота появи події А буде скільки завгодно близька до імовірності цієї події, скільки завгодно близька до одиниці:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|W_n - p| < \varepsilon\right) = 1.$$

Доведення. Цей результат є частинним випадком наслідку 2 при

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p; \qquad \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n} = \frac{1}{n} np = p.$$

Цим наслідком ми довели одне з основних положень теорії імовірностей: при великій кількості випробувань відносна частота появи події наближається до її імовірності.

§ 4. Центральна гранична теорема

Розглянемо питання про закон розподілу суми взаємно незалежних випадкових величин у разі необмеженого зростання кількості доданків. Виявляється, що за певних умов закон розподілу суми незалежних випадкових величин наближається до нормального. Установлення цих умов і є змістом центральної граничної теореми. У загальних умовах цю теорему довів О.М. Ляпунов і тому її ще називають теоремою Ляпунова.

Асимптотично нормальний розподіл

Нехай дано нескінченну послідовність випадкових величин $z_1,\ z_2,\ ...,\ z_n, ...$

Випадкові величини z_n мають асимптотично нормальний розподіл з параметрами γ_n і δ_n, якщо закон розподілу імовірностей випадкової величини:

$$\frac{z_n - \gamma_n}{\delta_n},$$

при $n \to \infty$ прямує до стандартного нормального закону. Іншими словами, для будь-яких t_1 і $t_2 > t_1$ існує границя:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(t_1 < \frac{z_n - \gamma_n}{\delta_n} < t_2\right) = \Phi(t_2) - \phi(t_1),$$

де $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ $-$ функція Лапласа.

Якщо параметри γ_n і δ_n є математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення випадкової величини z_n, то кажуть, що випадкова величина Z_n має асимптотично нормальний розподіл з центром γ_n і середнім квадратичним відхиленням δ_n.

Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова). Якщо взаємно незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ мають скінченні математичні сподівання $a_1, a_2, ..., a_n$, скінченні дисперсії $\sigma_1^2, \sigma_2^2, ..., \sigma_n^2$, скінченні абсолютні центральні моменти третього порядку $M\left(|X_1 - a_1|^3\right), M\left(|X_2 - a_2|^3\right), ...,$ $M\left(|X_n - a_n|^3\right)$ та виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M\left(|X_1-a_1|^3\right)+M\left(|X_2-a_2|^3\right)+\ldots+M\left(|X_n-a_n|^3\right)}{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2\right)^{3/2}}=0, \qquad (3)$$

то випадкова величина:

$$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

має асимптотично нормальний розподіл з центром:

$$\gamma_n = M(z_n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

і середнім квадратичним відхиленням:

$$\delta_n = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2} = \sigma\,(z_n).$$

Умова (3) називається умовою Ляпунова. Її зміст полягає в тому, що внесок кожного доданка (випадкової величини) невеликий порівняно із сумарним внеском усіх випадкових величин.

Наслідок 1. Сума достатньо великої кількості однаково розподілених незалежних випадкових величин розподілена за нормальним законом.

Доведення. Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ − однаково розподілені незалежні випадкові величини. Тоді всі їх числові характеристики однакові: $M(X_i) = a,\ D(X_i) = \sigma^2,\ \ M\left(|X_i - a|^3\right) = \lambda.$

Умова Ляпунова приймає такий вигляд:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\lambda}{\left(n\sigma^2\right)^{3/2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda}{\sqrt{n}\,\sigma^3} = 0,$$

тобто всі умови теореми Ляпунова виконуються і згідно з цією теоремою величина $X_1, X_2, ..., X_n$ розподілена нормально.

Наслідок 2. (Гранична теорема Муавра-Лапласа). Для біномного розподілу імовірностей існує граничний $(n\to\infty)$ розподіл, який виявляється нормальним.

Доведення. Позначимо X_i – поява події А в *і*-му випробуванні. $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ − кількість появ події А в n- випробуваннях. Тоді для біномного закону вже відомі величини:

$M(X) = np, \qquad D(X) = \sigma^2 = npq.$

За наслідком 1 маємо нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = np$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{npq}$.

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Відносна частота появи події $W_n = \dfrac{X}{n}$ для біномного розподілу також має асимптотично нормальний розподіл з математичним сподіванням $a = p$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = \sqrt{\dfrac{pq}{n}}$.

Приклад. Норма посіву насіння на 1 га дорівнює 200 кг. Фактично витрата насіння на 1 га близька до цього значення з середнім квадратичним відхиленням 10 кг. Визначити кількість насіння, що забезпечує посів на площі 100 га з гарантією 0,95.

Розв'язання. Позначимо випадкові величини X_i як витрати насіння на i-му гектарі. Тоді загальні витрати зерна можна записати як:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_{100}.$$

За умовою задачі $M(X_i) = 200$, $\sigma(X_i) = 10$, тобто всі величини X_i розподілені однаково. Тоді за наслідком 2 теореми Ляпунова випадкову величину X розподілено нормально з математичним сподіванням:

$$M(X) = 100M(X_i) = 100 \cdot 200 = 20000 \text{ кг} = 20 \text{ т};$$

і середнім квадратичним відхиленням:

$$\sigma(X) = \sqrt{100} \cdot \sigma(X_i) = 100 \text{ кг} = 0{,}1 \text{ г}.$$

За умовою:

$$P(0 < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - 20}{0{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 20}{0{,}1}\right) = \Phi\left(\frac{\beta - 20}{0{,}1}\right) + \Phi(200) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - 20}{0{,}1}\right) + 0{,}5 = 0{,}95. \quad \Phi\left(\frac{\beta - 20}{0{,}1}\right) = 0{,}45.$$

Тоді $\dfrac{\beta - 20}{0{,}1} = 1{,}65$, $\qquad \beta = 20{,}165.$

Контрольна робота № 3

Варіант 1

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини:

X	10	14	16	19	21
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

–

Знайти: 1) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 2) математичне сподівання *M(X);* 3) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса риби у ставку − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса риби − 1100 г, середнє квадратичне відхилення − 50 г. *Знайти*: 1) відсоток риби з масою більше 1 кг; 2) імовірність того, що маса 100 рибин не менше 109 кг; 3) величину, більше якої буде маса 100 рибин з імовірністю 0,9.

Варіант 2

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	4	7	9	12	14
p	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію D(X) та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M* (*X*) та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 2) математичне сподівання *M(X);* 3) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Норма висіву на 1 га дорівнює 160 кг. Фактичні витрати насіння на 1 га коливаються навколо цього значення. Випадкові значення характеризуються середнім квадратичним відхиленням 10 кг. *Визначити:* 1) імовірність того, що витрата насіння на 1 га не перевершить 170 кг; 2) імовірність того, що витрата насіння на 100 га не перевершить 16,1 т; 3) величину, яку не перевершить витрата насіння на 100 га з імовірністю 0,95.

Варіант 3

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	30	40	60	80	90
p	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X*); 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M* (*X*) та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1;5); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ .

3. За один рейс автомашина перевозить вантаж масою в середньому 4 т. Фактична маса в кожному рейсі відхиляється від середнього і характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,5 т. *Визначити*: 1) імовірність того, що за один рейс буде перевезено не менше 4,2 т; 2) імовірність того, що за 100 рейсів буде перевезено не менше 390 т; 3) величину маси вантажу, більше якої буде перевезено за 100 рейсів з імовірністю 0,9.

Варіант 4

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	3	5	9	11	12
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання $M(X)$; 2) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку $M(X)$ та σ.

1. Випадкову величину X задано інтегральною функцією розподілу $F(x)$:

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (0;2); 2) диференціальну функцію розподілу $f(x)$; 3) математичне сподівання $M(X)$; 4) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ.

2. Маса бройлерів, які надходять з птахофабрики у продаж − випадкова величина, що має нормальний розподіл. Середня маса бройлера − 1,45 кг. Відхилення від цього значення характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,1 кг. *Визначити:* 1) відсоток бройлерів, маса яких не менше 1,4 кг; 2) імовірність того, що маса 100 бройлерів буде не менше 146 кг; 3) величину, більше якої буде маса 100 бройлерів з імовірністю 0,95.

Варіант 5

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	12	14	18	20	22
p	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання $M(X)$; 2) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ. 3) *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку $M(X)$ та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

Знайти: 1) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 2) математичне сподівання *M(X);* 3) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса свиней у свинарнику − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса свині − 130 кг. Відхилення у масі характеризується середнім квадратичним відхиленням 3 кг. *Визначити:* 1) відсоток свиней з масою понад 135 кг; 2) імовірність того, що маса 100 свиней буде не менше 12,9 т; 3) величину, більше якої буде маса 100 свиней, з імовірністю 0,95.

Варіант 6

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	6	10	12	15	19
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання M(X); 2) дисперсію D(X) та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (3;5); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

1. Середня витрата пального автомобілем становить 12 л на 100 км. Відхилення від цього значення характеризується середнім

квадратичним відхиленням 0,3 л. *Визначити:* 1) імовірність того, що витрата пального на 100 км буде не більше 12,5 л; 2) імовірність того, що витрата пального на відстані 10 000 км не перевершить значення 1205 л; 3) величину, яка не перевершить витрат палива 10 000 на км, з імовірністю 0,9.

Варіант 7

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	35	45	60	85	90
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку M(X) та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу F(x):

.

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса плодів в одному ящику − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса плодів в одному ящику дорівнює 12 кг, а середнє квадратичне відхилення в масі одного ящика становить 1 кг. *Визначити:* 1) відсоток ящиків, у яких маса плодів не менше 10 кг; 2) імовірність того, що в 100 ящиках буде не менше 1190 кг плодів; величину, більше якої буде маса 100 ящиків, з імовірністю 0,95.

Варіант 8

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	12	13	15	16	18

p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f*(*x*): 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X*) та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Середньодобовий надій від однієї корови в корівнику − 8,4 л молока. Відхилення від цього значення характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,3 л. *Визначити:* 1) відсоток корів, які дають середньодобовий надій не менше 8 л; 2) імовірність того, що середньодобовий надій від 100 корів буде не менше 835 л; 3) величину, більше якої буде надій від 100 корів, з імовірністю 0,9.

Варіант 9

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	18	26	34	42	50
p	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ .

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (0,5; 2); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x)*: 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

1. Шляхом взяття проб установлено, що утрата зерна під час збирання врожаю становить у середньому 4 г на 1 м^2. Середнє квадратичне відхилення утрат 1 г. *Визначити*: 1) імовірність того, що утрата зерна на 1 м^2 не перевершить 5 г; 2) імовірність того, що на 1 га утрати становитимуть не більше 40,5 кг; 3) величину, яку не перевершать утрати на 1 га, з імовірністю 0,95.

Варіант 10

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	22	28	30	34	36
p	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

–

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *O(X)* та середнє квадратичне відхилення *а*.

3. Маса яблук на одній яблуні − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса яблук на яблуні − 120 кг, середнє квадратичне відхилення − 10 кг. Знайти: 1) відсоток дерев з масою яблук більше 100 кг; 2) імовірність того, що маса яблук зі 100 дерев буде не менше 12,1 т; 3) величину, більше якої буде маса яблук зі 100 дерев, з імовірністю 0,9.

Варіант 11

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	10	14	16	19	21
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x)*:

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X*); 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса бульб картоплі в одному кущі − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса бульб у кущі − 450 г, середнє квадратичне відхилення − 100 г. *Знайти*: 1) відсоток кущів, маса бульб у яких більша 600 г; 2) імовірність того, що маса бульб картоплі у 100 кущах буде не менше 44 кг; 3) величину, яку не перебільшить маса бульб у 100 кущах, з імовірністю 0,9.

Варіант 12

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	30	40	60	80	90
p	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X*); 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину X задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (2; 4); 2) диференціальну функцію розподілу $f(x)$; 3) математичне сподівання $M(X)$; 4) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса коренеплодів цукрового буряку − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса коренеплоду буряка − 840 г, середнє квадратичне відхилення − 120 г. *Знайти:* 1) відсоток коренеплодів, маса яких більша 700 г; 2) імовірність того, що маса 100 коренеплодів буде не менше 83 кг; 3) величину, яку не перебільшить маса 100 коренеплодів, з імовірністю 0,9.

Варіант 13

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	3	5	9	11	12
p	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання $M(X)$; 2) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку $M(X)$ та σ.

2. Випадкову величину X задано інтегральною функцією розподілу $F(x)$:

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 4); 2) диференціальну функцію розподілу $f(x)$; 3) математичне сподівання $M(X)$; 4) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса качанів капусти − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса качана капусти − 1,1 кг, середнє квадратичне відхилення − 150 г. *Знайти:* 1) відсоток качанів, маса яких більша 1 кг; 2) імовірність того, що маса 100 качанів

перебільшить 107 кг; 3) величину, яку не перебільшить маса 100 качанів, з імовірністю 0,9.

Варіант 14

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	12	16	18	20	22
p	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

1. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (2; 4); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

2. Маса риби у ставку − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса риби − 1100 г, середнє квадратичне відхилення − 50 г. *Знайти*: 1) відсоток риби з масою більше 1 кг; 2) імовірність того, що маса 100 рибин буде не менше 109 кг; 3) величину, більше якої буде маса 100 рибин, з імовірністю 0,85.

Варіант 15

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	6	10	12	15	19
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник

розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

1. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Норма висіву на 1 га дорівнює 180 кг. Фактичні витрати насіння на 1 га коливаються навколо цього значення. Випадкові значення характеризуються середнім квадратичним відхиленням 10 кг. *Визначити:* 1) імовірність того, що витрата насіння на 1 га не перевершить 190 кг; 2) імовірність того, що витрата насіння на 100 га не перевершить 18,1 т; 3) величину, яку не перевершить витрата насіння у 100 разів, з імовірністю 0,95.

Варіант 16

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	22	28	30	34	36
p	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (1; 5); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. За один рейс автомашина перевозить вантаж масою в середньому 4,2 т. Фактична маса в кожному рейсі відхиляється від середнього і характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,4 т. *Визначити:* 1) імовірність того, що за один рейс буде перевезено неменше 4 т; 2) імовірність того, що за 100 рейсів буде перевезено не менше 400 т; 3) величину маси вантажу, більше якої буде перевезено за 100 рейсів з імовірністю 0,8.

Варіант 17

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	4	7	9	12	14
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність попадання випадкової величини у проміжок (0; 2); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса бройлерів, які надходять з птахофабрики у продаж − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса бройлера − 1,53 кг. Відхилення від цього значення характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,15 кг. *Визначити:* 1) відсоток

бройлерів, маса яких не менше 1,4 кг; 2) імовірність того, що маса 100 бройлерів буде не менше 150 кг; 3) величину, більше якої буде маса 100 бройлерів, з імовірністю 0,85.

Варіант 18

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	10	14	16	19	21
p	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

Знайти: 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса свиней у свинарнику − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса свині − 145 кг. Відхилення у масі характеризується середнім квадратичним відхиленням 6 кг. *Визначити:* 1) відсоток свиней з масою більшою 135 кг; 2) імовірність того, що маса 100 свиней буде не менше 14,4 т; 3) величину, більше якої буде маса 100 свиней, з імовірністю 0,95.

Варіант 19

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	30	40	60	80	90
p	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник

розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (3; 5); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Середня витрата пального автомобілем становить 14 л на 100 км. Відхилення від цього значення характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,5 л. *Визначити:* 1) імовірність того, що витрата пального на 100 км буде не більше 15 л; 2) імовірність того, що витрата пального на відстань 10 000 км не перевершить значення 1410 л; 3) величину, яка не перевершить витрати пального 10 000 на км, з імовірністю 0,99.

Варіант 20

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	3	5	9	11	12
p	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу F(x):

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса яблук в одному ящику − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса яблук в одному ящику дорівнює 16 кг, а середнє квадратичне відхилення в масі яблук одного ящика становить 1 кг. *Визначити*: 1) відсоток ящиків, в яких маса яблук не менше 15 кг; 2) імовірність того, що в 100 ящиках буде не менше 1590 кг плодів; 3) величину, більше якої буде маса яблук у 100 ящиках, з імовірністю 0,95.

Варіант 21

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	12	14	18	20	22
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

— –

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання M(X); 4) дисперсію D(X) та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Середньодобовий надій від однієї корови в корівнику − 9,1 л молока. Відхилення від цього значення характеризується середнім квадратичним відхиленням 0,4 л. *Визначити:* 1) відсоток корів, які дають середньодобовий надій не менше 8 л; 2) імовірність того, що середньодобовий надій від 100 корів буде не менше 900 л; 3) величину, більше якої буде надій від 100 корів, з імовірністю 0,8.

Варіант 22

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	6	10	12	15	19
p	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (0,5; 1,5); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x)*; 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Шляхом взяття проб установлено, що втрата зерна під час збирання врожаю становить у середньому 5 г на 1 м. Середнє квадратичне відхилення втрат 1 г. *Визначити*: 1) імовірність того, що втрата зерна на 1 м не перевершить 6 г; 2) імовірність того, що на 1 га втрати становитимуть не більше 50,5 кг; 3) величину, яку не перевершать втрати на 1 га, з імовірністю 0,85.

Варіант 23

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	35	45	60	85	90
p	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. 3) *Накреслити* багатокутник

розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

–

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса яблук на одній яблуні − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса яблук на яблуні − 140 кг, середнє квадратичне відхилення − 10 кг. *Знайти:* 1) відсоток дерев з масою яблук більше 120 кг; 2) імовірність того, що маса яблук зі 100 дерев буде не менше 13,9 т; 3) величину, більше якої буде маса яблук зі 100 дерев, з імовірністю 0,8.

Варіант 24

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	12	13	15	16	18
p	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини і показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

–

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1; 3); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса бульб картоплі в одному кущі − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса бульб у кущі − 550 г, середнє квадратичне відхилення − 120 г. Знайти: 1) відсоток кущів, маса бульб у яких більша 700 г; 2) імовірність того, що маса бульб картоплі у 100 кущах буде не менше 54 кг; 3) величину, яку не перебільшить маса бульб у 100 кущах, з імовірністю 0,85.

Варіант 25

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	18	26	34	42	50
p	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини і показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(*x):

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (2; 4); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса коренеплодів цукрового буряку − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса коренеплоду буряка − 900 г, середнє квадратичне відхилення − 130 г. Знайти: 1) відсоток коренеплодів, маса яких більша 1 кг; 2) імовірність того, що маса 100 коренеплодів буде не менше 89 кг; 3) величину, яку перебільшить маса 100 коренеплодів, з імовірністю 0,85.

Варіант 26

1. Для заданого закону розподілу дискретної випадкової величини :

X	22	28	30	34	36
p	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

знайти: 1) математичне сподівання *M(X);* 2) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ. *Накреслити* багатокутник розподілу заданої випадкової величини та показати на рисунку *M(X)* та σ.

2. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією розподілу *F(x):*

—

Знайти: 1) імовірність потрапляння випадкової величини у проміжок (1;4); 2) диференціальну функцію розподілу *f(x);* 3) математичне сподівання *M(X);* 4) дисперсію *D(X)* та середнє квадратичне відхилення σ.

3. Маса качанів капусти − випадкова величина, яка має нормальний розподіл. Середня маса качана капусти – 2,2 кг, середнє квадратичне відхилення − 300 г. *Знайти:* 1) відсоток качанів, маса яких більша 2,5 кг; 2) імовірність того, що маса 100 качанів не менше ніж 245 кг; 3) величину, яку не перебільшить маса 100 качанів, з імовірністю 0,9.

Частина ІІ. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Глава 1. СТАТИСТИЧНИЙ РЯД РОЗПОДІЛУ ТА ЙОГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи обробки і аналізу експериментальних даних, одержаних у результаті досліджень масових випадкових явищ.

Без використання методів математичної статистики в сучасному світі у своїх дослідженнях не обійдеться ні одна із будь-яких наукових чи практичних галузей. Область її використання все більше і більше розширюється. Під час вивчення масових явищ математична статистика займається сукупностями однорідних об'єктів, яким властиві деякі ознаки, і цим ознакам часто виникає потреба дати кількісну характеристику.

Основними завданнями математичної статистики є:

1. Складання статистичного ряду або статистичної сукупності на основі генеральної і вибіркової сукупностей, яке ґрунтується на обчисленні частот появи значень випадкової величини.

2. Побудова функції розподілу за складеним статистичним рядом.

3. Оцінка невідомих параметрів розподілу (математичного сподівання, дисперсії, середнього квадратичного відхилення, початкових і центральних моментів).

4. Статистична перевірка гіпотез

Якщо в задачах теорії ймовірності за допомогою функцій розподілу визначається закон розподілу, то в математичній статистиці перевіряється відповідність значень спостережуваної випадкової величини за побудованими функціями розподілу.

Наведемо необхідні роз'яснення і визначення.

1.Ознакою X називається кількісна або якісна властивість предметів чи явищ, яка підлягає обстеженню.

2. Статистичною сукупністю називається сукупність однорідних предметів чи явищ, об'єднаних за будь-якою загальною ознакою.

3. Елементами статистичної сукупності називають предмети, її складові.

4. Обсягом статистичної сукупності називається число елементів, які створюють цю сукупність. Обсяг генеральної сукупності позначається літерою N, а вибірки – n.

5. Варіаційним рядом називається сукупність значень ознаки X у статистичній сукупності розміщених у порядку зростання. $x_1, x_2, \ldots x_n$ де $x_1 < x_2 < x_3 \ldots x_n$

6.Якщо в сукупності деякі значення ознаки x повторюються декілька раз, то ряд можна записати у вигляді таблиці:

Таблиця 1

x_i	x_1	x_2	…	x_m
n_i	n_1	n_2		n_m
w_i	$\frac{n_1}{n}$	$\frac{n_2}{n}$		$\frac{n_m}{n}$

де $n_1, n_2 \ldots n_m$ називаються частотами; $w_1, w_2 \ldots w_m$ – відносними частотами (частостями); $\sum_{i=1}^{m} n_i = n \quad \sum_{i=1}^{m} w_i = 1.$

Співвідношення між значеннями (варіантами) ознаки X і їхніми частотами або відносними частотами, представленими у вигляді табл. 1, називається статистичним рядом.

7. Якщо в статистичній сукупності ознака X змінюється неперервно, то складають інтервальний статистичний ряд. Всю сукупність розподіляють на інтервали. Для кожного з них вказують частоти або частості. Частота кожного інтервалу дорівнює сумі частот тих значень ознаки X, що увійшли в цей інтервал.

Таблиця 2

x	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	…	$x_{n_{i-1}} - x_{n_i}$
n_i	n_1	n_2		n_i

w_i	w_1	w_2		w_i

Різниця між найбільшим і найменшим значенням ознаки X в інтервалі називають довжиною або кроком інтервалу. Для визначення кількості інтервалів можна користуватися наближеною формулою $k = 1 + 3{,}322 \lg n$, де n – чисельність вибірки. Величину інтервалу знаходимо за формулою $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{k}$, де $x_{\max}$ і $x_{\min}$ – відповідно максимальна і мінімальна варіанти.

Величину інтервалу, як правило, закруглюють до цілого числа.

Приклад №1. Наведемо приклад складання статистичного закону розподілення неперервної величини *X,* знайдемо числові характеристики $\overline{x_в}$, $D_в(x)$, $\sigma_в$, M_o, M_e, R, V_δ, A_s, $E_к$, побудуємо гістограму, графік функції розподілення щільності відносних частот та за критерієм χ^2 перевіримо відповідність розподілення нормальному закону при рівні значущості 0,05 за значеннями емпіричних даних, як результатом обстеження деякої величини X: 7; 7; 7,9; 7,9; 7,9; 8,7; 8,7; 8,7; 10,3; 10,3; 10,3; 10,3; 10,3; 10,3; 11,9; 11,9; 11,9; 11,9; 11,9; 11,9; 11,9; 12,5; 12,5; 12,5; 12,5; 12,5; 12,5; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4; 13,4;14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2; 14,2;14,9; 14,9;14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 14,9; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 15,3; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 16; 16,3; 16,3; 16,3; 16,3; 17; 17;

17; 17; 17,4; 17,4; 17,4; 17,4; 17,4;17,9; 17,9; 17,9; 18,2; 18,2; 18,2; 18,2; 19,8.

Ці дані наводимо в таблиці:

X	7	7,9	8,7	10,3	11,9	12,5	13,4	14,2	14,9	15,3	16	16,3	17	17,4	17,9	8,2	19,8
n	2	3	3	6	7	6	7	10	16	11	8	4	4	5	3	4	1

1. Побудуємо інтервальний статистичний ряд. Кількість інтервалів візьмемо $k = 7$.

Величина інтервалу або крок h дорівнює

$$h = \frac{x_{найб.} - x_{найм.}}{7} = \frac{20-6}{7} = 2;$$

($x_{найб.}$ і $x_{найм.}$ з принципу доцільності взяли рівними 6 і 20 відповідно).

Тоді інтервали будуть такими: від 6 до 8; від 8 до 10; від 10 до 12; від 12 до 14; від 14 до 16; від 16 до 18; від 18 до 20. У ці інтервали вкладаються всі значення ознаки *X*.

Визначаємо частоти для кожного інтервалу. В інтервал від 6 до 8 входять такі значення ознаки *X*: $x = 7$ із частотою 2 і $x = 7{,}9$ із частотою 3. Звідси частота першого інтервалу дорівнює 5. Відносна частота цього інтервалу, знайдена за формулою $W_1 = \frac{n_1}{n}$, дорівнює $\frac{5}{100} = 0{,}05$.

У кінцевому вигляді інтервальний ряд має такий вигляд:

X	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20

n_i	5	3	13	13	45	16	5
w_i	0,05	0,03	0,13	0,13	0,45	0,16	0,5
$\frac{w_i}{h}$	0,025	0,015	0,055	0,065	0,275	0,08	0,25
$X_{i:e}$	7	9	11	13	15	17	19

У ньому відразу показані відносні частоти w_i, щільність відносних частот $\frac{w_i}{h}$ інтервалів, середини як представники інтервалів, що буде потрібне для виконання поставленого завдання.

2. Середнє значення ознаки X знайдемо за формулою:

$$\overline{X_в} = \frac{\sum x_i n_i}{n},$$

де x_i – значення середини i-го інтервалу; n_i – частота i-го інтервалу;

$$\overline{X_в} = \frac{7 \cdot 5 + 9 \cdot 3 + 11 \cdot 13 + 13 \cdot 13 + 15 \cdot 45 + 19 \cdot 16 + 19 \cdot 5}{100} = 14,2;$$

3. Дисперсію $D_в$ обчислимо за формулою:

$$D_в = \frac{\sum (x_i - \overline{x_в})^2 n_i}{n};$$

$$D_в = \frac{(7-14,2)^2 \cdot 5 + (9-14,2)^2 \cdot 3 + (11-14,2)^2 \cdot 13 + (13-14,2)^2 \cdot 13 +}{100}$$

$$\frac{+ (15-14,2)^2 \cdot 45 + (17-14,2)^2 \cdot 16 + (19-14,2)^2 \cdot 5}{} = 7,28.$$

4. Середнє квадратичне відхилення визначимо як:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} \quad ; \quad \sigma_в = \sqrt{7,28} = 2,7.$$

5. Мода M_o інтервального ряду знаходиться за формулою:

$$M_o = x_{i-1} + \frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - n_{i-1} - n_{i+1}} \cdot h,$$

де – x_{i-1} – початок модального інтервалу, тобто інтервалу який має найбільшу частоту; n_i – частота модального інтервалу; n_{i-1} – частота до модального інтервалу; n_{i+1} – частота після модального інтервалу;

$$M_o = 14 + \frac{45 - 13}{2 \cdot 45 - 13 - 16} \cdot 2 = 15,1.$$

6. Медіану M_e знаходимо за формулою:

$$M_e = x_{i-1} + \frac{0,5 - F(x_{i-1})}{F(x_i) - F(x_{i-1})} \cdot h,$$

де x_{i-1} – початок медіанного інтервалу;

$$F(x_{i-1}) = W(X < x_{i-1}) = \sum \frac{n_i}{n}; \; F(x_{i+1}) = W(X < x_{i+1}) = \sum \frac{n_{i+1}}{n}.$$

Медіанним інтервалом буде інтервал 14–16, $x_{i-1} = 14$.

$$F(14) = 0,05 + 0,03 + 0,13 + 0,13 = 0,34; \; F(16) = 0,34 + 0,45 = 0,79;$$

$$M_e = 14 + \frac{0,5 - 0,34}{0,79 - 0,34} \cdot 2 = 14,71.$$

7. Розмах варіації R дорівнює різниці між найбільшим і найменшим значенням ознаки X у статистичній сукупності:

$$R = x_{\max} - x_{\min};$$

Для статистичного ряду в заданому прикладі величина

$$R = 19{,}8 - 7 = 12{,}8.$$

8. Коефіцієнт варіації за середнім квадратичним відхиленням V_σ знаходиться за формулою: $V_\sigma = \dfrac{\sigma}{\overline{\overline{X}}} \cdot 100\ \%$.

Тоді $V_\sigma = \dfrac{2{,}7}{14{,}2} \cdot 100\ \% = 19\ \%$. З такою величиною коефіцієнта варіації варіація вважається значною.

9. Асиметрія A_s характеризує несиметричність (скошеність) кривої щільності розподілення ознаки X у статистичному ряді і визначається за формулою:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

де μ_3 – центральний момент третього порядку;

σ^3 – середнє квадратичне відхилення в третій степені.

Третій центральний момент знаходимо за формулою:

$$\mu_3 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3 n_i}{n}.$$

$$\mu_3 = \frac{(7-14{,}2)^3 \cdot 5 + (9-14{,}2)^3 \cdot 3 + (11-14{,}2)^3 \cdot 13 + (13-14{,}2)^3 \cdot 13 + (15-14{,}2)^3 \cdot 45 +}{}$$

$$\frac{+(17-14{,}2)^3 \cdot 16 + (19-14{,}2)^3 \cdot 5}{100} = -15{,}7.$$

Тоді $A_s = -\dfrac{15{,}7}{2{,}7^3} = -0{,}8$, що визначає лівосторонню асиметричність розподілення.

10. Ексцес характеризує крутизну (гостровершинність чи пологовершинність) кривої щільності розподілення ознаки X у статистичному ряді і визначається за формулою:

$$E_{\kappa} = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

де μ_4 – четвертий центральний момент;

σ – середнє квадратичне відхилення.

Центральний момент четвертого порядку знаходимо за формулою:

$$\mu_4 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4 n_i}{n}.$$

$$\mu_4 = \frac{(7-14{,}2)^4 \cdot 5 + (9-14{,}2)^4 \cdot 3 + (11-14{,}2)^4 \cdot 13 + (13-14{,}2)^4 \cdot 13 +}{}$$

$$\frac{+ (15-14{,}2)^4 \cdot 45 + (17-14{,}2)^4 \cdot 16 + (19-14{,}2)^4 \cdot 5}{100} = 173{,}4.$$

Звідси степінь крутості (ексцес) дорівнює:

$$E_{\kappa} = \frac{173{,}4}{2{,}7^4} - 3 = 0{,}26.$$

Отриманий додатній результат говорить про гостровершинність розподілення.

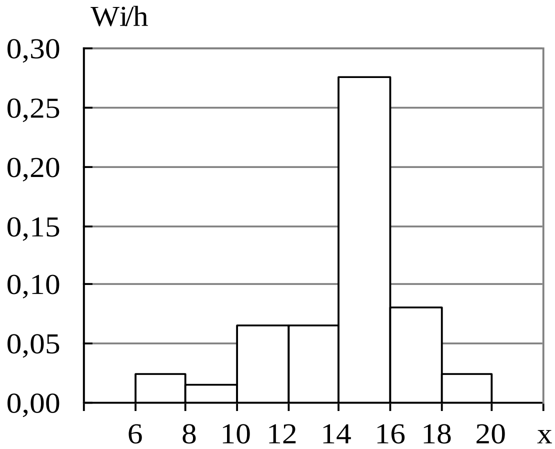
11. Побудуємо гістограму розподілення. Гістограма щільності відносних частот є фігура, що складається з прямокутників, кожний з яких має основу завдовжки h = 2 і висоту, що дорівнює $\frac{w_i}{h}$ для кожного з інтервалів (рис. 1).

12. Складемо та побудуємо графік функції розподілення (рис. 2).

$$\begin{cases} 0 & x \le 6 \\ 0{,}05 & 6 < x \le 8 \\ 0{,}08 & 8 < x \le 10 \end{cases}$$

$$F(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \quad \begin{array}{ll} 0{,}21 & 10 < x \le 12 \\ 0{,}34 & 12 < x \le 14 \\ 0{,}79 & 14 < x \le 16 \\ 0{,}95 & 16 < x \le 18 \\ 1 & 18 < x \le 20, \end{array}$$

де n_x – кількість варіант статистичного розподілу вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту x; n – обсяг вибірки.



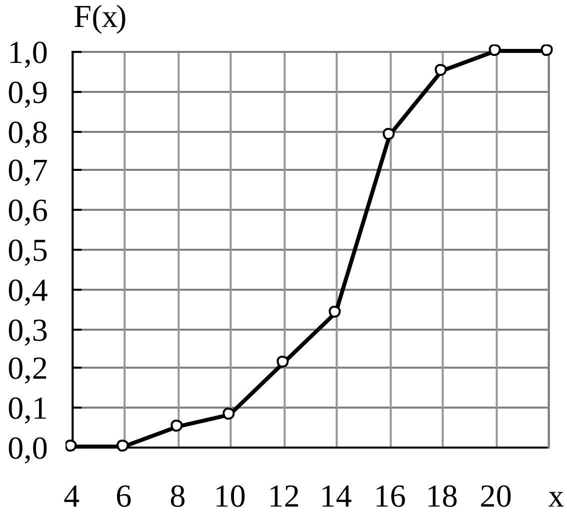


Рис. 1. Рис. 2.

13. Оцінка узгодженості теоретичної кривої з емпіричними даними статистичного ряду, тобто перевірка гіпотези відповідності статистичного розподілення певному теоретичному закону, проводиться за вибраним критерієм узгодженості. Є декілька критеріїв узгодженості. Ми використаємо критерій Пірсона (χ^2 «хі-квадрат»), за яким визначається ступінь відмінності фактичного розподілу частот від теоретичного. З цією метою необхідно встановити таку границю, недосягнення якої означає, що розбіжність між емпіричним і нормаль-

ним розподілом ще не така велика, щоб її враховувати, і що цей емпіричний ряд можна практично прийняти за нормальний. З цією метою розраховується критерій χ^2. Величина його визначається за формулою:

$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$, де n_i та n'_i – відповідно частоти емпіричного і теоретичного ряду.

Якщо при вибраному рівні значущості обчислені значення χ^2 перевищують табличні, то нульова гіпотеза про відповідність емпіричного розподілу вибраному теоретичному відхиляється.

Використаємо критерій χ^2 для перевірки гіпотези про те, що в заданому прикладі сукупність емпіричних даних розподілена за нормальним законом, що описується диференціальною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Цей закон визначається двома параметрами: математичним сподіванням a і середнім квадратичним відхиленням σ. Як параметри в заданому розподіленні будуть $\bar{x} = 14{,}2$ і $\sigma = 2{,}7$ відповідно.

Якщо ознака x має неперервний розподіл ймовірностей, то теоретичні частоти обчислюються за формулою:

$$n_i' = nP_i ,$$

де n – обсяг вибірки; P_i – ймовірність того, що випадкова величина X потрапила в $i-$й частковий інтервал. Вона обчислюється за формулами:

$$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i) = \frac{nh}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - \overline{x})^2}{2\sigma^2}},$$

де $n-$ обсяг вибірки; $h-$ довжина часткового інтервалу;

$\overline{x}-$ середня величина вибірки; $\sigma-$ вибіркове середнє квадратичне відхилення; $\varphi(u_i)-$ щільність ймовірностей для загального нормального закону розподілу. Можна скористатися також формулою:

$$n_i' = n\left[\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}\right)\right],$$

де $\Phi\left(\frac{x_{i-1} - \overline{x}}{\sigma}\right)$, $\Phi\left(\frac{x_{i+1} - \overline{x}}{\sigma}\right)$ – функції Лапласа.

Значення функції $\varphi(u)$ і $\Phi(u)$ наведені в додатках.

Обчислення теоретичних частот проведемо за першою формулою з використанням такої розрахункової таблиці.

x_{ic}	n_i	$u_i = \frac{x_i - \overline{x}}{\sigma}$	$\varphi(u_i)$	$n_i' = \frac{nh}{\sigma}\varphi(u_i) = \frac{100 \cdot 2}{2,7}\varphi(u_i)$
7	5	-2,67	0,0113	1
9	3	-1,93	0,062	4
11	13	-1,19	0,1965	14

13	13	-0,45	0,1756	13
15	45	0,29	0,5805	43
17	16	1,03	0,2347	17
19	5	1,77	0,0833	6

Для обчислення спостережуваного значення $\chi_{сп}^2$ складемо таблицю:

n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$
5	1	4	16	16
3	4	-1	1	$\frac{1}{4}$
13	14	-1	1	$\frac{1}{14}$
13	13	0	0	0
45	43	2	2	$\frac{4}{43}$
16	17	-1	-1	$\frac{1}{17}$
5	6	-1	-1	$\frac{1}{6}$

Тоді $\chi^2_{спост} = \sum \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'} = 16,6$.

За таблицею критичних значень розподілу χ^2 за заданим рівнем значущості $\alpha = 0,05$ і числом ступенів свободи *k* визначаємо критичну точку (див. дод. 3). Число ступенів свободи визначається за формулою: $\kappa = q - m - 1$, де $q -$ кількість інтервалів,

$m-$ число параметрів, якими визначається закон розподілення. У цьому випадку $q=7$, $m=2$ (для нормального розподілу два параметри: α і σ), тоді $\kappa = 7-2-1=4$. Отже, $\chi^2_{кр}$ $(\alpha = 0{,}05; \kappa = 4) = 9{,}5$.

Оскільки, $\chi^2_{сп.} > \chi^2_{кр.}$ $(16{,}6 > 9{,}5)$ різняться значимо (не випадково), то гіпотеза про нормальний розподіл заданої сукупності емпіричних даних відхиляється.

Глава 2. ІНТЕРВАЛЬНІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРІВ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Статистична оцінка – це наближене значення шуканого параметра генеральної сукупності, яка одержана за результатами вибірки. Вона забезпечує можливість прийняття обґрунтованих рішень про невідомі параметри генеральної сукупності.

Інформація, яку дістали на основі обробки вибірки про ознаку генеральної сукупності, завжди міститиме певні похибки, оскільки вибірка становить лише незначну частину від неї ($n < N$), тобто обсяг вибірки значно менший від обсягу генеральної сукупності. Вибірка повинна проведена так, щоб ця інформація була найбільш повною (вибірка має бути репрезентативною) і забезпечувала б з найбільшим ступенем довіри параметри генеральної сукупності або закон розподілу її ознаки.

Параметри генеральної сукупності $M(x) = \overline{X_Г}, D_Г, \sigma_Г,$ Mo, Me, є величинами сталими, але їх числове значення невідоме. Ці параметри оцінюються параметрами вибірки: $\overline{x}_В$, $D_В, \sigma_В$, Mo*, Me*, які одержують у разі обробки вибірки. Вони є величинами непередбачуваними, тобто випадковими.

Статистична оцінка, що визначається двома числами, кінцями інтервалів, називається інтервальною.

Різниця між статистичною оцінкою θ* та її оцінювальним параметром θ, взята за абсолютним значенням, називається точністю оцінки, а саме: $|\theta^* - \theta| < \delta$, де δ є точністю оцінки.

Оскільки θ* є випадковою величиною, то і δ буде випадковою, тому нерівність справджуватиметься з певною ймовірністю.

Ймовірність, з якою береться нерівність, тобто

$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$, називають надійністю.

Рівність можна записати так: $P(|\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta) = \gamma$.

Інтервал $(\theta^* - \delta;\ \theta^* + \delta)$, що покриває оцінюваний параметр генеральної сукупності θ із заданою надійною γ, називають довірчим.

Нехай ознака X генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Побудуємо довірчий інтервал для $\overline{X_Г}$ із заданою надійністю γ, знаючи числове значення середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності $\sigma_Г$. Оскільки $\overline{x_в}$ як точкова незміщена статистична оцінка для $\overline{X_Г} = M(x)$ має нормальний закон розподілу з числовими характеристиками $M(\overline{x_в}) = \overline{X_Г} = a$ та $\sigma(\overline{x_в}) = \dfrac{\sigma_Г}{\sqrt{n}}$, то з урахуванням того, що ймовірність задана і дорівнює γ, маємо:

$$P(|\overline{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t) = \gamma \quad .$$

Позначивши через $t = \dfrac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$ аргумент функції Лапласа і знайшовши його значення із таблиці, обчислюємо значення δ, що дорівнює $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Остаточно маємо:

$$P(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Зміст отриманого співвідношення такий: з надійністю γ можна стверджувати, що довірчий інтервал $(\bar{x}_в - t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad \bar{x}_в + t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ покриває невідомий параметр *a*; точність оцінки $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

У більшості випадків середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ досліджуваної ознаки (генеральної сукупності) невідоме. Тому замість $\sigma(X)$ у разі великої вибірки $(n > 30)$ застосовують виправлене середнє квадратичне відхилення *s*,що є у свою чергу оцінкою $\sigma(X)$,

$s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}}\,\sigma_в$. У такому разі довірчий інтервал буде мати вигляд:

$$(\bar{x}_в - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{s}{\sqrt{n}}).$$

Приклад №2. Середнє значення відстані між двома об'єктами, що отримали при дев'яти незалежних вимірюваннях, дорівнює 2500 м. Середня похибка вимірювального приладу, яку вважаємо як середнє квадратичне відхилення σ, дорівнює 40 м. Визначити з надійністю 95 % довірчий інтервал для вимірювальної відстані.

За умовою: $\gamma = 0{,}95$, $n = 9$, $\sigma = 40$, $\overline{x_в} = 2500$. За даними додатка 2 і із рівності $2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\delta\right) = 0{,}95$ знаходимо, $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\delta = 1{,}96$.

Звідси $\delta = \frac{40 \cdot 1{,}16}{\sqrt{9}} = 26{,}13$.

Тоді шуканий довірчий інтервал має вигляд:

2500 м – 26,13 м < α < 2500 м +26,13 м, або 2473,87 м < α < 2526,13.

Глава 3. СТАТИСТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ

Під час вивчення зв'язку між змінними величинами функціональна залежність трапляється порівняно рідко. Частіше доводиться мати справу з так званою статистичною залежністю між величинами, в якій зі зміною однієї величини змінюється закон розподілення іншої. А це означає, що на результативну змінну величину (ознаку) мають вплив й інші випадкові фактори.

Важливим прикладом статистичної залежності є кореляційна залежність. Нехай значенню x величини X відповідає певний ряд розподілення величини $У$. Середнє значення величини $У$, яке знаходиться в цьому ряду, називається умовним середнім величини $У$. Умовне середнє позначається через $\overline{y_x}$.

Якщо умовне середнє $\overline{y_x}$ значень випадкової величини $У$ є деякою функцією $f(x)$ відповідних значень величини X, то залежність $У$ від X називається кореляційною. Рівняння $\overline{y_x} = f(x)$

називається рівнянням регресії *У* на *Х*. Сама функція $f(x)$ називається регресією *У* на *Х*, а її графік – лінією регресії *У* на *Х*.

Аналогічно визначається умовне середнє $\overline{x}_y$ та рівняння регресії $\overline{x}_y = \varphi\ (y)$ *Х* на $У$.

Якщо обидві регресії $f(x)$ і $\varphi(y)$ будуть лінійними функціями, тобто якщо: , то кореляційна залежність між величинами *Х* на *У* називається лінійною кореляцією. Очевидно, в цьому випадку обидві лінії регресії будуть прямі.

Криволінійну кореляцію будемо мати в тому випадку, коли графіком регресії $f(x)$ чи регресії $\varphi(y)$ буде лінія, що відмінна від прямої. Зокрема, коли $\overline{y}_x = ax^2 + вx + c$ залежність *У* від *Х* називається параболічною кореляцією другого порядку. Бувають ще і такі рівняння регресії *У* на *Х*: $\overline{y}_x = ав^x$; $\overline{y}_x = ax^3 + вx^2 + cx + d$; $\overline{y}_x = \frac{a}{x} + в$ та ін.

Одним із завдань теорії кореляції є встановлення форми кореляційної залежності (кореляційного зв'язку) однієї величини *У* від іншої *Х*, тобто знаходження регресії *У* на *Х*.

До вирішення питань за даною темою розглянемо такий приклад.

Приклад №3. У результаті досліду була отримана така таблиця відповідних значень величин *Х* та *У*.

Х	3,2	3,8	5	5,9	6,3	7,2	8,2	9	9,8	10,2

$У$	17,2	15,1	12	11,2	10,5	10	9,3	8,7	8	7,6

Встановити пряму, квадратичну, гіперболічну залежність між величинами X та $У$. Обчислити коефіцієнт кореляції.

Для знаходження параметрів ($a, в, c, d \ldots)$ кореляційного рівняння $\overline{y}_x = f(x)$ використаємо метод найменших квадратів (МНК), за яким сума квадратів відхилень $\delta^2{}_i = (y_i - \overline{y}_{x_i})^2$ повинна бути мінімальною, тобто:

$$S(a, в, c...) = \sum \delta_i^{\,2} = \sum (y_i - \overline{y_x})^2 \to \min .$$

Із необхідної умови існування мінімуму функції $S = S(a; в; c\ldots)$ як функції багатьох змінних, для кожного вибраного рівняння $\overline{y}_x = f(x)$ була отримана система рівнянь для визначення невідомих параметрів *а, в, с* … .

1. Припустимо, що залежність між X та $У$ лінійна $\overline{y}_x = ax + в$, на що підказує розміщення точок, побудованих за умовою в прямокутній системі координат.

Система нормальних рівнянь, що містить невідомі a і $в$ при лінійній кореляції має вигляд:

$$\begin{cases} a\sum x_i^{\,2} + в\sum x_i = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + nв = \sum y_i \end{cases}$$

У цих рівняннях: n – число спостережень (за умовою $n = 10$); $\sum x_i$ – сума всіх значень змінної X; $\sum x^2{}_i$ – сума квадратів змінної X; $\sum y_i$ – сума всіх значень змінної $У$; сума добутків значень величини X на відповідні значення величини $У$.

Обчислення указаних сум корисно оформити у вигляді такої розрахункової таблиці:

x_i	3,2	3,8	5	5,9	6,3	7,2	8,2	9	9,8	10,2
y_i	17,2	15,1	12	11,2	10,5	10	9,3	8,7	8	7,6
x_i^2	10,24	14,44	25	34,81	39,69	51,8	67,24	81	96,04	104,04
$x_i y_i$	55,04	57,38	60	66,08	66,15	72	76,26	78,3	78,4	77,52

$$\sum x_i = 68,6; \quad \sum y_i = 109,6; \quad \sum x^2{}_i = 524,34; \quad \sum x_i y_i = 687,13.$$

Розв’язок системи нормальних рівнянь за формулами Крамера:

$a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta}$, $в = \dfrac{\Delta_в}{\Delta}$, де $\Delta -$ визначник системи, Δ_a – визначник невідомої a і $\Delta_в$ – визначник невідомої $в$, дає такі вираження для невідомих:

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}; \qquad в = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_s}{n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i}.$$

Підставимо значення сум, взяті із таблиці, і будемо мати:

$$a = \frac{10 \cdot 687,13 - 68,6 \cdot 109,6}{10 \cdot 524,34 - (68,6)^2} = -1,2;$$

$$в = \frac{524,34 \cdot 109,6 - 68,6 \cdot 687,13}{10 \cdot 524,34 - (68,6)^2} = 19,22 .$$

Тоді рівняння лінійної кореляційної залежності між величинами X та $У$ буде мати вигляд: $\overline{y}_x = -1,20x + 19,22$.

2. Знайдемо числові значення параметрів $a, в, c$ квадратичної кореляційної залежності $\overline{y}_x = ax^2 + вx + c$ із системи трьох нормальних рівнянь першої степені, визначених у той же спосіб МНК.

$$\begin{cases} a\sum x_i^4 + в\sum x_i^3 + c\sum x_i^2 = \sum x_i^2 y_i \\ a\sum x_i^3 + в\sum x_i^2 + c\sum x_i^2 = \sum x_i y_i \\ a\sum x_i^2 + в\sum x_i + nc = \sum y_i. \end{cases}$$

Обчислення невідомих сум знайдемо, використовуючи розрахункову таблицю:

x_i^3	32,7	54,8	125	205,3	250,0	373,2	551,3	729	941,1	1061,2
x_i^4	104,8	108,5	625	1211,7	1576,3	2687,3	4521,2	6561	9223,6	10824,3
$x_i^2 y$	176,1	218,0	300	389,8	416,7	518,4	625,3	704,7	768,3	790,7

$\sum x^3{}_i = 4324,09$; $\sum x^4 i = 37543,01$; $\sum x^2{}_i y = 4908,23$.

Підставимо знайдені значення в рівняння. У результаті отримаємо систему:

$$\begin{cases} 37543,01a + 4324,09в + 524,34c = 4908,23 \\ 4324,09a + 524,34в + 68,6c = 687,13 \\ 524,34a + 68,6в + 10c = 109,6 \end{cases}$$

Розв'язок має такі значення невідомих :

$a = 0,17;\quad в = -3,75;\quad c = 26,27.$ Квадратична залежність виражена рівнянням: $\bar{y}_x = 0,17x^2 - 3,75x + 26,27$.

3. Встановимо залежність між змінними X та $У$ у вигляді дробово-лінійної функції:

$$y = \frac{a}{x} + в.$$

Застосовуючи МНК, отримаємо таку систему для визначення параметрів a і $в$ названої функції:

$$\begin{cases} a\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)^2 + в\sum\frac{1}{x_i} = \sum\frac{y_i}{x_i}; \\ a\sum\frac{1}{x_i} + вn = \sum y_i. \end{cases}$$

Використаємо розрахункову таблицю для обчислення необхідних сум, які входять у рівняння:

$\frac{1}{x}$	0,31	0,26	0,2	0,17	0,16	0,14	0,12	0,11	0,1	0,098
$\frac{1}{x^2}$	0,097	0,009	0,04	0,029	0,025	0,019	0,015	0,01	0,01	0,009
$\frac{y}{x}$	5,33	3,93	2,4	1,9	1,68	1,4	1,12	0,87	0,8	0,76

$$\sum \frac{1}{x} = 1{,}67\ ; \quad \sum \frac{1}{x^2} = 0{,}325\ ; \quad \sum \frac{y}{x} = 20{,}19\ .$$

Підставимо і маємо:

$$\begin{cases} 0{,}325\ a + 1{,}67\ в = 4{,}48 \\ 1{,}67\ a + 10\ в = 109{,}6. \end{cases}$$

Розв'язання системи дає такі значення: $a = 41{,}2; \quad в = 4{,}13.$

Отже, гіперболічна залежність буде мати такий вигляд:

$$\bar{y}_x = \frac{41{,}02}{x} + 4{,}13.$$

За найменшою сумою відхилень емпіричних даних y_x від $f(x_i)$ визначимо, яка із залежностей : лінійна $f_1(x)$, параболічна $f_2(x)$ чи гіперболічна $f_3(x)$ найбільше відповідає кореляційному зв'язку між величинами *X* та *У*.

Розрахунки помістимо в таблицю:

x_i	$y_i - (-1{,}2x_i + 19{,}22)$	$y_i - (0{,}17x_i^2 - 3{,}75x_i + 26{,}27)$	$y_i - \left(\frac{41{,}02}{x_i} + 4{,}13\right)$
3,2	17,2 - 15,38=1,82	17,2 - 31,68= -14,48	17,2 – 16,95=0,25
3,8	15,1 - 14,66=0,44	15,1 - 14,47= 0,63	15,1 - 14,92=0,18
5	12 - 13,22= -1,22	12 - 11,77=0,23	12 -12,33= -0,33
5,9	11,2 - 12,14=0,94	11,2 - 10,01=1,19	11,2 - 11,08 = -0,12
6,3	10,5 - 11,64= -1,14	10,5 - 9,39=1,11	10,5 - 10,64 = -0,14
7,2	10 - 10,58= -0,58	10 - 8,08=1,92	10 - 9,83=0,17
8,2	9,3 - 9,38= -0,08	9,3 - 6,95=2,35	9,3 - 9,13=0,17

9	8,7 - 8,42=0,28	8,7 - 5,89=2,87	8,7 – 8,69=0,01
9,8	8 - 7,46=0,54	8 - 5,85=2,15	8 - 8,32= -0,32
10,2	7,6 - 6,98=0,62	7,6 - 5,7=1,9	7,6 – 8,15= -0,55
	$\sum(y_i - f(x_i)) = -0{,}26$	$\sum(y_i - f(x_i)) = 0{,}14$	$\sum(y_i - f(x_i)) = -0{,}44$

Всі три аналітичні функції за сумою відхилень добре відповідають табличній залежності між змінними *Х* та *У*. Ці суми практично прямують до нуля. Проте, якщо подивитися на розсіювання точок вздовж графіків цих функцій (рис. 3), тобто на деякі окремі відхилення, то в порядку кращої відповідності можна віддати перевагу лінійній і гіперболічній формам кореляційного зв'язку, а потім квадратичній.

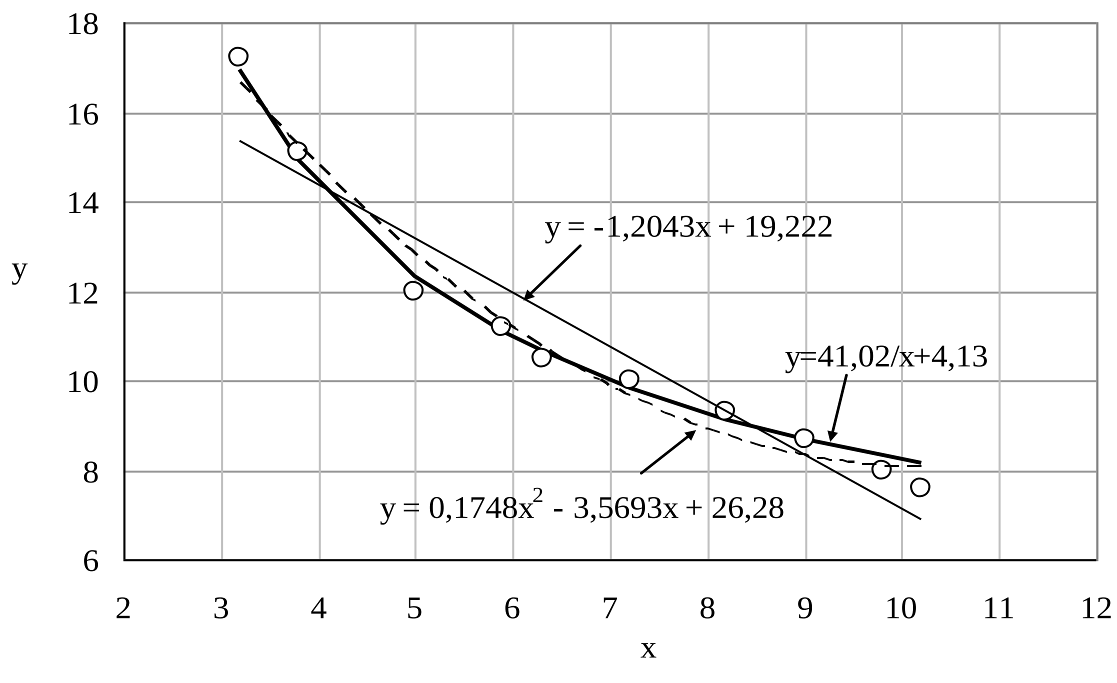


Рис. 3

Знайдемо коефіцієнт кореляції. Якщо частота спільної появи ознак X та $У$ для всіх варіантів дорівнює 1, то в цьому разі двовимірний статистичний розподіл, як і в заданому прикладі, називається парним. Обсяг вибірки у цьому разі дорівнює кількості пар. За міру лінійної залежності між кількісними ознаками у вибірці приймається коефіцієнт кореляції: $r = \dfrac{\overline{XУ} - \overline{X}\,\overline{У}}{\sigma_x \sigma_y}$, де $\overline{XУ}$ – середнє арифметичне із добутків значень величини X на відповідні значення величини $У$; $\overline{X}$, $\overline{У}$ – середнє ознаки X і $У$, σ_x, σ_y – середнє квадратичне відхилення величини X та $У$ відповідно.

Необхідні суми візьмемо із таблиці і знайдемо:

$$\overline{XУ} = \frac{\sum x_i y_i}{n} = \frac{687,13}{10} = 68,713;$$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{68,6}{10} = 6,86; \qquad \overline{У} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{109,6}{10} = 10,96.$$

Середнє квадратичне відхилення знайдемо за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}; \qquad \sigma_x = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2};$$

$$\overline{x}^2 = \sum \frac{x_i^2}{n} = \frac{524,34}{10} = 52,434; \quad \overline{y}^2 = \frac{y_i^2}{n} = \frac{1287,44}{10} = 128,44;$$

$$\sigma_x = \sqrt{52,434 - (6,86)}^2 = 2,32; \quad \sigma_y = \sqrt{128,744 - (10,96)^2} = 2,94.$$

Підставимо знайдені величини у формулу коефіцієнта кореляції:

$$r = \frac{68,713 - 6,86 \cdot 10,96}{2,32 \cdot 2,94} = -0,94.$$

Таким чином, коефіцієнт кореляції $r = -0{,}94$. Велике від'ємне значення коефіцієнта кореляції вказує на тісний (сильний) обернений кореляційний зв'язок між ознаками *X* та *У*.

Глава 4. РОЗРАХУНОК ХАРАКТЕРИСТИК КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ.

Показники тісноти зв'язку

У разі великої кількості спостережень одне і те ж значення *X* може траплятися n_x – раз, одне і те ж значення *У* може траплятися n_y – раз, одна і та ж пара чисел (xy) – n_{xy} раз. Тому дані спостережень групують, тобто облічують частоти n_x, n_y, n_{xy}. Всі згруповані дані записують у вигляді таблиці, що називається кореляційною.

Приклад № 4. За даними кореляційної таблиці скласти рівняння прямої лінії регресії *У* на *X*. Знайти коефіцієнт кореляції та кореляційне відношення.

X, $У$	3	8	13	18	23	28	n_x
9	4	2	-	-	-	-	6
13	-	4	5	-	-	-	9
17	-	-	8	37	5	-	50
21	-	-	5	8	8	-	21
25	-	-		6	4	4	14
n_y	4	6	18	51	17	4	100

Вибіркове рівняння регресії *У* на *Х* має вигляд $\overline{y_x}-\overline{y}=\rho_{y/x}(x-\overline{x})$, де $\overline{y_x}$ – умовні середні величини y при $X=x$; $\overline{x}$, $\overline{y}$ – середні значення ознак *Х* та *У*; $\rho_{y/x}$ – вибірковий коефіцієнт регресії *У* на *Х* і його величина знаходиться за формулою:

$$\rho_{y/x}=\frac{\sum n_{xy}x\,y-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{n\overline{x^2}-\overline{x}^2}.$$

Вибіркове рівняння регресії *У* на *Х* можна записати і в такому вигляді:

$\overline{y_x}-\overline{y}=r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$, де σ_x, σ_y – вибіркові середні квадратичні відхилення, а r – вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r=\frac{\sum n_{xy}x\,y-n\,\overline{x}\,\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Для значного спрощення обчислень перейдемо до умовних змінних:

$u_i=\dfrac{x_i-c_1}{h_1}$ *і* $v_i=\dfrac{y_i-c_2}{h_2}$, де c_1 *і* c_2 – хибний нуль, h_1 *і* h_2 – крок, тобто різниця між будь-якими сусідніми варіантами ознаки *Х* та *У* відповідно.

Як хибний нуль для ознаки *Х* візьмемо $c_1=17$, для ознаки *У* – $c_1=18$ (варіанти, які мають найбільшу частоту), крок $h_1=13-9=4,$ $h_2=8-3=5.$ Складемо кореляційну таблицю з умовними варіантами. Практично це роблять так: у першому стовпчику замість варіанти (17), яка має найбільшу частоту, пишуть 0; над нулем пишуть послідовно -1;-2; під нулем пишуть 1; 2. У першому рядочку замість варіанти (18), яка має найбільшу частоту, пишуть 0; зліва від нуля послідовно записують − 1; – 2; − 3; праворуч від нуля пишуть 1;2. Всі інші дані переписуємо із попередньої таблиці. У результаті маємо:

U, V	-3	-2	-1	0	1	2	n_u
– 2	4	2	-	-	-	-	6
– 1	-	4	5	-	-	-	9
0	-	-	8	37	5	-	50
1	-	-	5	8	8	-	21
2	-	-		6	4	4	14
n_v	4	6	18	51	17	4	100

Знайдемо середні значення змінних U і V:

$$\bar{u} = \frac{\sum un_u}{n} = \frac{(-2)\cdot 6 + (-1)\cdot 8 + 1\cdot 21 + 2\cdot 14}{100} = 0{,}28;$$

$$\bar{v} = \frac{\sum vn_v}{n} = \frac{-3\cdot 4 + (-2)\cdot 6 + (-1)\cdot 18 + 1\cdot 17 + 2\cdot 4}{100} = -0{,}17.$$

Обчислимо $\overline{u^2}$ $і$ $\overline{v^2}$, а потім σ_u $і$ σ_v;

$$\overline{u^2} = \frac{\sum u^2 n_v}{n} = \frac{4\cdot 6 + 1\cdot 9 + 1\cdot 21 + 4\cdot 14}{100} = 1{,}1;$$

$$\overline{v^2} = \frac{\sum v^2 n_u}{n} = \frac{9\cdot 4 + 4\cdot 6 + 1\cdot 18 + 17 + 4\cdot 4}{100} = 1{,}11;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \bar{u}^2} = \sqrt{1{,}1 - 0{,}0784} = 1{,}01;$$

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{v^2} - \overline{v}^2} = \sqrt{1{,}11 - 0{,}0289} = 1{,}04;$$

$$\sum uvn_{uv} = 24 + 8 + 8 + 5 - 5 + 8 + 8 + 16 = 72.$$

Це значення нам потрібне, щоб обчислити коефіцієнт кореляції величин U і V, що і дорівнює коефіцієнту кореляції вихідних величин X та $У$.

$$r_в = \frac{\sum uvn_{uv} - n \cdot \overline{u}\,\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{72 - 100 \cdot 0{,}28 \cdot (-0{,}17)}{100 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}01} = 0{,}64.$$

Знаючи середні значення умовних величин $\overline{u}\ i\ \overline{v}$ та значення середніх квадратичних відхилень $\sigma_u\ \ i\ \sigma_v$ і, використовуючи формули:

$$\overline{x} = \overline{u}h_1 + c_1;\ \overline{y} = \overline{v}h_2 + c_2;\quad \sigma_x = h_1\sigma_u;\ \sigma_y = h_2\sigma_v,$$

знайдемо: $\overline{x} = 0{,}28 \cdot 5 + 17 = 18{,}4;\quad \overline{y} = -0{,}17 \cdot 4 + 18 = 17{,}32;$

$$\sigma_x = 4 \cdot 1{,}01 = 4{,}01;\quad \sigma_y = 5 \cdot 1{,}04 = 5{,}20.$$

Підставимо знайдені величини в загальне рівняння прямої лінії регресії $У$ на X: $\quad \overline{y_x} - \overline{y} = r\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})\quad$ і отримаємо шукане рівняння: $\overline{y_x} - 17{,}32 = 0{,}64 \cdot \dfrac{5{,}2}{4{,}04}(x - 18{,}4),\quad$ або $\quad \overline{y_x} = 0{,}82x + 2{,}23$.

Як загальний вимірник тісноти зв'язку для лінійної, а також і для криволінійної кореляції стає у нагоді кореляційне відношення $\eta_{y/x}$.

Кореляційним відношенням називають відношення середнього квадратичного відхилення значень умовної середньої від її загальної середньої до середнього квадратичного відхилення значень ознаки від її загальної середньої.

Для кореляційної залежності між величинами X та $У$ кореляційне відношення запишемо у вигляді формули: $\eta_{y/x} = \dfrac{\sigma(\overline{y_x})}{\sigma_y}$, де $\sigma(\overline{y_x}) = \sqrt{\sigma^2(\overline{y_x})}$ є середнє квадратичне відхилення значень умовної середньої $\overline{y_x}$ від загальної середньої $\overline{y}$; $\sigma_y = \sqrt{\sigma_y^{\ 2}}$ є середнє квадратичне відхилення значень y від його загальної середньої $\overline{y}$. Вище вже знайдені величини $\overline{y}$ і σ_y : $\overline{y}$ =17,32; σ_y = 5,2.

Знайдемо умовні середні $\overline{y_x}$, та $\sigma(\overline{y_x})$:

$$\overline{y}_{x=9} = \frac{3\cdot 4 + 8\cdot 2}{6} = 4{,}67; \qquad \overline{y}_{x=3} = \frac{8\cdot 4 + 13\cdot 5}{9} = 10{,}78;$$

$$\overline{y}_{x=17} = \frac{13\cdot 8 + 18\cdot 37 + 23\cdot 5}{50} = 17{,}7;$$

$$\overline{y}_{x=21} = \frac{13\cdot 5 + 18\cdot 8 + 23\cdot 8}{21} = 18{,}71;$$

$$\overline{y}_{x=25} = \frac{18\cdot 6 + 23\cdot 4 + 28\cdot 4}{14} = 22{,}28;$$

$$\sigma^2(\overline{y}_x) = \frac{\sum(\overline{y}_x - \overline{y})^2 n_x}{n} = \frac{(4{,}67-17{,}32)^2\cdot 6 + (10{,}78-17{,}32)^2\cdot 9 + (17{,}7-17{,}32)^2\cdot 50 +}{100}$$

$$\frac{+(18{,}71-17{,}32)^2\cdot 2 + (22{,}28-17{,}32)^2\cdot 14}{} = 15{,}40\ ; \qquad \sigma(\overline{y}_x) = \sqrt{15{,}40} = 3{,}92\,.$$

Шукане кореляційне відношення дорівнює:

$$\eta_{xy} = \frac{\sigma(\overline{y_x})}{\sigma_y} = \frac{3{,}92}{5{,}2} = 0{,}75.$$

Показник кореляційного відношення в цьому випадку свідчить про тісний зв’язок між ознаками X як факторною та результативною

$У$. Можна говорити, що варіація ознаки $У$ на 75 % залежить від варіації ознаки X і на 25 % від варіації інших факторів.

5. КОНТРОЛЬНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

Завдання № 1

Вихідні дані – результат обстеження вибірки, де спостерігалася неперервна випадкова величина. Скласти інтервальний ряд. Побудувати гістограму розподілення щільності відносних частот, функцію розподілення відносних частот. Знайти числові характеристики статистичного розподілення вибірки $\overline{X}_{B,}$ M_o, M_e, σ_x^2, $R_в$, V_σ, σ_X, A_s, E_k. Використовуючи критерій Пірсона χ^2 **,** перевірити гіпотезу про те, що генеральна сукупність ознаки X розподілена нормально $\alpha = 0,05$.

Варіант 1

X	3,1	4,1	4,5	4,8	5,4	5,9	6,5	6,7	7	7,2	7,8	7,9	8,2	8,5	9,2	10,1
n	1	3	2	4	5	7	8	20	20	15	7	8	6	5	4	2

Варіант 2

X	2	2.9	4.1	5.7	6.4	7.2	7.9	8.1	8.5	9.2	10	10.7	11.2	11.9	12.1	14
n	1	3	3	4	4	5	4	7	10	13	12	8	7	6	6	7

Варіант 3

X	1	3.7	4.2	5	5.9	6.7	7.8	8.6	9.4	10.2	10.9	12.1	12.8	14.1	15	17
n	2	4	4	5	6	7	9	12	12	7	6	7	5	5	5	4

Варіант 4

X	1.6	2.1	2.8	3	3.5	4	4.4	4.6	4.7	4.9	5	5.2	5.4	5.8	6.4	7.6
n	4	5	4	5	7	6	9	14	8	7	8	6	5	5	4	3

Варіант 5

X	2.4	3.1	3.8	4.5	5.2	5.6	6.3	6.7	6.9	7.2	7.5	7.9	8.1	8.6	9.5	10.4
n	4	5	4	4	6	5	9	13	11	7	6	7	5	5	4	5

Варіант 6

X	3.5	4.1	4.3	4.4	4.6	4.9	5.2	5.7	5.8	6.2	6.3	6.5	6.8	7	7.1	7.5
n	2	5	3	4	4	7	10	19	12	8	6	6	4	3	4	3

Варіант 7

X	4.2	5.1	5.9	6.3	7	7.1	7.4	8.2	9	9.3	9.9	10.2	10.6	10.9	11.8	12.2
n	2	3	4	4	5	6	9	11	18	10	8	7	5	4	3	1

Варіант 8

X	5.1	6.4	7.5	8.3	9.1	9.7	10.3	11.8	12.1	12.8	13.7	14.1	14.3	14.9	15.8	17.1
n	3	3	4	3	5	8	10	17	11	9	6	4	4	6	4	3

Варіант 9

X	7.5	8.3	9.1	10	10.9	11.4	11.8	12.3	12.9	13.1	13.4	13.8	14	14.3	14.7	15.5
n	2	3	4	5	7	8	9	10	18	10	6	4	5	3	4	2

Варіант 10

X	4	5.1	5.6	6.2	6.8	7.5	8.2	8.7	8.9	9.2	9.6	9.9	10.4	10.7	11.2	12
n	2	5	6	4	6	6	8	11	15	10	7	5	4	5	4	2

Варіант 11

X	7	8.7	10.3	11,6	11,9	12,5	13,4	14,2	14,9	15,3	16	16,3	17	17,4	17,9	19
n	2	4	5	6	5	6	7	10	16	11	8	4	4	6	5	1

Варіант 12

X	4.3	7,1	8,3	9,2	10,3	11	12,1	13,1	14,4	15,2	16,3	17,3	18	19,1	21	22,3
n	2	3	2	4	2	6	7	8	15	20	8	7	5	4	4	3

Варіант 13

X	2,7	3,8	4,3	5	6,2	6,9	7,6	7,8	8,3	9,1	9,9	10,3	10,8	11,6	12,2	14,7
n	1	4	3	3	3	6	6	7	14	19	10	8	6	4	4	2

Варіант 14

X	10	10,9	11,6	11,9	12,5	12,7	13	13,1	13,5	13,8	14,7	15,2	16	16,4	16,8	18
n	1	3	3	4	3	6	7	8	13	18	11	7	4	4	6	2

Варіант 15

X	5,3	5,9	6,1	6,5	6,8	7	7,6	8,3	9,1	9,7	10,1	10,5	11,3	11,6	11,8	12,2	12,9	13
n	1	2	2	3	3	5	6	6	7	13	21	9	8	5	2	2	3	2

Варіант 16

X	6,4	6,9	8	8,8	9,1	10	11,3	12,4	12,9	13,5	14,2	15,1	16	16,6	17,2	17,8	18,4
n	1	2	4	4	5	6	6	7	13	21	9	8	5	2	2	3	2

Варіант 17

X	7,5	8,1	8,9	9,7	10	10,6	11,5	11,9	12,4	13,1	14,3	15,6	16,5	6,9	17,4	19,1
n	2	3	3	3	4	7	7	9	10	17	10	8	6	4	4	3

Варіант18

X	6,5	7,2	7,8	8	8,2	8,7	9,3	9,6	9,7	10,2	10,9	11,3	11,7	12,1	12,5	13,1
n	3	3	4	4	5	8	14	17	11	6	6	5	4	3	5	2

Варіант19

X	5,4	6	6,2	6,3	6,5	6,6	6,9	7,3	7,7	7,9	8	8,3	8,6	8,7	8,9	9,4
n	2	3	4	4	6	9	13	16	12	7	6	6	6	3	2	1

Варіант 20

X	7,5	7,9	8,1	8,6	9	9,5	10	10,3	10,9	11,4	12	13,1	13,7	13,9	14,3	15,2
n	4	2	4	6	7	9	11	19	10	8	6	3	4	3	3	2

Варіант 21

X	2,5	4,5	4,7	5	5,4	6,5	7,3	7,8	8,6	9,2	10	10,7	11,2	11,9	12,9	13,5
n	2	4	3	4	5	6	7	11	18	12	8	6	5	4	3	2

Варіант 22

X	4,7	6	7,6	8,1	9,5	10,2	11,3	12,4	13,2	14,1	15,2	16,3	16,9	18	19,6	20,6
n	4	3	3	3	4	5	8	16	20	14	10	3	3	2	1	1

Варіант 23

X	4,7	5,3	5,5	5,6	5,8	6,1	6,3	6,5	6,8	7	7,2	7,3	7,9	8,1	8,2	8,7
n	2	2	3	5	4	6	8	13	17	13	11	7	3	2	3	1

Варіант 24

X	5,8	6,7	6,9	7,3	7,9	8,5	9	9,2	10,1	10,6	10,9	11,4	11,8	12,1	13,1	13,8

n	2	6	2	4	4	5	9	12	19	11	8	6	5	3	3	1

Варіант 25

X	6,9	8,1	9,3	9,9	10,5	11	11,7	12,5	12,8	13,4	14,3	14,9	15,2	15,9	16,7	17,9
n	1	5	4	3	4	7	7	11	17	12	6	5	5	6	4	3

Варіант 26

X	301	4,1	4,5	4,8	5,4	5,9	6,5	6,7	7	7,2	7,8	7,9	8,2	8,5	9,2	10,1
n	1	3	3	4	6	7	8	20	15	7	8	6	5	4	2	1

Варіант 27

X	2	3,3	14,1	5,7	6,4	7,2	7,9	8,1	8,5	9,2	10	10,7	11,2	11,9	12,8	14
n	1	3	3	4	4	5	4	7	10	13	12	8	8	7	5	6

Варіант 28

X	1	3,7	4,2	5	5,9	6,7	7,8	8,6	9,4	10,2	10,9	12,1	12,8	14,1	15	17
n	2	4	4	5	6	7	9	12	12	7	6	7	5	6	5	3

Варіант 29

X	1,6	2,1	2,8	3	3,5	4	4,4	4,6	4,7	4,9	5	5,2	5,4	5,8	6,4	7,6
n	3	4	5	6	7	6	9	14	8	7	8	6	5	5	4	3

Варіант 30

X	2,4	3,1	3,8	4,5	5,2	5,6	6,3	6,7	6,9	7,2	7,5	7,9	8,1	8,6	9,5	10,4
n	4	4	5	4	6	5	9	13	11	7	6	7	6	5	4	4

Завдання № 2

Визначити із заданою надійністю $\gamma=0,95$ довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання, якщо відомі: середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини, вибіркова середня $\bar{x}$ та обсяг вибірки n:

Пор. №	σ	$\bar{x}$	n	Пор. №	σ	$\bar{x}$	n
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
1	10	18,21	16	**16**	4	126,6	25
2	9	18,31	49	**17**	$2\sqrt{5}$	123,5	20

3	8	18.41	36	**18**	7	129,2	16
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
4	7	18,51	100	**19**	$2\sqrt{3}$	128,7	3
5	6	18,61	81	**20**	5	122,8	9
6	5	18,71	25	**21**	5	14	25
7	4	18,81	16	**22**	4	10,2	16
8	3	19,91	49	**23**	5	16,8	25
9	2	20,01	36	**24**	40	2000	5
10	1	20,11	64	**25**	0,3	15	36
11	3	125,3	4	**26**	2	17	30
12	$4\sqrt{3}$	121,4	12	**27**	3	20	64
13	6	124,1	9	**28**	1,5	9	9
14	$3\sqrt{2}$	127,3	8	**29**	5	100	10
15	$5\sqrt{2}$	120,7	18	**30**	6	80	49

Завдання № 3

Встановити пряму, квадратичну та дробово-лінійну залежність між величинами *X* та *У*. Обчислити коефіцієнт кореляції. Зробити висновок.

Варіант 1

X	4	4,3	5	5,2	5,9	6,7	8	9,1	10	12
Y	2,4	4,3	5,9	6	6,3	7	8	8,5	9,3	12

Варіант 2

X	1	2	2,6	3,4	5	6,2	6,9	7	7,5	8
Y	10,4	9	8,1	7,8	6,5	4,9	4	3,2	2,5	1

Варіант 3

X	3,4	4,1	5	5,3	5,9	6,4	7	7,8	8,2	8,8
Y	1,1	3,2	4,2	5	5,6	6	6,9	7,3	7,9	8,3

Варіант 4

X	1,4	2	2,6	3,3	3,8	5	5,8	6,4	7,1	8

Y	13,2	12,1	11,7	10,3	9,5	9	7	4	2,2	1

Варіант 5

X	1,1	2,3	3	4,2	4,9	5,5	6,2	7	7,4	8
Y	2,2	3,1	3,9	4	4,8	6	7,2	7,8	8	9

Варіант 6

X	3,2	3,8	5	5,9	6,3	7,2	8,2	9	9,8	10,2
Y	17,2	15,1	12	11,2	10,5	10	9,3	8,7	8	7,6

Варіант 7

X	4,2	4,4	4,9	5,6	6,1	6,7	7,2	8	8,9	10
Y	1,5	2	2,4	3	3,9	4,1	5,6	7,2	9,2	10

Варіант 8

X	0,2	0,9	1,6	3,1	3,9	4,6	5,2	6	6,9	8
Y	12,5	1,1	10,2	9,6	9	7,4	5,3	4,1	2,2	1

Варіант 9

X	2,1	2,7	3,2	3,9	5	5,8	6,1	7	7,3	8
Y	1	1,8	2,3	3	3,6	4,1	5	6,3	8	9,7

Варіант 10

X	2,3	3	3,2	3,7	3,9	5	5,8	6,2	7	7,9
Y	9,8	8,1	6,3	5,2	4,1	3,5	3,1	2,4	2	1,4

Варіант 11

X	1,2	2,3	3,4	4,3	5	5,9	6,7	7,3	8	9,1
Y	0,4	1,7	2,9	3,7	5	6,4	8,2	9,7	10,9	12

Варіант 12

X	3,2	3,9	4,6	5	6	7,1	8,1	8,9	9,2	9,9
Y	21	19	18	15	12	10	9	8	6	5

Варіант 13

X	2,1	2,7	3,4	4	4,8	5,7	6,2	6,9	7,1	8
Y	1,2	1,7	2,6	2,9	3,1	3,7	3,9	5	6,1	7,2

Варіант 14

X	3,5	4,1	4,9	5,7	6,2	7	8	8,8	9,1	9,8
Y	12,3	11,7	11,2	10,4	10	9,5	9,1	8,3	7,2	6

Варіант 15

X	1,7	1,9	2,4	3,1	3,6	4,1	4,6	4,9	5,6	6,1
Y	2,1	2,4	2,6	2,9	4	4,9	5,9	7,1	8,2	9

Варіант 16.

X	2,5	3,1	3,9	4,5	5,1	5,8	6,2	6,9	7,4	9,1
Y	21,1	19,3	16,9	14,2	13,1	12,6	12,1	11,4	10,9	10

Варіант 17

X	3,1	3,6	3,9	4,6	5,1	5,7	6,2	6,8	7,2	8
Y	0,6	0,9	1,2	1,8	3,1	5	6,7	7,9	9,2	10,8

Варіант 18

X	1,9	2,4	2,8	3,5	4,1	4,9	5,6	6,1	7	7,8
Y	13	11	9,8	8,4	7,7	7,1	6,8	6,5	6	5,6

Варіант 19

X	1,9	2,8	3,2	3,8	4,7	5,3	5,9	6,1	6,8	8
Y	3,2	4,6	4,7	4,9	5,1	5,9	7,1	7,9	9,1	12

Варіант 20

X	1,5	1,9	2,6	3,2	4	4,7	5,7	6,3	7	8
Y	13,5	11,8	10,9	9,2	8,7	8,3	8	7,6	7,2	6,9

Варіант 21

X	2,4	3,4	4,1	5	5,8	6,3	7,3	7,9	8,4	9,2
Y	1,8	2,2	2,7	2,9	3,5	4,9	5,8	7,1	8,5	10

Варіант 22

X	1,3	1,9	2,5	2,9	3,7	4,3	4,9	5,4	6,1	7
Y	15	13	11	10	9,1	8,3	7,7	7,1	6,5	5,8

Варіант 23

X	4,2	5	5,9	6,7	7,7	8,5	9	9,6	10	11
Y	0,9	1,7	3,4	5,1	6,6	7,6	8,3	8,8	9,2	10

Варіант 24

X	1,4	2,3	3,4	4,3	4,8	5,6	6,1	6,9	7,4	8,4
Y	13	11,5	10,8	10	9,3	8,2	7,1	5,4	3,1	2

Варіант 25

X	1,8	4	4,9	5,7	6,2	7,5	8,3	9,5	9,9	12
Y	3,1	5,3	7,1	8,2	9,2	9,8	10,4	11	11,4	11,8

Варіант 26

X	2,6	3,1	3,9	4,1	5	5,2	5,8	6,3	6,9	8
Y	13	11	9,2	8,4	7,4	6,7	6	5,6	5,2	4,9

Варіант 27

X	3,1	3,8	4,5	4,9	5,7	6,4	7,1	8	9,2	10
Y	2,4	3,2	3,6	3,9	4,5	5,7	7,1	8,2	9,1	10

Варіант 28

X	2	3,1	4,1	5,2	5,9	6,8	8,1	8,8	9,3	10
Y	15	13,1	11,4	10,1	9,3	8,4	7,8	7,3	6,9	6,7

Варіант 29

X	1,6	2,3	4	4,6	5,6	6,2	6,9	8	8,8	9,5
Y	3,1	4,8	5,7	6,7	8,3	9,9	11,1	14,6	16,2	20

Варіант 30

X	1,6	3,1	3,8	4,5	5,7	6,4	7,8	8,3	8,8	9,4
Y	12	11,8	10	9,2	8,5	7,1	5,3	3,6	2,1	1,6

Завдання № 4

Скласти рівняння прямої лінії регресії *У* на *X*. Знайти коефіцієнти кореляції та кореляційне відношення. Зробити висновок щодо тісноти кореляційного зв’язку між *X* та *У*.

Варіант 1

X, Y	12	16	20	24	28	32
5	3	2	0	0	0	0
7	0	6	4	0	0	0
9	0	0	5	47	2	0
11	0	0	3	8	6	0

13	0	0	0	4	7	3

Варіант 2

X,Y	11	14	17	20	23	26
3	3	3	0	0	0	0
9	0	5	4	0	0	0
15	0	0	10	40	5	0
21	0	0	3	7	7	0
27	0	0	0	5	6	3

Варіант 3

X,Y	3	8	13	18	23	28
9	4	2	0	0	0	0
13	0	4	5	0	0	0
17	0	0	8	37	5	0
21	0	0	5	8	8	0
25	0	0	0	6	4	4

Варіант 4

X,Y	14	16	18	20	22	24
34	4	1	0	0	0	0
37	0	2	4	5	0	0
40	0	0	11	38	5	0
43	0	0	0	9	7	0
46	0	0	0	7	3	4

Варіант 5

X,Y	43	46	49	52	55	58
12	5	1	0	0	0	0
16	0	5	2	3	0	0
20	0	0	8	42	4	0
24	0	0	0	7	8	0
28	0	0	0	5	7	3

Варіант 6

X,Y	15	20	25	30	35	40
17	4	2	0	0	0	0
20	0	5	4	1	0	0
23	0	0	6	44	4	0
26	0	0	2	7	7	0
29	0	0	0	3	6	5

Варіант 7

X,Y	33	35	37	39	41	43
6	4	2	0	0	0	0
8	0	5	5	0	0	0
10	0	0	7	45	2	0
12	0	0	3	10	7	0
14	0	0	0	4	7	3

Варіант 8

X,Y	24	27	30	33	36	39
25	2	5	0	0	0	0
27	0	5	2	0	0	0
29	0	0	6	47	2	0
31	0	0	3	10	4	0
33	0	0	0	8	3	3

Варіант 9

X,Y	11	17	23	29	35	41
5	7	2	0	0	0	0
14	0	3	5	0	0	0
23	0	0	5	46	2	0
32	0	0	6	9	2	0
41	0	0	0	6	4	4

Варіант 10

X,Y	36	40	44	48	52	56
13	3	5	0	0	0	0
19	0	5	3	0	0	0
25	0	0	8	37	5	0
31	0	0	3	10	7	0
37	0	0	0	5	3	6

Варіант 11

X,Y	9	14	19	24	29	34
16	3	3	0	0	0	0
18	0	5	5	0	0	0
20	0	0	6	43	4	0
22	0	0	6	7	3	0
24	0	0	0	4	7	4

Варіант 12

X,Y	27	31	35	39	43	47
2	4	2	0	0	0	0
5	1	3	4	0	0	0
8	0	0	8	40	1	0
11	0	0	3	12	6	0
14	0	0	0	3	7	4

Варіант 13.

X,Y	16	25	34	43	52	61
7	4	7	8	0	0	0
17	0	7	8	2	0	0
27	0	5	37	5	0	0
37	0	0	0	3	6	0
47	0	0	0	0	2	4

Варіант 14

X,Y	44	46	48	50	52	54
13	3	6	0	0	0	0
23	0	2	5	0	0	0
33	0	1	6	30	10	0
43	0	0	8	8	8	0
53	0	0	0	0	9	4

Варіант 15

X,Y	25	35	45	55	65	75
14	4	3	0	0	0	0
17	0	8	6	2	0	0
20	0	0	4	43	8	0
23	0	0	0	4	5	0
26	0	0	0	7	2	4

Варіант 16

X,Y	31	34	37	40	43	46
22	0	0	0	0	3	3
26	0	0	0	4	4	1
30	0	0	7	34	2	8
34	0	10	6	4	0	0
38	0	7	3	0	0	0

Варіант 17

X,Y	15	19	23	27	31	35
15	0	0	0	0	2	4
21	0	0	0	2	3	4
27	0	7	41	3	3	0
33	0	10	6	3	0	0
39	5	3	3	1	0	0

Варіант 18

X,Y	9	16	23	30	37	44
18	0	0	0	1	3	3
27	0	0	0	4	4	0
36	0	10	3	30	7	0
45	0	5	6	10	0	0
54	4	8	2	0	0	0

Варіант 19

X,Y	18	24	30	36	42	48
7	0	0	0	0	5	1
14	0	0	0	2	5	1
21	0	10	36	5	0	0
28	0	8	2	6	0	0
35	7	8	4	0	0	0

Варіант 20

X,Y	14	22	30	38	46	54
26	0	0	0	1	3	5
29	0	0	0	4	3	0
32	0	0	8	35	7	0
35	0	7	7	6	0	0
38	6	3	4	1	0	0

Варіант 21

X,Y	42	46	50	54	58	62
11	2	3	0	0	0	0
22	3	5	2	0	0	0
33	0	7	2	43	2	0
44	0	0	3	10	4	0
55	0	0	0	3	4	7

Варіант 22

X,Y	16	18	20	22	24	26
9	0	0	0	3	5	6
13	0	0	9	7	4	0
17	0	0	5	36	9	0
21	0	6	3	0	0	0
25	5	2	0	0	0	0

Варіант 23

X,Y	26	32	38	44	50	56
13	0	0	0	3	4	3
18	0	0	1	9	7	0
23	0	2	6	40	9	0
28	2	4	5	0	0	0
33	6	1	0	0	0	0

Варіант 24

X,Y	22	25	28	31	34	37
17	0	0	0	0	2	5
20	0	0	0	6	3	0
23	0	5	38	6	4	0
26	0	4	7	9	0	0
29	6	2	3	0	0	0

Варіант 25

X,Y	21	24	27	30	33	36
14	0	0	0	1	2	3
16	0	0	0	4	6	0
18	0	6	5	29	9	0
20	0	3	7	10	0	0
22	8	7	0	0	0	0

Варіант 26

X,Y	13	16	19	22	25	28
14	0	0	0	0	6	2
19	0	0	1	4	4	0
24	0	3	5	36	7	0
29	0	9	7	3	0	0
34	2	4	7	0	0	0

Варіант 27

X,Y	19	22	25	28	31	34
5	0	0	0	4	3	7
10	0	0	8	6	3	0
15	0	4	40	8	0	0
20	2	4	5	0	0	0
25	1	5	0	0	0	0

Варіант 28

X,Y	22	24	26	28	30	32
11	0	0	0	0	4	4
15	0	0	0	4	2	2
19	0	0	7	30	9	0
23	0	4	7	10	0	0
27	10	2	4	1	0	0

Варіант 29

X,Y	7	10	13	16	19	22
8	0	0	0	0	3	5
14	0	0	5	7	8	0
20	0	9	34	2	0	0
26	5	11	1	0	0	0
32	2	3	5	0	0	0

Варіант 30

X,Y	3	8	13	18	23	28
5	0	0	0	3	3	6
11	0	0	2	5	6	0
17	0	12	25	4	0	0
23	0	4	10	5	0	0
29	5	6	4	0	0	0

Додаток 1

Значення функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	3637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2

Значення функції $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1027	0,66	0,2454	1,06	0,3554	146	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

1,60	0,4452	1,85	0,4678	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,61	0,4463	1,86	0,4686	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,62	0,4474	1,87	0,4693	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,63	0,4484	1,88	0,4699	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,64	0,4495	1,89	0,4706	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,65	0,4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,66	0,4515	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,67	0,4525	1,92	0,4726	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,68	0,4535	1,93	0,4732	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1,69	0,4545	1,94	0,4738	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,70	0,4554	1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,71	0,4564	1,96	0,4750	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,72	0,4573	1,97	0,4756	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,73	0,4582	1,98	0,4761	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,74	0,4591	1,99	0,4767	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,75	0,4599	2,00	0,4772	2,50	0,4938	3,00	0,49865
1,76	0,4608	2,02	0,4783	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,77	0,4616	2,04	0,4793	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,56	0,4948	3,60	0,49984
1,79	0,4633	2,08	0,4812	2,58	0,4951	3,80	0,49993
1,80	0,4641	2,10	0,4821	2,60	0,4953	4,00	0,49997
1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956	4,50	0,49999
1,82	0,4656	2,14	0,4838	2,64	0,4959	5,00	0,5
1,83	0,4664	2,16	0,4846	2,66	0,4961	∞	0,5
1,84	0,4671	2,18	0,4854	2,68	0,4963		

Додаток 3

Критичні точки розподілення x^2

Число ступенів свободи *n*	Рівень значимості *a*					
	0,01	*0,025*	*0,05*	*0,95*	*0,975*	*0,89*
1	6,6	5,0	3,8	0,0029	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,00
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
13	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНО-СТАТИСТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

Біноміальний розподіл – the binomial distribution

Випадковий – random
Випадкові величини – the random variables
Випадкові процеси – random processes

Гіпотези – the hypothesis
Густина (щільність) – the density
Густина розподілу – the density distribution.

Двомірна випадкова величина – two-dimensional random variable
Дискретий – discrete
Дисперсія – the dispersion
Диференціальна функція розподілу – the differential distribution functiony
Добуток – the product
Достовірний – reliable
Дробові числа – floating point numbers

Ексцес – the kurtosis
Елемент імовірності – the element probability
Еліптичний – elliptic
Ефективний – effective

Закон рівномірної щільності – the law of uniform density
Залежний – dependent

Інтеграл імовірності – the probability integrals
Інтегральна функція розподілу – the integral distribution function

Ймовірність – the probability

Комбінаторика – the combinatorics
Конусний – conical
Кореляційний момент – the moment correlation

Математичне сподівання – mathematical expectation
Многокутник розподілу – the polygons sharing
Множина елементарних подій – the set of elementary events.
Момент зв’язку – the moment connection
Момент другого порядку – second order moment
Момент першого порядку – the moment of first order

Найімовірніше число – the most likely number
Незалежний – independent
Неможливий – could not be random
Неперервний – the continuous
Несумісні події – the incompatible events
Нормальний закон розподілу – normal law of distribution
Перестановка – the permutation
Повна група подій – the complete group of events
Подвійний інтеграл – the double integral
Подія – the event
Послідовність – the progression
Початковий момент – starting point
Приріст – the growth
Простір – space
Протилежний – opposite

Розміщення – an accommodation
Ряд розподілу – the number distribution

Середнє значення – an average
Середнє квадратичне відхилення – the mean square deviation
Співвідношення – ratio
Сполучення – combination
Сталий множник – the sustainable multiplier
Статистична ймовірність – the statistical probability
Статистичний ряд – the statistical series
Статистична сукупність – statistical combination
Степінь розсіювання – the power dissipation
Сума – the amount
Сумісні події – the compatible evenst

Твірна функція – produced feature

Фундаментальний закон – the fundamental laws
Функція розподілу – the distribution function
Функція розподілу ймовірностей – probability distribution function

Характеристика розсіювання – the characteristic scattering

Центр розподілу імовірності – the probability distribution center
Центрована випадкова величина – the centered random variable

Числові параметри – the number of parameters

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Булдык Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика/Г.М. Булдык. – Минск: Вышейшая школа, 1989.
2. Гмурман В.С. Терия вероятностей и математическая статистика/ В.С. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1977. – 480 с.
3. Жлуктенко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч.-метод. посібник: у 2-х ч. – Ч. ІІ. Математична статистика/ В.І. Жлуктенко, С.І. Наконечний, С.С. Савіна. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.
4. Карасев А.И. Теория вероятностей и математическая статистика/ А.И. Карасев. –М.: Статистика, 1970.
5. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика/ В.А. Колемаев. – М.: Высш. шк., 1990.
6. Коваленко И.Н. Теория вероятностей / И.Н. Коваленко, Б.В. Гниденко. – Киев: Высш. Шк., 1990. – 329 с.
7. Лакин Г.Ф. Биометрия/ Г.Ф. Лакин. – М.: Высш. шк., 1990.
8. Опря А.Т. Математична статистика: навч. посібник/ А.Т. Опря. – К.: Урожай, 1994. – 206 с.
9. Плохинский Н.А. Биометрия/ Н.А. Плохинский. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1970.

ЗМІСТ

Навчальне видання

КОВАЛЕНКО Микола Йосипович
МАСЛЕННІКОВ Дмитро Ігорович

ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Редактор Л.І. Сібенкова
Коректор І.О. Бутильська

Комп'ютерний набір і верстка М.Й. Коваленко

Підп. до друку . Формат 60x84/16. Гарнітура Таймс.Друк офсет. Обсяг: ум.-друк. арк.; 2.3 обл.-вид. арк. Тираж 100. Замовлення

Виробник – редакційно-видавничий відділ Харківського національного аграрного університету ім. В.В. Докучаєва. 32483, Харків. обл., Харків. р-н, п/в «Докучаєвське-2»; навч. містечко ХНАУ, корп. 1, кімн. 302, тел. 99-72-70.

Віддруковано в ЧП «Стиль-издат»