УДК 539.3

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМУ КОНТАКТНОМУ УДАРІ

Ярижко О.В.
Інститут проблем машинобудування ім. А.Н. Підгорного НАН України

Проведено аналітичне дослідження напружено-деформованого стану циліндричної оболонки при контактному ударі з урахуванням хвилевих процесів. Розв'язок отриман за допомогою інтегральних перетворень за часом і розкладання в ряди Фурье по координатах.

При дослідженні напружено-деформованого стану оболонкових елементів конструкцій при локальному імпульсному вантаженні велике значення мають задачі контактної ударної взаємодії таких конструкцій з твердими тілами. Необхідність досліджень таких процесів виникає у зв'язку з поширеністю такого роду навантаження оболонкових конструкцій в сучасному машинобудуванні, а також слабкою вивченістю проблеми, зокрема для замкнутих циліндричних оболонок.

Серед теорій, що описують контактний удар твердими тілами по різних конструкціях, найбільш широкого поширення набула теорія удару С.П. Тимошенко [1]. Вона дала новий напрям в розвитку теорії про удар і була покладена в основу багатьох досліджень таких, як дослідження В.Гольдсміта [2], Н.А.Кильчевського [3,4] і ін. Згідно Гольдсміту, характер зміни сили і деформацій в часі може бути достатнє добре представлений цією теорією при врахуванні деформацій стиснення по Герцу, поки контактне зминання значно менше товщини досліджуваного об'єкту і коли тривалість контакту більше часу розповсюдження (по висоті перетину) пружних хвиль.

Будемо проводити дослідження напружено-деформованого стану замкнутих пружних циліндричних оболонок кінцевої довжини при контактному ударі сферичним твердим тілом на основі функціонального рівняння удару С.П. Тимошенко [1], що враховує зближення падаючого тіла з оболонкою при стисненні в місці контакту [7,8].

Для циліндричної оболонки розв'язувальними операторами будуть:

$$\left[\left(\Delta-\frac{d^2}{dt^2}\right)^2\left(\Delta-\frac{1}{K}\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta-\frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right)-\left(\Delta-\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta-\frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right)\times\right.$$
$$\times\left(\Delta-\frac{1+K}{1+K^2(1+12R^3/h^3)}\frac{d^2}{dt^2}\right)\frac{1+K^2(1+12R^3/h^3)}{1+K}-\left(\Delta-\frac{d^2}{dt^2}-K\right)\times \tag{1}$$
$$\left.\times\left\{\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\nu}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{1-\nu}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}\right]w=$$
$$=\frac{1-\nu^2}{E}\frac{R^2}{h^2}\left(\Delta-\frac{d^2}{dt^2}-K\right)\left(\Delta-\frac{d^2}{dt^2}\right)\left(\Delta-\frac{2}{1-\nu}\frac{d^2}{dt^2}\right)P$$

Тут $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $K=K_1\frac{1-\nu}{2}\approx 0.35$; $K_1=\frac{\pi^2}{12}$.

Переходячи до операторів за часом, рішення для шарнірно опертой оболонки можна шукати у вигляді:

$$w(x,y,p)=\sum_m\sum_n a_{m\,n}(p)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s} \tag{2}$$

де l - відстань від точки дії навантаження до закріплення; s - довжина кола.

Складова імпульсного (ударного) навантаження прийме вигляд:

$$P(x,y,p)=\sum_m\sum_n q_{m\,n}(p)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s} \tag{3}$$

$$a_{m\,n}(p)=\frac{L^{(2)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\cdot q_{m\,n}(p) \tag{4}$$

Припустимо, що складова імпульсного (ударного) навантаження розподілена по площі плями контакту радіусом c нерівномірно, згідно з законом:

$$P(x,y,t)=P(t)\sqrt{1-(x/c)^2-(y/c)^2} \tag{5}$$

Тоді

$$\begin{aligned}q_{m\,n}(p)&=\frac{8}{sl}\iint_F P(x,y,p)\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s}dxdy=\\&=\frac{8P(p)}{csl}\iint_F\sqrt{c^2-x^2-y^2}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{s}dxdy\end{aligned}, \tag{6}$$

де F - площа плями контакту радіусом c.

Для обчислення (6) необхідно використовувати функції Бесселя :

$$\cos\eta = \left(\frac{\pi}{2}\eta\right)^{1/2} J_{-1/2}(\eta); \quad \sin\eta = \left(\frac{\pi}{2}\eta\right)^{1/2} J_{1/2}(\eta). \tag{7}$$

Інтеграл Пуассона

$$J_n(x) = \frac{2(x/2)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin\varphi)\cos^{2n}\varphi\, d\varphi \tag{8}$$

і інтеграл Соніна

$$\int_0^{\pi/2} J_m(x\sin\varphi) J_n(y\cos\varphi)\sin^{m+1}\varphi\cos^{n+1}\varphi d\varphi = \\ = \frac{x^m y^n}{(x^2+y^2)^{\frac{m+n+1}{2}}} J_{m+n+1}(x^2+y^2)^{1/2} \tag{9}$$

Тепер подвійний інтеграл (6) можна записати у вигляді $(d_1^2 = c^2 - y^2)$

$$A_{m\,n} = 4\int_0^c \cos\frac{n\pi y}{s}dy \int_0^{d_1} \sqrt{d_1^2 - x^2}\cos\frac{m\pi x}{l}dx$$

Підставляючи значення $x = d_1\sin\varphi$, використовуючи інтеграл Пуассона для $n = 1$ і вираз (7), отримуємо

$$A_{m\,n} = 4\int_0^c \cos\frac{n\pi y}{s}dy \int_0^{\pi/2} d_1^2\cos^2\varphi\cos\left(\frac{m\pi}{l}d_1\sin\varphi\right)d\varphi =$$

$$= 4\int_0^c d_1^2\cos\frac{n\pi y}{s}dy \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{m\pi}{l}d_1\sin\varphi\right)\cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= 4\frac{\sqrt{\pi}\cdot l\cdot\Gamma(3/2)}{m\pi}\int_0^c d_1\left(\frac{\pi}{2}\frac{n\pi y}{s}\right)^{1/2} J_{-1/2}\left(\frac{n\pi y}{s}\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}d_1\right)dy$$

Прийнявши $y = d\sin t$ і скориставшись формулою (9), отримаємо для $m = -1/2$, $n = 1$ (коли $d_1 = c\cos t,\ dy = c\cos t dt$ а межі інтегрування від 0 до $\pi/2$)

$$A_{m\,n} = 4\frac{l\cdot\Gamma(3/2)}{m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} c\cos t\left(\frac{\pi^2 nc\sin t}{2s}\right)^{1/2} J_{-1/2}\left(\frac{n\pi}{s}c\sin t\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}c\cos t\right)c\cos t dt =$$

$$= 4\frac{l\cdot\Gamma(3/2)}{m\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi/2} J_{-1/2}\left(\frac{n\pi}{s}c\sin t\right)J_1\left(\frac{m\pi}{l}c\cos t\right)\sin^{1/2}t\cos^2 t\frac{c^{3/2}\pi n}{2s}dt =$$

$$= 4\frac{n}{m}\frac{c^{3/2}l\sqrt{\pi}\Gamma(3/2)}{2s}\frac{J_{3/2}\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{s}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2}}{\sqrt{\frac{nmc^2\pi^2}{sl}}\left(\left(\frac{n\pi c}{s}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{l}\right)^2\right)^{3/4}}$$

Якщо запишемо $J_{3/2}$ через його кінцевий тригонометричний вираз

$$J_{3/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{3/2}\,\frac{1}{x}\,\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{x}}-\frac{\sin x}{x^{3/2}}\right),$$

то подвійний інтеграл (6) прийме вигляд:

$$A_{m\,n}=4\frac{n}{m}\frac{c^{3/2}l\pi}{4s}\left(-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)\left(\frac{\cos\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\dfrac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right)$$

Остаточні вирази для коефіцієнтів $q_{m\,n}(p)$ і $a_{m\,n}(p)$ мають вигляд:

$$q_{m\,n}(p)=-\frac{8nc^{1/2}\sqrt{2}}{ms^2}\left(\frac{\cos\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\dfrac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right)P(p), \qquad (10)$$

$$a_{m\,n}(p)=\frac{L^{(2)*}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\cdot P(p), \qquad (11)$$

де

$$L^{(2)*}(m,n,p)=-\frac{8nc^{1/2}\sqrt{2}}{ms^2}\frac{1-\nu^2}{E}\frac{R^2}{h^2}\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-p^2-K\right)\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-p^2\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{m^2\pi^2}{l^2}-\frac{n^2\pi^2}{s^2}-\frac{2}{1-\nu}p^2\right)\left(\frac{\cos\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\sqrt[4]{n^2l^2+m^2s^2}\sqrt{\dfrac{\pi c}{sl}}}-\frac{\sin\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}}{\left(\dfrac{\sqrt{n^2l^2+m^2s^2}\pi c}{sl}\right)^{3/2}}\right)$$

Для знаходження оригіналів виразу (11) скористаємося теоремою про згортку:

$$a_{m\,n}(t)=L^{-1}\left[\frac{L^{(2*)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\right]*L^{-1}\left[P(p)\right]=\int_0^t\sum_{j=1}^{8}A_j\cdot e^{S_j(t-t_1)}\cdot P(t_1)dt_1\,, \qquad (12)$$

де $L^{-1}\left[\dfrac{L^{(2*)}(m,n,p)}{L^{(1)}(m,n,p)}\right]=\sum\limits_{j=1}^{8}\dfrac{L^{(2)}(m,n,s_j)}{\prod\limits_{q=1}^{8}(s_j-s_q+\delta_{jq})}e^{s_j\cdot t}=\sum\limits_{j=1}^{8}A_j\cdot e^{s_j\cdot t}$

$(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ – корені бічетвертого порядку

$L^{(1)}(m,n,p) = 0$.

Інтегруючи частинами (12) і враховуючи закон зміни контактної сили $P(t)$ [7,8] отримуємо для $t = q\tau$:

1) якщо комплексне корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ має і дійсну і уявну частину не рівну нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau) = \int\limits_0^{q\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{a_j(q\tau - t_1)} \cdot (\cos a_j(q\tau - t1) + i \sin b_j(q\tau - t_1)) \cdot P(t_1)dt_1 = \qquad ,$$

$$= \sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{q} A_j \left\{ P_k \left[\frac{U_{k,j}}{D_j}\left(1 + \frac{b_j}{a_j}\right) + \left(H_{k-1,j} - H_{k,j}\right)\left(\frac{1}{D_j} - \frac{b_j}{D_j a_j \delta}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j}\right)\left(\frac{a_j}{D_j\delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j\delta}\right) - \frac{H_{k,j}}{a_j}\right] - P_{k-1}\left[\frac{U_{k-1,j}}{D_j}\left(1 + \frac{b_j}{a_j}\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(H_{k-1,j} - H_{k,j}\right)\left(\frac{b_j}{D_j a_j \delta} - \frac{1}{D_j}\right) + \left(\frac{U_{k,j}}{D_j} - \frac{U_{k-1,j}}{D_j}\right)\left(\frac{a_j}{D_j\delta} - \frac{b_j^2}{D_j a_j \delta} + \frac{2b_j}{D_j\delta}\right) - \frac{H_{k-1,j}}{a_j}\right]\right\}$$

де $U_{k-1,j} = e^{a_j\tau(q-(k-1))}\left[b_j \cos b_j\tau(m-(k-1)) - a_j \sin b_j\tau(m-(k-1))\right]$

$H_{k,j} = e^{a_j\tau(q-k)} \cos b_j\tau(m-k)$

$H_{k-1,j} = e^{a_j\tau(q-(k-1))} \cos b_j\tau(m-(k-1))$

$D_j = a_j^2 + b_j^2$;

2) якщо комплексне корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ має тільки дійсну частину не рівну нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau) = \int\limits_0^{\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 = \sum_{k=1}^{q} \int\limits_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{a_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{q} A_j \left\{ P_k \left[\frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-(k-1))} - \frac{1}{a_j} e^{a_j\tau(q-k)} - \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-k)} \right] + \right. \qquad ;$$

$$\left. + P_{k-1}\left[\frac{1}{a_j} e^{a_j\tau(q-(k-1))} - \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-(k-1))} + \frac{1}{a_j^2\tau} e^{a_j\tau(q-k)}\right]\right\}$$

3) якщо комплексне корені $(s_q, s_j) = (a_q + ib_q,\ a_j + ib_j)$ має тільки уявну частину не рівну нулю, то

$$a_{m\,n}(q\tau) = \int_0^{\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot e^{S_j(q\tau - t_1)} \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \int_{(k-1)\tau}^{k\tau} \sum_{j=1}^{8} A_j \cdot (\cos a_j(q\tau - t1) + i \sin b_j(q\tau - t_1)) \cdot P(t_1)dt_1 =$$

$$= \sum_{j=1}^{8} \sum_{k=1}^{q} A_j \left\{ P_k \left[\frac{\cos b_j \tau(q-k) - \sin b_j \tau(q-k)}{b_j} + \frac{\cos b_j \tau(q-k) + \sin b_j \tau(q-k)}{b_j^2 \tau} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\cos b_j \tau(q-(k-1)) + \sin b_j \tau(q-(k-1))}{b_j^2 \tau} \right] + P_{k-1} \left[\frac{\sin b_j \tau(q-(k-1)) - \cos b_j \tau(q-(k-1))}{b_j} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{\cos b_j \tau(q-k) + \sin b_j \tau(q-k)}{b_j^2 \tau} + \frac{\cos b_j \tau(q-(k-1)) + \sin b_j \tau(q-(k-1))}{b_j^2 \tau} \right] \right\}$$

Нормальне переміщення серединної поверхні оболонки прийме вигляд

$$w(x, y, q\tau) = \sum_m \sum_n a_{m\,n}(q\tau) \cos\frac{m\pi x}{l} \cos\frac{n\pi y}{s}$$

Значення P_q визначається з рівняння $y_ш(q\tau) = w(x_0, y_0, q\tau) + \alpha(q\tau)$ крок за кроком, починаючи з першого інтервалу часу τ, для якого $P_0 = 0$, $P(q\tau) = P_q$ по схемі, приведеній в [6].

Отримано аналітичний розв'язок функціонального рівняння удару С.П. Тимошенко з урахуванням хвилевих процесів. Розв'язок може бути використан при аналізі динамічного напружено-деформованого стану і міцності елементів сільськогосподарської техніки та інших машин.

Список використаних джерел

1.Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.–Л.: Физматгиз, 1959.– 439 с.

2.Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1965.– 448 с.

3.Кильчевский Н.А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. – Киев: Наук. думка, 1976.– 317 с.

4.Кильчевский Н.А. Теория нестационарных динамических процессов в оболочках. – Прикл. механика, 1968, 4, № 8.

5.Потележко В.П., Филиппов А.П. Контактная задача для плиты, лежащей на упругом основании. – Прикл. механика, 1967, 3 , №1, с.67–72.

6. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем. – Киев: Наук. думка, 1977. – 340с.

7. Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Ярыжко А.В. Анализ деформирования цилиндрической оболочки при ударе твердым телом.Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства ім. Петра Васеленко – Харків, 2008 – Вип. 69 – С. 279-284.

8. Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Ярыжко А.В. Скоростное упруго-пластическое деформирование цилиндрической оболочки при локальном ударе. Вісник національного технічного університету «ХПІ», «Динаміка і міцність машин» – Харків, 2008 – Вип. 36 – С. 40-48

Аннотация

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ КОНТАКТНОМ УДАРОМ

Ярыжко А.В.

Проведено аналитическое исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки при контактном ударе с учетом волновых процессов. Решение получено с помощью интегральных преобразований по времени и разложения в ряды Фурье по координатам.

Abstract

THE DEFORMATION ANALYSIS OF CYLINDRICAL ENVIRONMENT AT A FIRM BODY IMPACT

A.V. Yaryzhko

Analytical research of stress-strain state of a cylindrical environment is carried out. Wave processes at contact impact were taken into account. Decision is received with the help of integrated transformations on coordinates and time.