УДК 539. 3.

ПРИКЛАДНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НЕСУЧОЇ ЗДАТНОСТІ БАГАТОШАРОВИХ ОБОЛОНОК

Кириченко О.М., к.т.н., доц.; Раківненко В.П., к.т.н., доц.
Академія ВВ МВС України

В роботі приводиться спрощена і фізично наглядна методика розрахунку несучої здатності тонкостінних багатошарових конструкцій з різною жорсткістю шарів.

В сучасній техніці знаходять широке застосування тонкостінні багатошарові конструкції, які дозволяють з великою ефективністю використовувати властивості окремих компонентів, що входять до їх складових. Такі конструкції з шарами малої згинної жорсткості мають порівняно невелику вагу, високі механічні характеристики, значні тепло – і звукоізоляційні показники.

Багатошаровим оболонкам і пластинам присвячена значна кількість досліджень з різноманітними методами розрахунку. Але практичне використання цих методів наштовхується на серйозні математичні ускладнення.

Мета даної роботи полягає в тому, щоб запропонувати простий і фізично наглядний метод розрахунку тонкостінних багатошарових конструкцій з урахуванням їх специфічних особливостей.

Розглядаються конструкції, які складаються з довільної кількості шарів різного матеріалу з відповідною жорсткістю. Для оболонок (пластин, панелей) багатошарової будови використання достатньо жорстких гіпотез недеформованих нормалей Кірхгофа-Лява може привести до значних похибок, тому їх розрахунки повинні проводитися при наявності факторів, якими в класичній теорії тонких оболонок нехтують. До них відносяться поперечний зсув і деформації надавлювання волокон (обтиск) в мало жорстких шарах.

Вказані фактори в літератур враховуються по – різному. В деяких роботах, наприклад [1], щодо багатошарових оболонок і пластин шар малої жорсткості розглядається як трьохмірне тіло, граничними умовами для якого є умова спряження з несучими шарами. В інших роботах, наприклад, [2] мало- жорсткий шар також розглядається як трьохмірне тіло, але вважається, що в поперечних площинах, які паралельні до середньої поверхні, відсутні нормальні і дотичні напруження.

Найбільше розповсюдження отримав метод, в якому застосовуються припущення щодо закону розподілення напружень або деформацій по товщині маложорстких шарів. Так, в роботі [3] вважається, що тангенціальні переміщення по товщині маложорсткого шару змінюються лінійно, а прогин не залежить від поперечної координати. Несучі шари при цьому розглядаються як звичайні тонкостінні поверхні, для яких справедливі гіпотези Кірхгофа-Лява. В роботі [4] припускається, що поперечні дотичні напруження і деформації в мало жорстких шарах змінюються за законом квадратичної параболи, а прогин по товщині постійний. Останнє припущення не дозволяє враховувати поперечні деформації маложорстких шарів.

Спроба достатньо повного висвітлення специфічних особливостей багатошарових оболонок зроблена в монографії [5], де на основі загальних рівнянь теорії пружності, варіаційного принципу Рейснера, метода Векуа і теорії *R*-функцій розглянуто напружено - деформований стан нетонких ортротропних оболонок.

Нижче пропонується прикладний метод розрахунку багатошарових оболонок (пластин, панелей), який дозволяє не відокремлювати маложорсткий шар від несучого. Жорсткість багатошарової стінки на згин визначається шляхом введення поправок, пов'язаних з деформацією зсуву і надавлювання волокон в маложорстких шарах. Ці поправки вносяться в звичайний вираз згинної жорсткості, отриманої згідно гіпотез Кірхгофа-Лява для всієї стінки. Надалі застосовується відомий прийом С.П. Тимошенко для визначення додаткових прогинів балки від дії поперечних сил, що дозволяє звести багатошарову конструкцію до еквівалентної одношарової з деякою приведеною згинною жорсткістю, яка визначається з урахуванням зсуву і обтискання в маложорстких шарах.

Розглядається елемент багатошарової оболонки (рис.1), яка складається з довільної кількості несучих шарів і заповнювачів (мало жорстких шарів).

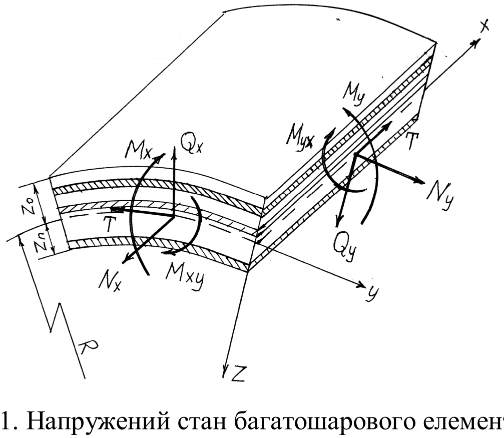

Рис.1. Напружений стан багатошарового елемента.

Розрахунки проводяться в два етапи: на першому етапі в межах гіпотези Кірхгофа-Лява визначаються напруження в шарах, на другому – знаходиться приведена згинна жорсткість багатошарової стінки з урахуванням деформацій зсуву і надавлювання в заповнювачах.

Визначимо напруження в окремих точках стінки при поздовжньо-поперечному згині, приймаючи на першому етапі закон їх зміни у відповідності з гіпотезою Кірхгофа-Лява для всього пакету. При цьому осьові і тангенціальні нормальні напруження будуть:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{N_x}{B_м} + \frac{M_x}{D_м} \cdot z \right);$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{N_y}{B_м} + \frac{M_y}{D_м} \cdot z \right), \qquad (1)$$

де μ - коефіцієнт Пуасона;

N_x, N_y – погонні нормальні зусилля;

M_x , M_y – погонні згинаючі моменти.

Щодо жорсткостей багатошарової стінки на розтяг і згин, то вони мають вигляд:

$$B_м = \int_{z_0}^{z_n} \frac{E}{1-\mu^2} \cdot dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \left(z_i - z_{i-1} \right)}{1-\mu^2};$$
$$D_м = \int_{z_0}^{z_n} \frac{E \cdot z^2}{1-\mu^2} \cdot dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \left(z_i^3 - z_{i-1}^3 \right)}{3(1-\mu^2)}, \qquad (2)$$

де E_i – модуль пружності 1-го роду i – го шару.

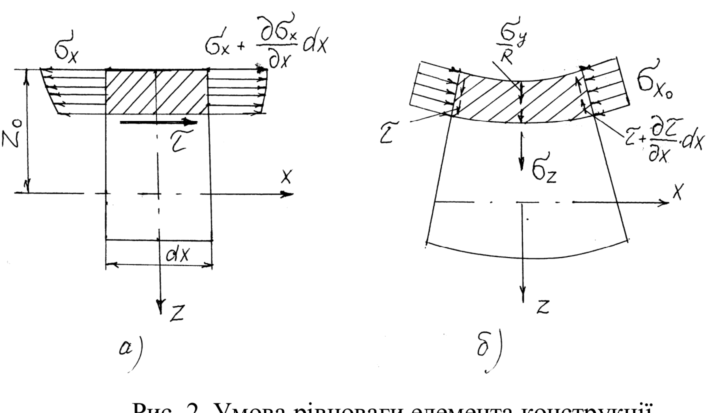

Рис. 2. Умова рівноваги елемента конструкції

Розглядаючи рівновагу елемента оболонки в проекції на ось x (рис.2а), знаходимо поперечні дотичні напруження:

$$\tau == \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dz. \tag{3}$$

Підставляючи сюди значення σ_x з формули (1), отримаємо

$$\tau = \frac{dM_x}{dx} \cdot \frac{S_\tau}{D_м}, \tag{4}$$

де $S_\tau = \int_{z}^{z_n} \frac{E}{1-\mu^2} \cdot z \cdot dz$ - погонний статичний момент частини перерізу.

З умови рівноваги частини елемента в проекції на ось z (рис. 2,б) визначаємо поперечні нормальні напруження:

$$\sigma_z = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial \tau}{\partial x} dz - \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\sigma_y}{R} + \sigma_{x_0} \chi_x \right) dz \ , \tag{5}$$

де R – радіус оболонки;

χ_x – кривизна твірної;

σ_{x0} – власне число.

Маючи на увазі, що напруження пропорціональні модулям пружності, визначаємо їх через зусилля N_{x0}:

$$\sigma_{x_0} = \frac{N_{x_0}}{B_м} \cdot \frac{E}{1-\mu^2}. \tag{6}$$

Підставляючи (6) і σ_y З(1) у вираз (5), отримаємо:

$$\sigma_z = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial \tau}{\partial x} dz + \frac{M_y S_\tau}{RO_м} - \left(N_{x_0} \cdot \chi_x + \frac{N_y}{R} \right) \cdot \frac{B_{(z)}}{B_м}, \tag{7}$$

де $B_{(z)} = \int_{z_0}^{z} \frac{E}{1-\mu^2} dz$.

Розглянемо тепер рівняння рівноваги всього пакету в проекції на нормаль:

$$N_{x_0} \cdot \chi_x + \frac{N_y}{R} = -\frac{dQ_x}{dx}, \tag{8}$$

де $Q_x = \frac{dM_x}{dx}$ - погонне поперечне зусилля.

Підставляючи залежності (8) і (4) в формулу (7), отримуємо:

$$\sigma_z = \frac{d^2 M_x}{dx^2} \cdot \frac{S_\sigma}{D_м} + M_x \frac{\mu \cdot S_\tau}{R \cdot D_м}, \tag{9}$$

де $S_\sigma = B_{(z)} \cdot \frac{D_м}{B_м} - \int\limits_{z_0}^{z} S_\tau \cdot dz$.

З порівняльного аналізу витікає, що другий член у виразі (9) мало впливає на остаточні результати. Тому надалі він не враховується.

На <u>другому етапі</u> розрахунку визначається <u>приведена</u> жорсткість згину. З цією метою повний прогин стінки оболонки подамо у вигляді суми трьох складових:

$$\omega_п = \omega_{зг.} + \omega_{зс.} + \omega_{об.}, \qquad (10)$$

де $\omega_{зг}$ – прогин за рахунок деформації чистого згину;

$\omega_{зс}$ - прогин, пов'язаний з деформаціями зсуву;

$\omega_{об}$ – прогин за рахунок обтиску.

Згідно цьому повна кривизна твірної оболонки буде:

$$\chi_{xn} = -\frac{d^2\omega_n}{dx^2} = -\frac{d^2\omega_{зг}}{dx^2} - \frac{d^2\omega_{зс}}{dx^2} - \frac{d^2\omega_{об}}{dx^2} . \qquad (11)$$

Використовуючи принцип суперпозиції щодо видів деформацій, будемо визначати їх за допомогою інтегралів Мора на основі формул (1), (4) і (9) для напружень σ_x, τ і σ_z.

Тоді

- зміна кривизни за рахунок деформацій згину:

$$\frac{d^2\omega_{зг}}{dx^2} = -\int\limits_{z}^{z_n} \overline{\sigma}_{x_м} \cdot \varepsilon_x \cdot dz = -\frac{M_x}{D_м}, \qquad (12)$$

де $\overline{\sigma}_{xм} = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{z}{D_м}$ - осьові нормальні напруження від одиничною згинаючого моменту;

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_{xм}}{E}(1-\mu^2)$ - відносні поздовжні деформації згину;

$\sigma_{xм}$ – нормальні напруження від чистого згину;

- зміна кривизни за рахунок деформацій зсуву:

$$\frac{d^2\omega_{зс}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\int\limits_{z_0}^{z_n} \overline{\tau} \cdot \gamma \cdot dz = \frac{d^2 M_x}{dx^2} \cdot \frac{A_{зс}}{D_м^2} , \qquad (13)$$

де $A_{зс} = \int\limits_{z_0}^{z_n} \frac{S_\tau^2}{G} dz$;

$\overline{\tau} = \frac{S_\tau}{D_м}$ - напруження від одиничної поперечної сили;

$\gamma = \frac{\tau}{G}$ - відносні деформації зсуву;

G – модуль зсуву.

- зміна кривизни за рахунок деформацій обтиску:

$$\frac{d^2\omega_{обс}}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\int_{z_0}^{z_n}\frac{\overline{\sigma}_z \cdot \sigma_z}{E} \cdot dz = -\frac{d^4 M_x}{dx^4} \cdot \frac{A_{об}}{D_м^2}, \tag{14}$$

де $A_{об} = \int_{z_0}^{z_n} \frac{S_\sigma^2}{E} dz$;

$\overline{\sigma}_z = \frac{S_\sigma}{D_м}$ - напруження від одиничної узагальненої сили;

$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ - відносні поперечні деформації.

Надалі весь пакет стінки поділяємо на дві групи: несучі шари і заповнювачі. До несучих відносяться шари, для яких не враховуються деформації зсуву і надавлювання волокон, до заповнювачів – всі інші. При цьому, підраховуючи величини $A_{зс}$ і $A_{об}$, інтегрування проводимо тільки по шарам – заповнювачам. Підкреслимо також, що поправки за рахунок вказаних деформацій не впливають на величини власних згинних жорсткостей несучих шарів. Тому їх доцільно відділити і ввести в розгляд неповний згинаючий момент m_x, який визначається без урахування власних згинних жорсткостей несучих шарів:

$$m_x = M_x \frac{D_м - D_н}{D_м}, \tag{15}$$

де $D_{нш} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i \cdot \delta_i^3}{12(1-\mu^2)}$ - сума власних згинних жорсткостей несучих шарів;

δ_i – товщина i-го шару.

Тепер залежності (12); (13) і (14) можливо записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\omega_{зг}}{dx^2} &= -\frac{m_x}{D_м - D_{нш}}; \\ \frac{d^2\omega_{зс}}{dx^2} &= \frac{d^2 m_x}{dx^2} \cdot \frac{A_{зс}}{(D_м - D_{нш}) \cdot D_м}; \\ \frac{d^2\omega_{об}}{dx^2} &= -\frac{d^4 m_x}{dx^4} \cdot \frac{A_{об}}{(D_м - D_{нш}) \cdot D_м}. \end{aligned} \tag{16}$$

Підставивши вирази (16) у формулу для повної кривизни (11), отримаємо:

$$\chi_{хп} = \frac{m_x}{D_м - D_{нш}} \cdot \lambda, \tag{17}$$

де
$$\lambda = 1 - \frac{\frac{d^2 m_x}{dx^2}}{m_x} \cdot \frac{A_{зс}}{D_м} + \frac{\frac{d^4 m_x}{dx^4}}{m_x} \cdot \frac{A_{об}}{D_м}\,. \qquad (18)$$

З другого боку, вводячи поняття приведеної згинної жорсткості $D_{пр}$ багатошарової стінки з урахуванням деформацій зсуву і обтиску волокон, можливо кривизну $\chi_{хп}$ записати в наступному вигляді:

$$\chi_{хп} = \frac{m_x}{D_{пр} - D_{нш}}\,. \qquad (19)$$

Порівнюючи вирази (17) і (19), знайдемо приведену згинну жорсткість:

$$D_{пр} = D_{нш} + \frac{D_м - D_{нш}}{\lambda}\,. \qquad (20)$$

Залежність (20) є основним розрахунковим виразом для розв'язування різноманітних задач щодо багатошарових оболонок (пластин , панелей).

При наявності готового рішення для одношарової оболонки досить жорсткості на розтяг і згин замінити відповідними приведеними жорсткостями багатошарової конструкції і отримати необхідний результат.

Так, достатньо відома формула для визначення критичних зусиль одношарової оболонки при стиску

$$N_{кр} = \frac{E\delta}{R^2\alpha^2} + D\alpha^2\ , \qquad (21)$$

де $\alpha = \dfrac{m\pi}{L}$;

m – кількість напівхвиль вздовж твірної;

L – довжина оболонки,

може бути використана відповідно для багатошарової оболонки, якщо замість жорсткостей $\dfrac{E\delta}{1-\mu^2}$ і D ввести приведені жорсткості $B_м$ і $D_{пр}$.

Висновки:

1. Порівняння результатів теоретичних розрахунків з даними експериментів по стійкості металевих циліндрів з підкріплюючим шаром з маложорсткого матеріалу [6] показує повну придатність запропонованого методу.

2. Незважаючи на те, що на першому етапі напруження в шарах визначаються наближено (в межах гіпотези Кірхгофа-Лява),подальший процес інтегрування згладжує існуючи неточності .

3. Запропонований метод при достатній точності рішення дозволяє

досить просто розв'язувати різноманітні задачі по визначенню стійкості та напружено - деформованого стану багатошарових оболонок (пластин, панелей).

Список використаних джерел

1. Немиш Ю.Н., Развитие аналитических методов в трехмерных задачах анизотропных тел. Прикладная механика, т.36, Киев, 2000.

2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек, М., Наука, 1992.

3. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Основные математические модели деформирования и прочности многослойных анизотропных оболочек., М., НГУ, 2000.

4. Григолюк Э.И., Чулков П.П., Нелинейные уравнения тонких упругих слоистых анизотропных оболочек с жестким заполнителем, М., 1965.

5. Сало В.А., Краевые задачи статики оболочек с отверстиями. Монография, ХПИ, 2003.

6. Канн С.Н. и др., Устойчивость оболочек, Х., 1970.

Аннотация

ПРИКЛАДНОЙ МЕТОД РАСЧЕТА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Кириченко А. Н., Ракивненко В.П.

В работе рассматривается упрощенная и физически наглядная методика расчета несущей способности многослойных тонкостенных конструкций с слоями различной жесткости.

Abstract

APPLIED METHOD OF CALCULATION OF BEARING STRENGTH OF MULTI-LAYERED SHELLS

A. Kirichenko, V. Rakivnenko

In work simplified and physically evident design procedure of bearing ability of multilayered thin-walled designs with layers of various rigidity is considered.