УДК 539.3:534.1:62

ДВУХУРОВНЕВЫЙ ПОДХОД К МИНИМИЗАЦИИ МАССЫ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Кантор Б.Я., д.т.н., проф.; Сметанкина Н.В., к.т.н., ст. науч. сотр.
Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины

Разработана двухуровневая процедура минимизации массы слоистых композитных пластин при импульсном нагружении. Деформирование пластин рассматривается в геометрически нелинейной постановке. Задача оптимизации решается гибридным поисковым методом с адаптивным управлением вычислительным процессом.

Создание современных конструкций требует учитывать повышенные требования к их прочности и надежности. При этом необходима оценка степени оптимальности разработки на всех этапах проектирования. Поэтому разработка методов оптимального проектирования конструкций является актуальной задачей, решение которой позволит оценить насколько близка реальная конструкция к оптимальной.

В области оптимального проектирования композитных элементов конструкций основное внимание уделяется задачам оптимизации конструкций при статическом деформировании и свободных колебаниях [1–3]. Менее исследованы вопросы оптимального проектирования слоистых композитных конструкций при нестационарном деформировании в условиях реального нагружения [4, 5]. Так как задачи оптимального проектирования таких конструкций являются многокритериальными, чаще всего их решают посредством минимизации функционала, в который входят все критерии оптимальности, умноженные на весовые множители [5, 6]. Это требует знания информации о задаче, которая может быть заранее неизвестна. Иной путь решения многокритериальных задач состоит в применении многоуровневых процедур оптимизации [7]. Следует отметить, что деформирование конструкций в этих работах рассматривается в линейных постановках, без учета больших прогибов, которые могут возникать в процессе решения задачи оптимизации.

В настоящей работе разработан двухуровневый подход к минимизации массы слоистых композитных пластин при импульсном нагружении. На первом уровне предлагаемой двухуровневой процедуры варьируются толщины слоев, и минимизируется масса пластины. На втором уровне толщины слоев, полученные в результате минимизации массы, фиксируются, и минимизируется максимальное значение критерия прочности слоев путем изменения углов армирования слоев. Оптимальный проект является результатом итеративного процесса, который продолжается до достижения заданных значений критериев точности. В отличие от работы [7] нестационарные колебания пластины рассматриваются в геометрически нелинейной постановке.

Рассмотрим прямоугольную слоистую пластину постоянной толщины H, собранную из произвольного числа анизотропных слоев I постоянной толщины h_i $\left(i=\overline{1,I}\right)$, в декартовой системе координат. На пластину действует поперечная импульсная нагрузка $p(x,y,t)$. Оси материала каждого слоя произвольно ориентированы по отношению к срединной плоскости пластины.

Перемещения точек пластины согласно кинематическим гипотезам теории типа Тимошенко представляются в виде

$$u_1(x,y,z,t)=u_0(x,y,t)+z\psi_x(x,y,t),\ u_2(x,y,z,t)=v_0(x,y,t)+z\psi_y(x,y,t),$$
$$u_3(x,y,z,t)=w_0(x,y,t)+z\psi_z(x,y,t),$$

где $u_0(x,y,t), v_0(x,y,t), w_0(x,y,t)$ – перемещения точек срединной плоскости в направлении координатных осей; $\psi_x(x,y,t), \psi_y(x,y,t)$ – углы поворота нормального элемента, $\psi_z(x,y,t)$ – обжатие нормального элемента; t – время.

Соотношения Коши для деформаций e_{ij} приняты нелинейными (квадратичными). Компоненты тензора деформаций представляем через компоненты вектора перемещений в соответствии с работой [8]. Компоненты тензора напряжений σ_{ij} определяются законом Гука для анизотропного тела [9]

$$\sigma_{ij}=C_{ij}e_j,\ i,j=\overline{1,6},$$

где C_{ij} – независимые упругие постоянные.

Решение задачи о нестационарном деформировании пластины получено методом конечных элементов с использованием сетки прямоугольных восьмиузловых конечных элементов [10].

Задача оптимизации математически сводится к задаче нелинейного программирования. В общем случае задача нелинейного программирования заключается в отыскании экстремальной точки

$$\mathbf{X}^*=\arg\underset{\mathbf{X}\in G}{\operatorname{extr}}F(\mathbf{X})$$

функции цели $F(\mathbf{X})$ при заданных ограничениях в виде равенств

$$G_i(\mathbf{X}) = 0, \qquad i = \overline{1, m_1}$$

и (или) неравенств

$$G_j(\overline{X}) \geq 0, \qquad j = \overline{1, m_2} \ ,$$

где $\mathbf{X} = \{X_i\}, i = \overline{1, N}$ – вектор пространства варьируемых параметров; G - допустимая область изменения варьируемых параметров.

Функции $F(\mathbf{X})$, $G_i(\mathbf{X})$, $G_j(\mathbf{X})$ – вещественны, непрерывны и ограничены; $F(\mathbf{X})$ определена на множестве $G = G(\mathbf{X})$, а $G_i(\mathbf{X})$ и $G_j(\mathbf{X})$ – на некотором его расширении $\overline{G} \supset G$.

Ранее было установлено, что задачи оптимизации слоистых композитных конструкций при нестационарном нагружении относятся к классу многоэкстремальных задач, так как допустимая область имеет невыпуклые границы, которые к тому же являются подвижными, меняющимися от шага к шагу [7, 11]. Алгоритмическая реализация ограничений также увеличивает время процесса поиска экстремума. Поэтому в качестве метода решения используется эффективный гибридный поисковый метод оптимизации с адаптивным управлением вычислительным процессом [11].

Рассмотрим подробно двухуровневую итерационную процедуру минимизации массы слоистой пластины.

На первом уровне минимизируется масса пластины, а варьируемыми параметрами задачи являются толщины слоев $\mathbf{X} = \{h_i\}$, $i = \overline{1, I}$. Необходимо отыскать значения независимых параметров $\mathbf{X}^* = \{h_i^*\}$, при которых масса пластины $F_M(\mathbf{X})$ принимает наименьшее значение, то есть

$$F_M^* = \min F_M(\mathbf{X}), \quad F_M = S \sum_{i=1}^{I} \rho_i h_i \ , \tag{1}$$

где $S = A \times B$ – площадь срединной плоскости пластины; A и B – длины сторон пластины; ρ_i – плотность материала слоя.

Ограничиваются минимальные и максимальные значения толщин слоев

$$h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}, \ i = \overline{1, I} \ ,$$

а также максимальное значение прогиба пластины

$$u_3^{\max} / H \leq 1, \quad H = \sum_{i=1}^{I} h_i \ . \tag{2}$$

Для оценки прочности слоев используется критерий Цая-Ву [9]

$$\max_{[0,T]}\max_{x,y\in\Omega} F_c^k \le 1 , \tag{3}$$

где $F_c^k = F_i\sigma_i^k + F_{ij}\sigma_i^k\sigma_j^k$, $i, j = \overline{1,6}$, $k = \overline{1,I}$,

$F_1 = 1/X_T - 1/X_C$, $F_2 = 1/Y_T - 1/Y_C$, $F_3 = 1/Z_T - 1/Z_C$, $F_{11} = 1/\left(X_T X_C\right)$,

$F_{22} = 1/\left(Y_T Y_C\right)$, $F_{33} = 1/\left(Z_T Z_C\right)$, $F_{44} = 1/R^2$, $F_{55} = F_{66} = 1/S^2$,

$F_{12} = -0{,}5\Big/\sqrt{X_T X_C Y_T Y_C}$, $F_{13} = -0{,}5\Big/\sqrt{X_T X_C Z_T Z_C}$,

$F_{23} = -0{,}5\Big/\sqrt{Y_T Y_C Z_T Z_C}$,

X_T, Y_T, Z_T – пределы прочности материала при растяжении,

X_C, Y_C, Z_C – при сжатии, R, S – при сдвиге;

σ_i^k – компоненты напряжений в главных осях материала;

Ω – область, занимаемая срединной плоскостью пластины.

Напряжения, входящие в критерий прочности (3), оцениваются на отрезке времени $[0,T]$, который выбирается так, чтобы на его протяжении проявились все основные факторы, характеризующие процесс нестационарного деформирования в допустимой области изменения варьируемых параметров.

На втором уровне минимизируется максимальное значение критерия прочности:

$$F_c^* = \min F_c\left(\mathbf{X}\right), \quad F_c = \max_{[0,T]}\max_{x,y\in\Omega}\max_{[1,I]} F_c^k . \tag{4}$$

Варьируемыми параметрами задачи являются углы армирования слоев $\mathbf{X} = \{\theta_i\}$, $i = \overline{1,I}$, которые ограничиваются минимальными и максимальными значениями,

$$\theta_{\min} \le \theta_i \le \theta_{\max} , \quad i = \overline{1,I} .$$

Поиск оптимальной точки на каждом уровне продолжается до тех пор, пока относительное изменение функции цели (1) или (4) не превысит некоторую заданную величину:

$$\left|\frac{F_M^n - F_M^{n-1}}{F_M^{n-1}}\right| \le \varepsilon_M , \qquad \left|\frac{F_c^n - F_c^{n-1}}{F_c^{n-1}}\right| \le \varepsilon_c ,$$

где n – номер итерации, ε_M, ε_c – положительные константы, определяющие точность поиска экстремума. Сходимость решения на каждой итерации процедуры, объединяющей оба уровня, оценивается аналогично.

В качестве иллюстрации разработанного подхода рассматривается минимизация массы шарнирно опертой восьмислойной пластины симметричного строения ($h_1 = h_2 = h_7 = h_8 = h^1$, $h_3 = h_4 = h_5 = h_6 = h^2$, $\left[\pm\theta^1/\pm\theta^2\right]_s$) со следующими характеристиками слоев: $E_1 = 132{,}5$ ГПа, $E_2 = E_3 = 10{,}8$ ГПа, $G_{12} = G_{13} = 5{,}7$ ГПа, $G_{23} = 3{,}4$ ГПа, $\nu_1 = 0{,}24$, $\rho = 1500$ кг/м3; $X_T = 1515$ МПа, $Y_T = Z_T = 43{,}8$ МПа, $X_C = 1697$ МПа, $Y_C = Z_C = 43{,}8$ МПа, $R = 67{,}6$ МПа, $S = 86{,}9$ МПа. Варьируемые параметры ограничиваются такими допустимыми значениями: $h_{\min} = 0{,}5$ мм, $h_{\max} = 5$ мм, $\theta_{\min} = 0^\circ$, $\theta_{\max} = 90^\circ$. На пластину действует поперечная равномерно распределенная импульсная нагрузка $p = P_0 H(t)$, где $H(t)$ – функция Хевисайда, $P_0 = 0{,}1$ МПа. Длительность характерного отрезка времени составила 0,15 с. Во всех рассмотренных случаях число итераций не превысило десяти.

В таблице 1 приведены результаты решения задачи минимизации массы для пластин с разными соотношениями длин сторон B/A, $A = 0{,}5$ м. Здесь $H^* = F_M^* / (\rho AB)$ – толщина пластины при оптимальных значениях варьируемых параметров.

Таблица 1. Влияние соотношения длин сторон B/A на оптимальный проект

B/A	h^1/h^2, мм	H^*, мм	$\pm\theta^1/\pm\theta^2$	F_c^*
1,0	0,8681/0,8929	7,0439	$\pm 45{,}4^\circ / \pm 0{,}46^\circ$	0,034
1,5	0,8922/0,8749	7,0717	$\pm 0{,}46^\circ / \pm 90{,}0^\circ$	0,061
2,0	0,8929/0,8830	7,1040	$\pm 0{,}46^\circ / \pm 90{,}0^\circ$	0,063

Во всех проектах толщины слоев приблизительно одинаковы, но не равны граничным значениям, так как иначе нарушается условие (2). Для квадратной пластины оптимальные значения углов армирования θ^1 близки к 45°, углов θ^2 – к 0°. Для прямоугольных пластин значения углов наружных слоев θ^1 близки к 0°, а углов θ^2 – к 90°.

Сравнение результатов решения задачи в линейной [7] и нелинейной постановках показало, что учет геометрической нелинейности позволил снизить массу пластины на 70 %. Значение критерия прочности также существенно уменьшилось.

Полученные оптимальные значения углов армирования хорошо согласуются со схемами армирования, разработанными экспериментально и применяемыми на практике [12].

Таким образом, разработан двухуровневый итерационный подход к минимизации массы слоистых композитных пластин при импульсном нагружении. Его преимущество в сравнении с одноуровневыми подходами заключается в том, что он позволяет получать проекты пластин минимальной массы при минимально возможных значениях напряжений, входящих в критерий прочности.

Предложенный подход позволяет, не прибегая к дорогостоящим экспериментальным исследованиям, численно проанализировать различные конструктивные решения и осуществить рациональный выбор слоистых композитных конструкций при высокоскоростных интенсивных нагружениях с учетом повышенных требований к их прочности и надежности.

Список использованных источников

1. Карпов Я.С. Оптимизация структуры композиционного материала панелей летательных аппаратов при ограничениях по прочности, устойчивости и прогибу // Пробл. прочн.– 2004.– № 6.– С. 33–47.

2. Stegmann J., Lund E. Discrete material optimization of general composite shell structures // Int. J. for Numerical Methods in Engineering.– 2005.– V. 62, N 14.– P. 2009–2027.

3. Farshi B., Rabiei R. Optimum design of composite laminates for frequency constraints // Compos. Struct.– 2007.– V. 81, N 4.– P. 587–597.

4. Velo A.P., Gazonas G.A. Optimal design of a two-layered elastic strip subjected to transient loading // Int. J. Solids and Struct.– 2003.–V. 40, N 23.– P. 6417–6428.

5. Тетерс Г. Многокритериальная оптимизация композитной цилиндрической оболочки при термических и динамических воздействиях // Мех. композит. матер.– 2004.– Т. 40, № 6.– С. 753–760.

6. Liu G.P., Yang J.B., Whidborne J.F. Multiobjective optimisation and control.– Research Studies Press Ltd.: Baldock, Hertfordshire, 2003.– 320 p.

7. Кантор Б.Я., Сметанкина Н.В. Итерационный подход к минимизации массы слоистых композитных пластин при нестационарных воздействиях // Вестник НТУ «ХПИ». Динамика и прочность машин.– 2005.– № 21.– С. 27–34.

8. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – Л.-М.: Гостехиздат, 1948. – 211 с.

9. Jones R.M. Mechanics of composite materials.– London: Taylor and Francis, 1998.– 519 p.

10. Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements // Int. J. Numer. Methods Engng .– 1979.– V. 2, № 3.– P. 419–451.

11. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек и их оптимизация / Шупиков А.Н., Бузько Я.П., Сметанкина Н.В., Угримов С.В. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2004.– 252 с.

12. Композиционные материалы: В 8 т. / Под ред. Л. Браутмана и Р. Крока.– М.: Машиностроение, 1978.– Т. 7: Анализ и проектирование конструкций. Ч. I.– 300 с.

Анотація

ДВОРІВНЕВИЙ ПІДХІД ДО МІНІМІЗАЦІЇ МАСИ ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН ПРИ ВЕЛИКИХ ПРОГИНАХ

Кантор Б.Я., Сметанкина Н.В.

Розроблено дворівневу процедуру мінімізації маси шаруватих композитних пластин при імпульсному навантаженні. Деформування пластин розглядається в геометрично нелінійній постановці. Задача оптимізації розв'язується гібридним пошуковим методом з адаптивним керуванням обчислювальним процесом.

Abstract

TWO-LEVEL APPROACH TO MINIMIZATION OF WEIGHT OF LAMINATED COMPOSITE PLATES UNDER LARGE DEFLECTIONS

B. Kantor, N. Smetankina

A two-level procedure of minimization of weight of laminated composite plates at an impulse load is developed. Deformation of plates is considered in geometrically nonlinear statement. Optimization problem is solved by the hybrid search method with adaptive control of computing process.