

УДК 534.1:539.3

## ВІЛЬНІ ЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА З КОМБІНОВАНИМ ОПОРОМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,  
Сліпченко М.В., к.т.н., доц.

*(Харківський національний технічний університет сільського  
господарства імені Петра Василенка)*

*Розглянуто вільні коливання лінійно пружного осцилятора, за наявності сили опору, що включає три складові. Для дослідження вільних коливань системи з одним ступенем вільності використано метод енергетичного балансу. Наближено реалізовано два варіанту цього методу.*

**Ключові слова:** *затухаючі вільні коливання, комбінований нелінійний опір, метод енергетичного балансу, амплітуди розмахів, рекурентне співвідношення.*

**Постановка задачі.** В моделях дисипативних систем в теорії механічних коливань традиційно беруть до уваги одну із сил опору різної природи, наприклад, силу в'язкого або сухого тертя. На практиці в технічних системах часто спільно діють різні сили опору. Тому бажано знати закономірності коливань дисипативних механічних систем в умовах комбінованого опору. Для цього треба розробляти більш загальні математичні моделі, що ґрунтуються на використанні нелінійних диференціальних рівнянь. Про одну із них йдеться даній статті.

**Огляд літературних джерел.** Вільні затухаючі коливання осцилятора при спільній дії сил лінійного в'язкого і сухого тертя описано в [1]. Там розв'язок задачі подано на фазовій площині. Пізніше в [2] будували точний і наближений аналітичні розв'язки цієї задачі відповідно методом припасування та методом енергетичного балансу. Одержані там результати потім увійшли до монографічних видань [3, 4]. Заслуговує уваги, що метод енергетичного балансу дає можливість наближено дослідити вільні коливання без побудови розв'язку нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора. Тому цей метод уже давно використовують в теорії механічних коливань [5-7]. У вказаних виданнях подано загальні положення методу та його реалізація у випадках одночленного виразу опору, а саме при дії тільки сили квадратичного опору (гідрравлічне або турбулентне демпфування),

при дії лише сили лінійного в'язкого опору та при дії одної сили сухого тертя Кулона. Показано, що в двох останніх випадках метод енергетичного балансу призводить до точних розв'язків динамічної задачі [7-9]. Це вплинуло на вибір методу дослідження в цій статті.

**Метою** роботи є побудова та апробація розрахунками наближених формул для обчислень амплітуд вільних затухаючих коливань осцилятора при спільній дії трьох сил комбінованого опору руху. Для досягнення цієї мети залучено метод енергетичного балансу.

**Викладення основного матеріалу.** Вільні затухаючі коливання описуємо диференціальним рівнянням з подвійною нелінійністю:

$$m\ddot{x} + k_1\dot{x} + (k_2\dot{x}^2 + k_0)\text{sign}(\dot{x}) + cx = 0, \quad (1)$$

за початкових умов:

$$x(0) = a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2):  $m$  – маса осцилятора;  $c$  – коефіцієнт жорсткості пружини;  $k_1$  – коефіцієнт лінійного в'язкого опору;  $k_2$  – коефіцієнт квадратичного опору;  $k_0$  – сила сухого тертя;  $x = x(t)$  – переміщення осцилятора, як функція часу  $t$ ; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ ;  $a_0$  – стартове відхилення осцилятора від положення  $x = 0$

Коливання, яке описує рівняння (1) при  $k_2 = 0$  ґрунтовно розглядали в [2-4]. Тут узагальнюємо одержані там результати.

*Диференціальне рівняння обвідної та його розв'язки.*

Розглянемо  $i$ -й розмах коливань, при якому амплітуда коливань  $a_{i-1}$  змінюється на амплітуду ..., причому  $\dot{x} \geq 0$ . На такому етапі руху відбувається наступна зміна потенційної енергії:

$$\Delta\Pi = \frac{1}{2}c(a_i^2 - a_{i-1}^2). \quad (3)$$

Сили опору виконують роботу:

$$A_T = \int_{a_{i-1}}^{a_i} [k_1\dot{x} + (k_2\dot{x}^2 + k_0)] dx \quad (4)$$

Її обчислюємо наближено. Дотримуючись [7], задаємо:

$$x(t) = -a \cos(\omega t),$$

де  $a = 0,5(a_{i-1} + a_i)$  і  $\omega = \sqrt{c/m}$ .

Тоді  $dx = a\omega \sin(\omega t) dt$  і замість (4), роботу подаємо

інтегралом:

$$A_T \approx \int_0^{\pi/\omega} [k_1 \omega^2 \sin^2(\omega t) + k_2 \omega^3 \sin^3(\omega t) + k_0 \omega \sin(\omega t)] dt.$$

Використовуючи таблицю інтегралів отримуємо:

$$A_T \approx -\left(\frac{\pi}{2} k_1 \omega a + \frac{4}{3} k_2 \omega^2 a^2 + 2k_0\right) a. \quad (5)$$

Щоб мати диференціальні рівняння обвідної графіка коливань, вираз (3) замінимо наближено на [6, 7]:

$$\Delta\Pi \approx ca \frac{\pi}{\omega} \frac{da}{dt}. \quad (6)$$

Згідно з методом енергетичного балансу повинна виконуватись рівність  $\Delta\Pi = A_T$ , що, з урахуванням (5) і (6), дає:

$$\frac{da}{dt} = -\lambda_2 a^2 - \lambda_1 a - \lambda_0. \quad (7)$$

$$\text{Тут } \lambda_0 = \frac{2k_0\omega}{\pi c}; \quad \lambda_1 = \frac{k_1}{2m}; \quad \lambda_2 = \frac{4}{3} \frac{k_2\omega^3}{\pi c}.$$

Інтегруванням, рівняння (7) зводимо до виразу:

$$\int \frac{da}{a^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} a + \frac{\lambda_0}{\lambda_2}} = -\lambda_2 t.$$

Далі будемо розрізняти три можливі випадки:

1. *Випадок перший.* Сила сухого тертя така, що  $\frac{\lambda_0}{\lambda_2} > \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$ .

Тоді з точністю до довільної сталої  $C_1$ :

$$\int \frac{da}{\left(a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2 + b^2} = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}{b} = -\lambda_2 t + \frac{c_1}{b}. \quad (8)$$

$$\text{Тут } b = \sqrt{\frac{\lambda_0}{\lambda_2} - \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2}.$$

Використовуючи умову  $a(0) = a_0$ , знаходимо, що:

$$C_1 = \operatorname{arctg} \frac{a_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}{b}.$$

Таким чином, згідно з (8), обвідна графіка вільних коливань описується виразом:

$$a(t) = b \operatorname{tg} (C_1 - b\lambda_2 t) - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}. \quad (9)$$

Рівняння  $a(t_*) = 0$  має розв'язок:

$$t_* = \frac{1}{b\lambda_2} \left( C_1 - \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1}{2b\lambda_2} \right).$$

Отже, вільні коливання обмежені в часі. Вони тривають лише на проміжку  $t \in (0; t_*)$ . Кількість зроблених за цей час розмахів  $n_*$  наближено становить:

$$n_* \approx \text{ціла частина} \left( \frac{\omega t_*}{\pi} \right). \quad (10)$$

Із (9) випливає наступна формула для обчислення амплітуди  $a_i$  в кінці  $i$ -го розмаху:

$$a_i = b \cdot \operatorname{tg} \left( C_1 - b\lambda_2 \frac{i\pi}{\omega} \right) - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_*. \quad (11)$$

Оскільки формула (9) стосується сумарного комбінованого опору, то, використовуючи її, розглянемо частинні випадки.

1.1. У силі опру відсутня лінійна складова, тобто  $k_1 = \lambda_1 = 0$ . Тоді (9) набуває вигляд:

$$a(t) = b_1 \frac{a_0 - b_1 \cdot \operatorname{tg}(b_1 \lambda_2 t)}{b_1 + a_0 \cdot \operatorname{tg}(b_1 \lambda_2 t)}, \quad (12)$$

де  $b_1 = \sqrt{\lambda_0 / \lambda_2}$ .

Тривалість вільних коливань обмежена і становить:

$$t_* = \frac{1}{b\lambda_2} \operatorname{arctg} \frac{a_0}{b_1}.$$

1.2. Крім лінійної складової, в опорі відсутнє ще й сухе тертя. При чисто квадратичному опорі, коли  $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$ , спрямувавши  $b_1 \rightarrow 0$  граничним переходом в (12), одержуємо:

$$a(t) = \frac{a_0}{1 + a_0 \lambda_2 t}.$$

Ця гіперболічна залежність буда раніше надрукована в [7-9], причому в [9] одержана асимптотичним методом у першому наближенні.

Тут, внаслідок відсутності сухого тертя, вільні коливання мають безліч циклів і не обмежені в часі.

1.3. Сила опору утворена лише сухим тертям. При  $\lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow 0$ :  $b_1 \lambda_2 \rightarrow 0$ ;  $b_1^2 \lambda_2 \rightarrow 0$  і формула (12) набуває вигляд:

$$a(t) = a_0 - \lambda_0 t.$$

Вона відповідає тому розв'язку задачі коливань осцилятора з кулоновим тертям, коли зміна амплітуд розмахів відбувається за законом арифметичної прогресії [1, 7, 8]:

$$a_i = a_0 - \lambda_0 \frac{i\pi}{\omega} = a_0 - \frac{2k_0}{c} i; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_*.$$

Тут тривалість вільних коливань обмежена в часі, причому  $t_* = a_0 / \lambda_0$ .

2. *Випадак другий.* Сила сухого тертя така, що  $\frac{\lambda_0}{\lambda_2} < \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$ .

При такому опорі вираз (8) замінюється виразом:

$$\int \frac{da}{\left(a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2 + \gamma^2} = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} - \gamma}{a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + \gamma} = -\lambda_2 t + \frac{C_2}{2\gamma}, \quad (13)$$

де  $\gamma = \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{\lambda_0}{\lambda_2}}$ .

Стала  $C_2$  має бути такою, щоб  $a(0) = a_0$ . Ця вимога виконується, коли:

$$C_2 = \ln \frac{a_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} - \gamma}{a_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} + \gamma}.$$

Розв'язок (13) набуває вигляд:

$$a(t) = \gamma \frac{1 + \exp(C_2) \cdot \exp(-2\gamma\lambda_2 t)}{1 - \exp(C_2) \cdot \exp(-2\gamma\lambda_2 t)} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}. \quad (14)$$

У відповідності з (14), тривалість вільних коливань становить:

$$t_* = \frac{1}{2\gamma\lambda_2} \left( C_2 - \ln \frac{\lambda_1 - 2\gamma\lambda_2}{\lambda_1 + 2\gamma\lambda_2} \right),$$

а для оцінки кількості розмахів зберігає чинність формула (10).

Задавши в (14)  $t = i\pi / \omega$ , одержуємо формулу для обчислення амплітуд розмахів:

$$a_i = \gamma \frac{1 + \exp(C_2) \cdot \exp(-2\gamma\lambda_2 i\pi / \omega)}{1 - \exp(C_2) \cdot \exp(-2\gamma\lambda_2 i\pi / \omega)} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_*. \quad (15)$$

Далі розглянемо три частинні випадки розв'язку (14).

2.1. В опорі відсутня квадратична складова. Тоді при  $\lambda_2 \rightarrow 0$ :

$$\gamma \rightarrow \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}; \quad \exp(C_2) \rightarrow \frac{a_0 + \lambda_0 / \lambda_1}{a_0 + \lambda_1 / \lambda_2} \rightarrow 0; \quad 2\gamma\lambda_2 \rightarrow \lambda_1;$$

$$a(t) = \lim_{\lambda_2 \rightarrow 0} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{\exp(C_2) \cdot \exp(-\lambda_1 t)}{1 - \exp(C_2) \cdot \exp(-\lambda_1 t)} - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right).$$

Подальше обчислення границі дає

$$a(t) = \left( a_0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) \exp(-\lambda_1 t) - \frac{\lambda_0}{\lambda_1}. \quad (16)$$

Цей вираз  $a(t)$  було одержано раніше в [2, 3].

2.2. Крім квадратичної складової в опорі немає й сухого тертя. Тоді, при  $\lambda_0 = 0$ , вираз (16) набуває більш компактну форму:

$$a(t) = a_0 \exp(-\lambda_1 t) = a_0 \exp\left(-\frac{k_1 t}{2m}\right).$$

Це точна формула в розв'язку задачі вільних затухаючих коливань осцилятора з лінійним в'язким опором, коли зміна амплітуд відбувається за законом геометричної прогресії, а процес коливань не обмежений у часі [1, 7].

2.3. В опорі відсутнє лише сухе тертя. Тоді в (14)  $\lambda_0 = 0$ ;

$$\gamma = \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}; \quad 2\gamma\lambda_2 = \lambda_1; \quad \exp(C_2) = \frac{a_0}{a_0 + \lambda_1 / \lambda_2}. \quad \text{Графік обвідної}$$

коливального процесу подається виразом:

$$a(t) = \left[ \left( \frac{1}{a_0} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \exp(-\lambda_1 t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right]^{-1}.$$

Вільні коливання мають безліч циклів.

3. *Випадок третій.* Співвідношення сил опору таке, що

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \left( \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \right)^2. \text{ Для нього, замість (13) маємо:}$$

$$\int \frac{da}{\left( a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2} \right)^2} = \frac{-1}{a + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}} = -\lambda_2 t - \frac{1}{a_0 + \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}}.$$

Обвідна графіка коливань описується виразом:

$$a(t) = \frac{1}{\lambda_2 t + \frac{2\lambda_2}{2a_0\lambda_2 + \lambda_1}} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}.$$

Тривалість вільних коливань становить:

$$t_* = \frac{2}{\lambda_1} \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2a_0\lambda_2} \right).$$

Амплітуди розмахів подаються формулою:

$$a_i = \frac{1}{\lambda_2 \frac{i\pi}{\omega} + \frac{2\lambda_2}{2a_0\lambda_2 + \lambda_1}} - \frac{\lambda_1}{2\lambda_2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_*.$$

Кількість амплітуд обмежена числом  $n_*$ .

*Друга форма методу енергетичного балансу.* Рекурентне співвідношення для обчислень амплітуд розмахів одержимо прирівнявши праві частини виразів (3) і (5). Це дає залежність:

$$(a_i^2 - a_{i-1}^2) = -\frac{2}{c} \left( \frac{\pi}{2} k_1 \omega a + \frac{4}{3} k_2 \omega^2 a^2 + 2k_0 \right) a,$$

Яку зводимо до квадратного рівняння:

$$\gamma_2 z_i^2 + \gamma_1 z_i + 2 \left( \frac{k_0}{c} - a_{i-1} \right) = 0, \quad (17)$$

$$\text{де } z_i = a_i + a_{i-1}; \quad \gamma_1 = 1 + \frac{\pi k_1 \omega}{4c}; \quad \gamma_2 = \frac{k_2 \omega^2}{3c}.$$

Враховуючи, що (17) має розв'язок:

$$z_i = \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{2\gamma_2}\right)^2 + \frac{2}{\gamma_2}\left(a_{i-1} - \frac{k_0}{c}\right)} - \frac{\gamma_1}{2\gamma_2}, \quad (18)$$

Обчислення амплітуд розмахів зводимо до використання співвідношення:

$$a_i = z_i - a_{i-1}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n_*. \quad (19)$$

Умова припинення коливального руху подається нерівністю  $a_i \leq k_0 / c$ .

Якщо в опорі відсутня квадратична складова, то граничний перехід  $\gamma_2 \rightarrow 0$  в (18) дає:

$$z_i = \frac{2}{\gamma_1} \left( a_{i-1} - \frac{k_0}{c} \right).$$

Тоді із (19) випливає, що:

$$a_i = \frac{2 - \gamma_1}{\gamma_1} a_{i-1} - \frac{2k_0}{\gamma_1 c}.$$

Раніше таку залежність одержали в [2]. Отже формули (18 і (19) узагальнюють відомі результати.

**Числові результати та їх аналіз.** Приклади розрахунку коливань.

*Приклад 1.* Розрахунки проводимо при  $m = 2$  кг;  $c = 800$  Н/м;  $k_0 = \pi$  Н;  $k_1 = 2$  Н·с/м;  $k_2 = 3\pi / 2$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $a_0 = 0,05$  м. Для вказаних вихідних даних:  $\omega = 20$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_0 = 0,05$  м/с;  $\lambda_1 = 0,5$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_2 = 20$  м<sup>-1</sup>с<sup>-1</sup>;  $b = 0,0484123$  м;  $C_1 = 0,911738$ ;  $t_* = 0,680672$  с;  $n_* = 4$ . Обчислені трьома способами послідовності амплітуд записано в табл. 1.

Таблиця 1

Значення  $a_i$ , обчислені трьома способами, при  $\frac{\lambda_0}{\lambda_2} > \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$

$i$	форм. (11)	форм. (19)	числ. інт.
	$10^2 a_i, \text{ м}$		
1	3,348	3,341	3,344
2	2,116	2,108	2,111
3	1,121	1,115	1,117
4	0,266	0,260	0,263



Результати в останній колонці це значення  $x = x\left(\frac{i\pi}{\omega}\right)$ , які дає числове інтегрування диференціального рівняння (1) при початкових умовах (2) на комп'ютері. Цим же способом одержимо графік вільних коливань осцилятора, зображений на рис. 1.

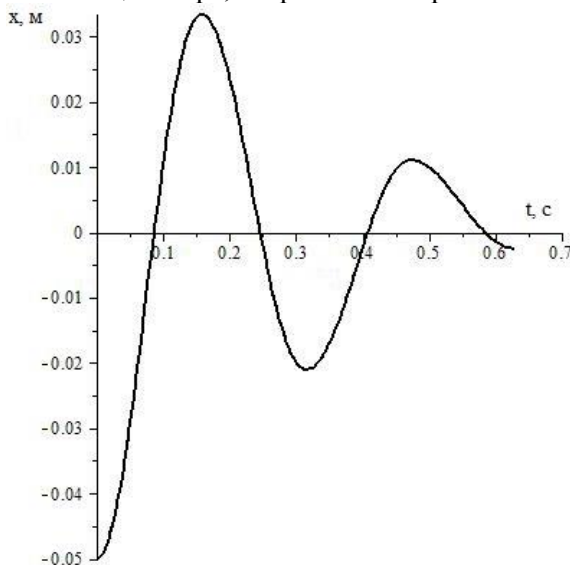


Рис. 1. Графік затухаючих коливань осцилятора

$$\text{при } \frac{\lambda_0}{\lambda_2} > \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$$

Порівняльний аналіз підтверджує узгодженість числових результатів, одержаних різними способами.

Приклад 2. Розрахунок амплітуд проводимо при  $m=2$  кг;  $c=800$  Н/м;  $k_0=0,5\pi$  Н;  $k_1=8$  Н·с/м;  $k_2=3\pi/2$  Н·с<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>;  $a_0=0,05$  м. У порівнянні з попереднім прикладом тут менша сила сухого тертя і більша сила лінійного в'язкого опору. Для прийнятих числових даних:  $\omega=20$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_0=0,025$  м/с;  $\lambda_1=2$  с<sup>-1</sup>;  $\lambda_2=20$  м<sup>-1</sup>с<sup>-1</sup>;  $\gamma=0,0353553$ ;  $C_2=-0,738997$ ;  $\exp(C_2)=0,477593$   $t_*=0,723899$  с;  $n_*=4$ . Кількість розмахів залишилась такою як і в прикладі 1. Одержані трьома способами послідовності амплітуд вільних коливань записано в табл. 2.

Таблиця 2

Значення  $a_i$ , обчислені трьома способами, при  $\frac{\lambda_0}{\lambda_2} < \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$

$i$	форм. (15)	форм. (19)	числ. інт.
	$10^2 a_i, \text{ м}$		
1	2,915	2,881	2,893
2	1,657	1,622	1,632
3	0,833	0,802	0,810
4	0,264	0,238	0,244

Графік, одержаний числовим інтегруванням задачі Коші подано на рис. 2.

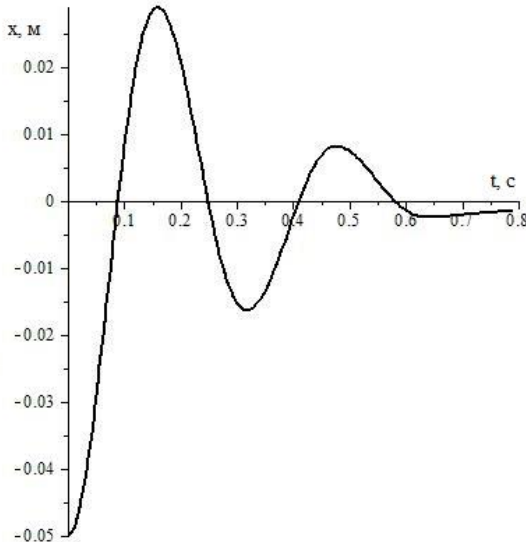


Рис. 2. Графік затухаючих коливань осцилятора

$$\text{при } \frac{\lambda_0}{\lambda_2} < \left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right)^2$$

І в цьому прикладі розбіжності числових результатів не суттєві, що підтверджує ефективність методу енергетичного балансу.

**Висновки.** В роботі виведено та апробовано компактні наближені формули для обчислень амплітуд вільних затухаючих коливань механічного осцилятора з комбінованим нелінійним опором. Вони Узагальнюють відомі залежності в теорії коливань

дисипативних осциляторів і дають числові результати, близькі до результатів числового інтегрування нелінійного диференціального рівняння руху осцилятора. Виведені формули зручні до використання, бо пов'язані з обчисленням значень лише елементарних функцій.

### Список літератури

1. Бабаков И.М. Теория колебаний./ И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с
2. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець. // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2014. – Вип. 148. – С. 19-24.
3. Ольшанський В.П. Коливання дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2015. – 116 с.
4. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016. – 264 с.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т 3. / Под общей редакцией И.А. Бергера, Я.Г Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
6. Вибрации в технике. Справочник в шести томах. Т 2. Колебания нелинейных механических систем / Под редакцией И.И. Блехмана. – М. машиностроение, 1979. – 351 с.
7. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Г.Я. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
8. Василенко М.В. Теория колебаний и жесткости руху / М.В. Василенко, О.М. Алексейчук. – К.: Вища школа, 2004. – 525 с.
9. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

### Аннотация

### СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С КОМБИНИРОВАННЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

*Рассмотрены свободные колебания линейно упругого осциллятора, при наличии силы сопротивления, которая включает три составляющие. Для исследования свободных колебаний системы*

с одной степенью свободы использован метод энергетического баланса. Приблизительно реализовано два варианта этого метода.

**Ключевые слова:** свободные затухающие колебания, метод энергетического баланса, квадратичное сопротивление, кубически-нелинейная характеристика упругости.

## Abstract

### FREE EXTINGUISHED OSCILLATOR OSCILLATIONS WITH COMBINED RESISTANCE

*The free oscillations of a linearly elastic oscillator are considered in the presence of a resistance force, which includes three components. To study the free vibrations of a system with one degree of freedom, the energy balance method is used. Two versions of this method are approximately implemented.*

**Keywords:** *damped free oscillations, combined nonlinear resistance, energy balance method, amplitude of amplitude, recurrence relation.*

УДК 539.3:534.1

### ДИНАМІКА НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНОГО ОСЦИЛЯТОРА З СУХИМ ТЕРТЯМ

Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,  
Сліпченко М.В., к.т.н., доц.

(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка)

*Розглянуто коливання осцилятора з сухим тертям при степеневій залежності відновлюючої сили від переміщення системи. Встановлено, що затухання амплітуд розмахів, їх кількість, а також тривалість розмахів у часі залежить від значення показника нелінійності та від амплітуд коливаний системи. Виведено формули для обчислень амплітуд розмахів і їх тривалості у часі. Наведено приклади розрахунків.*

**Ключові слова:** *вільні затухаючі коливання, сухе тертя, нелінійно-пружний осцилятор.*

**Постановка задачі та огляд літературних джерел.** Незважаючи на значні досягнення в теорії коливаний [1] залишаються актуальними подальші дослідження особливостей коливального руху