

Аннотация

К ВОПРОСУ СЕПАРАЦИИ ЗЕРНОВЫХ СМЕСЕЙ ЗА СОВОКУПНОСТЬЮ УПРУГИХ И АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВА

Рассмотрены вопросы совершенствования процесса сепарации зерновых смесей за упругими и аэродинамическими свойствами. Обоснованно новый способ сепарации зерновых смесей по совокупности этих свойств и предложены техническое решение для реализации способа в виде вибропневмоударного сепаратора.

Ключевые слова. *Зерновые смеси, сепарация, совокупность, упругие свойства, аэродинамические свойства, Вибропневмоударный сепаратор.*

Abstract

TO THE ISSUE OF SEPARATION OF GRAIN MIXTURES BY THE TOTAL OF ELASTIC AND AERODYNAMIC PROPERTIES

The issues of improvement of the process of separation of grain mixtures by elastic and aerodynamic properties are considered. A new method of separation of grain mixtures on the basis of these properties is substantiated and a technical solution for the implementation of the method in the form of a vibropneumatic shock separator is proposed.

Keywords. *Grain mixtures, separation, aggregate, elastic properties, aerodynamic properties, vibropneumatic impact separator.*

УДК 534.1:539.3

ВІЛЬНІ ЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ ОСЦИЛЯТОРА ДУФФІНГА, СПРИЧИНЕНІ КВАДРАТИЧНИМ ОПОРОМ

**Ольшанський В.П., д.ф.-м.н., проф., Бурлака В.В., к.т.н., доц.,
Сліпченко М.В., к.т.н., доц., Спольнік О.І., д.ф.-м.н., проф.**
*(Харківський національний технічний університет сільського
господарства імені Петра Василенка)*

Методом енергетичного балансу виведено розрахункові формули для наближеного обчислення амплітуд затухаючих коливань осцилятора з кубічною нелінійністю в характеристиці пружності при наявності опору, пропорційного квадрату швидкості руху. Реалізовано дві форми методу енергетичного балансу, який не потребує розв'язання нелінійного диференціального рівняння коливань осцилятора.

Ключові слова: вільні затухаючі коливання, метод енергетичного балансу, квадратичний опір, кубічно-нелінійна характеристика пружності.

Постановка задачі та огляд літературних джерел. Коливання лінійно-пружних осциляторів з квадратичним опором рухові, спричинені початковим відхиленням системи від положення рівноваги, розглядали в багатьох публікаціях, із яких виділимо [1-4]. В [1] обчислення амплітуд коливань зведено до трансцендентного рівняння і побудовано його універсальний графічний розв'язок. Цей спосіб розрахунку надруковано також у довіднику [2]. Асимптотичний розв'язок цієї задачі одержано в [3] і показано, що наближені результати добре узгоджуються з результатами числового розв'язку відповідного трансцендентного рівняння. В [4] для дослідження задіяно метод енергетичного балансу. Він дає розрахункову формулу таку як і асимптотичний метод у першому наближенні [3]. В роботі [5] для розрахунку послідовності амплітуд коливань задіяно функцію Ламберта, таблиці якої надруковано в [6]. При переході від лінійної характеристики пружності до нелінійної задача руху суттєво ускладнюється, бо диференціальне рівняння коливань має подвійну не лінійність, а побудова його аналітичного розв'язку складає значні математичні труднощі. Саме тому тут, для проведення дослідження, вибрано метод енергетичного балансу, який не потребує розв'язування рівняння руху. Цей метод останнім часом системно використовували для розрахунку вільних коливань дисипативних осциляторів в роботах [7-10] при лінійній характеристиці пружності. Тут поставлена задача поширити метод і на нелінійно-пружні системи.

Метою статті є виведення та апробація розрахункових формул для обчислень амплітуд затухаючих вільних коливань осцилятора типу Дуффінга, при наявності опору, пропорційного квадрату швидкості руху.

Викладення основного матеріалу.

Побудова та використання рівняння обвідної коливального процесу.

Рух осцилятора описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + kx^2 \operatorname{sign}(\dot{x}) + c_1x + c_2x^3 = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = -a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) m – маса осцилятора; k – коефіцієнт квадратичного опору; c_1, c_2 – характеристики жорсткості системи; $x = x(t)$ – відхилення осцилятора від положення $x = 0$, як функція часу t ; a_0 – стартове відхилення; крапка над x означає похідну по t .

Розглянемо i -й розмах коливань, що починаються з відхилення $x = -a_{i-1}$ і закінчується відхиленням $x = a_i < a_{i-1}$. Зміна потенціальної енергії $\Delta\Pi$ на цьому етапі руху становить:

$$\Delta\Pi = \frac{c_1}{2}(a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{c_2}{4}(a_i^4 - a_{i-1}^4). \quad (3)$$

Робота сили квадратичного опору A_T на цьому переміщенні наближено дорівнює [4]:

$$A_T = -\frac{4}{3}k\omega_i^2 a^3. \quad (4)$$

Тут $a = 0,5(a_i + a_{i-1})$; ω_i – осереднена частота руху на i -му розмасі. Щоб вивести диференціальне рівняння обвідної, дотримуючись [11], замінимо (3) наближено на:

$$\Delta\Pi \approx (c_1 a + c_2 a^3) \frac{\pi}{\omega_i} \frac{da}{dt}. \quad (5)$$

Тоді рівність правих частин виразів (4) і (5) зводиться до рівняння:

$$\left(\frac{c_1}{a^2} + c_2 \right) \frac{da}{dt} = -\frac{4k}{3\pi} \omega_i^3.$$

При $a(0) = a_{i-1}$ воно має розв'язок:

$$c_2 a^2 - c_1 = a \left(c_2 a_{i-1} - \frac{c_1}{a_{i-1}} - \frac{4k}{3\pi} \omega_i^3 t \right). \quad (6)$$

У випадку лінійної пружності осцилятора $c_2 = 0$, $\omega_i = \omega = \sqrt{\frac{c_1}{m}} = \text{const}$, $a_{i-1} = a_0$ із (6) випливає, що

$$a = a(t) = \frac{1}{\frac{1}{a_0} + \frac{4k}{3\pi c_1} \omega^3 t}.$$

Таке рівняння огинаючої графіка коливань знаходимо в [3, 4], де воно одержане різними методами.

Оскільки при $t = t_i = \pi / \omega_i$, $a = a_i$, то рівняння (6) отримує форму:

$$c_2 a_i^2 - c_1 = a_i \left(c_2 a_{i-1} - \frac{c_1}{a_{i-1}} - \frac{4k}{3} \omega_i^2 \right). \quad (7)$$

1.1. У випадку жорсткої характеристики пружності $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ і можна наближено прийняти:

$$\omega_i^2 = \frac{c_1}{m} + \frac{3}{16} \frac{c_2}{m} (a_i + a_{i-1})^2. \quad (8)$$

Підстановка цього виразу в (7) дає кубічне рівняння:

$$a_i^3 + a_* a_i^2 + b_* a_i + c_* = 0, \quad (9)$$

у якому:

$$a_* = 2a_{i-1} + \frac{4m}{k}, \quad b_* = a_{i-1}^2 + \frac{16}{3} \frac{c_1}{c_2} + \frac{4m}{kc_2} \left(\frac{c_1}{a_{i-1}} - c_2 a_{i-1} \right), \quad c_* = -\frac{4mc_1}{kc_2}.$$

Рівняння (9) має розв'язок:

$$a_i = 2\sqrt{-p_i/3} \cos \frac{\alpha_i}{3} - \frac{a_*}{3}. \quad (10)$$

Тут:

$$p_i = b_* - \frac{a_*^2}{3}; \quad q_i = 2 \left(\frac{a_*}{3} \right)^3 - \frac{a_* b_*}{3} + c_*;$$

$$\alpha_i = \arccos \left[-q_i / \left(2\sqrt{-(p_i/3)^3} \right) \right]. \quad (11)$$

Розв'язок (10), (11) має чинність, коли:

$$Q_i = \left(\frac{p_i}{3} \right)^3 + \left(\frac{q_i}{2} \right)^2 < 0.$$

Якщо $Q_i \geq 0$, то:

$$a_i = \sqrt[3]{\sqrt{Q_i} - 0,5q_i} - \sqrt[3]{\sqrt{Q_i} + 0,5q_i} - \frac{a_*}{3} \quad (12)$$

Знаючи a_{i-1} , по формулах (10), (12) можна обчислити амплітуду a_i та тривалість розмаху t_i . Так послідовно знаходимо характеристики коливального процесу.

1.2. При м'якій характеристиці пружності, коли $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, квадрат частоти ω_i^2 наближено дорівнює:

$$\omega_i^2 = \frac{c_1}{m} - \frac{3}{16} \frac{|c_2|}{m} (a_i + a_{i-1})^2.$$

Підстановка цього виразу в (7) теж дає кубічне рівняння (9), в якому залишається попереднім коефіцієнт a_* , а два інших подаються формулами:

$$b_* = a_{i-1}^2 - \frac{16}{3} \frac{c_1}{|c_2|} - \frac{4m}{k|c_2|} \left(\frac{c_1}{a_{i-1}} + |c_2| a_{i-1} \right), \quad c_* = \frac{4mc_1}{k|c_2|}.$$

У цьому випадку кубічне рівняння (9) має розв'язок:

$$a_i = -2\sqrt{-p_i / 3} \cos \frac{\alpha_i + \pi}{3} - \frac{a_*}{3}, \quad (13)$$

причому зберігають чинність формули (11).

Отже знову маємо рекурентне співвідношення для обчислень амплітуд коливань і тривалостей розмахів $t_i = \pi / \omega_i$.

2. Друга форма методу енергетичного балансу.

Прирівнявши праві частини виразів (3), (4), одержуємо рівняння:

$$\frac{c_1}{2} (a_i^2 - a_{i-1}^2) + \frac{c_2}{4} (a_i^4 - a_{i-1}^4) = -\frac{4}{3} k \omega_i^2 a^3,$$

яке після підстановки в нього (8), набуває вигляд:

$$c_1 (a_{i-1} - a_i) + c_2 a^2 (a_{i-1} - a_i) = \frac{4}{3} k a^2 \left(\frac{c_1}{m} + \frac{3}{4} \frac{c_2}{m} a^2 \right).$$

Враховуючи, що $a_i - a_{i-1} = 2(a - a_{i-1})$, далі отримуємо:

$$c_1 (a_{i-1} - a) + c_2 (a_{i-1} - a) a^2 = \frac{2}{3} k a^2 \left(\frac{c_1}{m} + \frac{3}{4} \frac{c_2}{m} a^2 \right).$$

У підсумку, внаслідок елементарних перетворень, приходимо до рівняння четвертого ступеня:

$$\xi_i^4 + \frac{2m}{k} \xi_i^3 - \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_i^2 + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} \xi_i - \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} a_{i-1} = 0, \quad (14)$$

що виражає зв'язок між a_i та a_{i-1} , бо:

$$a_i = 2\xi_i - a_{i-1}. \quad (15)$$

Для пошуку кореня рівняння (14) можна використовувати ітераційну формулу Ньютона, за якою:

$$\xi_{ij+1} = \xi_{ij} - \frac{\xi_{ij}^4 + \frac{2m}{k} \xi_{ij}^3 - \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_{ij}^2 + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} \xi_{ij} - \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2} a_{i-1}}{4\xi_{ij}^3 + \frac{6m}{k} \xi_{ij}^2 - 2 \left(\frac{2m}{k} a_{i-1} - \frac{4}{3} \frac{c_1}{c_2} \right) \xi_{ij} + \frac{2m}{k} \frac{c_1}{c_2}}, \quad (16)$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Початкове наближення $\xi_{i0} = a_{i-1}$.

Розрахунок амплітуд коливань за викладеною схемою можливий як при $c_2 > 0$ так і при $c_2 < 0$.

Числові результати та їх аналіз.

Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 1. Обчислимо послідовність десяти амплітуд затухаючих коливань осцилятора з жорсткою характеристикою пружності при $m = 2$ кг; $k = 8$ Н·с²/м²; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 160000$ Н/м³; $a_0 = 0,05$ м. Одержані трьома способами значення амплітуд записано в табл. 1.

В останній колонці записано значення $x = x(\sum t_i^*)$, одержані числовим інтегруванням диференціального рівняння (1) на комп'ютері. Їх можна вважати умовно точними амплітудами коливань. Порівняння показує, що тут формула (10) дає більш точні результати, ніж формула (15).

Результати числового інтегрування рівняння (1), у вигляді графіка коливань подано на рис. 1. Графічна інформація на рисунку узгоджується з числовими результатами в табл. 1.

Таблиця 1

Значення a_i при $c_2 > 0$

i	$\sum t_i^*, \text{с}$	форм. (10), (12)	форм. (15), (16)	числ. інт.
		Значення 100 a_i , м		
1	0,13817	4,005	3,998	4,042
2	0,28171	3,330	3,322	3,374
3	0,42874	2,845	2,836	2,887
4	0,57815	2,480	2,472	2,519
5	0,72920	2,197	2,189	2,231
6	0,88143	1,970	1,964	2,000
7	1,03454	1,786	1,780	1,812
8	1,18832	1,632	1,627	1,656
9	1,34260	1,503	1,499	1,523
10	1,49729	1,393	1,389	1,411

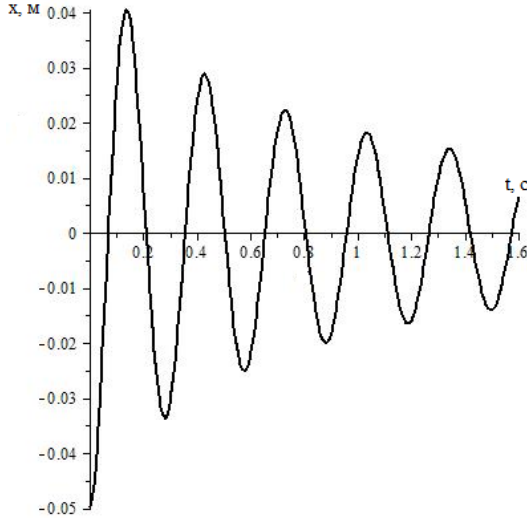


Рис. 1. Графік коливань, отриманий числовим інтегруванням при $c_2 > 0$

Приклад 2. Щоб розрахувати амплітуди коливань осцилятора з м'якою характеристикою пружності, приймаємо $m = 2$ кг; $k = 8$ Н·с²/м²; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = -80000$ Н/м³; $a_0 = 0,05$ м. Обчислена послідовність з десяти амплітуд коливань записана в табл. 2.

Таблиця 2

Значення a_i при $c_2 < 0$

i	$\sum t_i^*, \text{с}$	форм. (13),	форм. (15), (16)	числ. інт.
		Значення $100 a_i, \text{м}$		
1	0,17157	3,899	3,883	3,863
2	0,33721	3,209	3,192	3,171
3	0,50007	2,731	2,716	2,697
4	0,66134	2,379	2,365	2,349
5	0,82163	2,108	2,096	2,082
6	0,98124	1,893	1,883	1,871
7	1,14038	1,718	1,709	1,699
8	1,29916	1,573	1,566	1,556
9	1,45767	1,450	1,444	1,436
10	1,61598	1,346	1,340	1,333

Тут теж метод енергетичного балансу дає результати, які задовільно узгоджуються з результатами числового інтегрування диференціального рівняння руху. Одержаний цим способом графік коливань зображено на рис. 2.

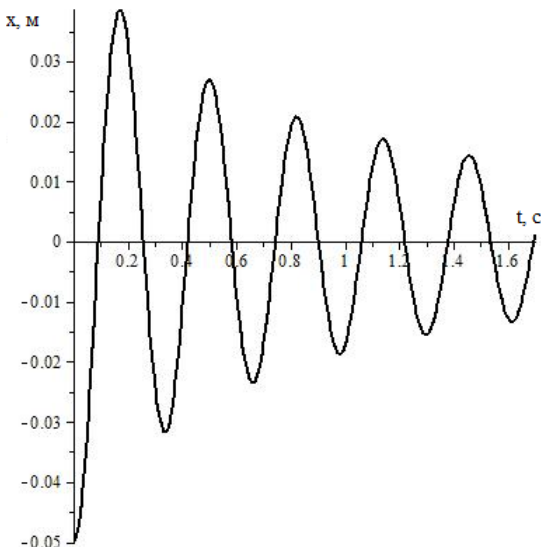


Рис. 2. Графік коливань, отриманий числовим інтегруванням при $c_2 < 0$

Приклад 3. Покажемо, що метод енергетичного балансу можна використовувати і для ідентифікації значення коефіцієнта квадратичного опору за результатами виміру амплітуд коливань. Із (3) і (4) випливає, що:

$$k = \frac{3m(a_{i-1} - a_i) c_1 + 0,5c_2(a_i^2 + a_{i-1}^2)}{(a_i + a_{i-1})^2 c_1 + \frac{3}{16}c_2(a_i + a_{i-1})^2} \quad (17)$$

Припустимо, що $m = 2$ кг; $c_1 = 800$ Н/м; $c_2 = 160000$ Н/м³, а за результатами виміру $a_0 = a_{i-1} = 0,05$ м; $a_1 = a_i = 0,04$ м. Тоді за формулою (17) $k = 8,011$ Н·с²/м². Близьке до цього значення k використовували в попередніх прикладах.

Висновки. Виведені методом енергетичного балансу наближені формули дають можливість розрахувати амплітуди

вільних затухаючих коливань осцилятора типу Дуффінга при наявності квадратичного опору рухові, без розв'язування диференціального рівняння коливань. При цьому крім прямих задач є можливість розв'язувати і обернену задачу динаміки по ідентифікації значення коефіцієнта опору за результатами виміру двох сусідніх амплітуд коливань. Розрахунки підтвердили, що наближені формули дають результати, які задовільно узгоджуються з результатами числового розв'язання задачі Коші на комп'ютері.

Список літератури

1. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: Т.2. / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.

2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Т 3. / Под общей редакцией И.А. Бергера, Я.Г Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

3. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.

4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

5. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задаче колебаний математического маятника / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. // Вісник НТУ «ХП». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХП», 2014. – № 18 (1061). – С. 116-119.

6. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах баллистики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Издатель Савчук А.О., 2013. – 204 с.

7. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець. // Механізація сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2014. – Вип. 148. – С. 19-24.

8. Бурлака В.В. До розрахунку коливань механізмів з комбінованим сухим тертям / В.В. Бурлака, В.П. Ольшанський, О.М. Малець. // Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2014. – Вип. 151. – С. 384-390.

9. Ольшанський В.П. Коливання дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський та ін. – Харків: Міськдрук, 2015. – 116 с.

10. Ольшанський В.П. Динаміка дисипативних осциляторів. / В.П. Ольшанський, Л.М. Тіщенко, С.В. Ольшанський. – Харків: Міськдрук, 2016. – 264 с.

11. Ольшанський В.П. Про затухання вільних коливань дисипативного осцилятора дуффінга / В.П. Ольшанський, В.В. Бурлака, М.В. Сліпченко. // Проблеми надійності машин та засобів сільськогосподарського виробництва: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2019. – Вип. 201. – С. 184-190.

Аннотация

СВОБОДНЫЕ ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА ДУФФИНГА, ВЫЗВАННЫЕ КВАДРАТИЧНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ

Методом энергетического баланса выведено расчетные формулы для приближенного вычисления амплитуд затухающих колебаний осциллятора с кубической нелинейностью в характеристике упругости при наличии сопротивления, пропорционального квадрату скорости движения. Реализовано две формы метода энергетического баланса, который не требует решения нелинейного дифференциального уравнения колебаний осциллятора.

Ключевые слова: свободные затухающие колебания, метод энергетического баланса, квадратичное сопротивление, кубически-нелинейная характеристика упругости.

Abstract

FREE DAMPING OSCILLATIONS OF DUFFING OSCILLATOR CAUSED BY QUADRATIC RESISTANCE

Using the energy balance method, calculation formulas are derived for an approximate calculation of the amplitudes of damped oscillations of an oscillator with cubic nonlinearity in the characteristic of elasticity in the presence of resistance proportional to the square of the speed of motion. Two forms of the energy balance method are implemented, which does not require solving the nonlinear differential equation of oscillator oscillations.

Keywords: free damped oscillations, energy balance method, quadratic resistance, cubic nonlinear elasticity characteristic.