

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОЗДЕЙСТВИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА КРИОКОНСЕРВИРУЮЩУЮ СРЕДУ С БИОЛОГИЧЕСКИМ ОБЪЕКТОМ

Кунденко Н. П.

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко**Разработана математическая модель, описывающая процесс воздействия монохроматических звуковых волн на криоконсервирующую среду, содержащую биологический объект.*

**Постановка проблемы.** В Украине, как и в большинстве стран мира, остро стоит проблема дефицита пищевого белка животного происхождения. Решать ее невозможно без наращивания объема производства мяса и молока. Сделать это можно только за счет интенсификации молочного и мясного скотоводства. Выход из создавшегося положения состоит [1]: в применении более современной технологии консервации спермы на племенных предприятиях, позволяющей получать от взрослого быка не 19, а 60...100 тысяч сперматозоидов в год; в применении более совершенных технологий деконсервации спермы, позволяющих увеличить выход активных спермиев в дозе на 20...25%; в использовании mano- и ректоцервикальных методов искусственного осеменения коров и телок, позволяющих затрачивать не 4..5 сперматозоидов на оплодотворение, а 2..2,5; сохранение оплодотворяющей способности спермы на высоком уровне независимо от срока ее хранения и при использовании для осеменения даже 3..5 млн. активных спермиев в дозе; сохранение высокого санитарного уровня, биологических и технологических параметров законсервированной спермы независимо от срока хранения и санитарного уровня окружающей среды.

Однако, несмотря на то, что данный вопрос уже изучен, главной проблемой остается значительное снижение биологической полноценности спермиев в процессе криообработки [1].

**Анализ последних исследований и публикаций.** Ни одна из известных технологий замораживания в сокоминках (США), в минитубах (ФРГ), в открытых гранулах (ФРГ) и их варианты не обеспечивают перечисленных требований [1]. Уже даже на стадии охлаждения возникают конформационные изменения липопротеидных комплексов биомембран, которые в дальнейшем усиливаются при кристаллизации и деконсервации и проявляются появлением трансмембранных дефектов. Они вызывают нарушение проницаемости мембран, а так же всего комплекса биохимических изменений, что и приводит к снижению биологической полноценности спермиев и даже их гибель. При изучении ультраструктуры размороженных спермиев с помощью электронной микроскопии, было обнаружено, что лишь 7,3% клеток не имеют признаков нарушений цитоплазматической мембраны (ЦПМ); 33,7% имеют незначительные повреждения, которые проявляются набуханием и небольшим отслоением от акросомы, без изменения их целостности; 37% спермиев имеют средние нарушения ЦПМ с увеличением ее толщины и признаками зернистого распада, а для 22% характерны разрыв целостности ЦПМ и акросомы с выходом акросо-

мального содержания и даже полной деструкцией клеток. По данным работы [4], лишь 28% размороженных спермиев имели целостную акросому. Так, по данным исследований, если в размороженной сперме в освобожденном состоянии находилось 27,2% гиалуронидазы (к замораживанию 22,7%), то через 4 часа инкубации при 38<sup>0</sup>С выход ее из акросомы составил уже 56,9 [3]. Одной из причин быстрого разрушения мембранных структур при хранении размороженных спермиев является интенсификация цепных перекисных процессов их липидов, инициированных замораживанием, накопление агрессивных свободных радикалов, которые в свою очередь приводят к нарушению проницаемости мембран и потери каталитических свойств ферментов [3]. Биологическая полноценность размороженных спермиев зависит от наличия в системе антиоксидантов, которые способны гасить эти перекисные процессы, связывать свободные радикалы [4].

Проведенный анализ показывает что повышение выживаемости спермиев животных при криоконсервации, с помощью различных стабилизирующих добавок к криоконсервантам, исчерпало свои возможности. Повышение выживаемости спермиев животных при их консервации, очевидно, следует искать на основе использования электрофизических методов электромагнитной природы.

**Цель статьи** - разработать математическую модель процесса воздействия монохроматических акустических волн с криоконсервирующей средой, содержащей биологический объект (эмбрион, спермий).

**Основные материалы исследования.** В качестве криоконсервирующей среды рассматривается сплошная среда с заданными значениями плотности, скорости звука и вязкости. Биологические объекты моделируются геометрическими телами в виде шара и эллипсоида вращения (вытянутый сфероид). На поверхностях этих тел ставится граничное условие: равенство нулю суммы давления возбуждающей звуковой волны и избыточного давления, возникающего в результате дифракции звуковой волны на биологическом объекте. В результате решения краевой задачи линейной акустики получены аналитические выражения для колебательной скорости и избыточного давления в окрестности границы биологического объекта. Эти величины используются в последующих разделах для расчетов скорости микропотоков, возникающих в криоконсервирующей среде в окрестности биологических объектов и при моделировании процесса массопереноса частиц криоконсервирующей среды к поверхности биологического объекта.

В качестве криоконсервирующей среды рассматривается сплошная среда с заданными значениями плотности, скорости звука и вязкости. Биологические объекты моделируются геометрическими телами в виде шара и эллипсоида вращения (вытянутый сфероид). На поверхностях этих тел ставится граничное условие: равенство нулю суммы давления возбуждающей звуковой волны и избыточного давления, возникающего в результате дифракции звуковой волны на биологическом объекте. Процесс воздействия звуковой волны на биологический объект описывается краевой задачей линейной акустики.

Пусть криоконсервирующая жидкость моделируется однородной изотропной средой с плотностью  $\rho_0$ , скоростью распространения звука  $c_0$  и коэффициентом поглощения  $\lambda$ . Как известно [1], коэффициент поглощения  $\gamma$  связан с динамической вязкостью  $\eta$  по формуле

$$\gamma = \frac{16\pi^2 f^2 \eta}{3c_0^2 \rho_0}, \quad (1)$$

где  $f$  - частота звуковой волны,

$c_0$  - скорость звука,

$\rho_0$  - плотность.

В линейном приближении [1] для определения волнового движения достаточно найти потенциал колебательной скорости  $U = U(p, t)$  ( $p$  - точка с координатами  $x, y, z, t$  - время). С помощью потенциала  $U(p, t)$  поле колебательной скорости выражается в виде

$$\vec{V}(p, t) = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } U, \quad (2)$$

а давление  $p$  в виде

$$p - p_0 = -\frac{\partial U}{\partial t} - \gamma U, \quad (3)$$

где  $p_0$  - давление в невозмущенной среде.

В линейной акустике [2] потенциал скоростей  $U$  удовлетворяет диссипативному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial U}{\partial t} - c_0^2 \Delta U = 0. \quad (4)$$

Далее будем предполагать, что потенциал скоростей  $U(p, t)$  гармонически зависит от времени, следовательно

$$U(p, t) = U(p) e^{-i\omega t}, \quad (5)$$

где  $\omega = 2\pi f$  - круговая частота.

В этом случае, зависящая от пространственных переменных амплитуда  $U(p)$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца [2].

$$\Delta U + k^2 U = 0. \quad (6)$$

Здесь волновое число  $k$  имеет вид

$$k^2 = \omega(\omega + i\gamma) / c_0^2. \quad (7)$$

Причем выбираем знак у  $k$  так, чтобы выполнялось условие [2]

$$\text{Im } k \geq 0. \quad (8)$$

Таким образом математическое описание процесса взаимодействия монохроматической звуковой волны, распространяющейся в криоконсервирующей среде с биологическим объектом, приводит к краевым задачам для уравнения Гельмгольца (6). На границе биологического объекта будем задавать величину  $U(p)$ , что физически соответствует заданию давления звуковой волны.

Итак, будем предполагать, что в криоконсервирующей среде распространяется заданная монохроматическая звуковая волна с потенциалом скоростей  $U^i$ . В результате рассеивания этой волны на биологическом объекте  $S$  возникает рассеянная звуковая волна с потенциалом колебательной скорости  $U^s$ . Тогда функция  $U^s$  должна удовлетворять вне  $S$  однородному уравнению Гельмгольца (6), а на границе биологического объекта полное давление должно обращаться в нуль, т.е.

$$(U^i + U^s) \Big|_{\partial S} = 0, \quad (9)$$

где  $\partial S$  - граничная поверхность биологического объекта.

На больших расстояниях от биологического объекта функция  $U^s$  должна стремиться к нулю при  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ . Если поглощение в криоконсервирующей среде пренебрежимо мало ( $\gamma \rightarrow 0$ ), то функция  $U^s$  должна удовлетворять условию излучения Зоммерфельда [2]

$$\frac{\partial U}{\partial r} - ikU = 0 \quad (r^{-1}). \quad (10)$$

Таким образом, задача состоит в определении рассеянной волны  $U^s$  из краевой задачи (6), (9), (10). Конкретизируем геометрию граничной поверхности  $\partial S$  биологического объекта  $S$  и параметры возбуждающей звуковой волны  $U^i$ . Будем предполагать, что биологический объект обладает осью симметрии (шар, эллипсоидальный сфероид). Введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  с осью  $z$  совпадающей с осью симметрии. Тогда граничная поверхность  $\partial S$  может быть образована вращением вокруг оси  $z$  некоторой достаточно гладкой кривой. Пусть эта кривая задана в цилиндрических координатах  $\rho, \varphi, z$  следующим образом

$$z = z(\tau), \quad \rho = \rho(\tau), \quad \varphi = \text{const}, \quad (11)$$

где  $z = z(\tau)$ ,  $\rho = \rho(\tau)$  - известные функции параметра параметризации  $\tau \in [0, \pi]$  и  $\varphi \in [-\pi, \pi]$  азимутальный угол.

В дальнейшем ограничимся двумя типами граничной поверхности биологического объекта: сфера -  $z(\tau) = R \cos \tau$ ,  $\rho(\tau) = R \sin \tau$ ; эллипсоидальный сфероид -  $z(\tau) = r(\tau) \sin \tau$ ,  $\rho(\tau) = r(\tau) \cos \tau$ ,  $r(\tau) = b / \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}$ ,  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ ,  $a$  и  $b$  - соответственно большая и малая полуоси сфероида. Используя (11) граничная поверхность биологического объекта может быть задана следующим образом

$$x = \rho(\tau) \cos \varphi, \quad y = \rho(\tau) \sin \varphi, \quad z = z(\tau), \quad (12)$$

где  $\tau \in [0, \pi]$ ,  
 $\varphi \in [-\pi, \pi]$ .

Относительно потенциала скоростей возбуждающей звуковой волны  $U^i$  будем предполагать, что он имеет вид

$$U^i(\rho, \varphi, z) = A e^{ikz}, \quad (13)$$

т.е., возбуждающая волна распространяется вдоль положительного направления оси  $z$ . Поскольку биологический объект обладает осью симметрии, совпадающей с осью  $z$ , то рассеянная волна также будет обладать симметрией относительно этой оси. В дальнейшем будем считать, что амплитуда рассеянной волны нормирована на амплитуду  $A$  возбуждающей волны и полагать  $A = 1$ .

Построение решения сформулированной задачи основано на теории потенциала, с помощью которой задача сводится к граничному интегральному уравнению первого рода относительно нормальной компоненты скорости. Непосредственная дискретизация его с помощью известных квадратурных формул для интегралов [3] приводит к плохо обусловленной системе линейных алгебраических уравнений. Поэтому построение численного решения таких уравнений практически невозможно в силу большой неустойчивости к погрешностям вычислений. В связи с этим разработана специальная процедура регуляризации граничного интегрального уравнения, отличающаяся от известных методов регуляризации некорректных операторных уравнений первого рода. В силу аксиальной симметрии биологического объекта, нормальную составляющую колебательной скорости на границе биологического объекта и функции Грина (ядро интегрального уравнения) можно представить в виде рядов Фурье по азимутальной координате. В результате исходное интегральное уравнение по поверхности биологического объекта сводится к одномерным интегральным уравнениям относительно коэффициентов Фурье. Установлено, что интегральные операторы,

порожденные этими уравнениями, представлены в виде суммы двух операторов  $A_1 \psi + A_2 \psi = \psi_0$ .

Причем, один из этих операторов имеет ограниченный обратный  $A_1^{-1}$ , а второй интегральный оператор  $A_2$  имеет достаточно гладкое ядро. Следовательно, обращая указанный выше оператор, получаем операторное уравнение второго рода  $\psi + A_1^{-1} A_2 \psi = A_1^{-1} \psi_0$ .

Это уравнение преобразуется с помощью разложения Фурье - Лежандра в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода.

**Выводы** Разработана математическая модель процесса воздействия монохроматических акустических волн с криоконсервирующей средой, содержащей биологический объект (эмбрион, спермий).

#### Список использованных источников

1. Осмашко Ф. И. Биотехнология воспроизведения крупного рогатого скота / Ф. И. Осмашко. - Киев: Аграрна наука, 1995. - 172 с.
2. Зубец М. В. Про радикальний перегляд теорії селекції / М. В. Зубец, В. П. Буркат // Вісник с.-г. науки. - 1987. - №7. - С. 80-82.
3. Зубец М. В. Современные аспекты криоконсервации спермы быков / М. В. Зубец, В. П. Буркат, А. А. Бегма [и др.] // Вестник Полтавского государственного сельскохозяйственного института. - 2000. - № 1.
4. Brett J. H. Advances on Reproduction in Dairy Cattle / J. H. Brett, J. S. Stevenson // J. of Dairy Science. - 1981. - V. 64. - №. 6. - P. 1378-1402.

#### Анотація

#### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВПЛИВУ АКУСТИЧНОГО ПОЛЯ НА КРИОКОНСЕРВУЮЧЕ СЕРЕДОВИЩЕ З БІОЛОГІЧНИМ ОБ'ЄКТОМ

Кунденко М. П.

*Розробка математичної моделі, що описує процес впливу монохроматичних звукових хвиль на криоконсервуюче середовище, що містить біологічний об'єкт.*

#### Abstract

#### MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF INFLUENCE OF THE ACOUSTIC FIELD ON KRIOPRESERVING ENVIRONMENT WITH BIOLOGICAL OBJECT

N. Kundenko

*The working out of mathematical model describing process of influence of monochromatic sound waves on kriopreserving environment, containing biological object.*