

## О КОЛЕБАНИЯХ ГРАДИЕНТА СКОРОСТИ В НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ЗЕРНА НА ВИБРОРЕШЕТЕ

**Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф., Ольшанский С.В., асс.**  
(Харьковский национальный технический университет сельского  
хозяйства имени Петра Василенко)

*Выведена формула для вычисления градиента скорости в неоднородном слое виброоживленной зерновой смеси, когда изменение эффективной вязкости по толщине слоя описывается экспоненциальной функцией. Численно проанализировано влияние различных параметров модели на величину градиента скорости в установившемся режиме движения смеси по плоскому наклонному решету, которое совершает продольные гармонические колебания.*

**Постановка проблемы.** Величина градиента скорости влияет на интенсивность сегрегации зерновых смесей при её виброрешётном сепарировании. С градиентом также связаны касательные напряжения в виброоживленной смеси, от которых зависят сопротивление движению зернового материала по виброрешету. Поэтому определение градиента скорости движения является важным аспектом моделирования зернового потока при виброрешётном сепарировании.

**Анализ последних публикаций.** При моделировании движения зерновой смеси, как вязкой жидкости, по виброрешету в основном определяли скорость плоского слоя [1,2]. Гораздо меньше внимания уделено расчёту градиента скорости, хотя в указанных публикациях выведены формулы для вычисления градиента при колебаниях однородного и линейно-неоднородного слоёв. Колебания градиента скорости в слое, где вибровязкость линейно меняется по его толщине, рассматривали также в [3]. Но остаются малоизученными изменения градиента скорости при колебаниях нелинейно неоднородных зерновых слоёв, чем мотивированно данное исследование.

**Целью работы** является вывод формул для вычисления градиента скорости потока виброоживленной зерновой смеси по наклонному решету, когда изменение кинематической вязкости по толщине слоя аппроксимируется показательной функцией. Ставится

задача параметрического анализа влияния вибраций решета и механико-технологических характеристик смеси на величину градиента и изменение его во времени и по толщине слоя.

**Основная часть работы.** При разработке математической модели придерживаемся расчётной схемы на рис. 1.

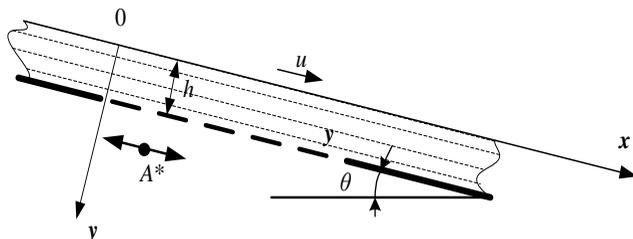


Рис. 1 Расчетная схема решета

Символами  $x$  и  $y$  обозначены соответственно продольная и поперечная декартовы координаты;  $h$  – толщина движущегося слоя;  $\theta$  – угол наклона решета к горизонту.

Изменение эффективной вибровязкости смеси  $\nu$  по координате  $y$  аппроксимируем экспоненциальной функцией

$$\nu = \nu(y) = \nu_0 \exp(\lambda y),$$

в которой  $\nu_0$  и  $\lambda$  положительные постоянные. По физическому смыслу первая из них является поверхностной вибровязкостью смеси, а вторая константа определяет быстроту увеличения вибровязкости с удалением от свободной поверхности слоя. Для определения  $\nu_0$  и  $\lambda$  нужно измерить  $\nu$  при двух выбранных  $y$ , например при  $y = 0$  и  $y = h$ . Если замерено  $\nu_0$ , а  $\nu(h) = \nu_1$  то

$$\lambda = \frac{1}{h} \ln \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

В установившемся режиме движения проекцию скорости потока  $\nu$  на ось  $oy$  полагаем равной нулю, а проекцию скорости  $u$  на ось  $ox$  считаем независимой от координаты  $x$ . При этих допущениях вычисление  $u(y, t)$  в [4] сведено к формуле:

$$u(y,t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda^2 v_0} (\xi - \xi_1 + \xi_1 \ln \xi_1 - \xi \ln \xi) + \eta [c_1 \text{ber}_1(\eta) - c_2 \times \\ \times \text{bei}_1(\eta) + c_3 \text{ker}_1(\eta) - c_4 \text{kei}_1(\eta)] \sin(\omega t) + \eta [c_1 \text{bei}_1(\eta) + c_2 \times \\ \times \text{ber}_1(\eta) + c_3 \text{kei}_1(\eta) + c_4 \text{ker}_1(\eta)] \cos(\omega t). \quad (1)$$

Здесь  $\xi = \exp(-\lambda y)$ ;  $\xi_1 = \exp(-\lambda h)$ ;  $\eta = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}} \xi$ ;

$\text{ber}_1(\eta), \text{bei}_1(\eta), \text{ker}_1(\eta), \text{kei}_1(\eta)$  – функции Кельвина индекса единица;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\omega$  – круговая частота колебаний решета с амплитудой  $A^*$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – постоянные множители.

Эти множители зависят от параметров модели и представляются выражениями [4]:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; c_3 = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2; c_4 = -c_1 \delta_2 + c_2 \delta_1;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \eta_1^{-1} [\text{ber}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{ker}_1(\eta_1) + \delta_2 \text{kei}_1(\eta_1)];$$

$$\Delta_2 = -A^* \omega \eta_1^{-1} [\text{bei}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{kei}_1(\eta_1) - \delta_2 \text{ker}_1(\eta_1)];$$

$$\Delta = [\text{ber}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{ker}_1(\eta_1) + \delta_2 \text{kei}_1(\eta_1)]^2 + \\ + [\text{bei}_1(\eta_1) + \delta_1 \text{kei}_1(\eta_1) - \delta_2 \text{ker}_1(\eta_1)]^2;$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2};$$

$$f_{1,2} = \text{ber}(\eta_0) \pm \text{bei}(\eta_0); \quad f_{3,4} = \text{ker}(\eta_0) \pm \text{kei}(\eta_0);$$

$$\eta_0 = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}}; \quad \eta_1 = \eta_0 \sqrt{\xi_1}.$$

Согласно введенным упрощениям, скорость потока имеет лишь одну проекцию, которая не зависит от  $x$ . Поэтому величина градиента скорости определяется производной этой проекции по  $y$ , которую найдём дифференцированием (1). Учитывая, что

$$\frac{d}{dy} = -\lambda \xi \frac{d}{d\xi} = -\frac{\lambda}{2} \eta \frac{d}{d\eta},$$

а дифференцирование произведений:

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ \eta \begin{bmatrix} ber_1(\eta) \\ bei_1(\eta) \end{bmatrix} \right\} = -\frac{\eta}{\sqrt{2}} [bei(\eta) \pm ber(\eta)];$$

$$\frac{d}{d\eta} \left\{ \eta \begin{bmatrix} ker_1(\eta) \\ kei_1(\eta) \end{bmatrix} \right\} = -\frac{\eta}{\sqrt{2}} [kei(\eta) \pm ker(\eta)]$$

приводит к понижению индекса функции Кельвина до нуля [5], получаем

$$u'_y(y, t) = \frac{g \sin \theta}{\lambda v_0} \xi \ln \xi + \frac{\lambda \eta^2}{2\sqrt{2}} [c_1 \varphi_1(\eta) - c_2 \varphi_2(\eta) + c_3 \times$$

$$\times \varphi_3(\eta) - c_4 \varphi_4(\eta)] \sin(\omega t) + \frac{\lambda \eta^2}{2\sqrt{2}} [c_1 \varphi_2(\eta) + c_2 \varphi_1(\eta) + c_3 \times$$

$$\times \varphi_4(\eta) + c_4 \varphi_3(\eta)] \cos(\omega t). \quad (3)$$

При этом

$$\varphi_{1,2}(\eta) = bei(\eta) \pm ber(\eta); \quad \varphi_{3,4}(\eta) = kei(\eta) \pm ker(\eta).$$

Вычислив производную, далее легко найти касательные напряжения в смеси плотности  $\rho$  по формуле

$$\tau(y, t) = \rho v u'_y(y, t).$$

На свободной поверхности слоя ( $y = 0$ ) градиент скорости и касательные напряжения равны нулю.

Входящие в (2), (3) функции Кельвина индексов нуль и единица можно вычислить с помощью таблиц, опубликованных в [5,6] и других изданиях по специальным функциям.

Используя (2) и (3), проанализируем влияние различных параметров на величину градиента скорости. Для проведения расчётов принимаем:  $\lambda = 50 \text{ м}^{-1}$ ;  $v_0 = 0,0001 \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $h = 0,01 \text{ м}$ ;  $\theta = 5^\circ$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = 41,86 \text{ с}^{-1}$ .

Вычисленные при указанных исходных данных значения градиента скорости для отдельных  $y$  и  $t$  указаны в табл.

Расчёт приводит к выводу, что наибольшего значения градиент достигает у поверхности виброрешета. При этом он может быть как положительным так и отрицательным, т.е. возникающие касательные напряжения с течением времени могут как ускорять так и тормозить

движение смеси. При малых отношениях  $y/h$  градиент скорости отрицателен и касательные напряжения только тормозят движение выше лежащих слоёв смеси. Но в отдельные моменты времени вибрации решета существенно уменьшают тормозящее воздействие.

Таблица

Значения  $u'_y(y, t)$  для различных  $y$  и  $t$

$\frac{\omega t}{\pi}$	$u'_y(y, t), \text{c}^{-1}$			$\frac{\omega t}{\pi}$	$u'_y(y, t), \text{c}^{-1}$		
	$y = \frac{h}{4}$	$y = \frac{h}{2}$	$y = h$		$y = \frac{h}{4}$	$y = \frac{h}{2}$	$y = h$
0,0	-29,18	-58,60	59,98	1,0	-8,55	-7,99	-163,70
0,2	-30,40	-46,34	102,10	1,2	-7,32	-20,25	-205,81
0,4	-27,22	-29,10	85,40	1,4	-10,51	-37,49	-189,12
0,6	-20,85	-13,46	16,28	1,6	-16,88	-53,13	-120,00
0,8	-13,71	-5,40	-78,87	1,8	-24,01	-61,19	-24,85

На рис. 2 нанесены профили градиента скорости, рассчитанные по (3), для трёх моментов времени.

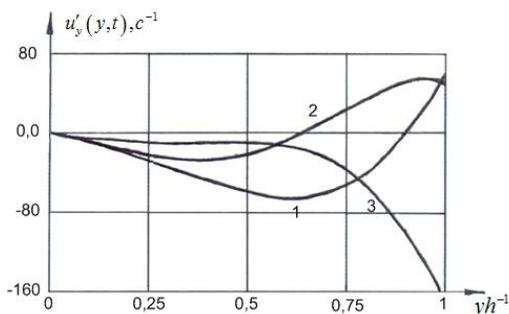


Рис. 2. Профили градиента скорости при разных  $t_1 = \omega t \pi^{-1}$ :  
 $1 - t_1 = 0$ ;  $2 - t_1 = 0,5$ ;  $3 - t_1 = 1$

Как видно из рис.2., в результате колебаний существенно меняется профиль градиента во времени.

О влиянии частоты колебаний решета на величину градиента позволяют судить графики на рис. 3. Они получены при  $\omega = 41,86 \text{c}^{-1}$  и  $\omega = 52,33 \text{c}^{-1}$ .

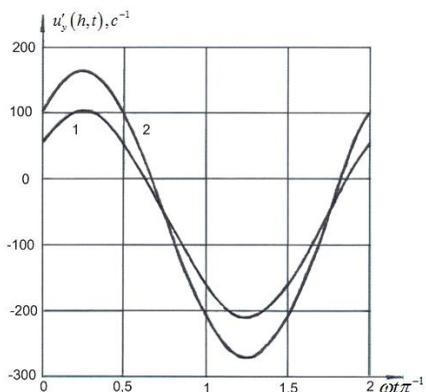


Рис. 3. Профили градиента скорости при разных  $\omega$ :  
 $1 - \omega = 41,86$ ,  $2 - \omega = 52,33 \text{ c}^{-1}$

С возрастанием частоты колебаний решета увеличиваются амплитуды колебаний градиента скорости.

Влияние неоднородности слоя на градиент отражено на рис. 4 и рис. 5.

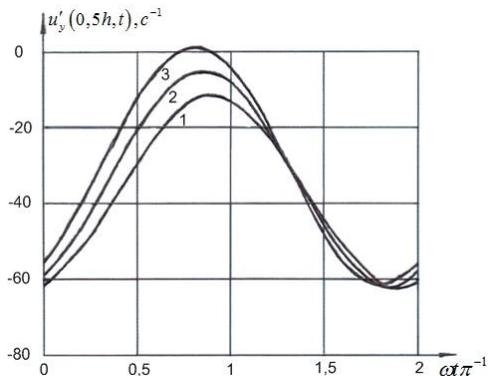


Рис. 4. Графики колебаний градиента при разных  $\lambda$ :  
 $1, 2, 3 - \lambda = 30; 50; 70 \text{ м}^{-1}$

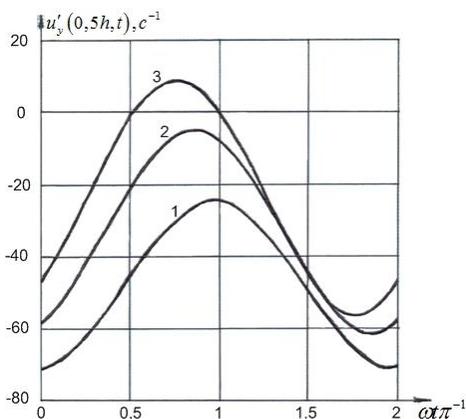


Рис. 5. Графики колебаний градиента при разных  $\nu_0$ :  
 1, 2, 3 –  $\nu_0 = 0,00007$ ;  $0,0001$ ;  $0,00014 \text{ м}^2/\text{с}$

С увеличением  $\lambda$  и  $\nu_0$  повышаются значения градиента скорости при  $y = 0,5h$ . В результате этого в некоторые моменты времени он может быть положительным и касательные напряжения ускоряют движение смеси.

Таким образом, изложенная теория позволяет анализировать влияние различных параметров на изменения касательных напряжений, пропорциональных градиенту, по времени и толщине слоя.

### Список литературы

1. Тищенко Л.Н. Гидродинамика сепарирования зерна / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харків: Міськдрук, 2010. – 174 с.
2. Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В. Виброрешётная сепарация зерновых смесей. – Харьков: “Міськдрук”, 2011. – 280 с.
3. Тищенко Л.Н. Колебания неоднородного зернового потока на виброрешётках / Л.Н. Тищенко, В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вібрації в техніці та технологіях, – 2010, №4(60). – С. 138-143.
4. Ольшанский В.П. О колебаниях скорости движения неоднородного виброожиженного слоя зерна на плоском решете / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Механіка та

машинобудування. – 2010. – №1. – С. 12-19.

5. Абрамовиц А. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832с.

6. Носова Л.Н. Таблицы функций Томсона и их первых производных / Л.Н. Носова – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 423с.

## **Анотація**

### **ПРО КОЛИВАННЯ ГРАДІЄНТА ШВИДКОСТІ В НЕОДНОРІДНОМУ ШАРІ ЗЕРНА НА ВІБРОРЕШЕТІ**

*Виведено формулу для обчислення градієнта швидкості в неоднорідному шарі вібророзрідженої зернової суміші, коли зміна ефективної в'язкості по товщині шару описується експоненціальною функцією. Чисельно проаналізовано вплив різних параметрів моделі на величину градієнта швидкості в усталеному режимі руху суміші по плоскому нахиленому решету, яке здійснює поздовжні гармонічні коливання.*

## **Abstract**

### **ON THE OSCILLATIONS OF THE VELOCITY GRADIENT IN THE INHOMOGENEOUS LAYER OF A GRAIN ON THE VIBROSIEVE**

*The formula for calculating of the velocity gradient in the inhomogeneous layer of vibroliquefaction grain mixture, where the change in the effective velocity of the layer thickness is described by an exponential function. Numerically analyzed the influence of various model parameters on the magnitude of the velocity gradient in the steady motion of the mixture on a flat inclined sieve which commits the longitudinal harmonic vibrations*