МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Частина 2

Методичні вказівки для організації самостійної роботи
та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами
денної форми навчання за спеціальностями:
051 «Економіка», 292 «Міжнародні економічні відносини»,
075 «Маркетинг», 071 «Облік і оподаткування»,
072 «Фінанси, банківська справа та страхування»

Харків
ХДУХТ
2018

Вища та прикладна математика. Частина 2 [Електронний ресурс] : методичні вказівки для організації самостійної роботи та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами денної форми навчання за спеціальностями 051 «Економіка», 292 «Міжнародні економічні відносини», 075 «Маркетинг», 071 «Облік і оподаткування», 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» / укл.: М. С. Софронова, В. І. Симоненко – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладачі: М. С. Софронова, В. І. Симоненко

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Д. О. Торяник

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено науково-методичною комісією економічного факультету

Протокол від 21 червня 2017 року № 5

Схвалено вченою радою ХДУХТ

Протокол від 28 грудня 2017 року № 6

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ

Протокол від 27 грудня 2017 року № 7

ВСТУП

Однією з основних задач методичної розробки є забезпечення студентів денної форми навчання учбовою літературою з деяких питань дисципліни «Вища та прикладна математики» в обсязі згідно з учбовими програмами.

Основні розділи, що включені до методичних вказівок, наступні:

1. Елементи комбінаторики.
1. Елементи теорії ймовірностей.
2. Елементи математичної статистики.

Теорія ймовірностей та математична статистика має велике значення в підготовці фахівців високого класу, бо широко використовується при вивчені курсів математичного моделювання, організації роботи різних галузей народного господарства тощо.

В той же час розуміння та засвоєння теорії ймовірностей та математичної статистики викликає певні труднощі, пов’язані з деякими новими, незвичними поняттями та особливим тлумаченням, тому для успішного засвоєння матеріалу необхідні сумлінне та наполегливе відношення до вивчення.

Теорія ймовірностей не відмежовується від інших наук, зокрема економіки. Сьогодні не можна уявити собі дослідження і прогнозування економічних явищ без використання методів теорії ймовірностей. Виявлення випадковості в економіці треба розглядати як відхилення від сформованого потоку подій як в позитивний бік (нові наукові відкриття, технології, нові методи управління виробництвом тощо), так і негативний (стихійні лиха, хвороби робітників та інше), що згодом приводить до суттєвих змін самого розвитку подій.

В розробці викладені основні поняття теорії ймовірностей, математичної статистики, деякі питання комбінаторики, що потрібні для розуміння курсу. Крім того запропоновані індивідуальні завдання. Самостійне рішення пропонованих задач буде сприяти успішному засвоєнню змісту матеріалу, крім того, в додатку наведені необхідні таблиці.

1. Основні теоретичні поняття

1.1. Елементи комбінаторики

У багатьох галузях людської діяльності доводиться зустрічатись з задачами, де треба знайти число способів, якими можна здійснити деякий вибір. Рішення задач, з яких вивчаються питання про те, скількома способами при виконанні тих чи інших умов можна зробити вибір із заданої кількості об'єктів, розглядаються в розділі математики, що називається комбінаторикою.

Комбінаторика виникла в XVII столітті. Теоретичні дослідження в цій галузі були розпочаті в XVII столітті вченими Б. Паскалем та П. Ферма, а потім Я. Бернуллі, Лейбницем та Л. Ейлером.

В справжню математичну науку комбінаторика перетворилась лише в наш час. Підвищення інтересу до комбінаторики викликано бурхливим розвитком обчислювальної техніки і пов'язаним із ним загальним розвитком дискретної математики. Багато задач теорії ймовірностей розв'язуються за допомогою комбінаторики. Наприклад, транспортна задача, формування плану виробництва та реалізації тощо.

Введемо позначення та основні поняття. Множини об'єктів позначатимемо великими латинськими літерами: A, B, C,... . Їх елементи малими: a, b, c,... .

Сумою або об'єднанням двох множин називається нова множина, що складається з тих і лише тих елементів, котрі належать бодай одній із подаваних множин. Суму множин A та B позначають $A + B$, або $A \cup B$. Якщо деякі елементи входять як до A ,так і до B, то в суму вони входять лише один раз. Наприклад, якщо розглядати множину A різних літер виразу «*тихесенько вітер віє»* (13 літер), а множину B – «*степи, лани мріють*» (14 літер), то сумою їх буде множина літер: *т, и, х, е, с, н, к, о, в, і, р, є, п, л, а, м, ю, ь* (18 літер).

Множина, до якої входять лише спільні елементи кількох множин, називається перерізом цих множин. Так перерізом множин A та B у щойно наведеному прикладі буде множина літер: *т, и, е, с, п, р, ь, і*.

Переріз множин будемо позначати AB, або $A \cap B$. Якщо множини не мають спільних елементів, то їх переріз є множина, що записується так: $A \cap B = \varnothing$. Значне число теорем й формул комбінаторики ґрунтується на двох елементарних правилах, які називаються правилами суми та добутку.

Загальні правила суми (об'єднання) та добутку (перерізу) множин дають можливість розв'язувати задачі вибору різних типів. Але деякі типи задач комбінаторики зустрічаються набагато частіше й тому доцільніше використовувати готові формули обчислення кількості сполучень елементів із множин. Таким сполученням дають особисті назви: розміщення, перестановки та сполуки в залежності від їх властивостей.

1.2. Основні формули комбінаторики. Розміщення, перестановки, сполуки

Ми будемо розглядати множини, що мають скінчену кількість елементів n, та виконувати розрахунок кількості можливого вибору по k елементів із елементів множини $(k \le n)$.

Перестановками називають комбінації, які складаються з одних і тих же елементів і відрізняються тільки порядком їх розміщення.

Число всіх можливих перестановок з n елементів

$$P_n = n!, n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n. \qquad (1.1)$$

Вважається за означенням, що 0! = 1, 1! = 1.

Наприклад: скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 3, 4, 7, 9, якщо кожна цифра входить в число тільки один раз?

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Розміщеннями називаються комбінації, складені із n різних елементів по k елементів, які відрізняються або самими елементами, або їх порядком. Число розміщень A_n^k визначаємо за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1),$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.2)$$

Наприклад, скільки сигналів можна скласти із восьми різнокольорових прапорців, взятих по два?

$$A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = 56.$$

Сполуками називаються комбінації, складені з n різних елементів, по k елементів, які відрізняються хоча б одним елементом.

Число сполук C_n^k, рівне

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.3)$$

Справедлива рівність

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Наприклад: скількома способами можна вибрати 3 деталі із ящика, який містить 8 деталей?

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28.$$

Підкреслимо , що перестановки, розміщення і сполуки зв'язані рівністю

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k.$$

При розв'язуванні задач комбінаторики використовуються правила.

Правило суми: якщо деякий об'єкт A може бути вибраний із сукупності об'єктів n способами, а другий об'єкт B із цієї ж сукупності k способами, то вибрати або A, або B можна $n+k$ способами.

Правило добутку: якщо об'єкт A можна вибрати із сукупності об'єктів n способами і після кожного такого вибору об'єкт B можна вибрати k способами, то пара об'єктів (A,B) у вказаному порядку може бути вибрана $n \cdot k$ способами.

2. Предмет теорії ймовірностей. Випадкові події та ймовірності

Теорія ймовірностей – це розділ математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ, подій. **Випадкова подія** – це подія, яка може настати або не настати в результаті деякого експерименту, що відбувається за одних і тих же умов, результат якого наперед не можна точно передбачити.

Неможливість передбачати не означає, звичайно, відсутності причинного зв'язку між умовами експерименту й кінцевим результатом.

Теорія ймовірностей вивчає закономірності, що властиві масовим випадковим явищам або подіям, що, принаймні в принципі, дозволяють експериментальну перевірку в однакових умовах нескінчене число разів.

Випробування

Під випробуванням в теорії ймовірностей розуміють експеримент, що може бути повторений нескінчене число разів за одних і тих же обставин. Ці постійні обставини, взагалі кажучи, не забезпечують всі умови, що впливають на результат випробування.

Приклад. В урні лежить m білих та n чорних куль. Випробування полягає в тому, що навмання беруть одну кулю. Задані умови: певна кількість куль за кольорами і вибір навмання. Очевидно, що таке випробування можна виконувати безліч разів, якщо вийняту кулю повертати, але колір вийнятої кулі не можна передбачити, він буде різним – або білий, або чорний.

Випадкові події

Як відмічалося раніше, в теорії ймовірностей ми розглядаємо такі випробування, в яких результат буде випадковим. Кожен із можливих результатів називають випадковою подією. Одним із основних понять теорії ймовірностей являється множина всіх можливих випадкових подій випробування.

Кожну можливу випадкову подію досліджуваного випробування назвемо елементарною подією й позначимо літерою ω.

Означення. Множину всіх можливих подій, що можуть з'явитися при даному випробуванні, будемо розглядати як простір елементарних подій і позначати Ω .

Будь-яка множина елементарних подій із простору Ω називається випадковою подією.

3. Алгебра випадкових подій

Розглянемо різні дії над випадковими подіями, що належить одному і тому ж простору елементарних подій Ω.

Означення. Подія B називається наслідком події A, що записують як $A \in B$, якщо при кожному випробуванні при настанні події A, настає також подія B. В цьому випадку всі елементарні події, що входять в подію A, входять також в подію B. При цьому необхідно мати на увазі, що подія B може настати не лише при настанні події A.

Означення. Події A та B називаються еквівалентними, або рівносильними, що записують $A = B$, якщо подія B є наслідок події A, а подія A є наслідок події B. В такому випадку події A та B складаються з одних і тих же елементарних подій.

Означення. Подія, що настає тоді і тільки тоді, коли не настає подія A, називається подією протилежною A. Подія протилежна A, позначається $\overline{A}$.

Таким чином подія $\overline{A}$ – це сукупність всіх тих елементарних подій простору Ω, котрі не включені до A. Якщо вірогідна подія Ω, то протилежною їй подією є неможлива подія $\overline{\Omega}$.

Приклад. Стрілець робить три постріли по цілі. Якщо подія A – три промахи, то протилежна подія $\overline{A}$ – хоч би одне влучення.

Означення. Сумою або об'єднанням подій $A_1, A_2, ..., A_n$ називається подія $B = \sum_{i=1}^{n} A_i$, поява якої ототожнюється з появою хоч би однієї з подій A_i $(i = 1,2,..., k)$, або кількох із них. Позначається ($A_1 + A_2$).

Приклад. Стрілець робить три постріли по цілі. Нехай подія A_i – влучення в ціль при i-ому пострілі, а подія B – хоч би одне влучення в ціль. Тоді $B = A_1 + A_2 + A_3$.

Означення. Добутком події $A_1, A_2, ..., A_n$ називається подія $B = A_1.A_2. ... A_n$, поява якої – це одночасна поява всіх подій A_i $(i = 1,2,...,n)$ (суміщення подій).Позначається $A_1 \cdot A_2 \cdots A_i$

Приклад. Стрілець робить три постріли по цілі. Нехай подія A – влучення в ціль при *i*-ому пострілі (*i* = 1, 2, 3), а B – три влучення в ціль, тоді $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Означення. Дві події *A* та *B* називаються несумісні, якщо вони не можуть з'явитися одночасно в одному й тому ж випробуванні. Несумісні події не мають загальних елементарних подій, а їх добуток – подія неможлива.

$$A \cdot B = \overline{\Omega},$$

Приклад. Робиться постріл по цілі. Нехай подія A – влучення в ціль, а *B* – промах. Ці події несумісні.

$$A \cdot B = \overline{\Omega}.$$

Різниця подій. Випадкова подія, яка полягає в тому що подія A відбулася, а подія B не відбулася, називається різницею подій і позначається $A - B$.

Означення. Події $A_1, A_2, ..., A_n$ утворюють повну групу подій, якщо виконуються дві умови:

1) Сума названих подій – вірогідна подія:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega;$$

2) Названі події попарно несумісні.

Виконання цих умов означає, що в результаті випробування обов'язково з'явиться одна й лише одна з подій $A_1, A_2, ..., A_n$.

4. Класичне означення ймовірності. Частота

Розглянемо множину елементарних подій (елементарних наслідків). Припустимо, що ці події задовольняють умови:

1) вони попарно несумісні;
2) вони утворюють повну групу подій;
3) вони рівноможливі.

Згідно з означенням кожній можливій випадковій події *A*, що належить простору елементарних подій *Ω*, відповідає число $P(A)$, що називається ймовірністю події A. **Ймовірність** – це кількісна оцінка можливості появи події A.

Означення. Ймовірністю деякої випадкової події A називається відношення m – числа наслідків, які сприяють цій події до загального числа n – рівноможливих попарно несумісних в даному випробуванню наслідків, які утворюють повну групу. Отже

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{4.1}$$

Приклад. Підкидається гральна кістка. Обчислити ймовірність того, що випаде шість очок. Нехай подія A – випаде шість очок. Наслідок, який сприяє події A – один, усього рівноможливих наслідків – шість, тобто $m = 1$, $n = 6$ тоді

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}.$$

Для того, щоб поняття ймовірності мало корисне для практики значення, воно мусить мати доцільно вибрані властивості. Ці властивості визначаються аксіомами, властивостями теорії ймовірностей, що відображають, ідеалізуючи, деякі особливості реальної дійсності.

При формулюванні аксіом теорії ймовірностей ми розглядаємо простір всіх можливих подій, що можуть наступити при проведені експерименту з випадковими наслідками.

Аксіома 1. Для всякої випадкової події A ймовірність її появи $P(A)$є додатнє число, яке задовольняє умові:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Аксіома 2 (умова нормування). Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці:

$$P(\Omega) = 1.$$

Аксіома 3 (правило додавання ймовірностей). Якщо випадкові події $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несумісні, то ймовірність появи однієї із цих подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + ... A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

<u>Наслідки з аксіом</u>.

Наслідок 1. Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ складають повну групу несумісних подій, то сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Наслідок 2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулеві.

Наслідок 3. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці.

$$P(A)+P(\overline{A})=1. \qquad (4.2)$$

Відмітимо, що з теоретичної точки зору, вибір числової величини ймовірності для кожної конкретної випадкової події з даного простору подій Ω, не має значення. Але для практичної цінності результатів, одержаних за допомогою теорії ймовірностей, цей вибір має основне значення.

Означення. Відносною частотою появи події A в даній серії називається відношення числа її появи M до числа N випробувань в серії.

Відносна частота поряд з ймовірністю належать до основного поняття теорії ймовірностей.

Позначимо частоту події A через $P^*(A)$, тоді

$$P^*(A)=\frac{M}{N}. \qquad (4.3)$$

Властивості частоти

1. Для будь-якої події A та будь-якої серії випробувань

$$0\le P^*(A)\le 1, \text{ тому що } 0\le M\le N.$$

2. Частота вірогідної події дорівнює одиниці

$$P^*(\Omega)=1.$$

3. Якщо події A та B несумісні, то

$$P^*(A+B)=P^*(A)+P^*(B).$$

Частота $P^*(A)$ є кількісною характеристикою випадкової події A в даній конкретній серії випробувань, але вона не може бути характеристикою появи самої дії A взагалі, тому що частота змінюється від серії до серії випробувань.

Властивості стійкості частоти і є основою при введені головного поняття теорії ймовірностей – поняття ймовірності. Ймовірність випадкової події відповідає в ідеалізованому виді тій границі, до якої прямує частота події, якщо кількість випробувань зростає необмежено.

5. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Сумою $A + B$ двох подій A і B називають подія, яка складається з появи події A або події B, або обох цих подій. Якщо ці події несумісні та $A + B$ – подія, яка складається з появи однієї з цих подій, байдуже якої.

Означення. Ймовірність появи однієї з двох несумісних подій, байдуже якої, дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{5.1}$$

Приклад. В урні 30 куль: 10 червоних, 5 синіх та 15 білих. Знайти ймовірність появи кольорової кулі.

Розв'язання: Поява кольорової кулі означає появу або червоної, або синьої кулі

Подія A – поява червоної кулі, тоді $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

Подія B – поява синьої кулі, тоді $P(B)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Події A та B – не сумісні, тому шукана ймовірність

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Означення. Дві події називають сумісними, якщо поява одного з них не виключає появу другої в одному і тому ж випробуванні.

Означення. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірності цих подій без ймовірності їх сумісної появи

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{5.2}$$

6. Умовна ймовірність. Правило добутку ймовірностей. Незалежні події

У практичному використанні теорії ймовірностей виникає необхідність розглядати події в їх взаємозв'язку. Характеристикою залежності між випадковими подіями A та B є так звана умовна ймовірність події A при умові, що подія B мала місце, котра позначається як $P_B(A)$

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B)>0. \tag{6.1}$$

Коли умовну ймовірність можна визначити по умові задачі, формулу (6.1) використовують для обчислення ймовірності суміщення подій.

Означення. Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність події B, яка обчислена в припущенні, що подія A вже відбулася. Подія B – залежна від події A, коли ймовірність події залежить від появи, або непояви події B.

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{6.2}$$

Добутком двох подій A та B називають подію AB, яка складається у сумісній появі (суміщення) цих подій.

Приклад. Якщо A – виріб придатний, B – вибір фарбований, то $A \cdot B$ – вибір придатний і фарбований.

Отже правило добутку ймовірностей залежних подій: ймовірність суміщення двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої за умови, що перша подія відбулась.

Приклад. В урні є 5 білих та 7 чорних куль. Із урни навмання виймають одну за однією 3 кулі, не повертаючи вийняту кулю в урну (вибірка без повернення).

Обчислити ймовірність події, що всі вийняті кулі будуть білі.

Нехай подія A – перша куля біла, подія B – друга куля біла, подія C – третя куля біла. Тоді суміщення цих подій $A \cdot B \cdot C$ – всі кулі білі.

Обчислимо ймовірність події A і B, що перші дві кулі білі. Згідно з (6.2) маємо:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11}.$$

Згідно (6.2) ймовірність події $A \cdot B \cdot C$ обчислюється так:

$$P(A \cdot B \cdot C) = P(A \cdot B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Поняття умовної ймовірності тісно пов’язане з дуже важливим питанням теорії ймовірностей – незалежністю випадкових подій.

Означення. Випадкові події A та B називаються незалежними, якщо поява однієї з них не змінює ймовірність появи другої.

При рішенні практичних задач незалежність випадкових подій визначається шляхом інтуїтивних міркувань.

Ймовірність суміщення незалежних подій дорівнює добутку їх ймовірностей:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{6.3}$$

Приклад. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність попадання для першого 0,7, а для другого 0,9. Знайти ймовірність події, що обидва влучать у ціль.

Розглянемо події, ймовірність яких така:
A – перший стрілець влучив в ціль, B – другий стрілець влучив. Тоді суміщення подій – обидва влучили в ціль. А так, як події A та B незалежні, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63.$$

7. Формула повної ймовірності. Ймовірність гіпотез (формула Байєса)

Нехай подія A може наступити, коли настає одна з подій (гіпотез) H_1, $H_2,...,H_n$, які в сукупності становлять повну групу попарно несумісних подій. Нехай відомі ймовірності $P(H_i)$ кожної з випадкових подій $H_i(i=1,2,...,n)$ та умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$ події A, якщо буде мати місце подія $H_i(i=1,2,...,n)$. Тоді ймовірність $P(A)$ події A визначається згідно з так званою формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \tag{7.1}$$

Із формулою повної ймовірності тісно пов'язана формула Байєса. Якщо до події ймовірності гіпотез були $P(H_1), P(H_2)...P(H_n)$, а в результаті експерименту відбулась подія A, то з урахуванням цієї події, «нові», тобто умовні ймовірності гіпотез, обчислюються за формулою Байєса

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{Hi}(A)}{P(A)}, \tag{7.2}$$

де $P(A)$ обчислюється за формулою повної ймовірності (7.1).

Події H_i називають *гіпотезами*, ймовірності $P(H_i)$ називають *апріорними* (ймовірності до випробування). Ймовірності $P_A(H_i)$ називають *апостеріорними* (ймовірності після випробування).

Приклад. Продукція перевіряється на стандарт двома товарознавцями. Ймовірність того, що аналіз буде виконувати перший товарознавець дорівнює 0,55, а другий – 0,45. Ймовірність того, що продукція буде визнана стандартною, для першого товарознавця дорівнює 0,9, для другого – 0,98. Продукція була визнана стандартною. Знайти ймовірність того, що аналіз проводив другий товарознавець.

Гіпотеза H_1 – аналізує перший товарознавець, її ймовірність дорівнює 0,55. Гіпотеза H_2 – аналізує другий товарознавець, її ймовірність – 0,45. Подія

A – продукція визначена стандартною, умовні ймовірності цієї події при роботі кожного товарознавця згідно з умовою, відповідно, дорівнює $P_{H_1}(A)=0{,}9$ та $P_{H_2}(A)=0{,}98$. Ймовірність $P_A(H_2)$, що аналіз робив другий товарознавець обчислимо за формулою (7.2):

$$P_A(H_2)=\frac{0{,}45\cdot 0{,}98}{0{,}55\cdot 0{,}9+0{,}45\cdot 0{,}98}=\frac{49}{104}\approx 0{,}47\,.$$

8. Послідовні незалежні випробування Бернуллі (формула Бернуллі)

Нехай відбуваються послідовні випробування, при кожному з яких може настати або не настати певна подія A, тобто простір елементарних подій одного випробування представлений подією A та їй протилежною $\overline{A}$.

Ймовірність події A при кожному випробуванні одна й та сама і дорівнює $P(0\le p\le 1)$. Якщо ймовірність події A в кожному випробуванні не залежить від результату інших випробувань, то такі випробування називаються незалежними відносно події A, або випробуваннями Бернуллі. Оскільки при кожному випробуванні ймовірність настання події A дорівнює p, а ймовірність не настання A дорівнює $(1-p)=q$, то ймовірність того, що при n випробуваннях подія A наступить рівно k разів, обчислюється за формулою Бернуллі

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\,. \tag{8.1}$$

Цю формулу називають біномною формулою, оскільки права частина цієї формули є загальним членом розкладу бінома Ньютона.

Досліджуючи ймовірність k успіхів $P_n(k)$ в n випробуваннях, як функцію від k $(k=0,1,2,...,n)$, знайдемо, що величина $P_n(k)$ в залежності від k при незмінному n спочатку зростає до певного максимуму, а потім спадає.

Отже, $P_n(k)$ досягає найбільшого значення при $k=k_0$, де k_0 – *найімовірніше число* успіхів при n випробуваннях, або *найімовірнішому числу* успіхів k_0 задовольняє нерівність

$$np-q\le k_0<np+p\,. \tag{8.2}$$

Якщо $np-q$ – неціле, то є одне таке значення k_0, якщо $np-q$ – ціле, то таких значень два.

Існують різні наближені формули, за якими можна обчислювати біномні ймовірності $P_n(k)$ при великих n.

Наближена формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ якщо } p \le 0{,}1. \qquad (8.3)$$

де $\lambda = np \le 10$. Формула табульована (табл. А.1, додаток А).

Якщо $p > 0{,}1$, при великому числі випробувань, то використовується *формула Муавра-Лапласа (локальна)*.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (8.4)$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – табульована функція (табл. А. 2).

Для практичних застосувань можна записати *інтегральну теорему Муавра-Лапласа* у вигляді наближеної рівності:

$$\begin{gathered} P(k_1 < k < k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \\ x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \end{gathered} \qquad (8.5)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа, для якої складено таблиці (табл. А.4). Деякі властивості функції Лапласа $\Phi(x)$:

1) функція $\Phi(x)$ непарна;
2) $\Phi(0) = 0$;
3) $\Phi(x)$ – зростаюча функція;
4) $\Phi(+\infty) = \frac{1}{2}$.

9. Випадкові величини (ВВ). Функція розподілу

В теорії ймовірностей поряд з випадковими подіями розглядають випадкові величини. Нехай $\Omega = \{\omega\}$ – простір випадкових подій.

Означення. Числова величина X називається випадковою величиною, якщо кожній випадковій події ω із даного простору Ω ставиться у відповідність деяке значення величини X і якщо для любого дійсного x визначена ймовірність $P(X < x) = F(x)$. Ця ймовірність називається функцією розподілу випадкової величини X.

Таким чином, випадкова величина X – це є числова функція $f(\omega)$ випадкових елементарних подій. При появі випадкової події ω_i випадкова величина набуває значення $f(\omega_i)$.

Приклад. Нехай виконується одноразове кидання монети. Простір Ω складається з двох подій: появи ціни і появи герба.

Таким чином, випадкова величина X – кількість випадання гербів при разовому киданні монети, внаслідок випробування – може прийняти одне із двох значень: 0 або 1, наперед невідомо, яке саме.

Означення. Функцією, або законом розподілу, випадкової величини називають опис зв'язку (аналітичний, графічний або табличний) між можливими значеннями випадкової величини і відповідними їм ймовірностями.

Про випадкову величину говорять, що вона підпорядкована заданому закону розподілу. Розглянемо описи законів розподілу.

9.1. Дискретні випадкові величини (ДВВ)

Означення. Дискретною називають випадкову величину, яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з визначеними ймовірностями. Всі її можливі значення можна перенумерувати.

Щоб задати закон розподілу дискретної величини, необхідно для кожного з можливих значень випадкової величини X задати ймовірність набування цього значення у вигляді таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Події $X = x_1$; $X = x_2$; $X = x_3,...,$ $X = x_n$ складають повну групу подій, тому сума ймовірностей цих подій дорівнює 1, тобто:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Приклад. Розглянемо серію з n незалежних випробувань при умові, що в кожному випробуванні може настати з ймовірністю p або подія A, або їй протилежна з ймовірністю $q = 1 - p$. Як раніше відмічалось, це схема незалежних випробувань Бернуллі. Кількість випадків, коли настане подія A, в серії з n випробувань, є випадковою величиною, підпорядкованою закону розподілу згідно з таблицею 9.2.

Таблиця 9.2

X	0	1	2	…	k	…	n
$P(x)$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

9.2. Неперервні випадкові величини (НВВ)

Означення. Неперервною називають випадкову величину X, якщо її можливі значення суцільно заповнюють деякий скінчений інтервал, або всю числову вісь.

Так як можливі значення неперервної випадкової величини суцільно заповнюють деякий інтервал, то й функцію розподілу треба вводити так, щоб вона була суцільно розподілена на тому ж інтервалі можливих значень.

Означення. Функцією розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X називають ймовірність події, що випадкова величина прийме значення, менше деякого числа x.

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{x_i < x} p_i \ . \qquad (9.1)$$

Приклад. Нехай випадкова величина X – це кількість появи гербів при одноразовому киданні монет. В цьому прикладі випадкова величина X дискретна, можливі її значення $x_1 = 0$ або $x_2 = 1$, а ймовірність появи герба відповідно $P_1(x_1) = \frac{1}{2}$; $P_2(x_2) = \frac{1}{2}$, тоді закон розподілу

X	0	1
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Згідно з означенням (9.1) запишемо для цього прикладу функцію розподілу та побудуємо її графік.

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Дійсно, в результаті випробування випадкова величина X може прийняти одно з двох значень: 0 або 1.

Якщо $x < 0$, то подія $(X < x)$ означає, що випадкова величина прийме від'ємне значення.

Така подія неможлива, тому $P(X < x) = 0$.

Якщо $0 \le x \le 1$, то подія $(X < x)$ означає, що випадкова величина X прийме значення, що дорівнює нулеві. Отже,

$$P(X < x) = P(x_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Нарешті, коли $x > 1$, то подія $(X < x) = (x_1 = 0) + (x_2 = 1)$ вірогідна, і тому $P(X < x) = P(x_1 = 0) + P(x_2 = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Необхідно звернути увагу на те, що функція розподілу розглянутої дискретної величини має такі властивості:
1) кусково-постійна;
2) її точки розриву збігаються з можливими значеннями випадкової величини;
3) величина стрибка дорівнює ймовірності відповідного значення.

Графік функції розподілу $F(x)$ розглянутої випадкової величини наведений на рисунку 9.1.

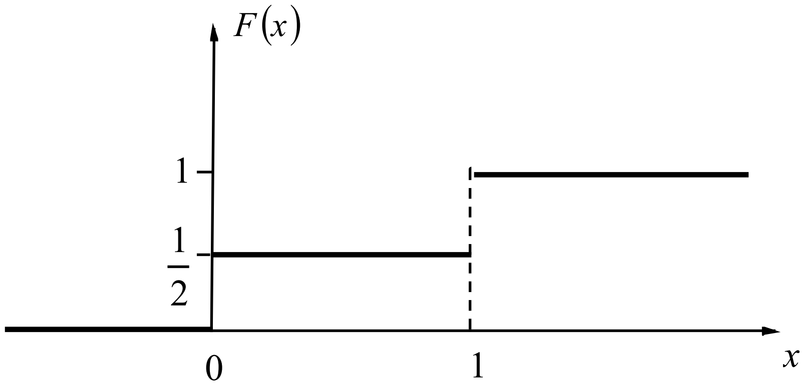

Рис. 9.1. Графік функції розподілу $F(x)$

Випадкову величину будемо називати неперервною, якщо її інтегральна функція розподілу $F(x)$ неперервно диференційована і має вигляд.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{9.2}$$

Нехай X – випадкова величина (дискретна чи неперервна). Визначимо ймовірність події, що значення цієї величини попаде в проміжок $(x_1;x_2)$. Згідно з правилом додавання ймовірностей (аксіома 3) маємо:

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 < X < x_2).$$

Отже, ймовірність попадання випадкової величини в проміжок $(x_1;x_2)$ дорівнює приросту функції розподілу на цьому проміжку:

$$P(x_1 < X < x_2) = P(X < x_2) - P(X < x_1) = F(x_2) - F(x_1). \tag{9.3}$$

В загальному випадку, як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин, функція розподілу $F(x)$ (9.1,9.2) має такі властивості:
1) $0 \le F(x) \le 1$;
2) функція розподілу неспадна.
$F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$ або $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < X < x_2)$.

Ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу $(a;\ b)$, дорівнює приросту інтегральної функції.

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a). \qquad (9.4)$$

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$, якщо BB $x \in (-\infty; +\infty)$,
4) $F(x) = 0$, коли $x \le a$; $F(x) = 1$, коли $x \ge b$ якщо BB $x \in (a;\ b)$.

9.3. Функція щільності

При розв'язанні багатьох задач, пов'язаних із неперервними випадковими величинами зручно розглядати диференційну функцію, що характеризує щільність ймовірності в точці.

Означення. Диференційною функцією розподілу (щільність ймовірностей) називають першу похідну від інтегральної функції розподілу, тобто

$$f(x) = F'(x). \qquad (9.5)$$

Ця диференційна функція застосовується тільки для неперервних ВВ.

При відомій функції щільності випадкової величини ймовірність події, що випадкова величина прийме значення з проміжку $[x_1, x_2]$, обчислюється так:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \qquad (9.6)$$

Властивості функції щільності

1) Значення функції щільності не можуть бути від'ємними:

$$f(x) \ge 0.$$

2) Невласний інтеграл від функції щільності по всій числовій прямій дорівнює 1:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (9.7)$$

Якщо всі ймовірні значення випадкової величини X належать інтервалу (a, b), тоді

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = 1.$$

3) Ймовірність попадання неперервної випадкової величини в заданий інтервал (9.4; 9.6) становить

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (9.8)$$

Означення. Випадкова величина називається рівномірно розподіленою в проміжку (a, b), якщо її функції щільності ймовірності має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a} \quad при \quad a < x \le b, \\ 0 \quad при \quad x > b. \end{cases} \qquad (9.10)$$

При рішенні широкого кола задач використовують так званий нормальний закон розподілу (розподіл за законом Гаусса).

Означення. Випадкова величина називається розподіленою по нормальному закону, якщо функція щільності для неї має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (9.11)$$

a та σ – постійні величини, які розглянемо далі.

Ймовірність того, що X прийме значення, яке належить інтервалу (α, β), дорівнює

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (9.12)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання менше невід'ємного числа δ дорівнює

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Якщо $a = 0$, справедлива рівність $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

10. Числові характеристики випадкових величин

Означення. Математичним сподіванням (або середнім значенням) випадкової величини X називають число, яке визначається в залежності від типа випадкової величини X формулами

$$M(X)=\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k & \text{якщо } X - \text{дискретна} BB,\\ \int\limits_a^b xf(x)dx & \text{якщо } X - \text{неперервна} BB \quad \text{на} \quad a<x<b.\end{cases} \qquad (10.1)$$

Обчислимо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини з нормальним законом розподілу (9.9, 9.11). Математичне сподівання цієї випадкової величини обчислюється за формулою

$$M(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (10.2)$$

Виконавши необхідні математичні перетворення, остаточно дістанемо $M(X)=a$.

Таким чином, параметр a в нормальному законі – це є математичне сподівання.

Означення. Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини від її математичного сподівання $M(X)$. Це невід’ємне число, яке визначається формулою

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=\begin{cases}\sum\limits_{k-1}^{\infty}[x_k-M(X)]^2\cdot p_k, \text{ якщо} \quad X-ДВВ,\\ \int\limits_a^b[x-M(X)]^2 f(x)dx, \text{ якщо} \quad X-НВВ.\end{cases} \qquad (10.3)$$

Краще застосувати розрахункові формули

$$D(X)=\begin{cases}M\left(X^2\right)-[M(X)]^2, \text{ якщо} \quad X-ДВВ,\\ \int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2, \text{ якщо} \quad X-НВВ.\end{cases} \qquad (10.4)$$

Дисперсію нормально розподіленої випадкової величини X обчислимо за формулою:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2 f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx. \qquad (10.5)$$

Виконавши необхідні перетворення, маємо

$$D(X) = \sigma^2 . \tag{10.6}$$

Таким чином, σ^2 є дисперсією, а σ – середнім квадратичним відхиленням випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.

Нев'ємне число $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ називається середнім квадратичним відхиленням і визначається також, як для дискретної так і для неперервної величини.

Властивості $M(X)$:

1. $M(C) = C$.
2. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.
3. $M(XY) = M(X)M(Y)$.
4. $M(CX) = CM(X)$.

Властивості $D(X)$:

1. $D(C) = 0$.
2. $D(CX) = C^2 D(X)$.
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
4. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

(X і Y – незалежні ВВ).

11. Елементи математичної статистики. Основні задачі математичної статистики

Задача математичної статистики складається в створенні методів збору та обробки статистичних даних для отримання научних та практичних висновків.

Для типових задач математичної статистики відносяться: задача визначення закону розподілу випадкової величини (або системи випадкових величин) за статистичними даними; задача перевірки правдоподібності гіпотез; задача знаходження невідомих параметрів розподілу.

Нехай треба вивчити сукупність однорідних об'єктів відносно деякого якісного і кількісного признаку, які характеризують ці об'єкти. Якщо є партія деталей, то якісним признаком може служити стандартність деталі, а кількісним – контрольований розмір деталі.

Статистичний розподіл вибірки

Нехай з генеральної сукупності добута вибірка, причому x_1 спостерігалось n_1 разів, $x_2 - n_2$ разів, $x_n - n_k$ разів і дорівнює об'єму вибірки сума всіх частот $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Спостережливі значення x_i називають варіантами, а послідовність варіант, записаних в зростаючому порядку – варіаційним рядом. Числа спостережень називають частотами, а їх відношення до об'єму вибірки $\frac{n_i}{n} = W_i$ відносними частотами.

Статичним розподілом вибірки називають перелік варіант x_i варіаційного ряду та відповідних їм частот n_i або відносних частот w_i. Під розподілом в математичний статистиці розуміють – відповідність між спостереженими варіантами та їх частотами, або відносними частотами.

Емпірична функція розподілу , її властивості

Нехай відомий статистичний розподіл деякої ознаки X.

Означення. Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

За означенням

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – число варіант, менших x,

n – об'єм вибірки.

Одним із методів обробки простого статистичного ряду є побудова статистичної функції розподілу випадкової величини.

Статистична функція розподілу будь-якої BB (дискретної або неперервної) неперервна статистична функція, скачки якої відповідають спостережуваним значенням BB і рівні за величиною статистичним ймовірностям (відносним частотам) цих значень. При збільшенні n статистична функція розподілу $F^*(x)$ збігається за ймовірністю до функції розподілу $F(x)$.

$F(x)$ – інтегральна функція розподілу генеральної сукупності, яку називають теоретичною функцією розподілу. При $n \to \infty$ вона визначає ймовірність події $X < x$, а не відносну частоту цієї події, тобто $F(X) = P(X < x)$.

Як бачимо $F^*(x)$ і $F(x)$ мало різняться одна від одної. Тому емпіричну функцію розподілу вибірки краще використовувати для наближеного представлення теоретичної (інтегральної) функції розподілу генеральної сукупності.

Емпірична функція $F^*(x)$ має ті ж властивості що і $F(x)$

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ – неспадна функція;

3) Якщо x_1 найменша варіанта, а x_k найбільша варіанта, то

$$F^*(x) = 0, \text{ при } x \le x_1,$$
$$F^*(x) = 1, \text{ при } x > x_k.$$

Приклад. Задано розподіл частот вибірки об'єма, що дорівнює 20:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написати розподіл відносних частот.

Розв'язання. Знайдемо відносні частоти, для чого розділимо частоти на об'єм вибірки

$$w_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \quad w_2 = \frac{10}{20} = 0{,}5; \quad w_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Запишемо розподіл відносних частот:

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,5	0,35

Перевірка: $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

Приклад. Знайти емпіричну функцію по заданому розподілу вибірки

варіанти	x_i	2	6	10
частоти	n_i	12	18	30

Розв'язок. Знайдемо об'єм вибірки $n = 12 + 18 + 30 = 60$. Найменша варіанта дорівнює 2, тому $F^*(x) = 0$ при $x \le 2$.

Значення $X < 6$, тобто $x_1 = 2$ спостерігалось 12 разів, тому $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2$ при $2 < x \le 6$.

Значення $X < 10$, тобто $x_1 = 2$ та $x_2 = 6$ спостерігалось 12 + 18 = 30 разів; внаслідок цього

$$F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5 \quad \text{при } 6 < x \le 10,$$

тому що $x = 10$ – найбільша варіанта, то

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 10.$$

Емпірична функція звідси:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2, \\ 0{,}2 & 2 < x \le 6, \\ 0{,}5 & 6 < x \le 10, \\ 1 & x > 10. \end{cases}$$

Графік цієї функції наведено на рис. 11.1.

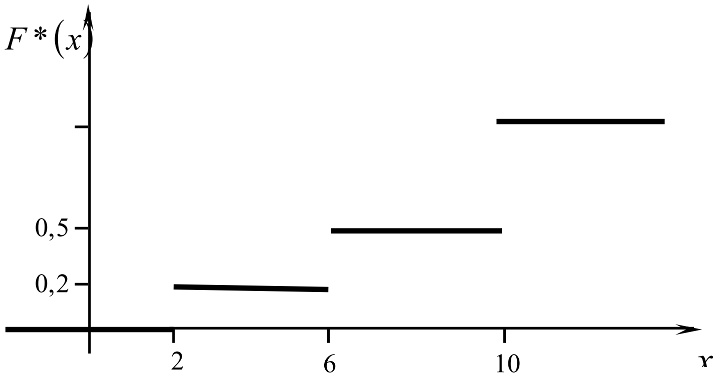

Рис. 11.1. Графік функції $F^*(x)$

Полігон та гістограма

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ... $(x_k; n_k)$, де x_i – варіанти вибірки і n_i – відповідні їм частоти.

Якщо по вісі абсцис відкладати варіанти x_i, а по вісі ординат відповідні їм відносні частоти w_i, тоді точки (x_i, W_i) з'єднані відрізками прямих і утворюють ламану – полігон відносних частот.

Задача. Побудувати полігон відносних частот по заданому розподілу вибірки

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
W_i	0,1	0,2	0,4	0,3

На рис. 11.2 зображений полігон відносних частот такого розподілу:

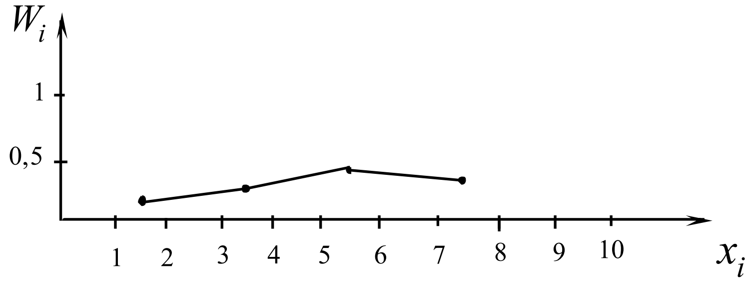

Рис. 11.2. Полігон відносних частот

У випадку неперервного признаку краще побудувати гістограму, для чого весь інтервал значень признаку розбивають на декілька частинних інтервалів довжини h.

Гістограмою частот називають ступінчату фігуру, яка складається з прямокутників, основою яких є часткові інтервали варіант довжиною h, а висоти рівні відношенню $\frac{n_i}{h}$ (щільність частоти).

Площа гістограми частот дорівнює сумі усіх частот, тобто об'єму вибірки $\sum_{i=1}^{k} n_k = n$.

Гістограмою відносних частот називають ступінчату фігуру, яка складається з прямокутників, основою яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{W_i}{h}$ (щільність відносної частоти).

Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі усіх відносних частот, тобто одиниці.

Задача. Побудувати гістограму частот по заданому розподілу вибірки об'єму $n = 100$ (рис. 11.3).

Таблиця 11.1

Вибірка об'єму $n = 100$

h	$\sum n_i$	щільність $\frac{n_i}{h}$
5–10	4	0,8
10–15	6	1,2
15–20	16	3,2
20–25	36	7,2
25–30	24	4,8
30–35	10	2,0
35–40	4	0,8

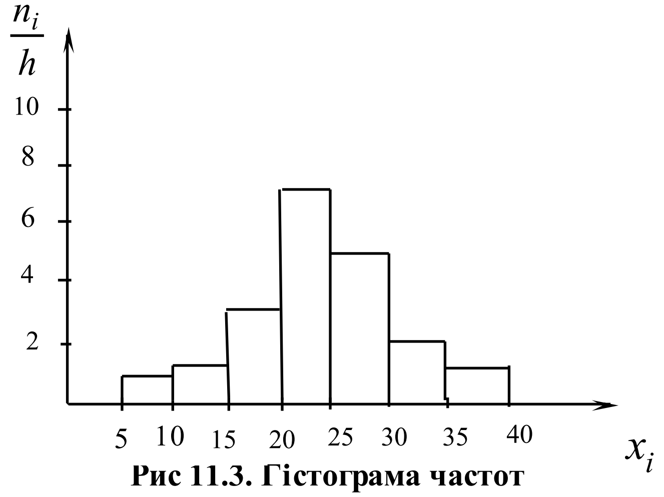

Рис 11.3. Гістограма частот

Генеральна та вибіркова сукупності

Наприклад: треба здійснити дослідження кожного з об'єктів сукупності відносно ознаки, яка нас цікавить (розміри деталей).

Суцільне дослідження об'єктів провести неможливо, це дуже складно. У таких випадках випадково відбирають з усієї сукупності обмежену кількість об'єктів і вивчають їх. Кожен об'єкт, який спостерігають, має декілька ознак. Тому розглядають лише одну ознаку, припускаючи всі інші рівноправними. Такі множини об'єктів називаються статистичними сукупностями.

Вибіркової сукупністю або просто вибіркою називають сукупність випадково відібраних об'єктів.

Генеральною сукупністю називають сукупність об'єктів з яких проводиться вибірка.

Об'ємом сукупності (вибіркової або генеральною) називають число об'єктів цієї сукупності.

Є багато методів відбору об'єктів з генеральної сукупності. Іноді використовують комбінацію різних відборів. Після того, як об'єкт відібраний і над ним проведено спостереження, він може бути повернутий у генеральну сукупність. Тому вибірки бувають повторні і безповторні.

Повторною називають вибірку при якій відібраний об'єкт повертають в генеральну сукупність.

Безповторною називають вибірку, при якій відібраний об'єкт не повертається в генеральну сукупність.

Статистичні оцінки параметрів розподілу

Нехай потрібно вивчити кількісну ознаку X генеральної сукупності. Припустимо, що з теоретичних міркувань вдалося з'ясувати, який розподіл має ознаку. Тоді виникає задача оцінки параметрів, якими визначається цей розподіл. Якщо ознака, яка вивчається, розподілена у генеральній сукупності нормально, тоді необхідно оцінити (найти приблизно) математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення, тому що ці два параметри повністю визначають нормальний розподіл X; якщо ж ознака X має розподіл Пуассона, то необхідно оцінить параметр λ, яким цей розподіл визначався.

Якщо розглядати дані вибірки $x_1, x_2, ..., x_n$ (які отримані в результаті n спостережень), як незалежні випадкові величини $X_1, X_2, ..., X_n$ можна сказати, що знайти статистичну оцінку невідомого параметру теоретичного розподілу – це значить знайти функцію від спостережених випадкових величин, яка і дає наближене значення оцінюваного параметру.

Нехай θ^* – статистична оцінка невідомого параметру θ теоретичного розподілу.

Статистичною оцінкою θ^* невідомого параметру θ теоретичного розподілу називають функцію $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ від спостережених випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$.

$$\theta^* = f(x_1, x_2, x_3 ..., x_n),$$

де $x_1, x_2, x_3 ..., x_n$ – результати n спостережень над кількісною ознакою X (вибірки)

Незсуненою називають статистичну оцінку θ^*,математичне сподівання якої дорівнює параметру θ, який ми оцінювали при любому об'ємі вибірки, тобто:

$$M(\theta^*) = \theta.$$

Зсуненою називають оцінку, математичне сподівання якої не дорівнює оцінюючому параметру.

Нехай розподіл ознаки генеральної сукупності характеризується рядом

$$x_1, x_2, x_3 ..., x_n \tag{11.1}$$

об'єму N.

Середнє арифметичне значень ознаки генеральної сукупності визначається рівністю

$$\bar{x}_г = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 .... + x_n}{N}. \tag{11.2}$$

і називається генеральною середньою. Якщо ознаку X генеральної сукупності розглядати як випадкову величину, то математичне сподівання дорівнює генеральній середній цієї ознаки, тобто характеристикою генеральної сукупності є математичне сподівання ознаки

$$\bar{x}_г = M(X).$$

Щоб зробити висновок про розсіювання значень кількісної ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення, вводять характеристику – дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Генеральною дисперсією $D_г$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення значень признаку генеральної сукупності від їх середнього значення $x_г$ (об'єм n)

Дисперсія

$$D_г = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_г)^2 \tag{11.3}$$

носить назву генеральної дисперсії.

Якщо значення ознаки x_i повторюються не один раз, то

$$D_г = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x}_г)^2. \qquad (11.4)$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma_г = \sqrt{D_г}$.

Якщо із сукупності (11.1) зробити вибірку

$$X_1, X_2, ..., X_n, \qquad (11.5)$$

то характеристиками вибіркової сукупності будуть також середнє арифметичне

$$\bar{X}_B = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \qquad (11.6)$$

– вибіркове середнє або $\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}$.

Вибірковою дисперсією $\bar{D}_B$ називають середнє арифметичне квадратів відхилення спостережених значень ознаки від їх середнього значення $\bar{x}_в$. Якщо всі значення $x_1, x_2, ..., x_n$ ознаки вибірки об'єму n різні, то

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2, \qquad (11.7)$$

а з урахуванням відповідних відносних частот

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2. \qquad (11.8)$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Математичне сподівання вибіркової дисперсії

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} \cdot D_г. \qquad (11.9)$$

Оцінкою для генеральної дисперсії $D(X)$ є вибіркова дисперсія D_B, яку позначають

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_B\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2 - \bar{X}_B^2\right) = D_B. \qquad (11.10)$$

Для оцінки $D(x)$ при малих n використовується також «виправлена дисперсія»:

$$S_1{}^2 = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 . \tag{11.11}$$

А вибіркове середнє квадратичне відхилення величини X

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{S^2} = S . \tag{11.12}$$

Приклад. Із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму $n = 50$:

варіанта	x_i	2	5	7	10
частота	n_i	16	12	8	14

Знайти незсунену оцінку генеральної середньої та вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Незсуненою оцінкою генеральної середньої є вибіркова середня $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i = \frac{1}{50}(16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10) = 5{,}76$. Вибіркове квадратичне відхилення дорівнює $\sigma_B = \sqrt{D_B}$, де D_B – вибіркова дисперсія $D_B = \frac{1}{50}\left(16(2-5{,}6)^2 + 12(5-5{,}6)^2 + 8(7-5{,}6)^2 + 14(10-5{,}6)2\right)$.

12. Довірчий інтервал для невідомого середнього

Точковою називають оцінку, яка визначається одним числом. При виборці малого об'єму точкові оцінки приводить до великих помилок. При невеличкому об'ємі вибрки зручніше застосувати інтервальні оцінки.

Інтервальною називають оцінку, яка визначається двома числами – кінцями інтервалу.

Усі оцінки, які ми розглядали вище, – точкові. При виборі малого об'єму точкова оцінка може призвести до грубих помилок В таких випадках краще застосовувати інтервальні оцінки. Інтервальні оцінки дозволяють встановити точність та надійність оцінок.

Довірчим називають інтервал, який по заданій довірчій ймовірності

$$P\left(\left|\frac{a - \bar{X}}{\delta}\sqrt{n}\right| < t \cdot \gamma\right) = 1 - \alpha$$

накриває оцінюючий параметр (сподівання a).

Точність оцінки характеризує невід'ємне число δ.

Надійність (довірча ймовірність) оцінки θ завжди задається заздалегідь, причому беруть число наближене до одиниці. Наприклад: 0,95; 0,97; 0,99 та ін.

Довірчим називається інтервал $\left(\theta^* - \delta\,;\ \theta^* + \delta\right)$, який покриває невідомий параметр з заданою надійністю γ:

$$\gamma = P\left|\theta - \theta^*\right| < \delta .$$

Для оцінки математичного сподівання a випадкової величини X, розподіленої за нормальному законом, при відомій дисперсії $D(x) = \sigma^2$ слугує довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (12.1)$$

де $t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об’єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(x)$, (додаток табл. 4), при якому $\Phi(x) = \frac{\gamma}{2}$.

Якщо дисперсія $D(x)$ невідома, тобто при невідомому σ (об’єм вибірки $n <$ 30), то для оцінки $M(x) = a$ слугує довірчий інтервал виду

$$\bar{x}_B - t_\gamma \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_\gamma \cdot \frac{S_1}{\sqrt{n}}, \qquad (12.2)$$

де S_1 – «виправлене» вибіркове середнє квадратичне відхилення,

t_γ – в додатку (табл. А.3) по заданим n та γ.

13. Приклади розв'язання типових задач

Розглянемо приклади обчислення ймовірностей на основі класичного означення. Апарат, що при цьому використовується, – основні властивості ймовірностей, основні правила і теореми, формули комбінаторики.

Задача 1

Учасник лотереї «Спортлото» з 49 назв видів спорту (позначених числами від 1 до 49) повинен назвати 6. Повний виграш одержує той, хто вірно вкаже всі шість назв. Виграші одержують і ті, хто вгадав не менш трьох назв. Обчислити ймовірність: *а*) повного виграшу в спортлото; *б*) одержати виграш (відгадати не менше трьох назв).

Розв'язання. Позначимо подію – повного виграшу літерою A. Згідно з класичним означенням, ймовірність випадкової події A обчислюється за формулою

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де n – загальне число усіх можливих наслідків у даному випробуванні з випадковими наслідками, m – кількість можливих наслідків, що сприяють появі події.

Кожна елементарна подія (набір шість назв) в цьому експерименті визначається комбінацією з 49 елементів по 6. Отже, число всіх елементарних подій дорівнює

$$n=C_{49}^{6}=\frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=13983876 .$$

а) Знайдемо число m для повного виграшу. Маємо шість назв виграшних видів спорту і треба вірно вказати всі шість назв, тобто

$$m=C_{6}^{6}=1.$$

Шукана ймовірність дорівнює

$$P(A)=\frac{1}{13983876}\approx 7{,}2\cdot 10^{-6}.$$

б) Позначимо подію «одержати виграш» літерою B. Очевидно, що подія B наступить, якщо здійсниться одна з несумісних подій.

B_1 – вгадано 3 назви;

B_2 – вгадано 4 назви;

B_3 – вгадано 5 назв виду спорту.

Обчислимо ймовірність виграшу при умові вгадати не менше трьох назв $P(B_1)$. Назвати три види спорту із шести, визначених в тиражі, можна C_6^3 способами. Для назви решти (43 = 49 – 6) є C_{43}^3 змоги. Тоді згідно з «правилом добутку» кількість способів вгадати три назви m_1 обчислюється так:

$$m_1 = C_6^3 \cdot C_{43}^3 .$$

Ймовірність $P(B_1)$ вгадати три назви із шести дорівнює

$$P(B_1) = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} = 1{,}8 \cdot 10^{-2} .$$

Міркуючи в такий же спосіб, маємо кількість способів вгадати чотири назви видів спорту

$$m_2 = C_6^4 \cdot C_{43}^2 ,$$

звідси

$$P(B_2) = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} = \frac{6! \cdot 43! \cdot 6! \cdot 43!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 41! \cdot 49!} = 9{,}7 \cdot 10^{-4} .$$

Міркуючи в такий же спосіб, маємо

$$m_3 = C_6^5 \cdot C_{43}^1$$

звідси

$$P(B_3) = \frac{C_6^5 \cdot C_{43}^1}{C_{49}^6} = 1{,}9 \cdot 10^{-5} .$$

Згідно з умовою, виграш одержують, назвавши вірно або 3, або 4, або 5 назв. Тепер можна використати теорему додавання ймовірностей, звідси маємо

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = 0{,}018 + 0{,}00097 + 0{,}000019 = 0{,}018989.$$

Задача 2

На конвеєр надходять деталі з трьох цехів. Перший цех дає в середньому 0,2% браку, другий – 0,3%, третій – 0,5%. Знайти ймовірність попадання на конвеєр бракованої деталі, якщо з першого цеху надійшло 3000, з другого – 6000, з третього – 1000 деталей.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що навмання відібрана деталь із тих, що надійшли на конвеєр, є бракованою. Розглянемо події (гіпотези) $H_i(i=1,2,3)$ про те, з якого цеху надійшла деталь. Очевидно події H_1, H_2, H_3 попарно несумісні, а їх ймовірності обчислюються, відповідно, так:

$$P(H_1)=\frac{3000}{10000}=0{,}3; \quad P(H_2)=\frac{6000}{10000}=0{,}6, \quad P(H_3)=\frac{1000}{10000}=0{,}1 \cdot$$

Якщо деталь надійшла з першого цеху, то ймовірність бути бракованою для неї $P_{H_1}(A)=0{,}2\%=0{,}002$; аналогічно $P_{H_2}(A)=0{,}003$; $P_{H_3}(A)=0{,}005$. Тому, за формулою повної ймовірності, ймовірність попадання на конвеєр бракованої деталі

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=0{,}3\cdot 0{,}002+$$
$$+0{,}6\cdot 0{,}003+0{,}1\cdot 0{,}005=0{,}0029.$$

Задача 3

Гральний кубик підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що з'явиться число очок кратне 3:

а) два рази;

б) більше двох разів.

Розв'язання. Знайдемо ймовірність успіху (тобто того, що число очок, яке випадає на кубику при одному киданні, буде кратне трьом).

Простір елементарних подій при одному киданні складається з 6 елементів, а подія, що полягає у випадінні числа очок кратного 3, складається з двох елементів (3; 6), тому $p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. Ймовірність протилежної події $q=1-p=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

а) Отже, відома ймовірність успіху при одному киданні; природньо вважати, що результати кожного кидання – незалежні події, тому для обчислення шуканої ймовірності використаємо формулу Бернуллі. Знайдемо ймовірність двох успіхів з п'яти:

$$P_5(2)=C_5^2p^2q^3=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}\approx\frac{1}{3}.$$

б) Ймовірність більше двох успіхів (тобто або 3, або 4, або 5) за властивістю адитивності дорівнює

$$P(>2)=P_5(3)+P_5(4)+P_5(5)=C_5^5p^3q^2+C_5^5p^4q+C_5^5p^5q^0=$$
$$=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+5\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{51}{243}\approx 0{,}21$$

Задача 4

Стріляють по цілі 5 разів. Влучення при окремих пострілах – незалежні події і ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6. Нехай X – число влучень при 5 пострілах.

Знайти:

а) найбільш імовірне число влучень;

б) закон розподілу випадкової величини X;

в) математичне сподівання, дисперсію числа влучень та середнє квадратичне відхилення σ $(-2x)$.

Розв'язання.

а) У цьому прикладі маємо справу з незалежними випробуваннями, коли ймовірність появи події постійна, тому треба використати схему Бернуллі при $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Отже, обчислимо, використовуючи співвідношення (8.2)

$$np - q \le m_0 < np + p,$$

де m_0 – найбільш імовірне число влучень.

$$5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \le m_0 < 0{,}6 \cdot 5 + 0{,}6,$$
$$3 - 0{,}4 \le m_0 < 3 + 0{,}6,$$
$$2{,}6 \le m_0 < 3{,}6.$$

$np - q$ – неціле, тому $m_0 = 3$ (одне значення).

б) Очевидно, що *ВВ* X приймає 6 значень: $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3; x_5 = 4;$ $x_6 = 5$ з ймовірностями $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, якщо характер випробування відповідає схемі Бернуллі.

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot (0{,}6)^0 \cdot (0{,}4)^5 = 0{,}01024,$$
$$P_5(1) = C_5^1 \cdot (0{,}6)^1 \cdot (0{,}4)^4 = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}0256 = 0{,}0768,$$
$$P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^3 = 10 \cdot 0{,}36 \cdot 0{,}064 = 0{,}2304,$$
$$P_5(3) = C_5^3 \cdot (0{,}6)^3 \cdot (0{,}4)^2 = 0{,}3456,$$
$$P_5(4) = C_5^4 \cdot (0{,}6)^4 \cdot (0{,}4)^1 = 0{,}2592,$$
$$P_5(5) = C_5^5 \cdot (0{,}6)^5 = 0{,}07776.$$

Перевіримо правильність обчислень

$$\sum_{k=1}^{6} P_k = 0{,}01024 + 0{,}0768 + 0{,}2304 + 0{,}3456 + 0{,}2592 + 0{,}7776 = 1.$$

Таким чином, закон розподілу *ВВ X* має вигляд (табл. 13.1):

Таблиця 13.1

Закон розподілу *ВВ X*

X_k	0	1	2	3	4	5
P_k	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

в) Математичне сподівання $M(X)=\sum_{k=1}^{6} x_k p_k$.

$$M(X)=0\cdot 0{,}01024+1\cdot 0{,}0768+2\cdot 0{,}2304+3\cdot 0{,}3456+4\cdot 0{,}2592+5\cdot 0{,}07776=$$
$$=0+0{,}0768+1{,}0368+1{,}0368+0{,}3888=3.$$

Для знаходження дисперсії зручно використати формулу (10.4):

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2,$$

де

$$M\left(X^2\right)=\sum_{k=1}^{6} x_k^2\cdot p_k,$$

$$M\left(X^2\right)=0{,}0768+4\cdot 0{,}2304+9\cdot 0{,}3456+16\cdot 0{,}2593+25\cdot 0{,}07776=$$
$$=0{,}0768+0{,}9216+3{,}1104+4{,}1417+1{,}944=10{,}2.$$

$$D(X)=10{,}2-3^2=10{,}2-9=1{,}2.$$

Середнє квадратичне обчислюємо згідно з формулою $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$:

$$\sigma(X)=\sqrt{1{,}2}\approx 1{,}1.$$

Тоді маємо остаточно, застосовуючи властивість $D(CX)=C^2 D(X)$:

$$\sigma(-2X)=\sqrt{D(-2X)}=\sqrt{(-2)^2 D(X)}=|-2|\sigma(X)=2\cdot 1{,}1=2{,}2.$$

Задача 5

Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ \frac{1}{2}\left(x^2-x\right) & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Знайти:

а) щільність розподілу $f(x)$;

б) ймовірність попадання в проміжок (0; $\frac{3}{2}$);

в) дисперсію $D(X)$.

Розв'язання.

а) Щільність розподілу дорівнює похідній від функції розподілу (9.5)

$$f(x)=F'(X)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 1,\\ x-\frac{1}{2} & \text{при} \quad 1<x\le 2,\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

б) Для неперервної випадкової величини при будь-яких x_1, x_2 має місце рівність

$$P(x_1<x<x_2)=\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx.$$

Звідси

$$P\left(0<x<\frac{3}{2}\right)=\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx.$$

Отже,

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)dx=\int_0^1 0\cdot dx+\int_1^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)\Bigg|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{8}.$$

в) Згідно з формулою (10.2), $M(X)=\int_a^в xf(x)dx$, маємо

$$M(X)=\int_1^2 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_4^2=\frac{19}{12}.$$

Дисперсію обчислюємо згідно з формулою $D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$, де

$$M\left(X^2\right)=\int_a^b x^2 f(x)dx;\quad M\left(X^2\right)=\int_1^2 x^2\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=\frac{31}{12},$$

тоді

$$D(X)=\frac{31}{12}-\left(\frac{19}{12}\right)^2=\frac{372-361}{144}=\frac{11}{144}.$$

Задача 6

Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють $a=10,\ \sigma=2$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування *ВВ* X потрапить в інтервал (12, 14).

Розв'язання. Застосуємо формулу (11.1)

$$P(\alpha < X < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де α = 12; β = 14; a = 10; σ = 2, тоді

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right).$$

$P(12<X<14)=\Phi(2)-\Phi(1)$ по таблиці А.4 (додаток А) знайдемо

$$\varPhi(2)=0{,}4772\quad \Phi(1)=0{,}3413.$$

Тоді шукана ймовірність:

$$P(12<X<14)=0{,}4772-0{,}3413=0{,}1359.$$

Задача 7

Дано щільність розподілу *ВВ* X

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ a\sin x, 0<x\le\pi,\\ 0, x>\pi.\end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію розподілу, невідомий параметр a і ймовірність того, що в серії з 5 незалежних випробувань *ВВ* X потрапить на інтервал $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ двічі.

Розв'язання.

Невідомий параметр a обчислимо, скориставшись умовою (9.7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

У даному випадку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a\cdot\sin x dx = a\int_{0}^{\pi}\sin x dx = -a\cos x\Big|_{0}^{\pi} = 2a = 1,$$

звідки $a = \dfrac{1}{2}$.

Користуючись формулою (9.2) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$, отримаємо значення: при $x \le 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx;$$

при $0 < x \le \pi$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx + \int_{0}^{x}\frac{1}{2}\sin x dx = \frac{1}{2}(1-\cos x);$$

при $x > \pi$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin x dx + \int_{\pi}^{x} 0dx = 1.$$

Отже,

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \dfrac{1}{2}(1-\cos x) & \text{при} \quad 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Знаходимо ймовірність того, що *ВВ* потрапить на інтервал $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$:

$$P\left(0 < x < \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0) = \frac{1}{4}.$$

Тепер, користуючись формулою Бернуллі, остаточно одержимо

$$P_5(2)=C_5^2 p^2 q^3=\frac{5!}{3!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^3=0{,}79\,.$$

Задача 8

Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0{,}99$ невідомого математичного сподівання a, нормально розподіленої ознаки X генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичного відхилення $\sigma = 4$, вибіркове середнє $\bar{x}_B = 10{,}2$ та об'єм вибірки $n = 16$.

Розв'язання. Довірчий інтервал

$$\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Усі величини відомі, окрім t. Знайдемо t зі співвідношення $2\Phi(t)=\gamma$ або $2\Phi(t)=0{,}99$; $\Phi(t)=\frac{0{,}99}{2}$; $\Phi(t)=0{,}495$ (із додатка А) по табл. А.4 знайдемо $t = 2{,}57$.

Тоді

$$10{,}2-2{,}57\cdot\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 10{,}2+2{,}57\cdot\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$10{,}2-2{,}57 < a < 10{,}2+2{,}57$$

$7{,}63 < a < 12{,}77$ – шуканий інтервал.

14. Контрольні завдання

Завдання 1

1. Кинуто два кубики. Знайти ймовірність наступних подій:
а) сума очок, які випали, дорівнює вісім, а різниця – чотири;
б) сума очок, які випали, рівна п'яти, а добуток – дорівнює чотирьом.

2. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. По списку випадково відібрали 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів 5 відмінників.

3. Із повної колоди карт (52 карти) навмання витягають одразу три карти. Знайдіть ймовірність того, що цими картами будуть: трійка, сімка, туз.

4. На шахівницю з 64 клітинок ставлять навмання дві тури – білу і чорну. З якою ймовірністю вони не будуть «бити» одна одну?

5. Для деякої місцевості середнє число похмурих днів в липні дорівнює шість. Знайти імовірність того, що першого і другого липня буде ясна погода.

6. В урні – 3 білих і 7 чорних куль. Яка імовірність того, що вийняті навмання дві кулі виявляться:

а) чорними;

б) одна біла і одна чорна.

7. Дитина бавиться з чотирма буквами розрізної абетки *А*, *А*, *М*, *М*. Яка імовірність того, що при випадковому розташуванні букв у ряд вона одержить слово «МАМА».

8. Студент знає 20 з 25 питань програми. Знайти імовірність того, що студент знає запропоновані екзаменатором три питання.

9. Імовірність того, що при одному вимірюванні деякої фізичної величини буде допущено помилку, яка перевищує задану точність, дорівнює 0,4. Проведено три незалежні вимірювання. Знайти імовірність того, що тільки в одному з них допущена помилка перевищить задану точність.

10. Кондитерська виробляє 7 видів тістечок. Покупець вибив чек на чотири тістечка. Якщо любий замовлений набір тістечок рівноймовірний. Обчислити ймовірність того, що покупець замовив:

а) тістечка одного виду;

б) тістечка різних видів.

11. У вазі лежать 10 яблук та 6 груш. Навмання беруть 4 одиниці фруктів. Знайти ймовірність того, що хоча б одно із взятих фруктів – яблуко.

12. Достатньою умовою заліку є відповідь на один з двох питань, які задає викладач студенту. Студент не знає відповіді на 8 питань з 40 питань програми. Яка ймовірність здачі заліку?

13. З урни в якій лежать 15 білих та 8 чорних куль взяли навмання 6 куль. Яка ймовірність того, що серед вийняти куль буде:

а) 4 білих кулі;

б) менше 3-х чорних куль?

14. З урни в якій – 3 білих та 7 чорних куль взяли навмання дві кулі. Яка ймовірність того, що взяті кулі:

а) біла і чорна;

б) обидві чорні?

15. Мисливець стріляє 3 рази по цілі, яка віддаляється. Ймовірність влучення в ціль 0,8, яка зменшується після кожного пострілу на 0,1. Знайти ймовірність того, що:

а) промахнеться всі три рази;

б) попаде хоча б один раз.

16. Із п'яти карток з літерами *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д* навмання одна за однією вибираються три і розташовуються у ряд у тому порядку, як їх вибирали. Яка ймовірність того, що утвориться слово «ДВА»?

17. При наборі телефонного номеру абонент забув дві останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи тільки, що ці цифри непарні і різні. Знайти ймовірність того, що номер набрано правильно.

18. Серед 25 екзаменаційних білетів 5 «гарних». Два студента по черзі беруть по одному білету. Знайти ймовірність того, що:

а) перший студент взяв «гарний» білет;

б) обоє студенти взяли «гарні» білети.

19. З партії, що мітить зовнішнє однакових 10 ящиків взуття білого кольору і 15 ящиків взуття чорного кольору, вибирають навмання 10 ящиків. Знайти ймовірність того, що серед відібраних ящиків буде:

а) 5 ящиків взуття білого кольору;

б) всі 10 ящиків мають взуття одного кольору.

20. У читальному залі є 6 підручників по теорії ймовірності, з яких 3 в палітурці. Студент навмання бере 2 підручники. Знайти ймовірність того, що:

а) обидва підручники будуть у палітурці;

б) один у палітурці.

21. У шухляді 10 красних та 6 синіх ґудзиків. Навмання дістали два ґудзика. Яка ймовірність того, що вийняті ґудзики будуть одного кольору?

22. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії (мережі) відбувся обрив проводу. Яка ймовірність того, розрив відбувся між 50-м і 55-м кілометрами лінії (мережі)?

23. У ящику 10 виробів, з яких 4 браковані. Робітник навмання взяв три вироби. Знайти ймовірність того, що хоча б один із взятих виробів бракований.

24. Серед 100 лотерейних білетів є 5 виграшних. Знайти ймовірність того, що2 взятих навмання білетів будуть виграшними.

25. У партії з 50 виробів – 5 бракованих. З партії вибирають навмання 6 виробів. Визначити ймовірність того, що серед цих 6 виробів 2 виявлять ся бракованими.

26. Із повного набору 28 костей доміно навмання взяли кість. Знайти ймовірність того, що другу навмання взяту можна приставити до першої, якщо перша кість:

а) є дублем;

б) не є дублем.

27. У ящику лежать 90 годних і 10 бракованих виробів. Сборщик послідовно без повернення дістає 10 виробів. Знайти ймовірність того, що серед взятих виробів:

а) немає бракованих;

б) хоча б один виріб бракований.

28. Із аеровокзалу відійшли два автобуса-експреса до трапів літаків. Ймовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що:

а) обидва автобуси запізняться;

б) тільки один автобус прибуде вчасно.

29. У ящику 10 виробів, з яких 3 бракованих. Знайти ймовірність того, що серед 2 взятих навмання виборів, єсть хоча б одна бракована.

30. Ймовірність влучення в мішень при одному пострілу першим стрілком дорівнює 0,8, а другим стрілком – 0,6. Знайти ймовірність того, що в ціль попаде тільки один стрілок.

Завдання 2

1. Студент знає не всі екзаменаційні квитки. У якому випадку ймовірність витягти невідомий квиток буде для нього найменшої, коли він тягне квиток першим чи останнім?

2. Припустимо, що 5% усіх чоловіків і 0,25% усіх жінок дальтоніки. Навмання обрана особа страждає дальтонізмом. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

3. Два стрільці незалежно один від іншого стріляють по одній мішені, роблячи кожний по одному пострілу. Імовірність влучання в мішень для першого стрільця 0,8, для другого 0,4. Після залпу в мішені виявлена одна пробоїна. Знайти ймовірність того, що в мішень влучив перший стрілець.

4. На фабриці, що виготовляє болти, перша машина робить 25%, друга – 35%, третя – 40% усіх виробів. У їхній продукції брак складає відповідно 5, 4 і 2%.

а) Яка ймовірність того, що випадково обраний болт бракований?

б) Випадково обраний із продукції болт виявився бракованим.

Яка ймовірність того, що він був зроблений першою машиною?

5. Два з трьох незалежно працюючих елементів обчислювального пристрою, відмовили. Знайти ймовірність того, що відмовив перший і другий елемент, якщо ймовірність відмови першого, другого і третього елементів відповідно дорівнює 0,2; 0,4; 0,3.

6. Маємо два набору виробів. Ймовірність того, що виріб першого набору стандартний дорівнює 0,8, а другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб (з навмання взятого набору) – стандартний.

7. У першій шафі 20 радіоламп. З них 18 стандартних; у другій – 10 ламп, з них 9 стандартних. Із другої шафи навмання взяли лампу і переклали у першу. Знайти ймовірність того, що навмання взята лампа з першої шафи буде стандартною.

8. У двох ящиках лежать радіолампи. У першому – 12 ламп, з яких 1 нестандартна; у другому 10 ламп, з яких 2 нестандартні. З першого ящика навмання дістають лампу і перекладають у другий. Знайти ймовірність того, що навмання взята із другого ящика лампа буде нестандартною.

9. В двох урнах знаходяться відповідно 8 і 10 куль, з них білих куль 5 і 3. З першої урни переклали в другу урну одну кулю, колір якої невідомий. після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

10. До магазину надходять вироби з двох заводів, причому з першого заводу надходять у 2 разів більше виробів, ніж з другого. Перший завод випускає у середньому 0,5% бракованої продукції, другий 0,2%. Куплений у магазині виріб виявляється бракованим (подія A). Яка ймовірність того, що він був випущений першим заводом?

11. Відомо, що 6% чоловіків і 0,36% всіх жінок дальтоніки. Навмання обрана особа – дальтонік. Яка ймовірність того, що це чоловік? (Вважати, що чоловіків і жінок однакова кількість).

12. У піраміді 5 гвинтівок, три з яких мають оптичний приціл. Ймовірність того, стрілок попаде в ціль при пострілі з гвинтівки з оптичним прицілом, дорівнює 0,95; для гвинтівки без оптичного прицілу ця ймовірність

дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що ціль буде уражена, якщо стрілок зробив один постріл з навмання взятої гвинтівки.

13. Нехай в урну з 7 кульками білого та 2 кульками чорного кольору, однаковими в усьому іншому, вкинули таку ж кульку. Після цього навмання вийняли одну кульку. Яка ймовірність, що ця кулька білого кольору?

14. В одній урні є 4 білих і 6 чорних кульок, а в другій – 2 білих і 8 чорних кульок. Ймовірність тягнути кульку з урни є однаковою для обох урн. З якоїсь урни витягли кульку і вона виявилась білою. Яка ймовірність того, що кульку тягнули з другої урни.

15. Два автомати виробляють однакові деталі, що надходять на спільний контейнер. Продуктивність першого автомата удвічі більше ніж у другого. Перший автомат виробляє 60% 1-го ґатунку, другий – 84%. Деталь, що навмання вибрана з конвеєра, виявилася 1-го ґатунку. Знайти ймовірність того, що вона вироблена 1-м автоматом.

16. В урні лежить кулька невідомого кольору – з рівною ймовірністю біла чи чорна. В урну опускають одну білу кульку , після ретельного перемішування навмання дістали одну кульку. Вона виявилася білою. Яка ймовірність того, що в урні залишилася біла кулька?

17. Студентам, які їдуть на практику, виділили 15 місць в Євпаторіїї,10 – у Гєнічєску, 5 – в Алушті. Яка ймовірність того, що три визначених студента А, Б, С попадуть на практику в одне й теж місто.

18. В кожній з двох урн лежать по 6 чорних та 4 білих кульок. З першої урни переклали в другу урну кулю, колір якої невідомий. Після цього з другої урни беруть одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

19. При поміщенні в урну ретельно перемішаних 9 куль (7 чорних і 2 білих) одна куля невідомого кольору загубилася. З решти (8 куль) навмання виймають одну кулю. Яка ймовірність того, що вийнята куля виявиться білою?

20. Припустимо, що для однієї торпеди ймовірність потопити корабель дорівнює $\frac{1}{2}$. Яка ймовірність того, що 4 торпеди потоплять корабель, якщо для затоплення корабля досить одного влучення торпеди?

21. Маємо дві урни: в першій 3 білих кульки і 2 чорні, а в другій – 4 білих і 4 чорних. З першої урни у другу переклали, не дивлячись, дві кульки. Після цього з другої урни взяли одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька буде білою.

22. Число вантажівок, які їдуть по шосе, де стоїть бензоколонка відносяться до числа легкових машин як 3:2. Ймовірність того, що буде заправляться вантажівка дорівнює 0,1; легкова машина – 0,2. До бензоколонки під'їхала машина. Знайти ймовірність того, що це вантажівка.

23. 9 пасажирів розсаджують в трьох вагонах. Знайти ймовірність того, що:

а) в кожному вагоні опиниться по три пасажири;

б) в один вагон сядуть четверо, в другий – троє, і в третій – двоє пасажирів.

24. З колоди карт (52 карти) навмання береться 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед цих карт будуть представники всіх чотирьох мастей.

25. В урні лежить кулька невідомого кольору – білого чи чорного. В урну опускають одну чорну кульку і після ретельного перемішування навмання виймають одну кульку. Вона виявилась чорною. Яка ймовірність того, що в урні залишилася біла кулька?

26. Студент прийшов на залік, знаючи з 30 питань лише 24. Яка імовірність для нього здати залік, якщо після відмови відповідати на запитання викладач задає ще одне питання?

27. У шафі знаходяться 10 пар черевиків різних сортів. З них навмання вибирають 4 черевики. Знайти імовірність того, що серед вибраних черевиків відсутні парні.

28. Імовірність того, що під час роботи числової електронної машини виникне збій в арифметичному пристрою, в оперативній пам'яті, в інших устроях, відносяться як 3:2:5. Імовірність виявлення збою в арифметичному устрою, в оперативній пам'яті і в інших устроях відповідно дорівнює 0,8; 0,9; 0,9. Знайти ймовірність того, що збій, який виник в машині буде виявлений.

29. При перевірці ґатунку зерен пшениці було виявлено, що всі зерна можуть бути поділені на 4 групи. До зерен першої групи належать 96%, до другої – 2%, до третьої – 1% і до четвертої – 1% усіх зерен. Ймовірність того, що із зерна виростить колосок який містить не менше 50 зерен, для зерен першої групи – 0,2, для зерен другої групи – 0,2, для зерен третьої групи – 0,18 і для зерен четвертої групи – 0,02. Визначити імовірність того, що із взятого навмання зерна виросте колосок, який містить не менше 50 зерен.

30. У цеху 3 типа автоматичних станків виробляють одні й ті ж деталі. Виробничість їх однакова, але якість роботи різна. Відомо, що станки першого

типу виробляють 0,9 деталей відмінної якості, другого – 0,85 і третього – 0,8. Всі вироблені у цеху за зміну деталі складені у склад. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь буде вищого ґатунку, якщо станків першого типу 10, другого – 8 і третього – 2.

Завдання 3

1. Батарея зробила 14 пострілів по об'єкту, імовірність влучення в який дорівнює 0,2. Знайти найімовірніше число влучань та імовірність цього числа влучень.

2. Ймовірність попадання в ціль $p = 0{,}3$. По одиночно скидається 6 бомб. Знайти ймовірність того, що в ціль попадуть 4 бомби.

3. Вироби деякого підприємства містять 5% браку. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих навмання виробів:

а) не виявиться жодного бракованого;

б) будуть два бракованих вироби.

4. Гральний кубик кидається 16 разів. Знайти найімовірніше число появи числа очок, які кратні трьом.

5. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти імовірність того, що серед 100 новонароджених виявиться 50 хлопчиків.

6. Імовірність появи події в кожному незалежному досліді дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести дослідів, щоб з імовірністю 0,9 можна було очікувати, що подія появиться не менше 75 раз?

7. Імовірність влучання в ціль при кожному пострілі з гармати дорівнює 0,8. Скільки потрібно зробити пострілів, щоб найімовірніше число влучань було рівне 20?

8. Сходження насіння даного сорту рослин оцінюється з імовірністю, рівної 0,8. Яка імовірність того, що з п'яти посіяних насінин зійдуть не менше чотирьох?

9. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515, дівчинки 0,485. У деякій сім'ї шестеро дітей. Знайти імовірність того, що серед них не більше двох дівчат.

10. В водоймище випустили 100 мічених риб. Невдовзі після цього з водоймища було виловлено 400 риб, серед яких виявлено 5 мічених. Визначити загальну кількість риб в цьому водоймищі з імовірністю:

а) 0,9; *б*) 0,6.

11. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом однієї хвилини дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом однієї хвилини обрив відбудеться на п’ятьох веретенах.

12. Середня щільність хвороботворних мікробів в одному кубічному метрі повітря дорівнює 100. Береться на пробу 2 $дм^3$ повітря. Знайти імовірність того, що в ньому буде виявлена хоча б один мікроб.

13. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі дорівнює 0,001. Знайти імовірність влучення в ціль двох і більше куль, якщо число пострілів дорівнює 5000.

14. Імовірність того, що будь-який абонент подзвонить на комутатор протягом години, дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 800 абонентів. Яка імовірність того, що протягом години подзвонять 5 абонентів?

15. Товариство складається з 500 осіб. Знайти ймовірність того, що в двох з них день народження припадає на Новий рік. Вважати, що ймовірність народження у фіксований день дорівнює $\frac{1}{365}$.

16. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 100 навмання відібраних монет число монет, розташованих «гербом» догори, буде від 45 до 55?

17. Деяке виробництво дає 1% браку. Яка імовірність того, що з узятих на дослідження 1100 виробів бракованих буде не менше 17?

18. Імовірність проростання насіння даної рослини дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що з 800 посаджених насінин число пророслих буде між 690 і 730.

19. Імовірність появи успіху в кожнім в 625 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що частота появи успіху відхилиться по абсолютній величині від його імовірності 0,5 на абсолютну величину, меншу ніж 0,01.

20. Скільки потрібно зробити дослідів з кидання монети, щоб з імовірністю 0,92 можна було очікувати відхилення частоти випадання „герба” від теоретичної імовірності 0,5 на абсолютну величину, меншу ніж 0,01.

21. В урні знаходяться 20 білих і 5 чорних куль. Послідовно виймають 6 куль, причому після кожного вибору куля повертається до урни (вибір з поверненням). Яка ймовірність того, що серед вибраних куль буде:

а) рівно 4 кулі білих;

б) не менше 4 білих куль.

22. Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обриву пряжі в кожному з веретен за проміжок часу дорівнює 0,005. Знайти:

а) найімовірніше число обривів пряжі і його ймовірність;

б) ймовірність того, що за час буде більше 10 обривів.

23. Проведено 20 пострілів по цілі. Імовірність влучення при одному пострілі 0,7. Обчислити:

а) ймовірність того, що буде принаймні одне влучення;

б) найімовірніше число влучень та його ймовірність

24. Що більш імовірно: виграти у гравця (рівного собі за силою гри) 4 партій із 8, чи 3 партії з 5?

25. У перші класи потрібно прийняти 200 дітей. Яка ймовірність того, що серед них 0,50 дівчаток, якщо імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

26. У навмання вибраній сім'ї 6 дітей. Народження дівчинки і хлопчина рівноймовірне. Знайти ймовірність того, що в цій сім'ї виявиться:

а) 4 хлопчика та 2 дівчинки;

б) не більш 2-х хлопчиків.

27. Імовірність виготовлення на автоматичному станку стандартного виробу дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів три будуть стандартними.

28. По даним технологічного контролю в середньому 2% виготовляють на заводі потребують деякого регулювання. Знайти ймовірність того, що з 300 виготовлених годинників 290 потребують регулювання.

29. Імовірність виготовлення деталі першого сорту на якомусь станку дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 100 деталів виявиться 55 – першого сорту.

30. Сходження насіння даної рослини оцінюється з імовірністю 0,9. Яка ймовірність того, що з 900 посаджених насінин зійде насіння із проміжку між 790 і 830 насінин.

Завдання 4

Серед N виробів знаходяться M бракованих. Навмання беруть n виробів. Нехай X – число появ бракованих виробів. Знайти :*а*) закон розподілу дискретної випадкової величини X, побудувати графік; *б*) математичне сподівання $M(X)$; *в*) дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(-2X)$.

Завдання 5

Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(X)=\begin{cases}0 & \text{при } x \le a \\ \dfrac{(x-c)^2}{k} & \text{при } a < x \le b \\ 1 & \text{при } x > b.\end{cases}$$

Знайти:

а) щільність розподілу $f(x)$ і побудувати графік;

б) ймовірність попадання в проміжок $(\alpha;\beta)$,

в) математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$.

Завдання 6

Відомі математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ нормально розподіленої випадкової величини X.Знайти: *а)* ймовірність того, що X набуває значення з інтервалу $\alpha,\beta)$;*в*) ймовірність того, що відхилення $|X-a|$ буде менше δ.

Завдання 7

Щільність розподілу ймовірності випадкової величини X дорівнює

$$f(X)=\begin{cases}0, & \text{коли } x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } a < x \le b, \\ 0, & \text{коли } x > b.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу та побудувати її графік. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Завдання 8

Задані середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X, вибіркова середня $\overline{X}$, об’єм вибірки n. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання a з заданою надійністю $\gamma = 0{,}95$.

15. Таблиці даних до задач

Таблиця до задачі № 4

Вар.	N	M	n
1	25	6	3
2	20	7	4
3	22	4	3
4	18	6	5
5	15	4	2
6	21	5	3
7	23	6	4
8	19	5	4
9	17	7	2
10	20	8	5
11	18	7	4
12	15	5	3
13	25	7	4
14	26	8	3
15	27	10	4
16	28	9	2
17	25	8	3
18	24	7	4
19	22	6	3
20	23	7	2
21	18	5	4
22	15	7	5
23	16	5	3
24	20	7	4
25	19	8	5
26	22	5	3
27	18	6	3
28	17	8	3
29	21	6	4
30	23	8	3

Таблиця до задачі № 5

Вар.	a	b	c	k	α	β
1	3	4	3	1	2	3.5
2	–3	0	–3	9	–2	1
3	1	2	1	1	1.5	2
4	2	4	2	4	3	4

5	1	3	1	4	0	2
6	0	4	0	16	1	3
7	–1	2	–1	9	0	4
8	–2	0	–2	4	–1	1
9	4	7	4	9	3	6
10	–2	3	–2	25	0	5
11	3	5	3	4	2	4
12	–4	–1	–4	9	–2	3
13	0	6	3	9	–1	1
14	1	5	1	16	3	6
15	3	5	3	4	4	6
16	2	5	2	9	3	5
17	4	8	4	16	1	5
18	6	8	6	4	5	7
19	–1	0	–1	1	–2	0
20	–3	1	–3	16	0	1
21	0	3	0	9	2	5
22	–2	2	–2	16	1	4
23	–4	0	–4	16	–1	4
24	–1	1	–1	4	0	3
25	2	3	2	1	3	6
26	3	4	3	1	1	3
27	5	10	5	25	8	9
28	–5	–2	–5	9	–2	0
29	–2	1	–2	9	0	3
30	–1	4	–1	25	1	2

Таблиця до задачі № 6

Вар.	a	σ	α	β	σ
1	6	2	4	8	2
2	15	2	9	19	3
3	14	4	10	20	4
4	13	4	11	21	8
5	12	5	12	22	10
6	11	4	13	23	6
7	10	8	14	18	2
8	9	3	9	18	6
9	8	4	8	12	8
10	7	2	6	10	4
11	6	2	4	12	4
12	10	4	2	13	3

13	9	5	5	14	10
14	8	1	4	9	3
15	7	2	3	10	5
16	6	3	2	11	6
17	5	1	1	12	3
18	4	5	2	11	10
19	3	2	3	10	4
20	2	5	4	9	10
21	2	4	5	10	9
22	5	2	6	12	5
23	8	3	9	16	6
24	10	6	12	20	12
25	12	6	8	16	12
26	6	3	5	13	6
27	7	3	6	15	7
28	9	5	4	12	10
29	11	4	12	22	8
30	13	5	12	20	10

Таблиця до задачі **№ 7**

Вар.	*a*	*B*
1	2	5
2	1	4
3	5	8
4	6	9
5	1	2
6	2	6
7	–2	4
8	3	8
9	2	5
10	3	6
11	3	7
12	6	8
13	–2	2
14	0	4
15	6	10
16	4	8
17	4	7
18	5	8
19	5	15
20	3	5
21	2	6

22	–1	2
23	1	6
24	2	4
25	2	5
26	3	8
27	–2	3
28	0	5
29	–1	1
30	–1	0

Таблиця до задачі № 8

Вар.	σ	$\overline{X}$	Π
1	10	18,21	225
2	9	18,31	49
3	8	18,41	36
4	7	18,51	100
5	6	18,61	81
6	5	18,71	25
7	4	18,81	256
8	3	18,91	49
9	2	20,01	36
10	1	20,11	64
11	3	19,11	121
12	5	18,91	144
13	7	19,21	81
14	9	19,31	49
15	8	19,41	289
16	4	19,51	169
17	2	19,61	36
18	6	19,71	81
19	3	19,81	64
20	1	20,21	100
21	9	20,31	169
22	7	20,41	196
23	6	20,51	324
24	8	20,61	100
25	5	20,71	64
26	7	20,81	100
27	8	20,91	81
28	6	12,2	36
29	5	11,0	100
30	10	15,91	100

16. Правила виконання та оформлення індивідуальних робіт

При виконанні індивідуальних робіт необхідно строго дотримуватися вказаних нижче правил. Роботи, що виконані без дотримання цих правил, не зараховуються та повертаються студенту для переробки.

1. Контрольну роботу необхідно виконувати у зошиті та залишати поля для зауважень викладача.

2. На обкладинці зошита повинно бути розбірливо написане прізвище студента, його ініціали, назва дисципліни, номер варіанта.

3. У роботу повинні бути включені всі задачі, що вказані у завданні, строго свого варіанта. Контрольні роботи, що містять задачі не свого варіанта, не зараховуються.

4. Розв'язок задач потрібно розташовувати в порядку номерів, що вказані у завданнях, та зберігати номери задач.

5. Перед розв'язком кожної задачі необхідно виписати повністю її умову.

6. Розв'язки задач необхідно викладати докладно і акуратно, пояснюючи та мотивуючи усі дії по ходу розв'язання, при потребі робити креслення.

7. Після одержання перевіреної роботи студент повинен виправити всі помилки та віддати на повторну перевірку. Вносити виправлення в сам текст роботи після перевірки забороняється. Всі виправлення потрібно робити в зошиті після основної роботи.

17. Список рекомендованої літератури

1. Полевич В. В. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики / В. В. Полевич. – Х. : ХДУХТ, 2007.

2. Барковський В. В. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський. – К. : КНАУ, 2006.

3. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2010.

4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистики / В. Е. Гмурман. – М. : Высшая школа, 2004.

5. Кулинич Г. Л. Вища математика. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулинич. – К. : Либідь, 2003.

Додаток А

Таблиця А.1 – **Значення функції** $p(k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ **(розподіл Пуассона)**

γ/k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0.	0,904837	0,818731	0,740818	0,670329	0,606531	0,548812
1.	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2.	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075846	0,098786
3.	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4.	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5.		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6.			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7.					0,000001	0,000003
γ/k	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0.	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1.	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2.	0,121663	0,143785	0,164661	0,013940	0,270671	0,224042
3.	0,029388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4.	0,000968	0,007669	0,11115	0,015328	0,090224	0,168031
5.	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6.	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7.	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
γ/k	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0.	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1.	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2.	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3.	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014998
4.	0,195367	0,175467	0,133853	0,091266	0,057252	0,033737
5.	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6.	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7.	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8.	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9.	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10.	0,005292	0,018133	0,041303	0,070988	0,099262	0,118580
11.	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12.	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13.	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14.	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15.	0,000015	0,000157	0,000819	0,003311	0,009026	0,019431
16.	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17.	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786

Таблиця А.2 – **Значення функції щільності нормального закону розподілу**

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
0.0	0,3989	1.0	0,2420	2.0	0,0540	3.0	0,0044
0.1	0,3970	1.1	0,2179	2.1	0,0440	3.1	0,0033
0.2	0,3910	1.2	0,1942	2.2	0,0355	3.2	0,0024
0.3	0,3814	1.3	0,1714	2.3	0,0283	3.3	0,0017
0.4	0,3683	1.4	0,1497	2.4	0,0224	3.4	0,0012
0.5	0,3521	1.5	0,1295	2.5	0,0175	3.5	0,0009
0.6	0,3332	1.6	0,,1109	2.6	0,0136	3.6	0,0006
0.7	0,3123	1.7	0,0940	2.7	0,0104	3.7	0,0004
0.8	0,2897	1.8	0,0700	2.8	0,0079	3.8	0,0003
0.9	0,2661	1.9	0,0656	2.9	0,0060	3.9	0,0002

Таблиця А.3 – **Значення** $t_\gamma = t(\gamma,\ n)$

γ / k	0,95	0,99	0,999	γ / k	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблиця А.4 – **Значення функції Лапласа** $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0,00000	1.1	0,36433	2.1	0,48214	3.1	0,49903
0.1	0,03983	1.2	0,38493	2.2	0,48610	3.2	0,49931
0.2	0,07926	1.3	0,40320	2.3	0,48928	3.3	0,49952
0.3	0,11791	1.4	0,41924	2.4	0,49180	3.4	0,049966
0.4	0,15542	1.5	0,43319	2.5	0,49379	3.5	0,49977
0.5	0,19146	1.6	0,44520	2.6	0,49534	3.6	0,49984
0.6	0,22575	1.7	0,45543	2.7	0,49653	3.7	0,49989
0.7	0,25804	1.8	0,46407	2.8	0,49744	3.8	0,49993
0.8	0,28814	1.9	0,47128	2.9	0,49814	3.9	0,49995
0.9	0,31594	2.0	0,47725	3.0	0,49865	4.0	0,49968
1.0	0,34134					4.5	0,499997
						5.0	0,49999997

ЗМІСТ

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Частина 2

Методичні вказівки для організації самостійної роботи
та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами
денної форми навчання за спеціальностями:
051 «Економіка», 292 «Міжнародні економічні відносини»,
075 «Маркетинг», 071 «Облік і оподаткування»,
072 «Фінанси, банківська справа та страхування»

Укладачі:
СОФРОНОВА Марина Сергіївна
СИМОНЕНКО Валентина Іванівна

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін д-р техн. наук, проф. М. І. Погожих

Техн. редактор Л. Ю. Кротченко

План 2018 р., поз. 85

Підп. до друку 24.04.2018 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об’єм даних 0,8 Мб. Тираж 10 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.