МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

Таблиці та узагальнення з курсу вищої математики
для студентів усіх спеціальностей

Частина 1

Харків
ХДУХТ
2018

Вища математика: методичні вказівки. Таблиці та узагальнення з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей. Частина 1 [Електронний ресурс] / укл. В. В. Сєдунова. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2018 . – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладач: В. В. Сєдунова

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. С. Софронова

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено науково-методичною комісією ФОТС

(шифр, назва)

Протокол від «21» червня 2017 року № 5

Схвалено вченою радою ХДУХТ

Протокол від «28» грудня 2017 року № 6

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ

Протокол від «27» грудня 2017 року № 7

ЗМІСТ

ВСТУП

Шановний читачу!

У цьому посібнику всі теоретичні дані, що вивчаються в курсі вищої математики, систематизовані та подані у вигляді таблиць. Таким чином, ви завжди можете знайти потрібну формулу або властивість, або відповідь на запитання, яке вас цікавить. Окрім того, таке подання систематизує знання, проявляє зв'язки та залежності, можливо, не помічені одразу. Такий посібник буде корисний і при розв'язуванні задач, і при підготовці до екзамену, і надалі, коли в курсі «Фізики» чи «Механіки», «Електротехніки» або «Економічної теорії» потрібно буде швидко пригадати властивості векторів або матриць. Власне, він може стати корисним і надалі, у професійній діяльності, адже знайомство з математикою можна продовжувати нескінченно.

Успіхів вам!

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

МАТРИЦІ

Матрицею розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпчиків:

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left\| a_{ij} \right\|, \quad \begin{array}{l} i = \overline{1,m}; \\ j = \overline{1,n}. \end{array}$$

a_{ij} – елементи матриці;

i – номер рядка;

j –номер стовпчика.

$m \neq n$,
A – *прямокутна матриця*

$m = n$,
A – *квадратна матриця*

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A, B - \text{однакової розмірності} \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Види матриць

Матриця – рядок

$$A = \left(a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}\right)$$

Матриця – стовпчик

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$$

Нульова матриця

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Одинична матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Додавання матриць

$$\underset{m\times n}{A}+\underset{m\times n}{B}=\|a_{ij}\|+\|b_{ij}\|=\|c_{ij}\|=\underset{m\times n}{C}$$

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}+\underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. $A+B=B+A$
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$
3. $A+0=A$

Множення матриці на число

$$\alpha A=\alpha\|a_{ij}\|=\|\alpha a_{ij}\|,\qquad i=\overline{1,m},\qquad j=\overline{1,n}$$

$$\alpha\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
2. $(A+B)\cdot\alpha=\alpha A+\alpha B$
3. $\alpha\beta A=(\alpha A)\beta$
4. $A\cdot 0=0$

Транспонування матриць

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\qquad \underset{n\times m}{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Властивості

1. $\left(A^T\right)^T=A$
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
3. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Множення матриць

$$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times k}{B}=\underset{m\times k}{C}$$ («ширина» матриці A = «висоті» матриці B)

$C=\left\|c_{ij}\right\|,$ де

$$c_{ij}=\left(a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}\right)\cdot\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \ldots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}\cdot\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}}=\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}}$$

Властивості

1. $(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
2. $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
4. $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B=A\cdot(\alpha B)$
5. $A\cdot B\neq B\cdot A$
6. $A\cdot E=E\cdot A=A$
7. $(AB)^T=B^T\cdot A^T$

Піднесення до степеня

A – квадратна матриця

$$A^m=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{m-\text{раз}}$$

Властивості

1. $A^0=E$
2. $A^1=A$
3. $A^m\cdot A^k=A^{m+k}$
4. $\left(A^m\right)^k=A^{mk}$

ОПЕРАЦІЇ НАД МАТРИЦЯМИ

Обернена матриця

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де Δ – визначник матриці A $(\Delta \neq 0)$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці *A*. $A \cdot$

$A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Ранг матриці

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to$$

Ранг матриці *A* (rang *A*) – найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1k} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rk} \end{pmatrix} \to \text{rang } B = r.$$

B – трикутна матриця,

$b_{ij} \neq 0, \quad i=\overline{1,r}, \quad r<k$

ВИЗНАЧНИКИ

Визначники другого порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \det A = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \text{число}$$

$$\Delta_2 = \overset{+}{\vphantom{a}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

побічна діагональ   головна діагональ

Визначники третього порядку

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \to \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{число}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Властивості визначників

1. Визначник не зміниться, якщо його рядки замінити стовпчиками і навпаки (тобто транспонувати).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2. При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник змінює знак на протилежний

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

ВИЗНАЧНИКИ

Властивості визначників

3. Загальний множник усіх елементів рядка (стовпчика) можна виносити за знак визначника.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4. Визначник, що має два однакові рядки (стовпчика), рівний нулю.

   4.1. Якщо всі елементи двох рядків (стовпчиків) пропорційні, то визначник рівний нулю.

5. Якщо всі елементи рядка (стовпчика) рівні нулю, то визначник рівний нулю.

6. Якщо у визначника елементи будь-якого рядка (стовпчика) складаються з 2-х доданків, то такий визначник рівний сумі 2-х визначників, у першого з яких відповідними елементами є перші доданки, у другого – другі:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b \\ a_{21} & a_{22}+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b \\ a_{21} & c \end{vmatrix}.$$

7. Визначник не зміниться, якщо до його елементів будь-якого рядка (стовпчика) додати елементи другого рядка (стовпчика), помножені на одне і те ж число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \overset{\times k}{\curvearrowright} + = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} \end{vmatrix}.$$

ВИЗНАЧНИКИ

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Мінор елемента a_{ij} визначника Δ – це визначник, отриманий з данного шляхом викреслювання i-ого рядка – j-го стовпчика. Позначається Mij .

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника Δ – це минор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$. Позначається A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Властивості визначників

8. *(Розкладання визначника по елементам рядка (стовпчика))* визначник рівний сумі добутків елементів рядка (стовпчика) на відповідні їм алгебраїчні доповнення

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}.$$

9. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) визначника на алгебраїчні доповнення другого рядка (стовпчика) рівна нулю

$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0.$$

Визначники n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \to \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Системи лінійних рівнянь

Система m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

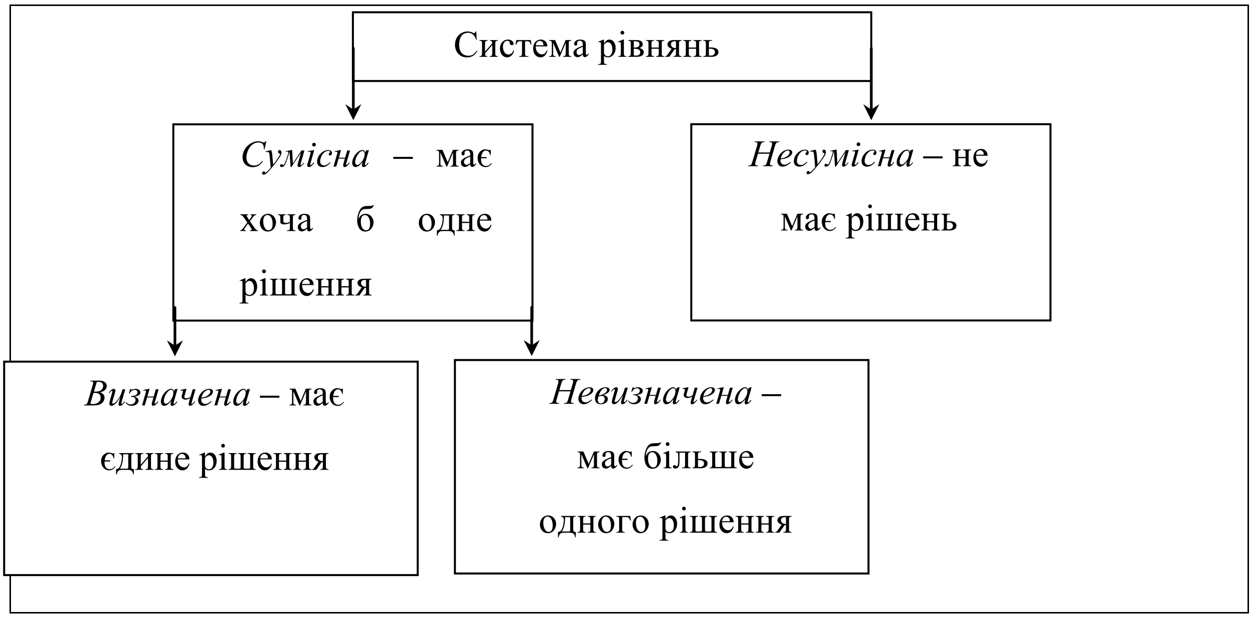
де $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – невідомі;

a_{ij} $\left(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n}\right)$ – коефіцієнти при невідомих;

b_i – вільні члени

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *розвязок системи*, тобто набір чисел, при підстановці яких в систему кожне рівняння системи перетворюється на рівність.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$ – однорідна система



СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Способи розвязання систем лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

1. *Формули Крамера*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \qquad x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

2. *Матричний спосіб*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

(матриця системи)

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

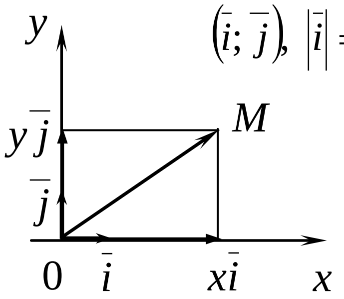
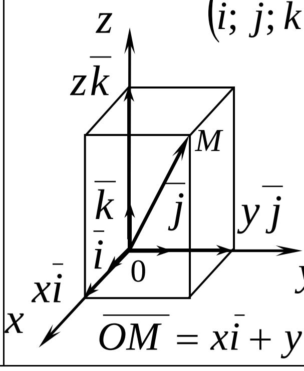
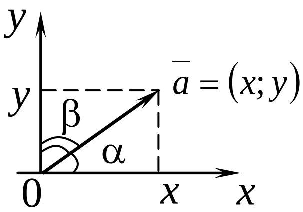
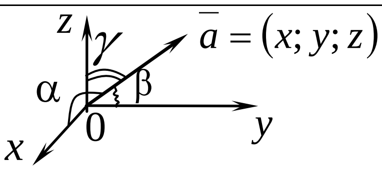
3. *Метод Гаусса*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$ – розширена матриця системи.

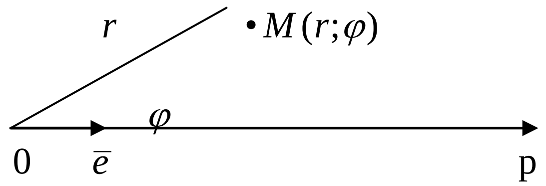
Привести розширену матрицю до трикутного виду, використовуючи наступні перетворення:

1. Викреслювання нульового рядка.
2. Перестановка рядків (розширеної матриці), стовпчиків (матриці системи).
3. Множення рядка розширеної матриці на число, відмінне від нуля.
4. Додавання до одного рядка розширеної матриці іншого рядка, помноженого на число, відмінне від нуля.

ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

ВЕКТОРИ В ПРЯМОКУТНИХ КООРДИНАТАХ	
ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ	ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ
$(\bar{i};\ \bar{j}),\ \lvert\bar{i}\rvert = \lvert\bar{j}\rvert = 1,\ \bar{i} \perp \bar{j}$  $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} = (x\,;\,y)$	$(\bar{i};\ \bar{j};\ \bar{k}),\ \lvert\bar{i}\rvert = \lvert\bar{j}\rvert = \lvert\bar{k}\rvert = 1,$ $\bar{i} \perp \bar{j}, \bar{i} \perp \bar{k}, \bar{j} \perp \bar{k}$  $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x\,;\,y;\,z)$
Координати вектора	
$A(x_1;y_1),\ B(x_2;y_2)$ $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\,y_2 - y_1)$	$A(x_1;y_1;z_1),\ B(x_2;y_2;z_2)$ $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\,y_2 - y_1;\,z_2 - z_1)$
Довжина вектора	
$\bar{a} = (x;\,y),\quad \lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\bar{a} = (x;\,y,\,z),\quad \lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Дії над векторами	
$\bar{a} = (x_1;y_1),\quad \bar{b} = (x_2;y_2),$ $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2;\,y_1 \pm y_2),$ $k\bar{a} = (kx_1;\,ky_1)$	$a = (x_1;y_1;z_1),\quad \bar{b} = (x_2;y_2,z_2),$ $\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2;\,y_1 \pm y_2;\,z_1 \pm z_2),$ $k\bar{a} = (kx_1;\,ky_1;\,kz_1)$
Ознака колінеарності векторів	
$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \pm\dfrac{\lvert\bar{a}\rvert}{\lvert\bar{b}\rvert}$	$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = \pm\dfrac{\lvert\bar{a}\rvert}{\lvert\bar{b}\rvert}$
Напрямні косинуси	
 $\cos\alpha = \dfrac{x}{\lvert\bar{a}\rvert};\qquad x = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \cos\alpha$ $\cos\beta = \dfrac{y}{\lvert\bar{a}\rvert};\qquad y = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \cos\beta$	 $\cos\alpha = \dfrac{x}{\lvert\bar{a}\rvert};\qquad x = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \cos\alpha$ $\cos\beta = \dfrac{y}{\lvert\bar{a}\rvert};\qquad y = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \cos\beta$ $\cos\gamma = \dfrac{z}{\lvert\bar{a}\rvert};\qquad z = \lvert\bar{a}\rvert \cdot \cos\gamma$

ПОЛЯРНА СИСТЕМА КООРДИНАТ



де O – полюс;

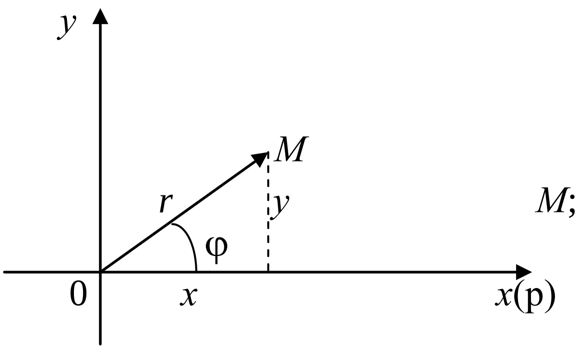
Op – полярна;

r – полярний радіус, $r \in [0;\infty)$;

φ – полярний кут, $-\pi < \varphi \le \pi$ (або $0 \le \varphi < 2\pi$)

$M\,(r;\varphi)$ – координати точки M в полярних координатах

Зв`язок між прямокутними і полярними координатами



$(x;\,y)$ – прямоукутні координати M; $(r;\varphi)$ – полярні координати M

Формули переходу від прямокутних до полярних координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x},$$

(визначаючи величину φ, слід встановити чверть, в якій лежить шуканий кут, і враховувати, що $-\pi < \varphi \le \pi$)

Формули переходу від полярних до прямокутних координат

$$x = r \cdot \cos\varphi,$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

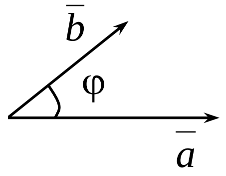
НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Скалярний добуток

Визначення

$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi$ – число,

$\varphi=\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right)$ – кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$



Властивості

1. $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$
2. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$
3. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$
4. $(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot\bar{c}+\bar{b}\cdot\bar{c}$
5. $\bar{a}\perp\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\cdot\bar{b}=0$

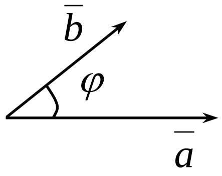
Координатна форма

$$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1),\quad \bar{b}=(x_2,y_2,z_2)$$

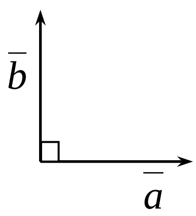
$$\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

Застосування

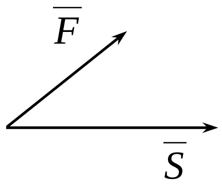
1. Кут між векторами:



$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$$



2. Ознака перпендикулярності: $\bar{a}\perp\bar{b}$ $\Leftrightarrow \bar{a}\cdot\bar{b}=0$



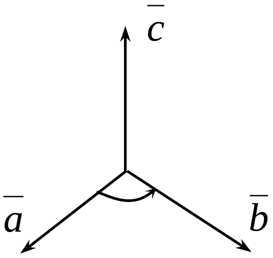
3. Робота: $A=\bar{F}\cdot\bar{S}$
4. Проекція вектора: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\,np_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\,np_{\bar{b}}\bar{a}$

НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Векторний добуток

Визначення

$\bar{c}=\bar{a}\times\bar{b}$ – вектор, що задовольняє умовам:



1. $|\bar{c}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\left(\widehat{\bar{a};\bar{b}}\right)$;

2. $\bar{c}\perp\bar{a}$, $\bar{c}\perp\bar{b}$;

3. $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ – права трійка

Властивості

1. $\bar{a}\times\bar{b}=-\bar{b}\times\bar{a}$
2. $\lambda\bar{a}\times\bar{b}=\lambda\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$
3. $\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\times\bar{c}=\bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}$
4. $\bar{a}\times\bar{a}=0$
5. $\bar{a}\|\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$

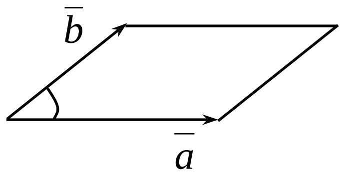
Координатна форма

$$\bar{a}=(x_1,y_1,z_1),\quad \bar{b}=(x_2,y_2,z_2)\qquad \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Застосування

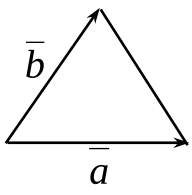
1. Площа паралелограмма:

$$S=\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$



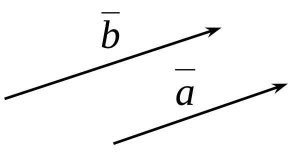
2. Площа трикутника:

$$S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$



3. Ознака колінеарності:

$$\bar{a}\|\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=0$$



НЕЛІНІЙНІ ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

Мішаний добуток

Визначення

$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$ – число.

Властивості

1. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = -\overline{b}\overline{a}\overline{c}$
2. $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}$
3. $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – компланарні $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

Координатна форма

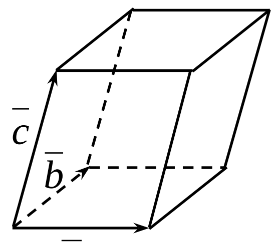
$$\overline{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \overline{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \overline{c} = (x_3, y_3, z_3)$$

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Застосування

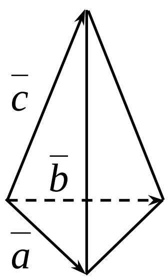
1. Об\`єм паралелепіпеда:

$$V = \left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = S_{\text{осн}} \cdot h$$



2. Об\`єм трикутної піраміди (тетраедра):

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h$$

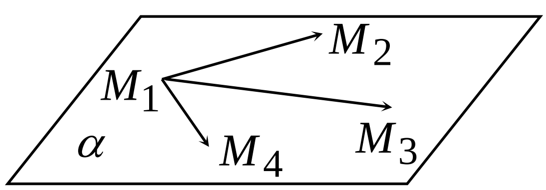


3. Ознака компланарності:

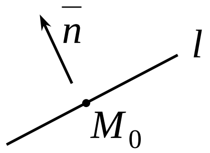
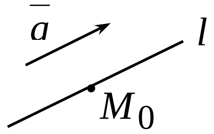
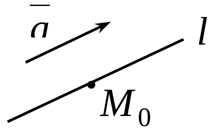
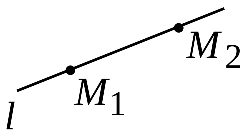
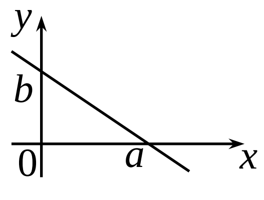
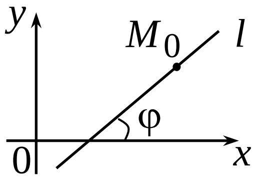
$\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ –компланарні $\Leftrightarrow \overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

4. Умова приналежності чотирьох точок до однієї площини

$$M_1, M_2, M_3, M_4 \in \alpha \Leftrightarrow$$
$$\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_1M_4} = 0$$



АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

<table>
<tr><td colspan="2">ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння прямої, що проходить через точку і перпендикулярна вектору</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\overline{n}=(A;B),\quad M_0(x_0,y_0),\quad \overline{n}\perp l$
$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Загальне рівняння прямої</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Ax+By+C=0 \qquad \overline{n}=(A;B)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Канонічне рівняння прямої</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\overline{a}=(p;q) \qquad M_0(x_0;y_0)$
$\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Параметричні рівняння прямої</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$x=x_0+pt, \qquad M_0(x_0;y_0),$
$y=y_0+qt; \qquad \overline{a}=(p;q)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Рівняння прямої, що проходить через дві точки</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$M_1(x_1;y_1),\quad M_2(x_2;y_2),$
$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Рівняння прямої у відрізках</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Рівняння прямої, що проходить через точку і з кутовим коефіцієнтом</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$M_0(x_0;y_0),\quad k=tg\varphi$
$y-y_0=k(x-x_0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y=kx+b$</td></tr>
</table>

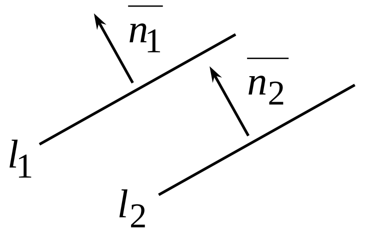
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Взаємне розташування прямих на площині

Дано: $l_1: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \bar{n} = (A_1; B_1), \quad k_1 = -\dfrac{A_1}{B_1}$

$l_2: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad \bar{n} = (A_2; B_2), \quad k_2 = -\dfrac{A_2}{B_2}$

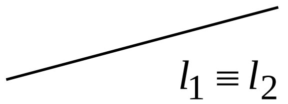
Ознака паралельності прямих



$$l_1 \parallel l_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \;\Leftrightarrow$$

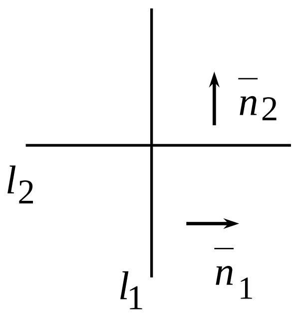
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{або} \quad k_1 = k_2$$

Ознака збігаючихся прямих



$$l_1 \equiv l_2 \;\Leftrightarrow\; \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

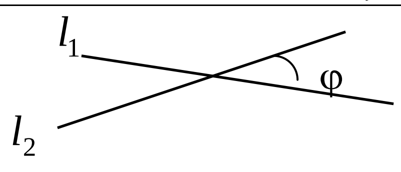
Ознака перпендикулярності прямих



$$l_1 \perp l_2 \;\Leftrightarrow\; \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \;\Leftrightarrow$$

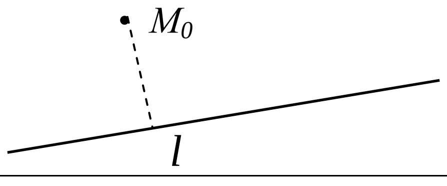
$$\Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \text{ або } \quad k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

Кут між прямими



$$cos\varphi = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} \text{ або } \quad tg\varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

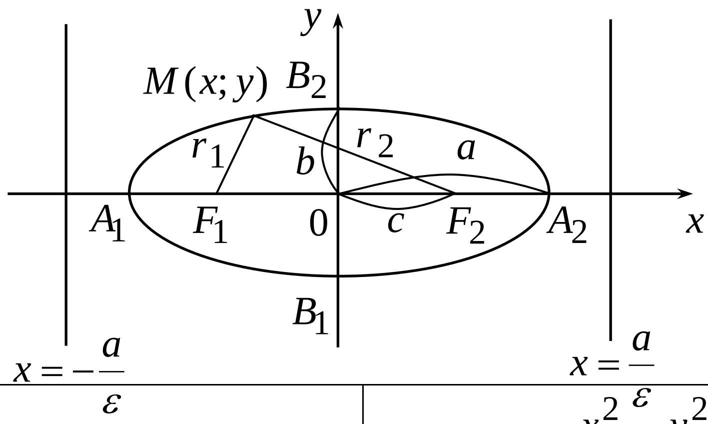
Відстань від точки до прямої



$l \;:\; Ax + By + C = 0, \qquad M_0(x_0; y_0)$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

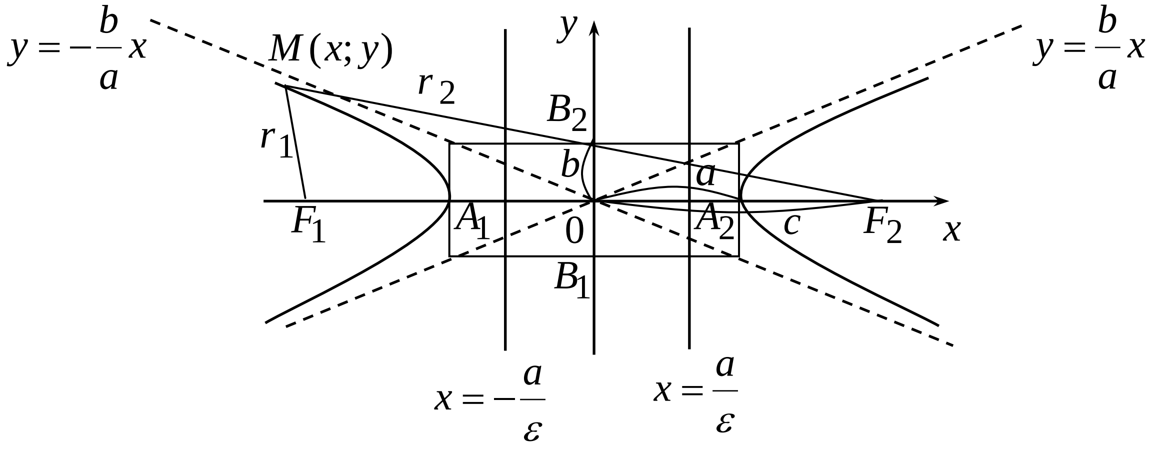
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ



1. Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Зв`язок між a, b, c	$b^2=a^2-c^2$
3. Вершини еліпса	$A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$ $B_1(0;-b),\ B_2(0;b)$
4. Велика вісь $[A_1A_2]$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
5. Мала вісь $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокуси	$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$
7. Фокусна відстань	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}<1$
9. Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Фокальні радіуси	$r_1=a+\varepsilon\cdot x$ $r_2=a-\varepsilon\cdot x$

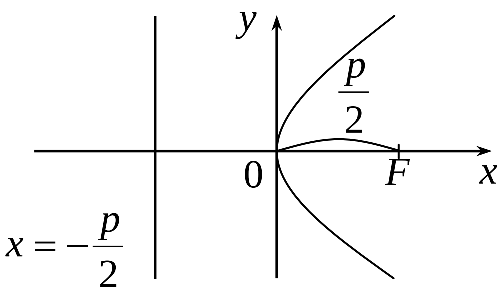
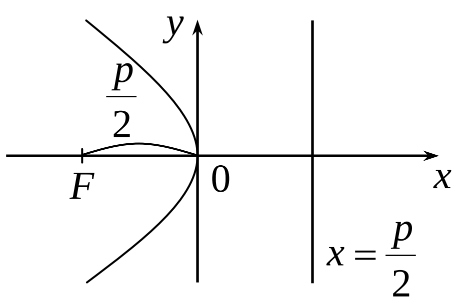
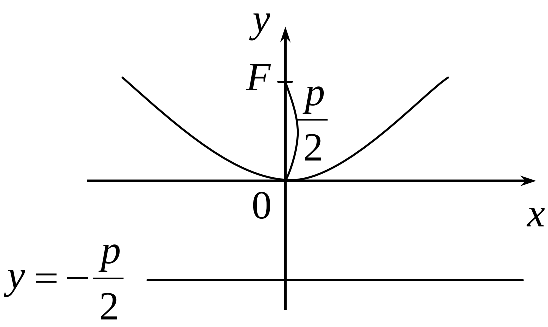
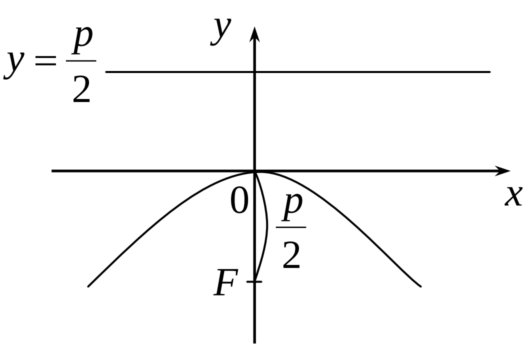
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Гіпербола

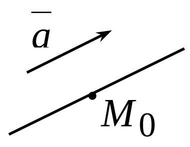


1. Рівняння	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
2. Зв`язок між a,b,c	$b^2=c^2-a^2$
3. Вершини гипербол	$A_1(-a;0),\ A_2(a;0)$
4. Дійсна вісь $[A_1A_2]$	$\lvert A_1A_2\rvert=2a$
5. Уявна вісь $[B_1B_2]$	$\lvert B_1B_2\rvert=2b$
6. Фокуси	$F_1(-c;0),\quad F_2(c;0)$
7. Фокусна відстань	$\lvert F_1F_2\rvert=2c$
8. Ексцентриситет	$\varepsilon=\frac{c}{a}>1$
9. Директриси	$x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$
10. Асимптоти	$y=\pm\frac{b}{a}x$
11. Фокальні радіуси для правої гілки лівої гілки	 $r_1=\varepsilon\cdot x+a,\ r_2=\varepsilon\cdot x-a$ $r_1=-(\varepsilon\cdot x+a),\ r_2=-(\varepsilon\cdot x-a)$
12. Рівнобічна гіпербола	$x^2-y^2=a^2$
13. Спряжена гіпербола	$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

<table>
<tr><th colspan="3">Парабола</th></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$y^2 = 2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x=-\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$y^2 = -2px$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(-\frac{p}{2};0\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$x=\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$x^2 = 2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y=-\frac{p}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">
</td><td>Рівняння</td><td>$x^2 = -2py$</td></tr>
<tr><td>Фокус</td><td>$F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$</td></tr>
<tr><td>Директриса</td><td>$y=\frac{p}{2}$</td></tr>
</table>

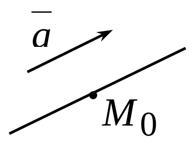
ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Пряма у просторі</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">1. Канонічні рівняння прямої</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$\bar{a}=(p;q;r), \quad M_0(x_0;y_0;z_0)$

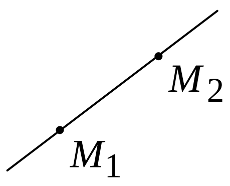
$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">2. Параметричні рівняння прямої</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$\bar{a}=(p;q;r), \quad M_0(x_0;y_0;z_0)$

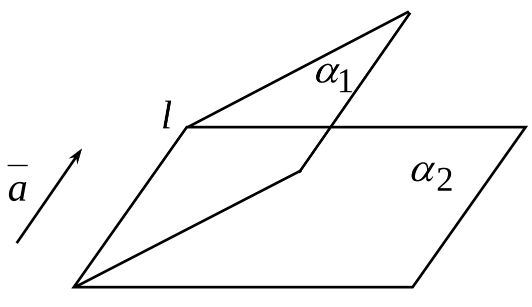
$$x=x_0+pt,$$
$$y=y_0+qt,$$
$$z=z_0+rt$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">3. Рівняння прямої, що проходить через дві точки</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$M_1(x_1;y_1;z_1), \quad M_2(x_2;y_2;z_2)$

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">4. Загальні рівняння прямої
(пряма як лінія перетину площин)</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$\bar{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$

$\bar{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$

$\bar{a}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2$

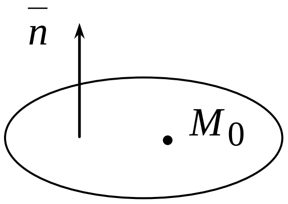
$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

</td></tr>
</table>

ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Рівняння площини

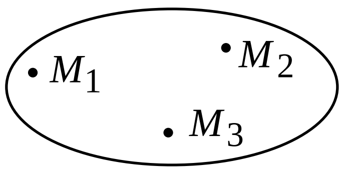
1. *Рівняння площини, що проходить через точку і перпендикулярно вектору*



$$\overline{n} = (A; B; C), \quad M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

2. *Рівняння площини, що проходить через три точки*



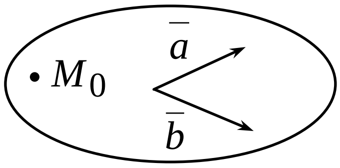
$$M_1(x_1, y_1, z_1), \; M_2(x_2, y_2, z_2), \; M_3(x_3, y_3, z_3)$$

$M(x; y; z)$ – точка з поточними координатами

$$\overline{M_1M} \cdot \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3. *Рівняння площини, що проходить через точку і паралельно двом векторам*



$$M_0(x_0; y_0; z_0)$$

$M(x; y; z)$ – точка з поточними координатами

$$\overline{a} = (p_1; q_1; r_1) \quad \overline{b} = (p_2; q_2; r_2)$$

$$\overline{M_0M} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$$

4. *Загальне рівняння площини*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \overline{n} = (A; B; C)$$

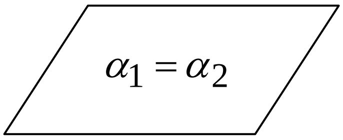
ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Взаємне розташування площин

Дано: $\alpha_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \overline{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$

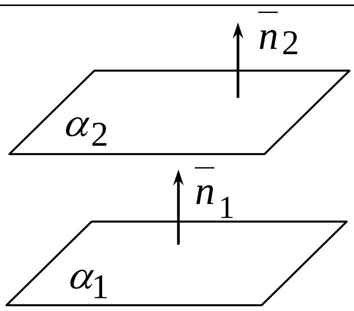
$\alpha_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad \overline{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$

Ознака збігаючихся площин



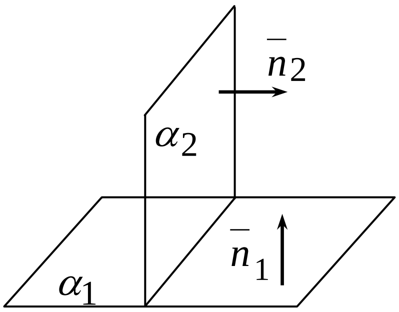
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Ознака паралельності площин



$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Ознака перпендикулярності площин

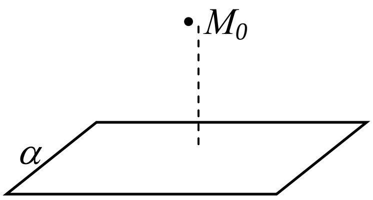


$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Кут між площинами

$$cos\varphi = \frac{\left|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2\right|}{\left|\overline{n}_1\right| \cdot \left|\overline{n}_2\right|}$$

Відстань від точки до площини



$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0, \quad M_0(x_0; y_0; z_0$

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

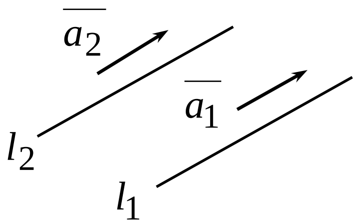
ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Взаємне розташування прямих у просторі

Дано: $l_1:\ \dfrac{x-x_1}{p_1}=\dfrac{y-y_1}{q_1}=\dfrac{z-z_1}{r_1},\quad \overline{a_1}=(p_1;q_1;r_1),\quad M_1(x_1;y_1;z_1)$

$l_2:\ \dfrac{x-x_2}{p_2}=\dfrac{y-y_2}{q_2}=\dfrac{z-z_2}{r_2},\quad \overline{a_2}=(p_2;q_2;r_2),\quad M_2(x_2;y_2;z_2)$

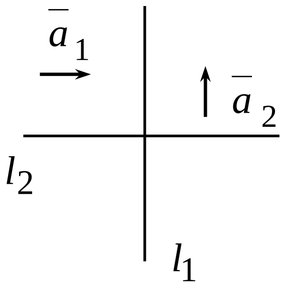
Ознака паралельності прямих



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \parallel \overline{a_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$$

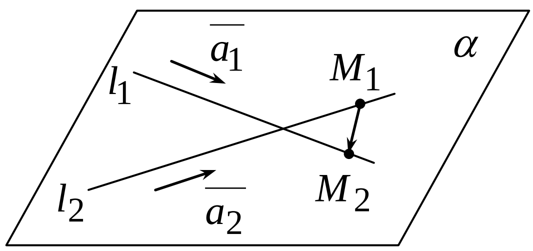
Ознака перпендикулярності прямих



$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{a_1} \perp \overline{a_2} \Leftrightarrow \overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$$

Ознака приналежності прямих до однієї площини

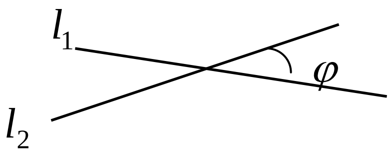


$$l_1, l_2 \subset \alpha \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}=0$$

Ознака перехрещування прямих

$$l_1 \dot{-} l_2 \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}\cdot\overline{a_1}\cdot\overline{a_2}\neq 0$$

Кут між прямими



$$cos\varphi=\frac{|\overline{a}_1\cdot\overline{a}_2|}{|\overline{a}_1|\cdot|\overline{a}_2|}$$

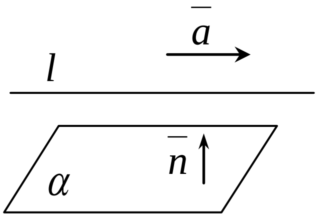
ПРЯМА І ПЛОЩИНА В ПРОСТОРІ

Взаємне розташування прямої і площини

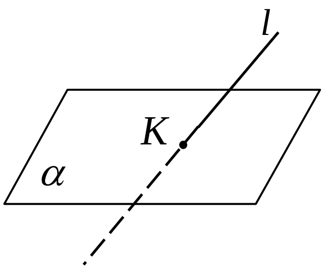
Дано: $l:\ \dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$; $\quad \bar{a}=(p;q;r),\quad M_0=(x_0;y_0;z_0)$

$\alpha: Ax+By+Cz+D=0$; $\quad \bar{n}=(A;B;C)$

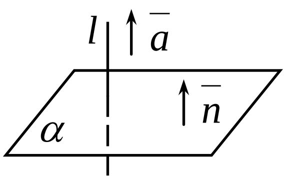
Умова паралельності прямої і площини

	$l \parallel \alpha \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{n} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow Ap+Bq+Cr=0$

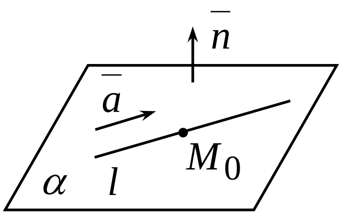
Ознака перетину прямої і площини

	$l \cap \alpha \ \Leftrightarrow\ Ap+Bq+Cr \neq 0$ $l \cap \alpha = K$ $K: \begin{cases} x=x_0+pt \\ y=y_0+qt \\ z=z_0+rt \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$

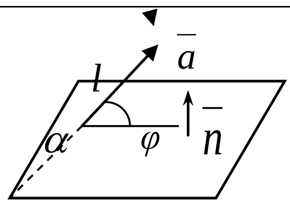
Ознака перпендикулярності прямої і площини

	$l \perp \alpha \Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \dfrac{A}{p}=\dfrac{B}{q}=\dfrac{C}{r}$

Ознака приналежності прямої площині

	$l \subset \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{n} \perp \bar{a}, \\ M_0 \in \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} Ap+Bq+Cr=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

Кут між прямою і площиною

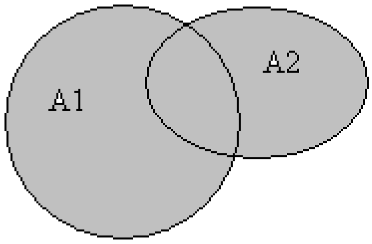
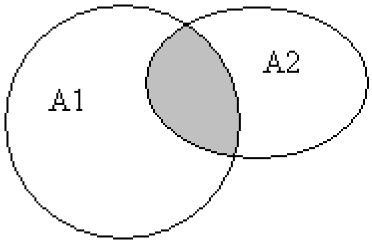
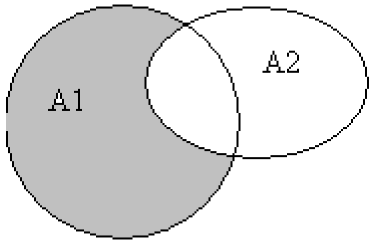
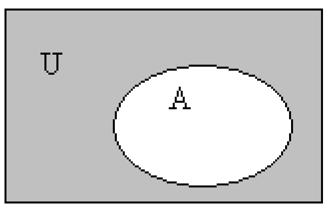
	$\sin\varphi = \dfrac{\lvert \bar{a}\cdot\bar{n}\rvert}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{n}\rvert}$

ЕЛЕМЕНТИ ДИСКРЕТНОЇ МАТЕМАТИКИ

МНОЖИНИ. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Множина – сукупність об`єктів, об`єднаних за певною ознакою.

U – *універсальна множина*, така множина, що усі множини, що розглядаються, є його підмножинами.

Операції над множинами	
Визначення, позначення операції	Зображення діаграмами Ейлера-Венна
Об'єднання	
Об`єднання множин A_1 і A_2 – це множина B , що складається з усіх тих елементів, які належать *хоча б одній* з множин A_1 і A_2 . Позначається: $B = A_1 \bigcup A_2 = \{b \mid b \in A_1$ або $b \in A_2\}$	
Перетин	
Перетин множин A_1 і A_2 – це множина C , що складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать одночасно і A_1 , і A_2 . Позначається: $C = A_1 \bigcap A_2 = \{c \mid c \in A_1$ і $c \in A_2\}$	
Різниця	
Різниця множин A_1 і A_2 – це множина D , що складається тільки з тих елементів множини A_1, які не містяться в A_2. Позначається: $D = A_1 \setminus A_2 = \{d \mid d \in A_1,\ d \notin A_2\}$	
Доповнення	
Доповнення (до U) множини A – це множина $\overline{A}$ усіх елементів, що не належать A, але належать універсальній множині U. Позначається $A = \overline{U} \setminus A$	

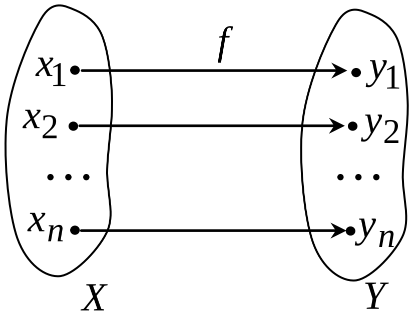
ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАЦІЙ НАД МНОЖИНАМИ

Назва властивості	Символічний запис
1. Комутативність	$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
2. Асоціативність	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивність	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
4. Ідемпотентність	$A \cup A = A$; $A \cap A = A$
5. Закони Де Моргана	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Закони доповнення	$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $\varnothing$ – пустое множина
7. Інволюція (закон подвійного заперечення)	$\overline{\overline{A}} = A$
8. Закони поглинання	$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$
9. Закони, що описують властивості порожньої і універсальної множин відносно об\`єднання і перетину	$A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cup U = U$; $A \cap U = A$

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ФУНКЦІЯ

Поняття функції

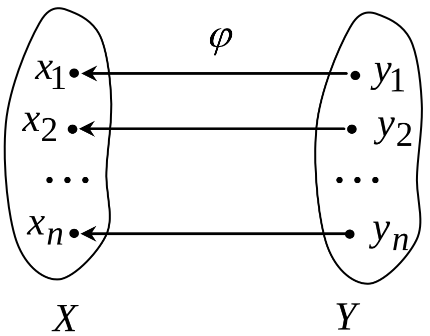


$y = f(x)$ – функція

f – правило (закон), за яким кожному елементу $x \in X$ ставиться у відповідність одне визначене значення $y \in Y$.

X ($D(y)$) – область визначення функції, (множина значень x, для яких існує y).

Y ($E(y)$) – область значення функції, (множина значень y).



$x = \varphi(y)$ – зворотна функція, $y = f^{-1}(x)$.

Правило знаходження $f^{-1}(x)$.

1. З рівняння $y = f(x)$ виразити x через y.
2. В отриманому виразі змінити позначення x на y, а y на x.

$F(x, y) = 0$ – неявна функція (y не виражений через x).

$y = f(\varphi(x))$ – складена функція або функція від функції

Область визначення деяких функцій

Вид функції	Область визначення функції
1. $\dfrac{1}{f(x)}$	$f(x) \neq 0$
2. $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
3. $\log_a f(x)$	$f(x) > 0$
4. $\arcsin f(x)$ $\arccos f(x)$	$-1 \leq f(x) \leq 1$

ФУНКЦІЇ

Основні елементарні функції

1. Степенева функція, $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показникова функція,

   $y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функція, $y = \log_a x$.
4. Тригонометричні функції,
   $y = \sin x$, $y = \cos x$
   $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обернені тригонометричні функції

   $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$
   $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Елементарні функції – функції, утворені з основних елементарних функцій за скінчену кількість алгебраїчних дій та скінченого числа операцій утворення складної функції

Класифікація елементарних функцій

Елементарні функції

Алгебраїчні функції

Цілі – раціональні функції

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

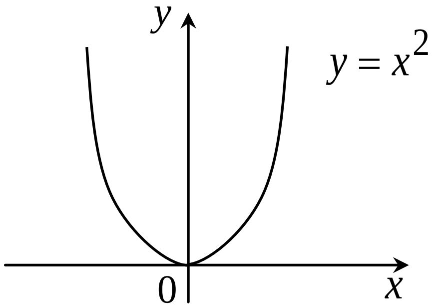
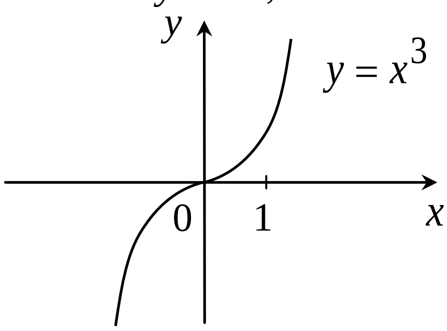
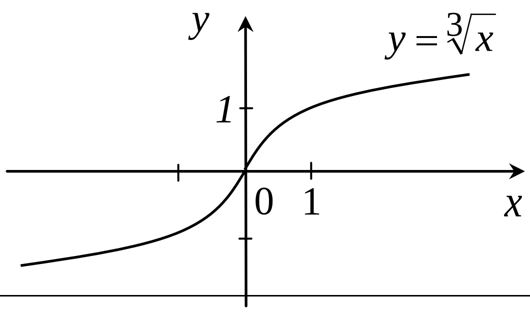
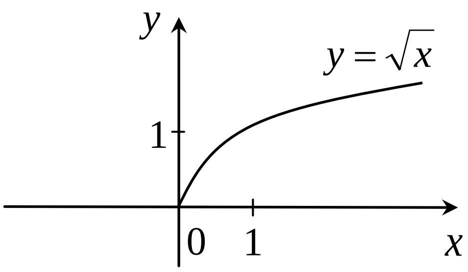
Ірраціональні функції (до складу входить корінь)

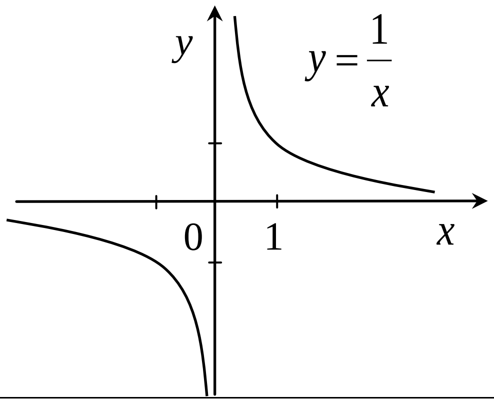
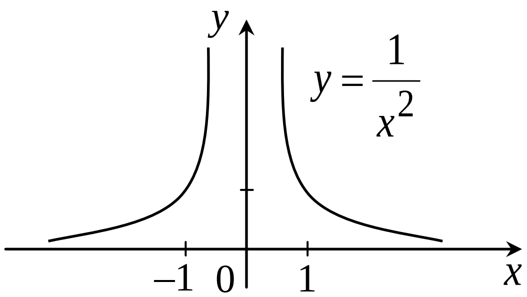
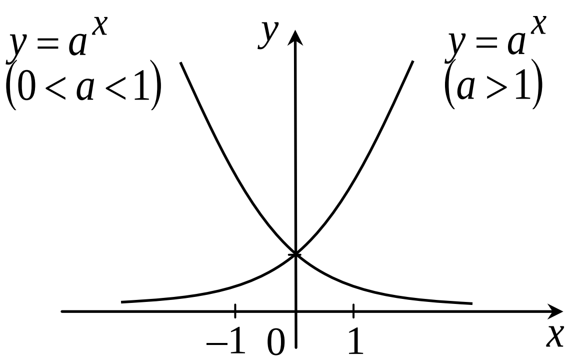
Дробово-раціональні функції

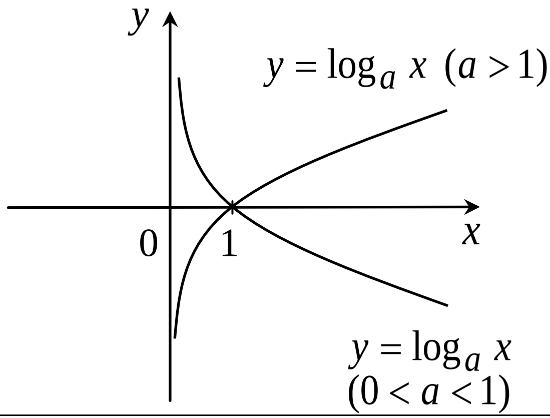
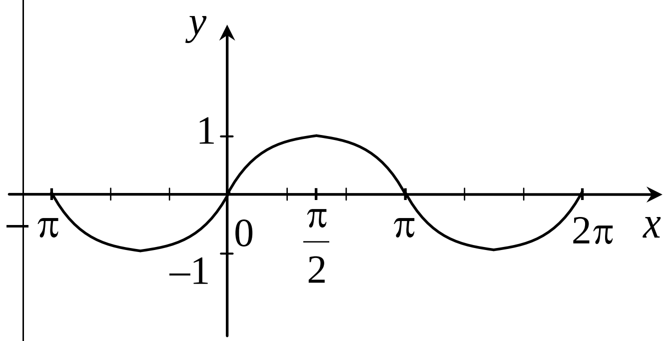
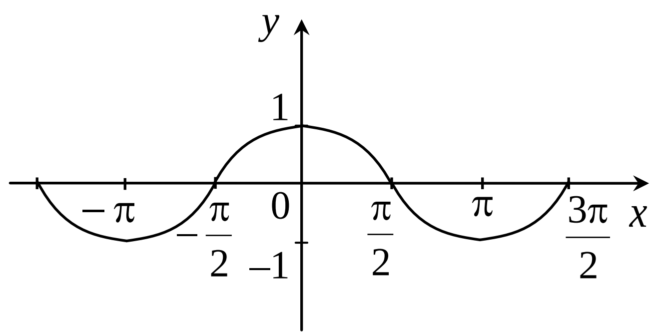
$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

Трансцендентні

(окрім степеневих, містять інші елементарні функції)

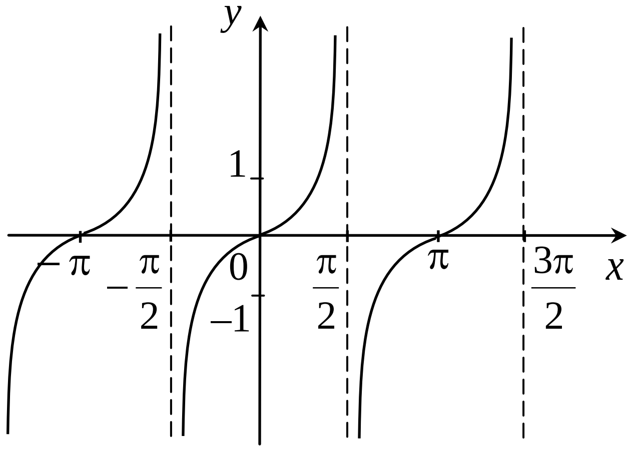
ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ	
Функція та її графік	Властивості функції
1. *Степенева функція* $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$	
$y = x^n, \quad n \in N$ 	n – парне 1. $D(y) = (-\infty;\infty)$ 2. $E(y) = [0; +\infty)$ 3. Парна 4. Неперіодична 5. Зростає на $[0;\infty)$, спадає на $(-\infty;0]$
$y = x^n, \quad n \in N$ 	n – непарне 1. $D(y) = (-\infty;\infty)$ 2. $E(y) = (-\infty;\infty)$ 3. Непарна 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$
$y = \sqrt[n]{x}, \quad n \in N, \quad n > 1$ 	n – непарне 1. $D(y) = (-\infty;\infty)$ 2. $E(y) = (-\infty;\infty)$ 3. Непарна 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$
	n – парне 1. $D(y) = [0;\infty)$ 2. $E(y) = [0;+\infty)$ 3. Загального виду (ні парна, ні непарна) 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$

<table>
<tr><th colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</th></tr>
<tr><th>Функция і ее графік</th><th>Властивості функції</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$</td></tr>
<tr><td>$y = x^{-n}$, $n \in N$

</td><td>n – непарне
1. $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
2. $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
3. Непарна
4. Неперіодична
5. Спадає на D(y)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>n – парне
1. $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$
2. $E(y) = (0;+\infty)$
3. Парна
4. Непарна
5. Зростає на $(-\infty;0)$ і спадає на $(0;\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Показникова функція</td></tr>
<tr><td>$y = a^{x}$, $a > 0$, $a \neq 1$

</td><td>1. $D(y) = (-\infty;\infty)$
2. $E(y) = (0;+\infty)$
3. Загального виду
4. Неперіодична
5. Зростає на $D(y)$ при $a > 1$,
спадає на $D(y)$ при $0 < a < 1$</td></tr>
</table>

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ	
Функция та її графік	Властивості функції
3. *Логарифмическая функція*	
$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ 	1. $D(y) = (0;+\infty)$ 2. $E(y) = (-\infty;\infty)$ 3. Загального виду 4. Неперіодична 5. Зростає на $D(y)$ при $a > 1$, спадає на $D(y)$ при $0 < a < 1$
4. *Тригонометричні функції*	
$y = \sin x$ 	1. $D(y) = (-\infty;+\infty)$ 2. $E(y) = [-1;1]$ 3. Непарна 4. Період $T = 2\pi$ 5. Зростає на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$, спадає на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$
$y = \cos x$ 	1. $D(y) = (-\infty;+\infty)$ 2. $E(y) = [-1; 1]$ 3. Парна 4. Період $T = 2\pi$ 5. Зростає на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$, спадає на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

<table>
<tr><td colspan="2">ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ</td></tr>
<tr><td>Функция та її графік</td><td>Властивості функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Тригонометрические функції</td></tr>
<tr><td>

$y = \mathrm{tg}\, x$

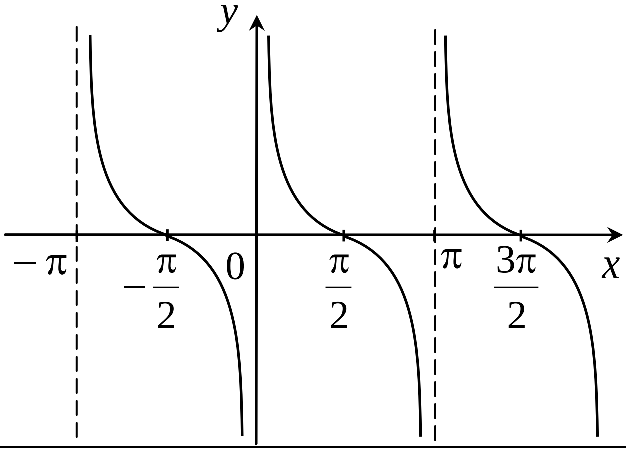


</td><td>

1. $D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$,
$n \in Z$
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$
3. Непарна
4. Період $T = \pi$
5. Зростає на
$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$

</td></tr>
<tr><td>

$y = \mathrm{ctg}\, x$



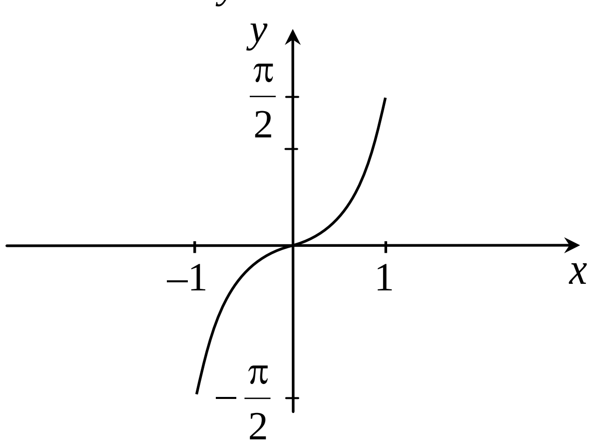
</td><td>

1. $D(y) = (\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in$
Z
2. $E(y) = (-\infty; \infty)$
3. Непарна
4. Период $T = \pi$
5. Спадає на $(\pi n; \pi + \pi n)$,
n $\in$ Z

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">5. Обернені тригонометричні функції</td></tr>
<tr><td>

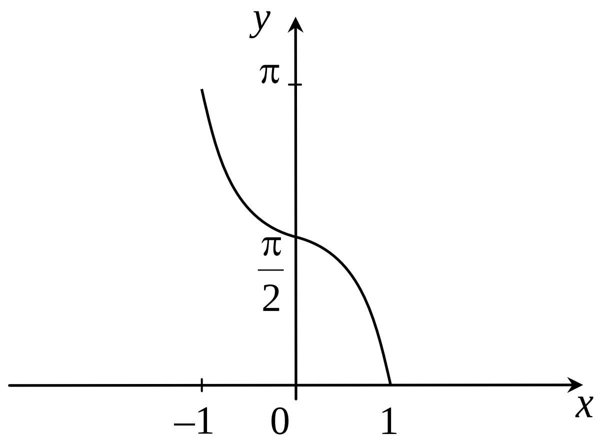
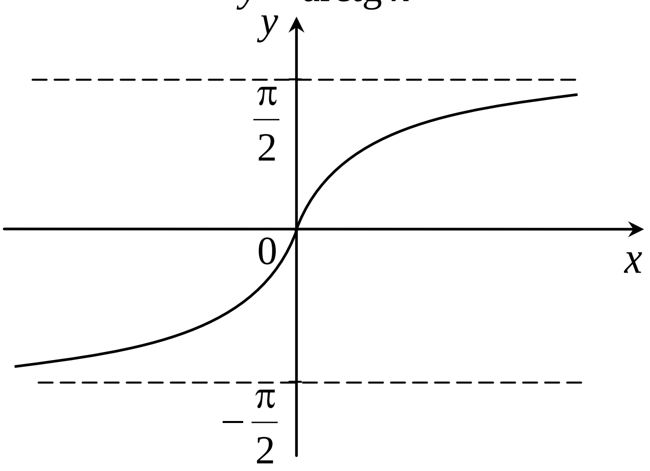
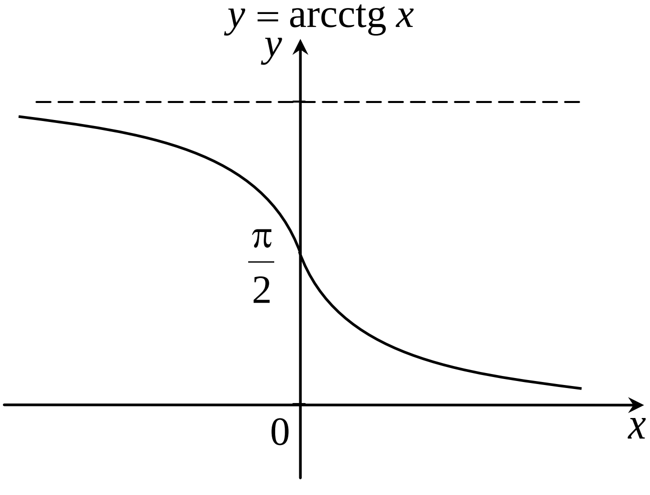
$y = \arcsin x$



</td><td>

1. $D(y) = [-1; 1]$
2. $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
3. Непарна
4. Зростає на $D(y)$

</td></tr>
</table>

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ	
Функція та її графік	Властивості функції
5. Обернені тригонометричні функції	
$y = \arccos x$ 	1. $D(y) = [-1;\ 1]$ 2. $E(y) = [0;\ \pi]$ 3. Загального виду 4. Спадає на $D(y)$
$y = \operatorname{arctg} x$ 	1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ 3. Непарна 4. Зростає на $D(y)$
$y = \operatorname{arcctg} x$ 	1. $D(y) = (-\infty; \infty)$ 2. $E(y) = (0; \pi)$ 3. Загального виду 4. Спадає на $D(y)$

ГРАНИЦІ

Основні теореми про границі

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$, де C = const.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\pm \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}$, $\quad \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0} C\cdot f(x)=C\cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Визначні границі

Перша визначна границя	*Друга визначна границя*
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e,\ \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

Еквівалентність нескінченно малих α *і* β : $\quad \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$

Найважливіші еквівалентності: при $x\to 0$

1. $\sin ax \sim ax$.	6. $e^x-1\sim x$.
2. $\mathrm{tg}\, ax \sim ax$.	7. $a^x-1\sim x\cdot \ln a$.
3. $\arcsin ax \sim ax$.	8. $\ln(1+x)\sim x$.
4. $\mathrm{arctg}\, ax \sim ax$.	9. $\log_a(1+x)\sim x\cdot\log_a e$.
5. $1-\cos ax\sim \dfrac{(ax)^2}{2}$.	10. $(1+x)^k-1\sim k\cdot x,\ k>0$.

ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕОРІЇ ГРАНИЦЬ:

$$\frac{\textit{число}}{\infty} = 0, \quad \frac{\textit{число}}{0} = \infty, \quad \frac{0}{\textit{число}} = 0, \quad \frac{\infty}{\textit{число}} = \infty, \quad a^{\infty} = \begin{cases} \infty, \text{ якщо } a > 1 \\ 0, \text{ якщо } 0 < a < 1 \end{cases}$$

ОСНОВНІ ВИДИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ І ПРАВИЛА ЇХ РОЗКРИТТЯ

Невизначеність вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило розкриття:
чисельник і знаменник дробу розділити на найбільший степень у виразі.

Зокрема:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, \text{ якщо } n > m \\ 0, \text{ якщо } n < m \\ a_0/b_0, \text{ якщо } n = m \end{cases}.$$

Невизначеність вида $[1^{\infty}]$. *Правило розкриття*: застосувати другу визначну границю.

Невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Правило розкриття:
при $x \to x_0$ чисельник і знаменник дробу скоротити на $(x - x_0)$.

Зокрема:

1) якщо в чисельнику і знаменнику дробу присутні тригонометричні і обернені тригонометричні функції, то потрібно застосувати першу чудову границю і її наслідки;
2) якщо вираз містить корені,

то чисельник і знаменик дробу домножити на вираз, спражений виразу з коренем.

Невизначеність виду $[0 * \infty]$

Правило розкриття:

невизначеність привести до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\;\right]$.

Невизначеність вида $[\infty - \infty]$.

Правило розкриття: дану невизначеність привести до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Для этого або дроби звести до спільного знаменника, або даний вираз домнжити на спряжений йому вираз.

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ, ТОЧКИ РОЗРИВУ

Непрерывность функції

Функція $y = f(x)$ – *неперервна в т.* x_0, якщо:

1) $y = f(x)$ визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in D(y)$;

2) існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ тобто $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо в точці x_0 порушено хоча б одну з трьох умов, то функція

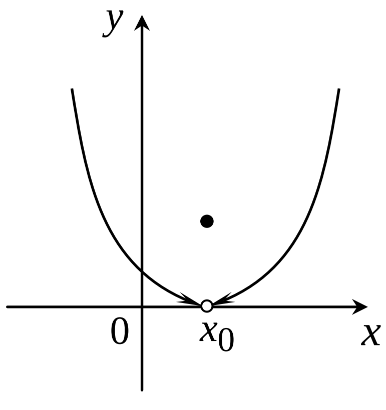
називається *розривною* в точці x_0, а точка x_0 –точкою розр*иву*

Класифікація точок розриву

Точки розриву I роду

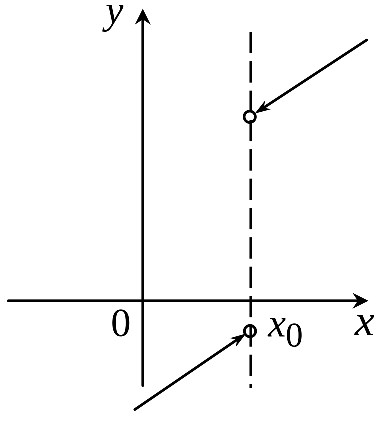
Точки усувного розриву

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$$



Точки скінченого стрибка

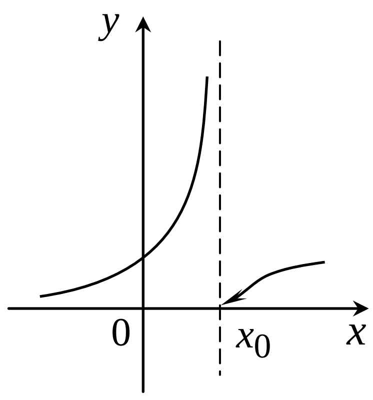
$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$



Точки розриву II роду

Точки нескінченого стрибка

$$\exists \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = \pm\infty$$



ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Таблиця похідних

Правила диффе-ренціювання	*Похідні основних елементарних функцій*	*Похідні складної функції*
1. $C' = 0$	1. $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	1. $\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u'$
2. $(Cu)' = Cu'$	2. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ln a$	2. $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$	3. $\left(e^x\right)' = e^x$	3. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
4. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$	4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	4. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	5. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
	6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
	7. $(\cos x)' = -\sin x$	7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
	8. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
	9. $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	9. $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
	10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	11. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
	12. $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	12. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
	13. $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	13. $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ПОХІДНА СКЛАДНОЇ, НЕЯВНО АБО ПАРАМЕТРИЧНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Формула знаходження похідної складної функції

$y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, де u – проміжний аргумент

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

Правило знаходження похідної функції, заданої неявно рівнянням $F(x; y) = 0$.

Продиференціювати рівняння $F(x; y) = 0$ по x, важаючи y функцією від x. Розвязати отримане рівняння відносно y'.

Формула знаходження похідної функції, заданої параметрично рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Логарифмічне дифференціювання

- Знайти логарифми вихідного виразу $y = f(x)$ (тобто $\ln y = \ln f(x)$).
- Отримане рівняння продиференціювати по x, вважаючи y функцией від x (т.е. $\frac{1}{y} y' = (\ln f(x))'$).
- З отриманої рівності виразити y'.

Похідна другого порядку

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')'$$

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Визначення

Диференціал функції – це головна частина приросту функції $y = f(x)$, лінійна відносно Δx :

$$dy = y'\Delta x.$$

Якщо $y = x$, то $dx = \Delta x$.

Формула для обчислення

$$dy = y'dx$$

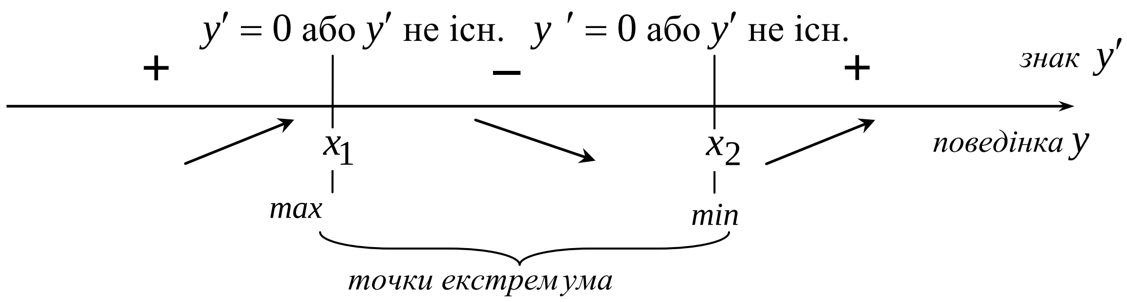
Формула для наближеного знаходження функції з допомогою диференціала

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

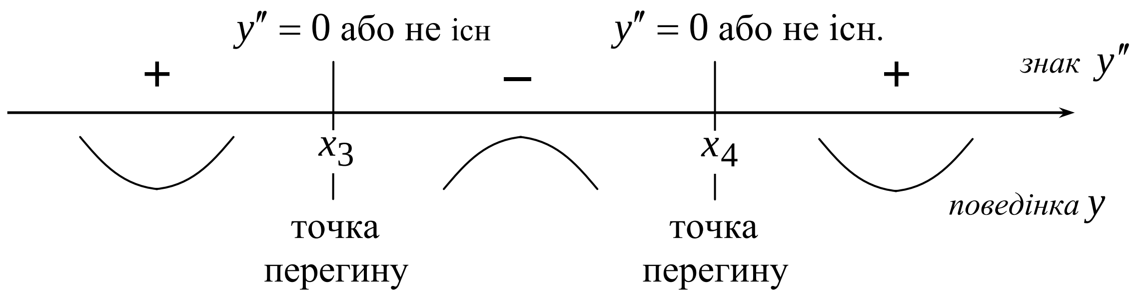
ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ

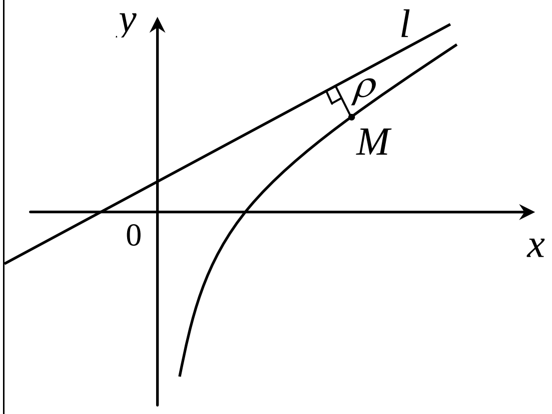
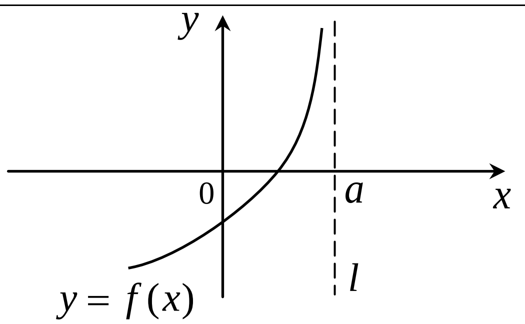
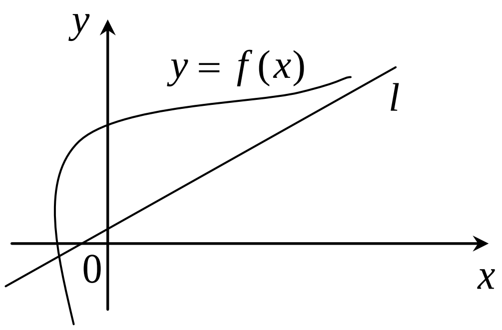
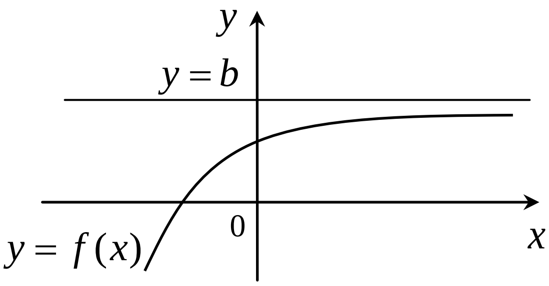
Дослідження функції

та екстремум



ввігнутість, точки перегину



АСИМПТОТИ	
	Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки M до прямої l прямує до 0, коли т.M прямує до нескінченності. $\rho \to 0$ при $M \to \infty$
Види асимптот	
Вертикальні асимптоти	
	$l: x = a$ –вертикальна асимптота, якщо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$
Похилі асимптоти	
	$l: y = kx + b$ –похила асимптота, якщо $\exists\ k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right)$
Горизонтальні асимптоти	
	$l: y = b$

<table>
<tr><td colspan="2">ПРАВИЛО ЛОПІТАЛЯ</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\text{або }\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Обчислення границь за правилом Лопіталя</td></tr>
<tr><td>Вид невизначеності</td><td>Спосіб розкриття</td></tr>
<tr><td>$\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$</td><td>Застосувати правило Лопіталя (можливо, кілька разів).</td></tr>
<tr><td>$[0\cdot\infty]$, $[\infty-\infty]$</td><td>Привести невизначеність до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, для цього представити даний вираз у вигляді дробу.</td></tr>
<tr><td>$[1^{\infty}]$, $[\infty^{\infty}]$, $[0^{0}]$</td><td>1) даний вираз позначити новою змінною
$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=y;$$
2) прологарифмувати обидві частини отриманої рівності , і поміняти границю і логарифм місцями
3) перетворити вираз так, щоб вийшла невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ до якої застосувати правило Лопіталя і обчислити границю;
4) знайти y з умови $\ln y=a$.</td></tr>
</table>

ВІДОМОСТІ З ШКІЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ

Степені з дійсним показником

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$.
3. $(a^n)^m = a^{nm}$.
4. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.
6. $a^0 = 1,\ a \neq 0$.
7. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},\ a \neq 0$.
8. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Логарифми

1. Визначення: $\log_a x = b \Rightarrow a^b = x$, де $a > 0, a \neq 1$

2. Основна логарифмична тотожність: $a^{\log_a x} = x$.

Властивості логарифмів

1. $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$.
2. $\log_a x - \log_a y = \log_a \dfrac{x}{y}$.
3. $\log_a x^n = n \log_a x$.
4. $\log_a a = 1$.
5. $\log_a 1 = 0$.

Формули перехода до нової основи

1. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.
2. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$.
3. $\log_{a^m} b = \dfrac{1}{m} \log_a b$.
4. $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$.
5. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$.

Формули скороченого множення

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.
4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.

Прогресії

	Визначення	Формула n-го члена	Сума
Арифметична прогресія	$a_n = a_{n-1} + d$, де d – різниця арифметичної прогресії	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Геометрична прогресія	$b_n = b_{n-1} \cdot q$, де q – знаменник геометричної прогрессии	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$	$S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{(1-q)},\ q \neq 1$ $S = \dfrac{b_1}{1-q}$ – сума всієї спадаючої прогресії

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞	0
ctg	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	∞	0	∞

Основні тригонометричні формули

Залежність між тригонометрическими функціями одного аргументу

1. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$. 2. $tgx\cdot ctgx=1$. 3. $tg^2x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$. 4. $ctg^2x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$.

Формули подвійного аргументу

1. $\sin 2x=2\sin x\cos x$. 2. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$. 3. $tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$.

Формули пониження степеня

1. $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. 2. $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

3. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$. 4. $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$

Формули додавання

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha$. 2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$.

3. $tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$. 4. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

5. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. 6. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

7. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Рівняння

1. $\sin x=a \Rightarrow x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\quad \sin x=0 \Rightarrow x=\pi n,\ n\in Z.$

$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$

2. $\cos x=a \Rightarrow x=\pm\arccos a+2\pi n,\quad \cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$

$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$

3. $tgx=a \Rightarrow x=arctga+\pi n,\quad tgx=0 \Rightarrow x=\pi n,\ n\in Z.\quad arctg(-x)=-arctgx.$

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні вказівки

Таблиці та узагальнення з курсу вищої математики для студентів усіх спеціальностей
Частина 1

Укладач

СЄДУНОВА Віра В'ячеславівна

Відповідальний за випуск зав. кафедри д-р техн. наук, проф. М. І. Погожих

Техн. редактор Л. Ю. Кротченко

План 2018 р., поз. 83/

Підп. до друку 23.06.2018 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 1,1 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.