МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС З МАТЕМАТИКИ

Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
072 «Фінанси, банківська справа та страхування»,
071 «Облік і оподаткування»

Харків
ХДУХТ
2019

Адаптаційний курс з математики. Конспект лекцій для студентів спеціальністей 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 071 «Облік і оподаткування» [Електронний ресурс] / Д. О. Торяник, М. С. Софронова. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2019. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладачі: Д. О. Торяник, М. С. Софронова

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. М. Т. Малафаєв

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено науково-методичною комісією обліково-фінансового факультету

Протокол від « 25» жовтня 2019 року № 14

Схвалено вченою радою ХДУХТ

Протокол від «15» липня 2019 року № 16

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ

Протокол від « 5» липня 2019 року № 12

ЗМІСТ

ВСТУП

Запропоноване навчальне видання призначено для ефективної підготовки до вивчення дисципліни «Вища та прикладна математика». У конспекту лекцій наведено основні опорні факти з розділів: числа та вирази, рівняння та нерівності, функції, елементи тригонометрії. Для зручності опорні факти шкільного курсу математики подано у формі таблиць, що містять основні теоретичні положення кожної теми, а також основні алгоритми та методи розв'язування задач з відповідних тем.

ДОДАТНІ ТА ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА. АРИФМЕТИЧНІ ДІЇ З НИМИ

Натуральні числа

Поняття натуральних чисел відноситься до найпростіших першо-початкових понять математики. Числа 1,2,3,4,... виникли в результаті рахування предметів або визначення номеру того чи іншого предмету. Множина натуральних чисел позначається N.

Для натуральних чисел визначені такі дії: додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня. Причому, дії додавання та множення завжди здійсненні (тобто виконуються завжди), в результаті отримуємо також натуральні числа.

Наприклад: $a+в+c+\ldots+к=p$, p – сума, $a,в,c\ldots,к$ – доданки; $p=a\cdot в$, де a, $в$ – множники, p – добуток.

Властивості додавання та множення натуральних чисел:

1) $a+в=в+a$, тобто від перестановки доданків значення суми не змінюється; наприклад 8+14=22, або 14+8= 22.

2) $(a+в)+c=a+(в+c)$, тобто значення суми не зміниться якщо будь яку групу доданків замінити їх сумою.

3) $a\cdot в=в\cdot a$, тобто від перестановки множників значення добутку не змінюється; наприклад, $12\cdot 5=60$, або $5\cdot 12=60$.

4) $(a\cdot в)\cdot c=a\cdot(в\cdot c)$, тобто значення добутку не зміниться, якщо будь яку групу множників замінити їх добутком.

5) $(a+в)\cdot c=ac+вc$, щоб помножити суму на число, достатньо помножити кожний множник на це число і скласти отримані добутки. Наприклад, $(7+5)\cdot 5=7\cdot 5+5\cdot 5=35+25=60$.

В результаті віднімання або ділення натуральних чисел не завжди отримуємо натуральне число. Наприклад: 7-4=3 – натуральне число, тоді як 4-7=-3 – не натуральне число; 21:7=3 – натуральне число, а 11:2=5,5 – не натуральне число.

Якщо m,n,r натуральні числа, то при $m-n=r$ говорять, що m – зменшуване, n – від'ємник, r - різниця; наприклад, 12-5=7, 12 – зменшуване, 5 – від'ємне, 7 – різниця; при $m:n=r$ говорять, що m – ділене, n – дільник, r – частка чисел m,n; наприклад, 48:6=8, 48 – ділене, 6 – дільник, 8 – частка.

Піднесення до степеню. Для того щоб піднести число в цілий (другий, третій і т.і.) степінь потрібно повторити його множником два, три і більше разів.

З чисел за допомогою знаків арифметичних дій та дужок складаються числові вирази. Наприклад, (6-4+3):5+3-2.

Порядок арифметичних дій в числовому виразі: спочатку виконуються дії в дужках, а в середині любих дужок спочатку виконуються множення і ділення, а потім додавання і віднімання.

Розкладання натурального числа на прості множники

Будь-яке складове натуральне число можна розкласти на прості множники, і тільки одним способом. Приклад:

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

Таким чином, число 360 можна записати так: $360 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5$.

Якщо в розкладі числа на прості множники один і той же множник a зустрічається n разів, то записують коротко a^n тобто $a\cdot a\cdot a\cdots a = a^n$. Вираз a^n називається степенем, a - основою степені, n - показником степені.

Приклад. Виконайте дії: $3^2 - 2^3 = 9 - 8 = 1$.

Звичайні та десяткові дроби

Звичайний дріб – це число вигляду $\frac{m}{n}$, де m і n - натуральні числа, чисельник і знаменник відповідно. В окремих випадках буває $n = 1$, тоді дріб має вигляд $\frac{m}{1}$, або пишуть m. Це означає, що всіляке натуральне число можна представити у вигляді звичайного дробу зі знаменником 1.

Серед звичайних дробів розрізняють правильні і неправильні. Дріб $\frac{m}{n}$ називається правильним, якщо його чисельник менше знаменника, і неправильним, якщо його чисельник більше знаменника або дорівнює йому. Число, яке складається з цілої і дробової частини можна перетворити в неправильний дріб. Приклад $7\frac{1}{3} = \frac{3\cdot 7+1}{3} = \frac{22}{3}$; $8\frac{2}{3} = \frac{8\cdot 3+2}{3} = \frac{26}{3}$. Тобто, щоб записати число у вигляді неправильного дробу, треба помножити його цілу частину на знаменник дробової частини і до добутку додати чисельник дробової частини.

З неправильного дробу можна виділити цілу частину. Для цього треба розділити з остатком чисельник на знаменник, отримаємо цілу частину і дріб. Приклад: $\frac{26}{3}=8\frac{2}{3}$

Два дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ будуть рівними, якщо $ad=bc$. Приклад $\frac{3}{5}$ і $\frac{9}{15}$ (тому що $3\cdot 15=5\cdot 9$). Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або розділити на одне й теж натуральне число, то отримаємо дріб, рівний заданому $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$.

Скоротити дріб:

а) $\frac{226}{134}=\frac{113}{67}$ чисельник і знаменник дробу парні числа, тому дріб можна скоротити на 2.

б) $\frac{123}{12345}=\frac{41}{4115}$ (Сума цифр чисельника $1+2+3=6$ - тобто чисельник ділиться на 3; сума цифр знаменника - $1+2+3+4+5=15$ тобто знаменник ділиться на 3, тому дріб можна скоротити на 3.

При додаванні (відніманні) дробу з однаковими знаменниками до числівника першого дробу додають чисельник другого дробу (з числівника першого дробу віднімають чисельник другого дробу) і оставляють то й же знаменник.

Приклад: $\frac{7}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7+5}{9}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$.

Найменшим загальним знаменником двох або декількох дробів є найменше загальне кратне знаменників цих дробів.

При додаванні (відніманні) дробів з різними знаменниками треба спочатку привести їх до найменшого спільного знаменника, потім додати (відняти) отримані дроби користуючись правилами додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками. Отриманий дріб можна скоротити та виключити цілу частину. Приклад: $\frac{7}{9}+\frac{5}{12}=\frac{28}{36}+\frac{15}{36}=\frac{43}{36}=1\frac{7}{36}$.

При відніманні чисел, які складаються із цілої і дробової частини, з цілої частини зменшуваного віднімають цілу частину від’ємника, а з дробової частини зменшуваного – дробову частину від’ємника.

Приклад: $9\frac{7}{8}-4\frac{5}{12}=5\frac{7}{8}-\frac{5}{12}=5\frac{21-10}{24}=5\frac{11}{24}$, або

$$7\frac{5}{8}-2\frac{9}{10}=5\frac{5}{8}-\frac{9}{10}=5\frac{25-36}{40}=4+\frac{40}{40}+\frac{25-36}{40}=4\frac{65-36}{40}=4\frac{29}{40}.$$

Добуток двох дробів знаходять множенням окремо чисельників, окремо знаменників. Перший добуток роблять чисельником, другий – знаменником.

Приклад: $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{6}{77}$.

Зауваження. При множенні чисел, які складаються з цілої частини і дробової, їх треба спочатку представити у вигляді неправильного дробу.

Ділення дробів виконується так: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$, тобто ділене $\frac{a}{b}$ помножують на дріб $\frac{d}{c}$, обернений дільнику $\frac{c}{d}$.

Приклад: $\frac{2}{3}:\frac{7}{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{7}=\frac{2\cdot 10}{3\cdot 7}=\frac{20}{21}$.

Звичайний дріб, знаменник якого дорівнює 10, 100, 1000, ... називають десятковим. Приклад: $\frac{3}{10}=0{,}3;\frac{51}{100}=0{,}51;.....$ Таким же чином можна записати мішане число або неправильний дріб. Приклад: $2{,}3=2\frac{3}{10}; 3{,}17=3\frac{17}{100}$.

Щоб обернути простий дріб у десятковий, треба розділити числівник на знаменник по правилу ділення дробів. Приклад: $\frac{3}{4}=0{,}75$.

Натуральні числа, числа, що є протилежними натуральним та число 0 складають разом множину цілих чисел, вона позначається Z.

На координатній прямій протилежні числа розміщені симетрично відносно початку відліку. Цілі числа і дроби (невід'ємні і від'ємні) складають разом множину раціональних чисел, що позначається **Q**.

Будь-яке раціональне число може бути представлено у вигляді відношення $\frac{m}{n}$, де m- ціле число, а n- натуральне число, і одне й теж число можна записати багатьма способами . Приклад: $-2=\frac{-4}{2}=\frac{-6}{3}=\frac{-100}{50}$; $0{,}3=\frac{3}{10}=\frac{6}{20}=...$

Для вимірювання використовують не тільки раціональні числа, але і числа які не є цілими або дробовими. Всі такі числа називаються ірраціональними числами. Наприклад, $\sqrt{2},\sqrt{5}$ або $-\sqrt{2},-\sqrt{5}$, або число π, яке означає відношення довжини кола до діаметру. Кожне ірраціональне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового неперіодичного дробу. Раціональні і ірраціональні числа складають разом множину дійсних чисел **R**.

Модуль дійсного числа

Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа a називається саме це число, якщо $a\geq 0$, і протилежне число $-a$, якщо $a<0$. Модуль a позначається $|a|$. Тобто:

$$|a| = \begin{cases} a, & якщо \;\; a \geq 0, \\ -a, & якщо \;\; a < 0. \end{cases}$$

Геометрично модуль числа означає відстань від точки на координатній прямій (зображення числа a) до початку відліку – точки O.
Наприклад: $|-3| = 3; |7{,}8| = 7{,}8$.

Модуль нуля дорівнює нулю.

Якщо $a \neq 0$, то на координатній прямій існують дві точки a і $-a$, рівновіддалені від нуля, модулі яких рівні (рис. 1).

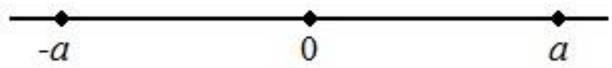


Рис.1.

Властивості модулів:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| = |-a|$.
3. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
4. $a \leq |a|$.
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, b \neq 0$.
6. $|a^n| = |a|^n$, $|a|^2 = a^2$.
7. $|a + b| \leq |a| + |b|$.
8. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

Приклад: $|x-2| = \begin{cases} x-2, x-2 \geq 0 \\ -(x-2), x-2 < 0 \end{cases}$, або $|x-2| = \begin{cases} x-2, x \geq 2 \\ -(x-2), x < 2 \end{cases}$.

Дії над раціональними числами

З двох чисел те більше, яке на координатній прямій знаходиться праворуч. Тому:

а) будь-яке невід’ємне число більше нуля і більше від’ємного числа;

б) будь-яке від’ємне число менше нуля;

в) з двох від’ємних чисел більше те, модуль якого менше. Приклад, $-3{,}8 > -5{,}1$, тому що $|-3{,}8| < |-5{,}1|$.

Сума двох чисел з однаковими знаками дорівнює числу того ж знака, модуль якого дорівнює сумі модулів доданків.

Приклад: $(-6) + (-5{,}3) = -(6 + 5{,}3) = -11{,}3$.

Сума двох чисел з різними знаками дорівнює числу, модуль якого є різниця модулів меншого і більшого, а знак співпадає зі знаком доданку з більшим модулем.

Приклад: (+4)+ (-10)= - (10-4)=-6;   32+(-6)=26; 2+(-4)=-2.

Сума протилежних чисел дорівнює нулю.

Приклад: (+6)+ (-6)=0.

Добуток (частка) двох чисел одного знаку є число додатнє, а добуток (частка) двох чисел різних знаків є число від'ємне; щоб знайти модуль добутку (частки), треба перемножити (поділити) модулі заданих чисел.

Приклад, $(-12)\cdot(-8) = +12\cdot 8 = 96$; $(-24):(+3) = -\frac{24}{3} = -8$.

Правило знаків при множенні та діленні чисел:

$$"+"\cdot(:)"+"="+"$$

$$"+"\cdot(:)"-"="-"$$

$$"-"\cdot(:)"-"="+"$$

Необхідно пам'ятати, що від'ємне число в парному степені є число додатнє, а в непарному степені - число від'ємне.

АЛГЕБРАЇЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Степені з цілими показниками

Степінь a^n з натуральним показником n і основою a - це добуток n однакових множників, кожний із яких дорівнює a, тобто $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{разів}}$.

Для будь-яких a і b і натуральних m і n виконуються рівності:

$$a^m a^n = a^{m+n};\quad a^m : a^n = a^{m-n}\quad (a \neq 0);$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn};\quad (ab)^n = a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\quad (b \neq 0).$$

Слід запам'ятати, що $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

Для степеня a^n з цілим показником n і основою $a \neq 0$ справедлива формула $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, яка частіше записується так $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Арифметичним квадратним коренем із числа а називається таке невід'ємне число b, квадрат якого дорівнює a. Записується арифметичний квадратний корінь за допомогою радикала $\sqrt{a} = b$.

Звичайно, виходячи з означення і $b \geq 0$, і $a \geq 0$.

Арифметичний корінь

Для будь-яких чисел $a \geq 0$ і $b \geq 0$ справедливі рівності:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ \ (b \neq 0);$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, \ \text{якщо } a \geq 0 \\ -a, \ \text{якщо } a < 0 \end{cases}$$

Арифметичним коренем *n*-ного $(n \in N)$ степеня із числа а називається таке невід'ємне число *b*, *n*-на степінь якого дорівнює *a*. Записується арифметичний корінь n-ного степеня за допомогою радикала $\sqrt[n]{a} = b$.

Для будь-яких натуральних n і k, більших 1, довільних невід'ємних a і b виконуються рівності

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}; \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a;$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |\,a\,|; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a};$$

Якщо $0 \leq a < b,$ то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Степінь з дробовим показником і його властивості

Для довільного $a \geq 0$ і $n \in Z$, $m \in N$ справедлива рівність

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \ \text{ або } \ \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Для будь-яких невід'ємних a і b і раціональних p і q виконуються рівності

$$a^p a^q = a^{p \div q}; \quad a^p : a^q = a^{p-q} \ \ (a \neq 0);$$

$$\left(a^p\right)^q = a^{pq}; \ \ (ab)^p = a^p b^p;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p} \ \ (b \neq 0).$$

З чисел та змінних за допомогою знаків додавання, віднімання, множення та ділення, піднесення до раціонального степеня або добування кореня за допомогою дужок складаються алгебраїчні вирази.

При виконанні тотожних перетворень алгебраїчних виразів велике значення має вміння розкладати многочлени на множники. Наведемо основні способи такого розкладання.

Винесення загального множника за дужки

Нам відомий розподільний закон множення: $ab + ac = a(b + c)$, який і є основою винесення загального множника за дужки.

Використання формул скороченого множення

Для довільних a, b і c виконуються рівності:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ - різниця квадратів;}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ - квадрати суми і різниці;}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ або } (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \text{ – куб суми;}$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ або } (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b) \text{ – куб різниці;}$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - ab + b^2\right) \text{ - сума кубів;}$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \text{ - різниця кубів.}$$

Це так звані формули скороченого множення. Їх можна застосовувати в прямому, так і в оберненому напрямках.

Групування

Нам відомі переставний і сполучний закони додавання:

$$a + b = b + a;$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$$

Ці закони дозволяють об’єднувати члени многочлена у групи різними способами (використовуючи взяття в дужки). Інколи це буває досить складно. Слід пам’ятати, що в групах не завжди потрібно виділяти однакову кількість доданків.

Розклад на множники квадратного тричлена

Якщо x_1 і x_2 корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Перетворення раціональних виразів

Раціональні дроби – це алгебраїчні вирази виду $\frac{P}{Q}$, де P і Q - многочлени.

Зауваження. Перед скороченням дробу його чисельник і знаменник потрібно розкласти на множники.

Формули для множення і ділення раціональних дробів аналогічні до формул множення і ділення звичайних дробів

$$\frac{P}{Q}\cdot\frac{R}{S}=\frac{P\cdot R}{Q\cdot S};\qquad \frac{P}{Q}:\frac{R}{S}=\frac{P\cdot S}{Q\cdot R}.$$

Формули для додавання і віднімання раціональних дробів аналогічні до формул додавання і віднімання звичайних дробів:

$$\frac{P}{Q}\pm\frac{R}{Q}=\frac{P\pm R}{Q}$$ (для однакових знаменників);

$$\frac{P}{Q}+\frac{R}{S}=\frac{PS+RQ}{Q\cdot S};\qquad \frac{P}{Q}-\frac{R}{S}=\frac{PS-RQ}{Q\cdot S}$$ (для різних знаменників).

Приклад. Спростити вираз $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{ab-b^2}$.

Розв'язання.

1) Розкладемо на множники знаменники

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}+\frac{b}{a+b}-\frac{b^2}{b(a-b)}.$$

2) Скоротивши третій дріб на b, маємо спільний знаменник $(a-b)(a+b)$.

3) Додатковий множник до першого дробу 1, до другого $(a-b)$, до третього $(a+b)$.

4) Домноживши кожний дріб на його додатковий множник, маємо

$$\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+b)}+\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}.$$

Зауваження. На практиці записують простіше

$$\frac{a^2+b^2+b(a-b)-b(a+b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+b^2+ab-b^2-ab-b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}=1$$

Перетворення виразів з модулями

Модуль числа –це відстань від точки на числовій прямій, координата якої дорівнює цьому числу, до початку відліку – точки $O(0)$.

Наприклад, $|-3|=3,\ |\,7{,}8\,|=7{,}8,\ |\,0\,|=0$.

Зауваження. Слід пам'ятати, що відстань не буває від'ємною величиною, тому і модуль завжди невід'ємний

$$|\,a\,| = \left[\begin{array}{l} a, \text{ якщо } a \ge 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{array}\right. .$$

Наприклади. $|3-\pi| = \pi - 3$, бо $\pi - 3 > 0$, $|4-\pi| = 4 - \pi$, бо $4 - \pi > 0$.

А щоб розкрити модуль виразу із змінною, треба розглядати різні випадки.

Приклад. Скоротити дріб

$$\frac{|\,x\,| - 2 + x^2}{x^2 - 1}.$$

Розв'язання. Треба розглядати два випадки:

1) Якщо $x \ge 0$, то $|\,x\,| = x$, і вираз набуває виду

$$\frac{x-2+x^2}{x^2-1} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

Зауважимо, що при цьому $x \ne 1$.

ЛІНІЙНІ ТА КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Рівнянням з однією змінною називається рівність, що має вигляд $\varphi(x) = g(x)$, де $\varphi(x)$ і $g(x)$ − деякі задані функції.

Всі значення x, при яких рівняння $\varphi(x) = g(x)$ стає тотожністю, називаються коренями або розв'язками рівняння. Множина значень x, при яких можна обчислити ліву і праву частини рівняння, називається областю допустимих значень змінної x і позначається через D.

Розв'язати рівняння – означає знайти всі його корені або довести, що вони не існують. Два рівняння $\varphi_1(x) = g_1(x)$ і $\varphi_2(x) = g_2(x)$ називаються еквівалентними або рівносильними, якщо множини їх коренів співпадають.

Стандартний вигляд найпростішого лінійного рівняння $ax + b = 0$, де $a \ne 0$. Формула для його розв'язання:

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Практично всі лінійні рівняння зводяться до найпростіших елементарними перетвореннями (множення обох частин рівняння на одне й те ж число, яке не дорівнює нулю; перенесення членів рівняння з однієї його частини в іншу з протилежним знаком; приведення подібних членів тощо).

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=4-x.$$

Розв’язання. Домножимо обидві частини рівняння на 15

$$5(4x+1)-3(3x-1)=15(4-x) \Leftrightarrow 20x+5-9x+3=60-15x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 26x=52 \Leftrightarrow x=2.$$

Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де $a\neq 0$, а b і c – деякі числа, називається квадратним рівнянням.

Можливість розкладання на множники квадратного тричлена ax^2+bx+c залежить від того, чи має цей тричлен корені.

Загальна формула для знаходження коренів має вигляд

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Величина $D=b^2-4ac$ називається дискримінантом.

Якщо $D>0$, то рівняння має два дійсних корені; якщо $D=0$, то рівняння має один (два однакових) дійсний корінь; якщо $D<0$, то рівняння дійсних коренів не має.

Нехай дискримінант $D>0$, тоді тричлен має два корені x_1 і x_2, таким чином $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Приклад. Розв’язати рівняння $3x^2+5x-8=0$.

Розв’язання. Знайдемо дискримінант

$$D=5^2-4\cdot 3\cdot(-8)=25+96=121,$$

оскільки він більше 0, то рівняння має два корені

$$x_1=\frac{-5-11}{6}=-\frac{8}{3}=-2\frac{2}{3},\ x_2=\frac{-5+11}{6}=1.$$

Зауваження. Якщо в загальному рівнянні $b=2k$, то формула для розв’язування $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$. Тоді дискримінант $D_1=\frac{D}{4}=k^2-ac$, а обчислення виконувати легше.

Взагалі, щоб зекономити час при розув’язанні квадратних рівнянь, корисно застосовувати формули Вієта для коренів рівняння

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

Особливо полегшується усний розрахунок для приведених квадратних рівнянь (при $a = 1$) виду $x^2 + px + q = 0$, та ще й коли корені – цілі числа. Тоді формули Вієта мають вигляд

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}.$$

Виділення квадрату двочлена з квадратного тричлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Рівняння з модулями

Якщо рівняння містить невідому під знаком модуля, то його слід розглядати на різних інтервалах зміни невідомої величини. Інтервал вибирають так, щоб на ньому вираз, який стоїть під знаком модуля, мав постійний знак.

Слід пам'ятати, що $|\,a\,| = \left[\begin{array}{l} a,\ \text{якщо}\ a \ge 0 \\ -a,\ \text{якщо}\ a < 0 \end{array}\right.$

Приклад. Розв'язати рівняння $|2x - 5| = x - 2.$

Розв'язання. Це рівняння еквівалентне сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 5 \ge 0 \\ 2x - 5 = x - 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ -(2x - 5) = x - 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2{,}5 \\ x = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2{,}5 \\ x = 2\dfrac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

Система рівнянь з двома змінними

Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розвязки двох (або більше) рівнянь з ознією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати систему рівнянь. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою.

Розв'язком системи називається таке значення змінної або впорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всі рівняння системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає. Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною.

Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої, і навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).

Якщо змінити порядок запису рівнянь заданої системи, то одержимо систему, рівносильну заданій.

Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну заданій.

Основні способи розв'язування систем рівнянь

1. Спосіб підстановки.

Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (чи через інші) і підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної у всі інші рівняння системи, потім розв'язуємо одержане рівняння чи систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної.

2. Спосіб додавання.

Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого рівняння, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій.

3. Графічне розв'язування системи рівнянь з двома змінними.

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній – ці координати і є розв'язками системи.

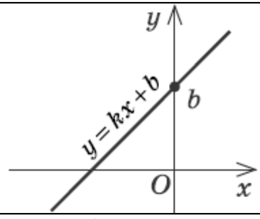
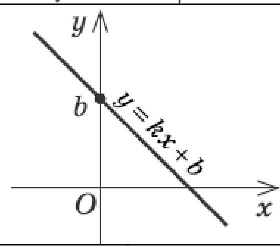
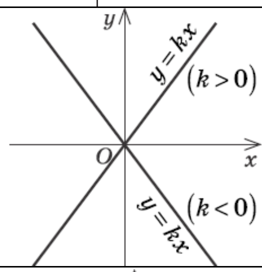
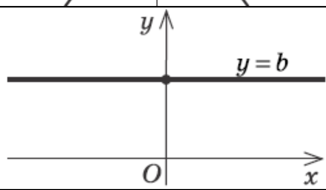
ДЕЯКІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Функцією називають відповідність, при якій кожному значенню змінної x із деякої множини D відповідає єдине значення змінної y.

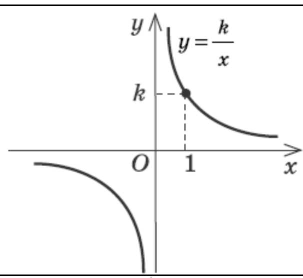
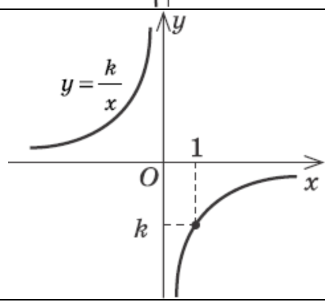
Множина D - область визначення функції. Область значень функції – це множина тих значень, яких може набувати сама функція при всіх значеннях аргументу з області визначення.

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенню аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

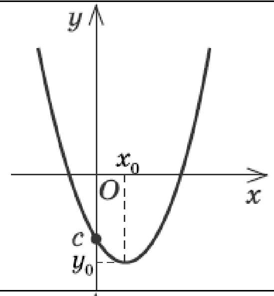
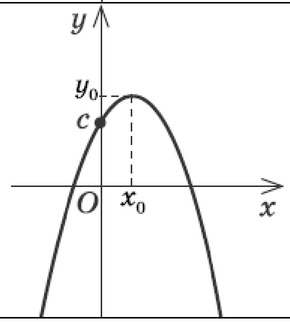
Лінійна функція $y = kx + b$.

$k > 0$	
$k < 0$	
$b = 0$ $y = kx$	
$k = 0$ $y = b$	

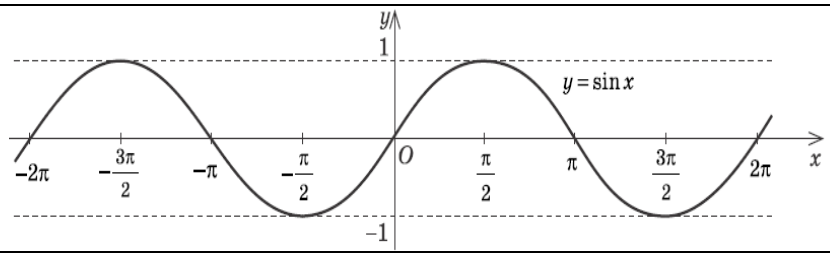
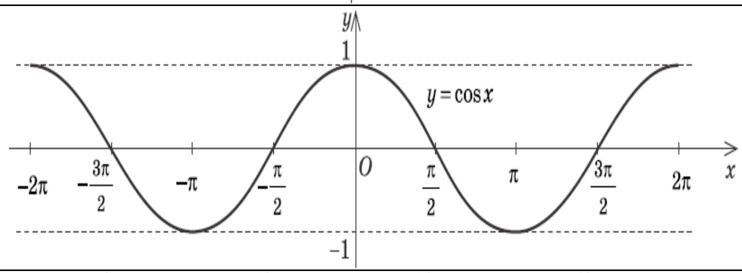
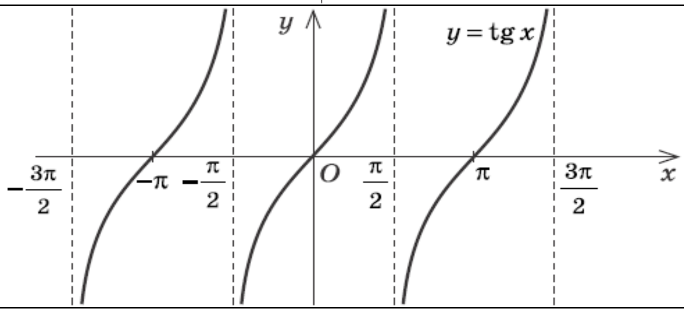
Функція $y = \dfrac{k}{x}$.

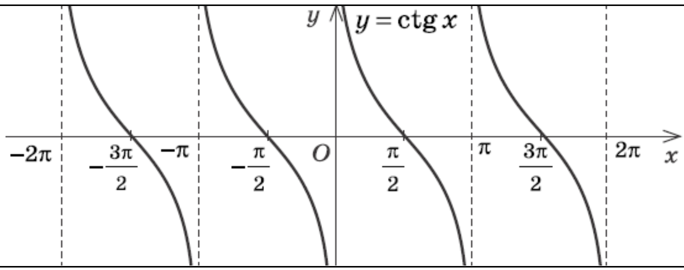
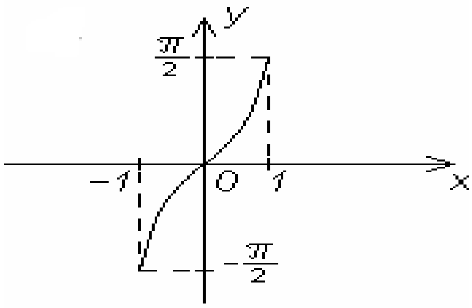
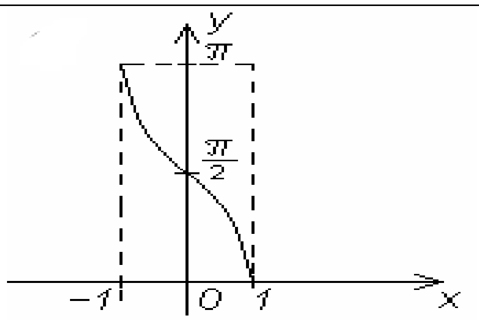
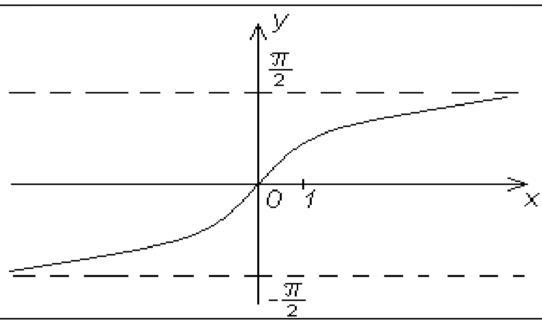
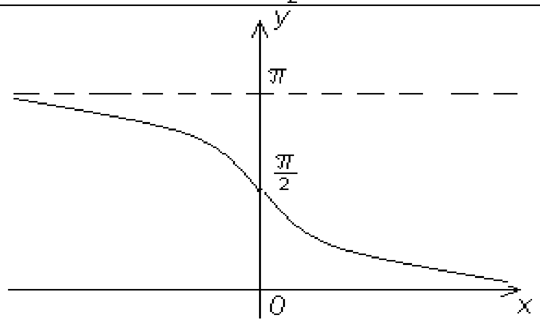
$k > 0$	
$k < 0$	

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$.

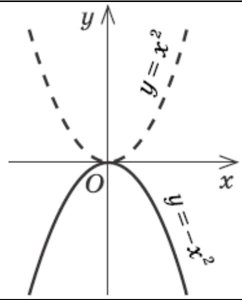
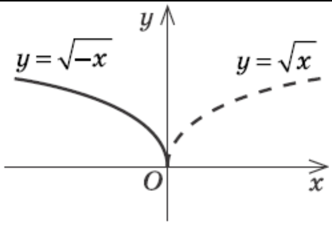
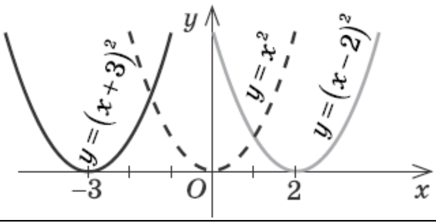
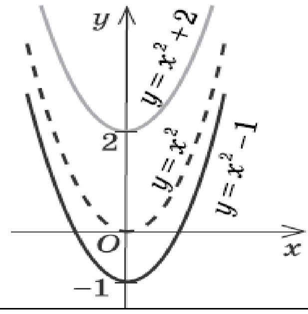
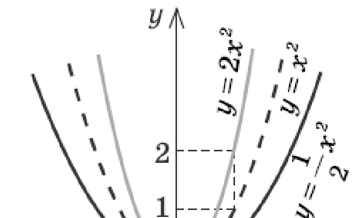
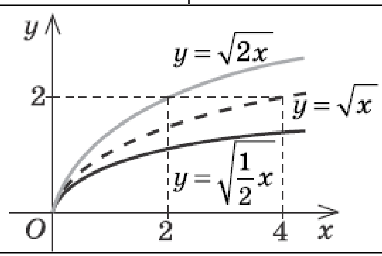
$a > 0$	
$a < 0$	

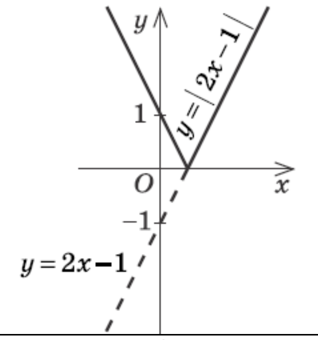
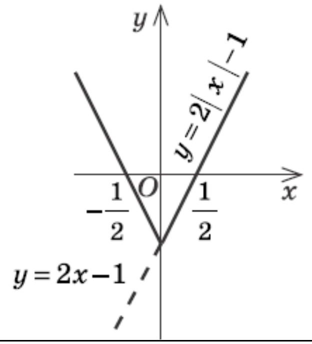
Тригонометричні функції.

$y = \sin x$	
$y = \cos x$	
$y = tgx$	

$y = ctgx$	
$y = \arcsin x$	
$y = \arccos x$	
$y = arctgx$	
$y = arcctgx$	

Елементарні перетворення графіка функції $y = f(x)$.

$y = -f(x)$	Симетрія відносно осі Ox	
$y = f(-x)$	Симетрія відносно осі Oy	
$y = f(x-a)$	Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць	
$y = f(x)+c$	Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy на c одиниць	
$y = kf(x),\ k > 0$	Розтяг або стиск уздовж осі Oy (при $k > 1$ розтяг, при $0 < k < 1$ - стиск)	
$y = f(\alpha x),\ \alpha > 0$	Розтяг або стиск уздовж осі Ox (при $k > 1$ стиск, при $0 < k < 1$ - розтяг)	

$y = \lvert f(x) \rvert$	Вище осі Ox (і на самій осі) – без зміни; нижче осі Ox - симетрія відносно осі Ox	
$y = f(\lvert x \rvert)$	Праворуч від осі Oy (і на самій осі) – без зміни; та сама частина графіка – симетрія відносно осі Oy	

ЛОГАРИФМІЧНЕ ЧИСЛЕННЯ

Корінь рівняння *ax*=*N*, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають логарифмом числа N за основою a.

Логарифмом додатнього числа b по основі a, де $a > 0, a \neq 1$, називається показник степеня x, в який треба піднести число a, щоб отртмати b.

Використовується позначення $\log_a b$.

Зауваженння:

1. Якщо $a = 10$, логарифм називається десятковим і позначається $\lg b$.
2. Якщо $a = e, (e = 2{,}718\ldots)$, логарифм називаеться натуральним і позначається $\ln b$.

З означення логарифму випливає основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b} = b$.

Основні властивості логарифмів

1. Логарифм добутку двох додатних множників дорівнює сумі їх логарифмів, тобто

2.

$$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y, \text{ де } x>0,\ y>0.$$

3. Логарифм частки двох додатних чисел (дробу) дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника (чисельника і знаменника), тобто

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \text{ де } x>0,\ y>0.$$

4. Логарифм степеня додатного числа дорівнює показнику степеня, помноженому на логарифм основи цього степеня, тобто

$$log_a(N^m) = m\cdot log_a N, \text{ де } m \text{ – будь-яке число, } N > 0.$$

5. Логарифм кореня з додатного числа дорівнює логарифму підкореневого виразу, поділеному на показник кореня, тобто

$$\log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k}\log_a N.$$

6. Перехід від однієї основи логарифмів до іншої

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

7. Якщо логарифми двох додатних чисел за тією самою основою рівні, то й самі числа рівні. І навпаки, якщо два додатних числа рівні, то і їх логарифми за тією самою основою рівні.

8. Логарифм одиниці дорівнює нулю

$$log_a 1=0.$$

9. Логарифм основи дорівнює одиниці, тобто

$$log_a a=1.$$

Деякі важливі логарифмічні тотожності

1. $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$, або $log_b a\ log_a b=1$.
2. $\log_a N = \log_{a^k} N^k$.
3. $\log_{a^n} N = \dfrac{1}{n}\log_a N$.

Логарифмічні функції та рівняння

Означення. Логарифмічною називається функція $y=log_a x$, де $a>0$ і $a\neq1$, обернена до показникової $y=a^x$.

Означення. Логарифмічними називають рівняння, які містять змінну під знаком логарифма.

Найпростіше логарифмічне рівняня має наступний вигляд

$$logax=b$$, де $a>0$ і $a\neq 1$, b – будь-яке число.

Приклад. Розв'язати рівняння $\log_5^2 x + 3\log_5 x - 4 = 0$.

Розв'язання. Нехай $log_5x=a$. Маємо:

$$a^2+3a-4=0,$$

$$a_1=-4,\ a_2=1.$$

Повернемося до заміни: $\log_5 x=-4$ або $\log_5 x=1$,

$$x=5^{-4},\ x=5^1,$$

$$x=\frac{1}{625},\ x=5.$$

Оскільки обидва розв'язки додатні, то вони є коренями рівняння.

Відповідь: $x=\frac{1}{625}$; 5.

Логарифмічні нерівності

Під час розв'язування логарифмічних нерівностей виду

$$log_a f(x) > log_a \varphi(x),\ log_a f(x) < log_a \varphi(x)$$

насамперед враховують, що областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, тобто вирази, які стоять під знаком логарифма вважаються додатними.

Якщо $a>1$, то логарифмічна функція зростає, тому більшому логарифму відповідає і більше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

Якщо $a<1$, то більшому логарифму відповідає менше значення виразу, що стоїть під знаком логарифма.

ЕЛЕМЕНТИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

Тотожності тригонометрії широко використовуються і в математиці і в фізиці. В математиці - при розв'язанні трикутників, інтегруванні, в теорії функцій комплексних змінних і т.д. В фізиці - при розв'язанні задач, в яких векторні величини не лежать на одній прямій.

Основні тригонометричні тотожності

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad 1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$$

Формули, що пов'язують обернені тригонометричні функції одного аргументу

$$\arcsin\alpha=\arccos\sqrt{1-\alpha^2} \qquad \arccos\alpha=\arcsin\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\arcsin\alpha=arctg\sqrt{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}} \qquad \arccos\alpha=arctg\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{\alpha^2}}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$tg\,2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \qquad ctg\,2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

Формули зниження степеня

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Формули суми та різниці кутів

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\,tg\beta} \qquad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\,tg\beta}$$

Сума та різниця тригонометричних функцій

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha+tg\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \qquad tg\alpha-tg\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формули приведення

β	$\sin\beta$	$\cos\beta$	$tg\beta$	$ctg\beta$
$\pi/2+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$3\pi/2+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi/2-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\pi-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$3\pi/2-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$2\pi-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Добуток тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

Вираз тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

Тригонометричні рівняння та нерівності та їх розв'язання

Означення. Тригонометричним рівнянням називається рівняння, у яких невідоме (змінна) входить лише під знаком тригонометричної функції.

Означення. Нерівність називається тригонометричною, якщо вона містить змінну тільки під знаком тригонометричної функції.

Тригонометричні рівняння, або зовсім не мають розв'язків, або мають здебільшого безліч їх внаслідок періодичності цих функцій.

Означення. Розв'язати тригонометричну нерівність означає знайти значення невідомих, що входять до неї, для яких нерівність перетворюється в правильну числову.

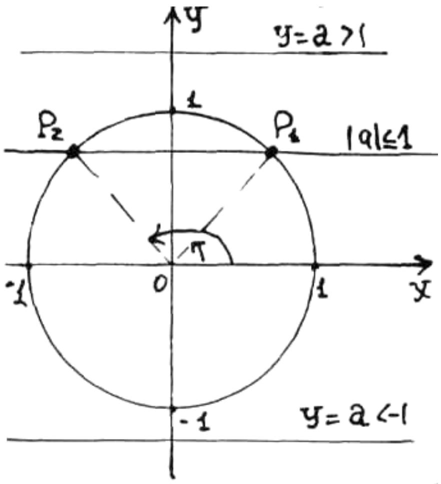
Рівняння та нерівності зручно розв'язувати графічно або за допомогою одиничного кола.

Розглянемо рівняння $\sin x = a$.

1. Якщо a>1, то рівняння не має розв'язку,

2. Аналогічно, якщо a <-1.

3. Розглянемо випадок , коли $|a| \le 1$.



1) будуємо одиничне коло;

2) на осі синусів *Oy* позначаємо а;

3) через точку а, проводимо пряму перпендикулярну до осі ординат та знаходимо точки перетину її з колом *P*1, *P*2;

4) сполучимо *O* з утвореними точками, маємо два центральні кути *t*1, *t*2.

За означенням $\sin t1 = \sin t2 = a$, $t1 = \arcsin a$, але для одержання загального розв'язку додаємо період 2π функції $y = \sin x$.

Отже,

$$x1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z\,;$$
$$t2 = \pi - t1 = \pi - \arcsin a\,;$$
$$x2 = (-1)^k \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z\,.$$

Об'єднавши множини маємо:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z\ .$$

Окремі випадки

$$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in Z;$$
$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;$$
$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Загальні формули розв'язку для нерівностей

$$\sin x \geq a$$

Якщо 1) a<-1, то розв'язком нерівності є будь-яке дійсне число $x \in R$;
2) a>1, то дана нерівність розв'язку не має;
3) -1≤a≤1, то $\arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$.

$$\sin x \leq a$$

Якщо 1) a<-1, то нерівність розв'язку не має;
2) a>1, то розв'язком нерівності є будь-яке дійсне число $x \in R$;
3) -1≤a≤1, то $-\pi - \arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z$.

Розглянемо рівняння $\cos x = a$.

1. Якщо a>1, то рівняння розв'язку не має.
2. Аналогічно, якщо a<-1.
3. Якщо $|a| \leq 1$, то $x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$.

Окремі випадки

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$
$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in Z$$
$$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$$

Загальні формули розв'язку для нерівностей:

$$\cos x \geq a$$

Якщо: 1) a<-1, то розв'язком нерівності є будь-яке число $x \in R$;

2) $a>1$, то нерівність розв'язку не має;

3) $-1 \le a \le 1$, то $-arccosa+2\pi k \le x \le arccosa+2\pi k,\ k \in Z$.

$$\cos x \le a$$

Якщо: 1) $a<-1$, нерівність розв'язку не має;

2) $a>1$, розв'язком нерівності є будь-яке число x є R;

3) $-1 \le a \le 1$, маємо $arccosa+2\pi k \le x \le 2\pi - arccosa+2\pi k,\ k \in Z$.

Область значень функції $y = tgx$ вся числова пряма, то розв'язком рівняння $tgx = a$ будуть числа виду: $x= arctga+\pi k,\ k \in Z$.

Загальні формули розв'язку для нерівностей:

$$tgx \ge a\,.$$

Розв'язком є множина проміжків $acrtga+\pi k \le x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$.

$$tgx \le a\,.$$

Розв'язком є множина проміжків $-\frac{\pi}{2}+\pi k<x\le arctga+\pi k,\ k \in Z$.

Розв'язком рівняння $ctgx = a$ будуть числа виду: $x= arcctga+\pi k,\ k \in Z$.

Загальні формули розв'язку для нерівностей:

$$ctgx \ge a\,.$$

Розв'язком є множина проміжків $\pi k < x \le arcctga+\pi k,\ k \in Z$.

$$ctgx \le a\,.$$

Розв'язком є множина проміжків $arcctga+\pi k\le x<\pi+\pi k,\ k \in Z$.

ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗАННЯ

Завдання 1.			
№ варі-анту	Обчислити	№ варі-анту	Обчислити
1	$\left(3^{-2}\right)^2\cdot\left(2^{-1}\right)^{-1}-(1{,}5)^{-2}\cdot 2^{-1}+(4{,}5)^{-1}:3^{-1}$	11	$\dfrac{9^{-3}\cdot 25^{-2}}{75^{-1}\cdot 27^{-2}}$
2	$(-0{,}2-(-3\frac{2}{5}))+(-1{,}6+(-4))$	12	$(1{,}5)^3\cdot(2{,}25)^{-2}\cdot(0{,}75)^{-1}\cdot\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}-\left(7\frac{3}{8}\right)^{0}\right)$
3	$\dfrac{\left(3^{-1}\right)^2+2\cdot 6^{-1}+\left(2^{-1}\right)^2}{2^{-2}-3^{-2}}$	13	$\dfrac{2^{-2}+9^0}{(0{,}5)^{-2}-5(-0{,}5)^2+(1{,}5)^2}+4{,}75$
4	$(7-3{,}28):8+9{,}03\cdot 0{,}1$	14	$9\frac{2}{7}:1{,}3-2(5\frac{1}{7}-1\frac{1}{2}-2\frac{3}{14})$
5	$\dfrac{0{,}001}{10^{-5}}\cdot 2^{-2}\cdot 5^{-2}$	15	$8{,}5\cdot(16{,}17-13{,}97)+4\frac{3}{8}:1\frac{1}{6}$
6	$1{,}6+1\frac{2}{3}-(-2\frac{5}{6})$	16	$2\frac{3}{8}-1\frac{3}{4}+16(1\frac{1}{2}-\frac{5}{8})$
7	$\dfrac{0{,}4\cdot(-2)^3-\frac{1}{5}\cdot(-3)^2}{3{,}5-(1{,}6)^{-1}}:\dfrac{\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(1\frac{1}{2}\right)^{-1}\cdot\left(2{,}5-\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)}{(0{,}25)^{-1}+\left(1\frac{2}{3}\right)^{-1}}$	17	$(3\frac{2}{9}+12\frac{2}{3}+2-3\frac{1}{6}):\frac{1}{36}$
8	$\dfrac{(-7{,}2)^0-(0{,}1)^{-1}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}+\left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$	18	$\dfrac{2^3\cdot 5^{-5}}{25^{-3}\cdot 4^2}$
9	$-4\frac{1}{2}-18{,}5+(-10\frac{3}{5})+(-15{,}6))$	19	$(-2\frac{3}{4}+(-1\frac{2}{3}))+(-\frac{1}{6})$
10	$\dfrac{\left(3^{-1}\right)^2+2\cdot 6^{-1}+\left(2^{-1}\right)^2}{2^{-2}-3^{-2}}$	20	$-2{,}3+(-3\frac{1}{5}+(-\frac{5}{6}))$

Завдання 2.			
№ варі-анту	Спростити вираз	№ варі-анту	Спростити вираз
1	$\left(\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}\right)\cdot\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$	11	$\frac{x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt[3]{x^4}-8y\cdot\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\frac{x}{y}}\right)$
2	$t\cdot\frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}}+\sqrt{t+4}+\frac{4}{\sqrt{t+4}}$	12	$\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-x}\right)\cdot\frac{x}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}$
3	$\frac{9a+7}{a^2-49}+\frac{5}{7-a}-\frac{2}{a}$	13	$\left(\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{\frac{x^2-9}{x}}}+\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{\frac{x^2+9}{x}}}\right)^2\cdot\sqrt{\frac{x}{2}}$
4	$\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$	14	$\frac{(y+3)^2-49}{24-2y-y^2}+\frac{4}{y+6}$
5	$\left(\frac{1+a}{a^2-ab}-\frac{1-b}{b^2-ab}\right)\cdot\frac{ab^2-a^2b}{a+b}$	15	$\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[4]{a\sqrt{b}}\right)^6}$
6	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{a}+\frac{a}{\sqrt{2}}+2}-\frac{a^2\sqrt[4]{2}-2\sqrt{a}}{a\sqrt{2a}-\sqrt[4]{8a^4}}$	16	$\frac{6p}{9p^2-1}+\frac{3p+1}{3-9p}+\frac{3p-1}{6p+2}$
7	$\frac{x^3-y^3}{2y}\cdot\left(\frac{2y}{4-2y-2x+xy}+\frac{2xy+4y}{(x-y)(x^2-4)}\right)$	17	$\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2+\frac{x+7}{x+9}$
8	$\frac{(a^2-b^2)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{ab^3}-\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^4}}.$	18	$\frac{a-2}{a^2+2a}:\left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$
9	$\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)+\frac{8a^2}{2a+b}$	19	$\frac{1-\frac{b}{a+b}}{1-\frac{a}{a+b}}+\frac{1+\frac{b}{a-b}}{1-\frac{a}{a-b}}$
10	$\frac{\frac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}.$	20	$\frac{\left(\frac{a}{a-b}+\frac{a}{b}\right)\cdot\frac{a-b}{a}}{\left(\frac{c}{c-b}+\frac{c}{b}\right)\cdot\frac{c-b}{c}}$

Завдання 3.			
№ варі-анту	Розв’язати рівняння	№ варі-анту	Розв’язати рівняння
1	$(1+5x)(5x-1)-10(x-2)=19$	11	$(8x+5)^2+64x^2=80x+123$
2	$\frac{(2x+1)^2}{25}-\frac{x-1}{3}=x$	12	$2(5x-1)^2+35x-11=0$
3	$2(x-2)^2-3(x-2)+1=0$	13	$\frac{(3x+2)^2}{11}-\frac{x+5}{4}=x^2$
4	$3x^2-4x+4=-2(2x-4-x^2)$	14	$(3x-4{,}5)(x-2)=x^2-2{,}5x+9$
5	$(x+5)(x^2-x)=6(x+5)$	15	$x^3-5x^2+6x=0$
6	$(x^2-5x+5)^2=1$	16	$x^4-82x^2+81=0$
7	$2(x-3)-(x-5)=x+1$	17	$\frac{4x+1}{3}-\frac{3x-1}{5}=4-x$
8	$\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x+1}=1$	18	$\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+5}{1-x^2}=0$
9	$\frac{x-1}{x+2}+\frac{1}{2}=\frac{15}{2x+4}+\frac{21}{x(x+2)}$	19	$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4}$
10	$x(x^2+3x-1)-2x^2-3=x^3-(3x-5)$	20	$2(x-3)-(x-5)=x-1$

Завдання 4.			
№ варі-анту	Розв'язати нерівність	№ варі-анту	Розв'язати нерівність
1	$\frac{5x-3}{\sqrt{3x+6}} \le 0$	11	$3x+\sqrt{4x-8} < 9+\sqrt{4x-8}$
2	$1+2x < 5x-3 \le 3x+9$	12	$3\left(\frac{x}{2}-0{,}5\right) \le 0{,}3\left(\frac{2x-1}{2}+0{,}7\right)$
3	$\frac{x}{2}-\frac{3}{4} \ge \frac{4x-1}{8}-\frac{1}{16}$	13	$x^2 - 4x + 4 < 0$
4	$12x-\frac{x-2}{3}+2(x+1) > 5(3x-1)-\frac{2x+3}{2}-\frac{x}{3}$	14	$8(2x-1) \le \frac{1-2x}{3}+\frac{1}{6}$
5	$0{,}1(2-0{,}3x) \ge 0{,}05x+0{,}4$	15	$7(2x+3) > 5(3x-2)$
6	$2(\boldsymbol{x} - 3) > 3 - (5 - 2\boldsymbol{x})$	16	$\frac{x-3}{9}-\frac{2x+3}{6} > \frac{8-x}{12}$
7	$12 - 6\boldsymbol{x} \le 9\boldsymbol{x} - 3$	17	$x^2 - 4x + 4 \le 0$
8	$x^2 - 4x + 4 > 0$	18	$\sqrt{x-3}(x-4) < 0$
9	$(x-3)(x-4) \le 0$	19	$x(x+1)+x(1-2x) > (2+x)(1-x)$
10	$x^2 - 5x + 4 > 0$	20	$2(\boldsymbol{x} - 3) \le 3 - (5 - 2\boldsymbol{x})$

Завдання 5.			
№ варі-анту	Обчислити.	№ варі-анту	Обчислити.
1	$\log_2 \sqrt[3]{16} + \log_8 \sqrt[4]{2} - \log_3\left(27\sqrt{3}\right) -$ $- \log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$	11	$\log_8 \log_4 \log_2 64$
2	$\log_2\left(\frac{1}{4\sqrt{4}}\right) + \log_3\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}}}{27}\right) +$ $\log_4\left(\frac{\sqrt[3]{8}}{128\sqrt{2}}\right) - \log_7\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{49}}\right)$	12	$72 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}\log_7 9 - \log_7 6} + 5^{-\log_{\sqrt{5}} 4}\right)$
3	$\log_{0,4}\left(\frac{1}{5} \cdot \sqrt[3]{50}\right) + \log_{0,6}\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) +$ $+ \log_{0,32}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$	13	$\frac{\log_3 81}{\log_3 9}\left(36^{1-\log_6 2} + 49^{-\log_7 6}\right)$
4	$\log_3 27 - \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\frac{1}{3}} 27 - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{27}\right)$	14	$10^{\frac{1}{2}\lg 9 - \lg 5 + \lg 2} \cdot 7^{\log_{3\sqrt{3}} 27}$
5	$\left(\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}\right)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}\left(5\sqrt{5}\right) + \log_{\sqrt{5}}\left(5\sqrt{5}\right)}$	15	$\log_4 \log_2 \log_3 81$
6	$2\log_5 \sqrt[4]{5} + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5^2 \sqrt{5} - 2$	16	$\log_{\sqrt{6}} 3 \cdot \log_3 36 + \log_{\sqrt{3}} 8 \cdot \log_4 81$
7	$\log_3 \log_8 \log_2 16$	17	$\left(\lg 2 + \lg 5 + \lg 300 - \lg 3\right) \cdot$ $\cdot 3^{\frac{1}{5\log_5 3}}$
8	$\log_3\left[\log_2^2\left(\frac{1}{2}\right) + 6\log_2 \sqrt{2} + 5\right]$	18	$\left(\log_8 27 - \log_{0,5} \frac{1}{3}\right) \cdot$ $\cdot \left(\frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3}\right)$
9	$\left(\log_{\sqrt{5}} 125 : \log_5^2 25\right) \cdot$ $\cdot \left(\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5} : \log_{0,2} \sqrt[3]{25}\right)$	19	$\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot$ $\cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$
10	$(0,1)^{2\lg 0,1 - 1,5\lg 0,1} \cdot (0,1)^{-\left(\lg\frac{8}{3} + 2 - \lg 20\right)}$	20	$2^{\log_5 3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{1-\log_5 2,5} \cdot$ $\cdot \log_9 2 \cdot \log_4 81$

Завдання 6.			
№ варі-анту	Розв'язати тригонометричне рівняння	№ варі-анту	Розв'язати тригонометричне рівняння
1	$ctg\left(\frac{\pi}{x^2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	11	$\cos 5x=1$
2	$\sin\frac{\pi x}{2}=1$	12	$ctg\,(3x)=\sqrt{3}$
3	$ctg\,(3x)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$	13	$\cos 2x=-1$
4	$tgx=\frac{3\pi}{2}$	14	$\sin\left(x^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
5	$ctg\left(\frac{3}{2}x\right)=5$	15	$\sin\frac{x}{9}=-\frac{1}{2}$
6	$ctg8x=\sqrt{3}$	16	$\sin\left(\frac{3\pi}{x^2}\right)=-\frac{1}{2}$
7	$\cos\sqrt{x-1}=0$	17	$\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=1$
8	$tg\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=1$	18	$\cos\left(\frac{5}{6}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
9	$\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	19	$ctg\left(4x-\frac{\pi}{9}\right)=-\sqrt{3}$
10	$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{6}\right)=\frac{1}{2}$	20	$\cos(2-3x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Завдання 7.			
Застосовуючи властивості елементарних функцій та елементарні перетворення графіків функцій побудувати графіки			
№ варі-анту		№ варі-анту	
1	$y=2\sin 3x$	11	$y=\lvert\cos x\rvert$
2	$y=2x^2-2x+6$	12	$y=\left\lvert\dfrac{1}{x}\right\rvert$
3	$y=\dfrac{1}{2}\cos x$	13	$y=\cos x+1$
4	$y=\lvert\sin x\rvert$	14	$y=x^2+x-6$
5	$y=3\lvert x\rvert-2$	15	$y=\lvert 4x-5\rvert$
6	$y=tg(x-\pi)$	16	$y=ctg\,\dfrac{x}{3}$
7	$y=\sin x-7$	17	$y=3x-4$
8	$y=\dfrac{1}{x-1}$	18	$y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$
9	$y=x^2-x-6$	19	$y=-x^2+2x-4$
10	$y=-2\sin x$	20	$y=2+tgx$

Список рекомендованої літератури

1. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу. 11 клас / Є. П. Нелін. – Х. : Ранок, 2019. – 240 с.

2. Колмогоров А. М. Алгебра і початки аналізу. 10-11 клас / А. М. Колмогоров. – М. : Просвещение, 2008. – 384 с.

3. Бевз Г. П. Математика. 11 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз – К. : Генеза, 2011. – 320 с.

4. Ткачук В. В. Математика / В. В. Ткачук. – М. : МЦНМО, 2012. – 960с.

Навчальне електронне видання

комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

АДАПТАЦІЙНИЙ КУРС З МАТЕМАТИКИ

Конспект лекцій
для студентів спеціальностей
072 «Фінанси, банківська справа та страхування»,
071 «Облік і оподаткування»

Укладачі:
ТОРЯНИК Дмитро Олександрович
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін д-р техн. наук, проф. М.І. Погожих

Видано в авторській редакції

План 2019 р., поз. 72

Підп. до друку 11.12.2019 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 5,46 Мб. Тираж 20 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.