МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Харківський державний університет харчування та торгівлі

Вища математика

Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Функції багатьох змінних

Методичні вказівки для самостійної роботи
та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами
денної форми навчання за спеціальностями
131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування»

Харків
ХДУХТ
2017

Вища математика. Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Функції багатьох змінних: методичні вказівки для самостійної роботи та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами денної форми навчання за спеціальностями 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування» [Електронний ресурс] / М.С. Софронова – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2017. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.

Укладач М.С. Софронова

Рецензент: канд. фіз.-мат. наук, доц. Д. О. Торяник

Кафедра фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін

Схвалено науково-методичною комісією факультету обладнання та технічного сервісу

Протокол від «24» квітня 2017 року № 8

Схвалено вченою радою ХДУХТ

Протокол від «28» грудня 2016 року № 9

Схвалено редакційно-видавничою радою ХДУХТ

Протокол від «26» грудня 2016 року № 5

© Софронова М.С., укладач, 2017
© Харківський державний університет харчування та торгівлі, 2017

ВСТУП

Загальний курс математики є фундаментом математичної освіти студента, що має важливе значення для успішного вивчення загальнотеоретичних та спеціальних дисциплін, передбачених навчальними планами спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування».

Ефективним напрямом раціональної організації занять з вищої математики є удосконалення організації самостійної роботи студентів денної форми навчання.

Серед тем, що охоплює програма дисципліни, тема «Диференціювання функцій однієї та багатьох змінних» є для студентів однією з непростих. Тому важливо правильно організувати не лише аудиторну роботу, але й завчасно підготувати дидактичний матеріал для самостійної роботи студентів, а саме:

а) стисле та зрозуміле викладення теоретичного матеріалу з теми «Диференціювання функцій однієї та багатьох змінних»;

б) розв’язання типових індивідуальних задач та прикладів з даної теми.

Запропоновані методичні вказівки містять:

– 3 індивідуальних завдання (з 8 завданнями) по 25 варіантів, складені в послідовності відповідно до теоретичного матеріалу курсу;

– приклади розв’язання типових завдань, які ілюструють різні підходи, різні методичні засоби і сприяють більш ефективному і глибокому розумінню теоретичних понять;

– стислий теоретичний матеріал, необхідний для виконання завдань, до якого можна звертатись як на початку роботи, так і в процесі розв’язування завдань. Цей же теоретичний матеріал дозволить систематизувати знання з теми при рубіжному контролі знань.

1. Вступ до математичного аналізу

До **основних елементарних функцій** відносяться:

– степенева ($y = x^{\alpha}, \alpha \in R$),

– показникова ($y = a^{x}, a \neq 0, a \neq 1$),

– логарифмічна ($y = \ln x$),

– тригонометричні ($y = \sin x, y = \cos x, y = tgx, y = ctgx$),

– обернені тригонометричні функції ($y = \arcsin x, y = \arccos x, y = arctgx,$ $y = arcctgx$).

Функції, які створені із основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і суперпозицій, називаються **елементарними**.

Наприклад, функція $y = \frac{\cos^3 x\sqrt{x}}{3^{2x^2}} + \sqrt{\lg^2 x + \arccos x}$ є елементарною.

Елементарні функції діляться на **алгебраїчні**, до яких відносяться:

– ціла раціональна функція (многочлен або поліном): $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$;

– дробово-раціональна функція – відношення двох многочленів;

– ірраціональна функція – серед операцій над многочленами є добування коренів і **неалгебраїчні**, які називаються **трансцендентними**.

Стала величина *a* називається границею змінної величини *x*, якщо при її змінюванні абсолютна величина різниці $x - a$ після деякого моменту стає менше, ніж будь-яке додатнє число δ, яким би малим воно не було. Це записують $x \to a$ (x прямує до a) або $\lim x = a$, якщо $|x - a| < \delta, \delta > 0$.

Якщо при змінюванні величини *x* абсолютна величина її після деякого моменту стає більше, ніж будь-яке додатне число N, яким би великим воно не було, то записують $x \to \infty$ (x прямує до нескінченності) або $\lim x = \infty$, якщо $|x| > N, N > 0$. При цьому можливі випадки $\lim x = +\infty$, якщо $x > N$ та $\lim x = -\infty$, якщо $x < -N, N > 0$.

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки $x = a$, крім, можливо, самої точки a. **Число *А* називається границею функції *y=f(x)* при** $x \to a$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число $\delta(\varepsilon)$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - a| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначають цю границю функції так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Якщо $x < a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a - 0$; якщо $x > a$ і $x \to a$, то умовно записують $x \to a + 0$. Числа $f(a-0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ та $f(a+0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називають, відповідно, **границею функції *f(x)* зліва в точці *а*** і **границею функції *f(x)* справа в точці *а*,** або односторонніми границями функції *f(x)* в точці *а*. Для існування границі функції при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a-0) = f(a+0)$.

Поруч з вивченням поведінки функції в скінченній точці вивчається поведінка функції на нескінченності, тобто при $x \to +\infty$ або при $x \to -\infty$ ($x \to \infty$). **Число *А* називається границею функції *y=f(x)* при** $x \to \infty$, якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатнє число $N(\varepsilon)$, що для всіх *x*, які задовольняють нерівність $|x| > N$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою**, якщо $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, а функція $\beta(x)$ – нескінченно великою, якщо $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = \infty$ (*а* – скінчене число або нескінченність).

Для нескінченно малих функцій справедливі такі властивості:

– алгебраїчна сума скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція;

– добуток скінченного числа нескінченно малих функцій є нескінченно мала функція;

– добуток нескінченно малої функції на обмежену є нескінченно мала функція;

– якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$;

– якщо $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\beta(x)}=0$;

– якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, то $f(x)=A+\alpha(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Звідси при $c>0$ $(c=const)$ має місце символіка:

$$\frac{c}{+0}=+\infty,\ \frac{c}{-0}=-\infty,\ \frac{c}{0}=\infty,\ \frac{c}{+\infty}=+0,\ \frac{c}{+\infty}=-0,\ \frac{c}{-\infty}=+0,\ \frac{c}{\infty}=0.$$

<u>Властивості границь</u>

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, якщо функція $f(x)$ елементарна та існує в точці a.

2. Нехай функції $\mathrm{U}(x)$ та $\mathrm{V}(x)$ мають границі для $x\to a$ відповідно $\lim\limits_{x\to a}U(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}V(x)=B$, тоді справедливі співвідношення:

а) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathrm{U}(x)+\mathrm{V}(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)+\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)=\mathrm{A}+\mathrm{B}$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\left[\mathrm{U}(x)\mathrm{V}(x)\right]=\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)=\mathrm{AB}$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{U}(x)}{\mathrm{V}(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\mathrm{U}(x)}{\lim\limits_{x\to a}\mathrm{V}(x)}=\dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, тільки, якщо $\mathrm{B}\neq 0$.

3. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a}f(x)\right]^n$; якщо $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ існує.

4. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[a\right]^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$; якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ існує.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)^{\varphi(x)}\right]=\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$, причому обидві одночасно не дорівнюють нулю.

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\log_a f(x)\right]=\log_a\left[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right]$, якщо існує додатня границя $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

При знаходженні границь часто використовують першу та другу важливі границі.

Перша важлива границя

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ або } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1.$$

Наслідки із першої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}=1.$$

Друга важлива границя

$$\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \text{ або, } \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \text{ де } e\approx 2{,}71828.$$

Функція $y=e^{x}$ називається експонентою. Логарифм числа a за основою e називається натуральним логарифмом і позначається $\log_{e} a=\ln a$.

Наслідки із другої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_{a}(1+x)}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a;\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1.$$

Нехай $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Тоді

– якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k(k\neq 0,\ k\neq\infty)$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку**;

– якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними нескінченно малими**, що позначається $\alpha(x)_{x\to a}\sim\beta(x)$;

– якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку**, ніж $\beta(x)$.

Аналогічно можна провести порівняння і нескінченно великих функцій.

Значно спрощують знаходження границь такі властивості:

– якщо $u(x)\sim u'(x)$, $v(x)\sim v'(x)$ при $x\to a$, то $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ (справедливо як для нескінченно малих, так і для нескінченно великих функцій);

– якщо в сумі $u(x)+v(x)$ відкинути нескінченно малу вищого порядку, при умові, що $u(x)$ і $v(x)$– нескінченно малі, або нескінченно велику нижчого порядку, при умові, що $u(x)$ і $v(x)$ – нескінченно великі, то частина, яка залишиться, буде еквівалентна всій сумі і називається її головною частиною.

Еквівалентними є такі функції:

$$x \sim \sin x \sim \arcsin x \sim tgx \sim arctgx \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x) \text{ при } x \to 0.$$

Замість x можна розглядати будь-яку нескінченно малу $\alpha(x)$ при $x \to a$.

При обчисленні границь необхідно перш за все аргумент функції замінити його граничним значенням і вияснити, чи має місце **невизначеність**.

До **невизначених виразів** відносяться: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \cdot 0$, $\infty - \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Якщо в результаті підстановки граничного значення аргументу одержуємо невизначений вираз, то треба виконати тотожні перетворення, в результаті яких усувається невизначеність, а потім обчислити границю.

Функція $f(x)$ називається **неперервною при** $x \to a$, якщо вона визначена в точці $x = a$ та в деякому її околі, а також $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Якщо функція неперервна в кожній точці деякого проміжку, то вона називається **неперервною на цьому проміжку**.

Основні елементарні функції, а також суми, добутки, частки цих функцій неперервні при всіх x, при яких вони існують.

Точки, в яких порушується неперервність, називаються **точками розриву функції**.

<u>Класифікація точок розриву</u>.

1. Якщо функція в точці $x = a$ має скінчені границі зліва та справа:

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x), \; f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x),$$

з яких хоча б одна не дорівнює $f(a)$, то точка $x = a$ називається **точкою розриву першого роду** функції $f(x)$, а величина $\Delta = |f(a+0) - f(a-0)|$

називається **стрибком** функції в точці $x = a$. Якщо при цьому $f(a-0) = f(a)$, то $f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$ зліва, якщо $f(a+0) = f(a)$, то $f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$ справа.

Якщо $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, то точка $x = a$ – **усувна точка розриву**.

Наприклад,

1) функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ невизначена, а $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, отже, $x = 0$ – усувна точка розриву (рис. 1а);

2) $$y = \begin{cases} x-1, x < 0; \\ x+1, x \geq 0; \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to -0} y = \lim\limits_{x\to -0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to +0} y = \lim\limits_{x\to +0}(x+1) = 1$. Односторонні границі існують, але не рівні між собою, отже, $x = 0$ – точка розриву першого роду (рис. 1б);

2. Якщо хоча б одна з односторонніх границь $f(a-0), f(a+0)$ не існує або нескінченна, то $x = a$ називається **точкою розриву другого роду**.

Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ не існує в точці $x = 0$ і $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x} = +\infty$, отже, $x = 0$ – точка розриву другого роду (рис. 1в).

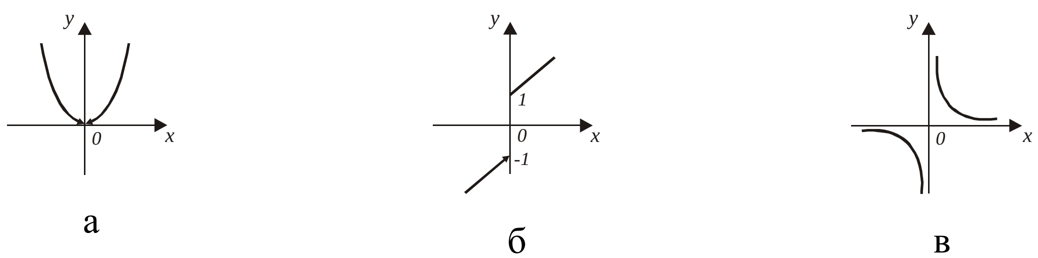


Рис. 1. Приклади точок розриву першого та другого роду

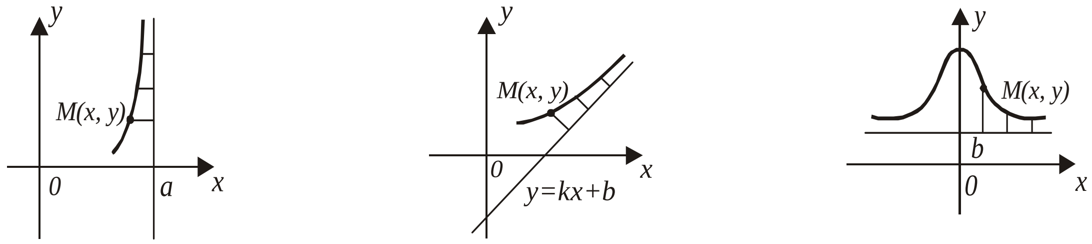
Асимптотою функції $y = f(x)$ називається пряма, відстань від якої до графіка цієї функції прямує до 0, при віддаленні точки графіка на нескінченність (рис. 2).

Пряма $x = a$ є **вертикальною асимптотою** функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (рис.2а.). Для визначення вертикальних асимптот необхідно знайти ті значення аргументу, поблизу яких функція $f(x)$ необмежено зростає за абсолютною величиною. Якщо такими значеннями аргументу будуть a_1, a_2, …, a_n, то рівняння вертикальних асимптот мають вигляд $x=a_1$, $x=a_2$, …, $x=a_n$.

Неперервні функції не мають вертикальних асимптот в області їх існування.

Пряма $y = kx + b$ є **похилою асимптотою** функції $f(x)$, якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$ (рис. 2б). Причому необхідно окремо розглянути випадки $x \to +\infty$ та $x \to -\infty$. Крива має похилі асимптоти тільки у випадку, коли границі розглянуті вище, є скінченними.

Пряма $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$. Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти $y = kx + b$ (рис. 2в).



а б в

Рис. 2. Приклади вертикальної, похилої та горизонтальної асимптот

Індивідуальне завдання № 1

Завдання 1

Знайти границі, не використовуючи правило Лопіталя.

1. $а)\ \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2}$; $б)\ \lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{4x^2 + 3x - 6}$; $в)\ \lim\limits_{x \to 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 2x$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-5x-12}{5x^2-21x+1}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-2}\right)^{3x+3}$.

2. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x+2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+10}{2x^2+x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-5}\right)^{3x-2}$.

3. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+7x-15}{x^2-4x-21}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+2}{4x^3-2x-7}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg}8x\operatorname{ctg}4x$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-5}\right)^{2x-1}$.

4. *а*) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-5}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x+2}\right)^{3x-5}$.

5. *а*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; *д*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x-x^2}{2x^2+x-5}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(3x-1)-\ln(3x-2))$.

6. *а*) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2 16}{x^2+5x+2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{2x^2-15x+18}{x^2-4x-12}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x+1}{2x^2+x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+11}-\sqrt{7-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x 3x}{7x\sin 3x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{8+x}{x}}$.

7. *а*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3-5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^3+3x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6x}{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x-3}\right)^{x+4}$.

8. *а*) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-2x-1}{x^2-2x-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2+17x+6}{3x^2+8x-3}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x+6}{8x^3+6x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-8}-\sqrt{12-x}}{x-10}$; *д*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}5x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-2}\right)^{-x+5}$.

9. *а*) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$; *б*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2-x-2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2-3}{2x^4+3x^2+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+7}-\sqrt{7-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\mathrm{tg}3x}{1-\cos6x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{5/x+2}$.

10. *а*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2+x-6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+12}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-8x+1}{3x^2-x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}9x}{\mathrm{tg}3x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x-3}\right)^{2x+1}$.

11. *а*) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+2x-5}{x^2+2x-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-7x-2}{2x^2-x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\mathrm{arctg}4x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+2}$.

12. *а*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-4x-2}{2x^2-x-6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x-8}{2x^2+5x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin5x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2x+5}$.

13. *а*) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-5x+6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+11x+10}{2x^2+5x+2}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+13x+7}{3x^2+8x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{9-x}}{x-5}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{\sqrt{2(1-\cos4x)}}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x-4}\right)^{4x+2}$.

14. *а*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3+5x-8}{2x^2+3x-5}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$;

г) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x}{\arcsin2x}$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+6}\right)^{x-3}$.

15. *а*) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^2-7x-4}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-10}{x^3+2x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+7}-\sqrt{3-x}}{x+2}$; *д*) $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{tg}2x\,\mathrm{ctg}3x$; *е*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-5}{4x-3}\right)^{3x+5}$.

16. *а*) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2+x-4+2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3x^2-14x+8}{x^2-16}$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+5}{x^2+3x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-\sqrt{3-x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\sin 6x\,\mathrm{ctg}\,2x$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+5}\right)^{5x+3}$.

17. *а)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2+5x+6}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+x+7}{3x^2+8x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{8-x}}{x-2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+3}\right)^{4x-5}$.

18. *а)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-15x+25}{x^2+x+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-14x+8}{2x^3-7x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x-2}-\sqrt{6-x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,6x}{\mathrm{tg}\,4x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{2x+3}$

19. *а)* $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-8}{2x^2+3x-2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+x-28}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-5x+1}{x^2-3x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}{x-3}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\,2x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{5x+4}\right)^{x+2}$.

20. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x+5}{3x^2-2x-1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{3x^2-8x-3}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+3}{x^3-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x-\sin 3x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x-5}\right)^{9x-4}$.

21. *а)* $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{2x^2+x+2}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-x-6}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+10}{2x^2+x-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x-5}\right)^{3x-2}$.

22. *а)* $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-4}{x^2+x+1}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{3x^2-4x-4}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-1}{2x^3-x^2-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{1+2x}-3}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$; *е)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{4x}$.

23. *а)* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-7x+12}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-7x+10}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3+2x-4}{5x^3-x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$; *д)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^2\sin x}$; *е)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\ln(1+x)}$.

24. $a)\ \lim\limits_{x\to 4}\frac{x^3+64}{x^2+x+2}$; $б)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2+6x-16}$; $в)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+x-4}{x^2+2x+1}$;

$г)\ \lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{3x+10}-4}$; $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}$; $е)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left[3x(\ln(x+4)-\ln x)\right]$.

25. $a)\ \lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{3x^2-x-2}$; $б)\ \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-7x+6}{2x^2+5x-7}$; $в)\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x+1}$;

$г)\ \lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$; $д)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\,\mathrm{tg}3x}{1-\cos 6x}$; $е)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$.

Завдання 2

Дослідити задані функції на неперервність, знайти точки розриву і встановити характер точок розриву. Побудувати графіки.

1. $a)\ f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$ $б)\ f(x)=8^{\frac{1}{x-2}}$.

2. $a)\ f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 1;\\ 2x, & 1<x\le 3;\\ x+2, & x>3.\end{cases}$ $б)\ f(x)=2^{\frac{1}{x-5}}$.

3. $a)\ f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ x+1, & 0\le x\le 4;\\ 3+\sqrt{x}, & x>4.\end{cases}$ $б)\ f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}$.

4. $a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \frac{\pi}{2};\\ 1, & \frac{\pi}{2}<x<\pi;\\ x, & x>\pi.\end{cases}$ $б)\ f(x)=5^{\frac{1}{x-4}}$.

5. *а*) $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \mathrm{tg}x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ x, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ *б*) $f(x)=2^{\frac{1}{3-x}}$.

6. *а*) $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x<2; \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=4^{\frac{1}{1-x}}$.

7. *а*) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x\le 0; \\ 1, & 0<x\le 2; \\ x-2, & x>2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=3^{\frac{1}{x-1}}$.

8. *а*) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ 1-x, & 0<x\le 2; \\ x^2, & x>2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}$.

9. *а*) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0; \\ x, & 0\le x\le 2; \\ 0, & x>2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$.

10. *а*) $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0; \\ \mathrm{tg}x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$ *б*) $f(x)=3^{\frac{1}{2-x}}$.

11. *а*) $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0; \\ \sqrt{x}, & 0<x<4; \\ 1, & x\ge 4. \end{cases}$ *б*) $f(x)=9^{\frac{1}{1-x}}$.

12. *а*) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=7^{\frac{1}{x+3}}$.

13. *а*) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & x<3;\\ x-2, & 0\le x<5;\\ 8-x, & x\ge 5.\end{cases}$ *б*) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

14. *а*) $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le 2;\\ 4-x, & 2<x<4;\\ 0, & x\ge 4.\end{cases}$ *б*) $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{x+5}}$.

15. *а*) $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le -1;\\ x^2-2, & -1<x<1;\\ x-2, & x\ge 1.\end{cases}$ *б*) $f(x)=10^{\frac{1}{x}}$.

16. *а*) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\le -3;\\ 5-x^2, & -3\le x<0;\\ 5x, & x\ge 0.\end{cases}$ *б*) $f(x)=3^{\frac{1}{x-4}}$.

17. *а*) $f(x)=\begin{cases}6-x^2, & x\le 2;\\ x-3, & 2<x\le 4;\\ 2x-7, & x>4.\end{cases}$ *б*) $f(x)=2^{\frac{1}{4+2x}}$.

18. *а*) $f(x)=\begin{cases}x+4, & x\le -1;\\ x^2+2, & -1\le x<1;\\ 2x, & x>1.\end{cases}$ *б*) $f(x)=3^{\frac{1}{1-x}}$.

19. *а*) $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ x+1, & x>1.\end{cases}$ *б*) $f(x)=2^{\frac{1}{5-x}}$.

20. *а*) $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x<0;\\ \mathrm{tg}x, & 0\le x\le \frac{\pi}{4};\\ 0, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$ *б*) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}$.

21. *а*) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le\pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$ *б*) $f(x)=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-5}}$.

22. *а*) $f(x)=\begin{cases} -x-1, & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 0; \\ x, & x>0. \end{cases}$ *б*) $f(x)=5^{\frac{1}{5-x}}$.

23. *а*) $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$ *б*) $f(x)=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\frac{1}{7-x}}$.

24. *а*) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$ *б*) $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$.

25. *а*) $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$ *б*) $f(x)=2^{\frac{1}{2-x}}$.

Розв’язання типового варіанта

1. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+4x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+7}{x^2+x-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-10}{x^2+x-6}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}$; е) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$.

► а) Під знаком границі маємо дробово-раціональну функцію, знаменник якої при $x = 3$ (граничне значення аргументу) відмінний від нуля. Користуючись теоремою про границю частки і замінюючи аргумент x його граничним значенням, маємо

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+x-6}=\frac{3^2-5\cdot 3+1}{2\cdot 3^2+3-6}=-\frac{1}{3}.$$

б) При x=1 знаменник дробу відмінний від нуля, чисельник дорівнює нулю. Отже, при $x \to 1$ чисельник є величиною нескінченно малою, а знаменник – змінна величина, що має кінцеву границю. Оскільки частка від ділення нескінченно малої величини на змінну величину, що має кінцеву границю, є також нескінченно малою величиною, то границею даного дробу є нуль.

Отже,

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 4x - 2} = 0.$$

в) При x = – 2 знаменник дробу дорівнює нулю, а чисельник відмінний від нуля. Отже, при $x \to -2$ знаменник є величина нескінченно мала, а чисельник – обмежена. Дана дріб є нескінченно великою, умовно це позначається символом ∞. Таким чином,

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 3x + 7}{x^2 + x - 2} = \infty.$$

г) При x=2 чисельник і знаменник дробу дорівнюють нулю. Отже, безпосередня підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеного виразу виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити невизначеність виду $\frac{0}{0}$ (відношення двох нескінченно малих величин), необхідно попередньо дріб спростити, розклавши на множники чисельник і знаменник та скоротивши дріб на $(x - 2)$:

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - x - 10}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)} = \lim_{x \to 2} \frac{2x+5}{x+3} = \frac{9}{5}.$$

Слід відмітити, що аргумент x прямує до свого граничного значення 2, але не співпадає з ним. З цього приводу множник $(x - 2)$ є відмінним від нуля при $x \to 2$.

д) При $x \to \infty$ маємо невизначений вираз виду $\frac{\infty}{\infty}$. Щоб знайти границю дробово-раціональної функції $\frac{P(x)}{Q(x)}$ при $x \to \infty$, необхідно попередньо чисельник і знаменник даного дробу поділити на x^n, де n – найвищий ступінь багаточленів $P(x)$ та $Q(x)$. Поділивши чисельник і знаменник даного дробу на x^2, застосовуючи основні теореми про границі та властивості нескінченно малих, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+1}{2x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}=2.$$

е) Безпосередня підстановка граничного значення аргументу призводить до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити цю невизначеність, помножимо чисельник та знаменник дробу на добуток $(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{3x-2}-2)$.

Потім скоротимо дріб на множник (x – 2), що є відмінним від нуля при $x\to 2$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)(\sqrt{3x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-2-4)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x+5-9)(\sqrt{3x-2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(3x-6)(\sqrt{2x+5}+3)}{(2x-4)(\sqrt{3x-2}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(\sqrt{2x+5}+3)}{2(\sqrt{3x-2}+2)}=\frac{18}{8}=\frac{9}{4}.$$ ◄

2. Знайти границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{\operatorname{arctg} 2x}$.

►а) Першою визначною границею зветься границя відношення синуса нескінченно малої дуги до самої дуги. Відомо, що ця границя дорівнює одиниці, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Нехай $3x = y$. Очевидно, що при $x\to 0$ і $y\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{2y}=\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=\frac{1}{2}.$$

б) Відомо, що $1-\cos 5x = 2\sin^2\frac{5}{2}x$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{5}{2}x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{5}{2}x}{x}=2\cdot\frac{5\cdot 5}{2\cdot 2}=\frac{25}{2}.$$

в) Позначимо $\operatorname{arctg} 2x = y$, тоді $2x = \operatorname{tg} y$, очевидно, що при $x\to 0$ і $y\to 0$; використовуючи теореми про границі, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\mathrm{arctg}2x}=\lim_{y\to 0}\frac{2\mathrm{tg}y}{y}=2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}y}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos y}=2\cdot 1\cdot 1=2\,.◄$$

3. Знайти границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{4x}.$$

► Другою визначною границею зветься границя функції $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ при умові, що аргумент $x\to\infty$, або границя функції $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, коли аргумент $\alpha\to 0$. Ця границя існує та дорівнює числу e, тобто

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{a}}=e\,.$$

Перетворимо вираз, що знаходиться під знаком даної границі. Поділивши чисельник на знаменник, вилучимо цілу частину.

$$\frac{2x-1}{2x+3}=1-\frac{4}{2x+3}\,.$$

Таким чином, при $x\to\infty$ дана функція є степенем, основа якого прямує до одиниці, а показник – до нескінченності (невизначеність виду 1^{∞}). Перетворимо функцію таким чином, щоб можливо було скористатися другою визначною границею.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{\frac{-4}{2x+3}\cdot\frac{2x+3}{-4}\cdot 4x}.$$

Враховуючи, що

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-4}{2x+3})^{\frac{2x+3}{-4}}=e,\qquad \lim_{x\to\infty}(\frac{-4\cdot 4x}{2x+3})=-8,$$

маємо $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x}=e^{-8}=\frac{1}{e^{8}}$. ◄

4. Дослідити задані функції на неперервність.

$$а)\ f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<1; \\ 4-2x, & 1\le x<3; \\ x-5, & x\ge 3. \end{cases} \qquad б)\ f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}.$$

► Функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалах $(-\infty,1)$, $[1,3)$; $[3,\infty)$, де вона задана неперервними функціями. Отже, розрив можливий тільки в точках $x_1=1$ та $x_2=3$. В точці $x=1$ знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2-4\right)=-3;$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(4-2x)=2;$$
$$f(1)=(4-2x)\big|_{x=1}=2.$$

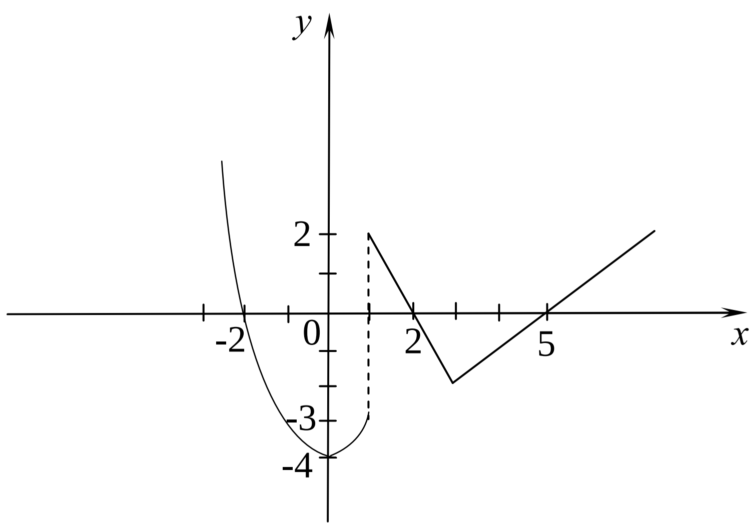
$f(1-0)\ne f(1+0)$, отже функція $f(x)$ в точці $x_1=1$ має розрив першого роду типу „стрибок”.

Для точки $x_2=3$ знаходимо:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}(4-2x)=-2;$$
$$\lim_{x\to 3+0} f(x)=\lim_{x\to 3+0}(x-5)=-2;$$
$$f(3)=(x-5)\big|_{x=3}=-2.$$

$f(3-0)=f(3+0)=f(3)$, отже в точці $x_2=3$ функція $f(x)$ є неперервною.

Графік заданої функції:



б) Маємо показникову функцію $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}$ яка є неперервною в кожній точці області визначення. В точці $x=3$ функція є невизначеною, отже знаходимо для цієї точки односторонні границі:

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{+\infty}=0;$$

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3-x}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\infty}=\infty.$$

В точці $x=3$ функція має точку розриву другого роду .◄

2. Диференціальне числення функцій однієї змінної і його застосування

Приростом функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ називається різниця

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

де Δx – приріст аргументу (різниця між новим і попереднім його значеннями).

Похідною функції $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ називається границя відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ або } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо зазначена границя існує, то функція $f(x)$ називається **диференційовною** в точці $x=x_0$, а операцію знаходження похідної - **диференціюванням**.

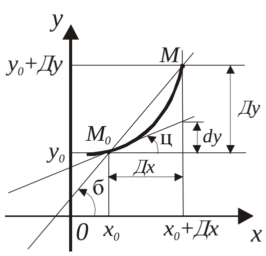


Рис. 3. Геометрична інтерпретація похідної

Геометрична інтерпретація показана на рис. 3. M_0M – січна, що проходить через дві точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ кривої $y = f(x)$, $tg\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ $M \to M_0$, а січні переходять в дотичну l,що проходить через точку M_0 до кривої, при цьому $tg\alpha \to tg\varphi$, де φ – кут між додатним напрямом осі OX і дотичною, який відраховується проти ходу годинникової стрілки. Використовуючи рівняння прямої виду $y - y_0 = k(x - x_0)$, запишемо рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$, що проходить через точку $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);\ f'(x_0) = tg\varphi.$$

Оскільки $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \Delta x \to 0.$ Тут $f'(x)\Delta x$- головна частина Δy при $\Delta x \to 0$, так як $\alpha(\Delta x)\Delta x = O(\Delta x)$.

Диференціалом функції $f(x)$ в точці $x = x_0$ називається головна частина приросту функції, яка лінійна відносно $\Delta x, \Delta x \to 0$. Позначається $dy = f'(x_0)\Delta x$ або $dy = f'(x_0)dx$. Тоді $y'(x) = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, де dy – диференціал функції, dx– диференціал незалежної змінної. Порівняння Δy з dy показує, що $\Delta y \approx dy$. Звідки $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Ця формула застосовується для наближеного обчислення значень функції при малих приростах Δx аргументу x.

Правила диференціювання

1. $y = cu(x)$, $\quad y' = cu',\ c \in R$.
2. $y = u(x) \pm v(x)$, $\quad y' = u' \pm v'$.
3. $y = u(x)v(x)$, $\quad y' = u'v + uv'$.
4. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $\quad y' = \dfrac{u'v - uv'}{v'}$.
5. $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, $\quad y' = y'_u u'_x$.

Таблиця похідних та диференціалів основних елементарних функцій

	$y = f(x)$	$y' = \frac{dy}{dx}$	$dy = y'dx$
1	$y = C$	$y' = 0$	$dy = 0dx$
2	$y = x$	$y' = 1$	$dy = dx$
3	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$dy = nx^{n-1}dx$
4	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$	$dy = -\frac{dx}{x^2}$
5	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$dy = -\frac{dx}{2\sqrt{x}}$
6	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$dy = a^x \ln a dx$
7	$y = e^x$	$y' = e^x$	$dy = e^x dx$
8	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$dy = \frac{dx}{x}$
9	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$dy = \frac{dx}{x \ln a}$
10	$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$dy = \cos x dx$
11	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$dy = -\sin x dx$
12	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$dy = \frac{dx}{\cos^2 x}$
13	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$dy = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
14	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$dy = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
16	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$	$dy = \frac{dx}{1+x^2}$
17	$y = arcctg\, x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$	$dy = -\frac{dx}{1+x^2}$

Правило Лопіталя розкриття невизначеностей типу $\left(\frac{0}{0}\right)$ та $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, якщо остання границя існує (a – скінченне число або нескінченність).

Невизначеності типу $0\cdot\infty, \infty\cdot\infty, 1^{\infty}, 0^{0}$ зводяться до невизначеностей $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ шляхом алгебраїчних перетворень.

Ознаки зростання і спадання функції

якщо $f'(x) > 0$ на (a,b), то функція $f(x)$ **зростає** на цьому інтервалі;

якщо $f'(x) < 0$ на (a,b), то $f(x)$ **спадає** на цьому інтервалі.

Інтервали зростання та спадання функції називаються **інтервалами монотонності**.

Функція $y = f(x)$ досягає в точці $x = x_0$ **локального максимуму** (max) (**локального мінімуму** (min)), якщо існує такий $\varepsilon -$окіл точки x_0 $U(x_0,\varepsilon)$, що для будь-якого $x_0 \in U(x_0,\varepsilon)$ виконується нерівність $f(x) \le f(x_0) (f(x) \ge f(x_0))$. Точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$ називаються точками **локального екстремуму**.

Необхідна умова екстремуму. В точках екстремуму перша похідна дорівнює 0 або ∞, або не існує. Значення x, для яких $f'(x) = 0, f'(x) = \infty, f'(x)$ не існує, називаються **критичними точками першого роду**; корені рівняння $f'(x) = 0$ називаються також **стаціонарними точками**.

<u>Схема повного дослідження функції і побудови її графіка</u>.

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність або непарність;
3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;
4) дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву;
5) знайти асимптоти графіка функції;
6) знайти інтервали монотонності та точки екстремуму;

7) знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину;
8) побудувати графік функції, користуючись результатами дослідження.

Визначення інтервалів зростання (спадання) функції та дослідження на екстремум здійснюється у такій послідовності:

а) знаходиться область існування функції, тобто сукупність значень аргументу, для яких функція існує;

б) знаходиться похідна функції $f'(x)$;

в) визначаються критичні точки першого роду, тобто ті значення аргументу (із області існування функції), для яких похідна дорівнює нулю або не існує. Для цього розв'язується рівняння $f'(x)=0$, а також визначаються ті значення x для яких $f'(x)=\infty$ або не існує. Припустимо, що критичними точками першого роду будуть точки з абсцисами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які знаходяться на інтервалі (a, b);

г) всі критичні точки I роду розміщуються у порядку зростання їх абсцис в інтервалі (a, b);

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b.$$

д) на кожному з інтервалів (a, x_1), $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, …, (x_n, b), обирається будь-яка точка і визначається знак похідної $f'(x)$ (похідна зберігає знак на кожному із вказаних інтервалів). Якщо $f'(x)>0$ на деякому інтервалі, то робиться висновок, що функція на цьому інтервалі зростає, якщо ж $f'(x)<0$, то – спадає.

е) розглядається знак $f'(x)$ на двох сусідніх інтервалах, переходячи послідовно зліва направо від першого інтервала до останнього. Якщо під час такого переходу знаки $f'(x)$ на двох сусідніх інтервалах різні, то у даної критичної точки є екстремум, а саме: максимум, якщо знак похідної змінюється з «+» на «–», і мінімум, якщо він змінюється з «–» на «+». Якщо ж на двох сусідніх інтервалах похідна має однаковий знак, то екстремуму в даній критичній точці немає;

ж) знаходиться значення функції у точках, в яких вона досягає екстремуму, тобто відшукуються екстремальні значення функції.

Для визначення інтервалів опуклості (увігнутості) кривої
та точок перегину необхідно:

1. Знайти похідну другого порядку $f''(x)$.

2. Визначити критичні точки другого роду, тобто ті точки (з області існування функції), в яких $f''(x)=0$ або $f''(x)=\infty$, або $f''(x)$ не існує.

3. За допомогою критичних точок другого роду розділити область існування функції $y=f(x)$ на інтервали, на яких похідна $f''(x)$ має сталий знак.

4. На кожному з визначених інтервалів визначити знак похідної $f''(x)$. Якщо $f''(x)<0$ на деякому інтервалі, то крива на цьому інтервалі є опуклою, якщо ж $f''(x)>0$, то – увігнутою.

5. Розглянути знаки $f''(x)$ на кожних двох сусідніх інтервалах. Якщо знаки $f''(x)$ на двох сусідніх інтервалах різні, то критична точка другого роду, яка розділяє ці інтервали, є точкою перегину. Якщо ж на двох сусідніх інтервалах $f''(x)$ має один і той же знак, то у відповідній критичній точці другого роду перегину немає.

6. Знайти значення функції з такими значеннями аргументу, для яких крива має перегин.

Індивідуальне завдання № 2

Завдання 1

Знайти похідні функцій.

1. а) $y = \sin^{10}x$; б) $y = x\arcsin x$; в) $y = \ln(x+\sqrt{1+5x})$;

   г) $x^3 + x^2y + y^2 = 0$, y'_x − ?

2. а) $y = \cos^8 x$; б) $y = \dfrac{x^2}{\sin x}$; в) $y = 5^{\sin(4x-1)}$;

   г) $x\sin y - y^3 + 5 = 0$, y'_x − ?

3. а) $y = \frac{\cos x}{x^2}$; б) $y = \mathrm{tg}^7 x$; в) $y = \arcsin(6x + 7)$;

г) $\cos(2y + 1) - x^5 y - 7 = 0$, y'_x − ?

4. а) $y = \frac{x}{\arcsin x}$; б) $y = \mathrm{ctg}^6 x$; в) $y = \arcsin(8x - 4)$;

г) $\sin(x^2 + 2y) - x^3 + 4 = 0$, y'_x − ?

5. а) $y = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$; б) $y = \sqrt[3]{\sin x}$; в) $y = \mathrm{arctg}(7x + 4)$;

г) $\cos(x - y) + y^2 - x^3 = 0$, y'_x − ?

6. а) $y = \frac{3x - 1}{\sin x}$; б) $y = \mathrm{ctg}^5 x$; в) $y = 6^{\sin(4x-3)}$;

г) $\sin(3x + 5y) - y^3 + x^2 = 0$, y'_x − ?

7. а) $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$; б) $y = \sin^6 x$; в) $y = \log_3(x + 2\sqrt{x})$;

г) $\mathrm{tg}(x - 3y) - 4y^2 + 5x^2 = 0$, y'_x − ?

8. а) $y = (5 - x^2)\sin x$;б) $y = \sin^7 x$; в) $y = 5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^3 - \mathrm{ctg}(3x - y) - x^2 = 0$, y'_x − ?

9. а) $y = x^3 - \mathrm{tg} x$; б) $y = \cos^7 x$; в) $y = \ln(3x^2 + \sqrt[3]{x})$;

г) $\cos(5x - y^2) + 3x^2 + y^3 = 0$, y'_x − ?

10. а) $y = \frac{\mathrm{ctg} x}{x^2 + 1}$; б) $y = \arcsin(5x^3 - \sqrt{x})$; в) $y = \cos^9 x$;

г) $\sin(2x + 3y) + y^2 + 5x = 0,\ y'_x - ?$

11. а) $y = x^2 \mathrm{tg} x$; б) $y = \sqrt[3]{\mathrm{ctg} x}$; в) $y = 5^{\arcsin(4x+1)}$;

г) $\mathrm{tg}(3x - 2y) + y^2 - 4x = 0,\ y'_x - ?$

12. а) $y = \dfrac{\sin x}{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt[5]{\mathrm{tg} x}$; в) $y = 4^{\arcsin 3x}$;

г) $\cos(5x + y^2) - 2y^3 + x^4 = 0,\ y'_x - ?$

13. а) $y = \sqrt{x}\cos x$; б) $y = \sin^{12} x$; в) $y = \mathrm{arctg}\sqrt[3]{x+2}$;

г) $y^2 + \sin(2x - 3y) + x^3 = 0,\ y'_x - ?$

14. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[4]{\sin x}$; в) $y = \ln(x^2 + \sqrt[5]{x})$;

г) $2y - \cos(5x - 4y) + x^4 = 0,\ y'_x - ?$

15. а) $y = \sqrt[3]{x}\sin x$; б) $y = \mathrm{ctg}^3 x$; в) $y = 5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^2 - \sin(3x + y) - x^2 = 0,\ y'_x - ?$

16. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt[4]{\sin^3 x}$; в) $y = \ln(\sqrt[3]{x} - x^2)$;

г) $y^2 - \sin(x^2 - 2y) + x^3 = 0,\ y'_x - ?$

17. а) $y = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{tg} x$; б) $y = \sin^5 x$; в) $y = 3^{\arcsin 2x}$;

г) $\cos y - \sin(5x + y) + x^2 = 0,\ y'_x - ?$

18. а) $y = \dfrac{\mathrm{ctg} x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln(6x + x^3)$;в) $y = \sqrt[3]{\arcsin 4x}$;

г) $3y^2 + \cos(4x + 2y) - x^4 = 0,\ y'_x - ?$

19. а) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[5]{\mathrm{tg}2x}$; в) $y = 5^{\arcsin 4x}$;

г) $y^3 - \cos(5x + y^2) - x^3 = 0,\ y'_x - ?$

20. а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin x}$; б) $y = \mathrm{ctg}^7 x$; в) $y = 4^{\arcsin 8x}$;

г) $y^2 - \cos(4x + 3y) - 2x^3 = 0,\ y'_x - ?$

21. а) $y = x^2\cos x$; б) $y = \sqrt[5]{\arccos 2x}$; в) $y = \ln(3x^2 + \sqrt{x})$;

г) $y^5 - \cos(7x - 3y) + x^3 = 0,\ y'_x - ?$

22. а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin 9x}$; б) $y = \cos^4 x$; в) $y = 7^{\arcsin 3x}$;

г) $\cos y - \sin(2x + 3y) - x^5 = 0,\ y'_x - ?$

23. а) $y = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\mathrm{arctg}2x}$; в) $y = 9^{\sin 4x}$;

г) $y^5 - \sin(3x + 7y) - x^4 = 0,\ y'_x - ?$

24. а) $y = \sqrt[3]{x}\,\mathrm{tg}x$; б) $y = \sin^4 x$; в) $y = 2^{\arcsin 7x}$;

г) $\sin y - \cos(5x + 2y) - x^3 = 0,\ y'_x - ?$

25. а) $y = \sqrt[4]{x}\,\mathrm{ctg}x$; б) $y = \sqrt[5]{\sin x}$; в) $y = \log_4(x^2 + 3\sqrt{x})$;

г) $\sin y + \cos(5x - 2y) - 4x^2 = 0,\ y'_x - ?$

Завдання 2

За допомогою диференціала обчислити наближене значення заданої величини з точністю до 0,001.

1. $\sqrt{17}$. 2. $\sin 29^0$. 3. $\lg 99$. 4. $e^{0,1}$.
5. $arctg\sqrt{2,9}$. 6. $\arcsin 0,4$. 7. $\sqrt[3]{1,01}$. 8. $\sqrt[3]{27,1}$.
9. $tg61^0$. 10. $\lg 1,01$. 11. $arctg0,9$. 12. $\cos 59^0$.
13. $2^{2,9}$. 14. $\sqrt{3,9}$. 15. $\sqrt[4]{16,1}$. 16. $\sqrt[3]{63}$.
17. $arctg0,9$. 18. $e^{0,25}$. 19. $tg29^0$. 20. $ctg61^0$.
21. $\sqrt[3]{26,9}$. 22. $arctg1,1$. 23. $\sqrt[7]{129}$. 24. $\sqrt[5]{33}$.
25. $\sqrt[7]{129}$.

Завдання 3

Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати їх графік.

1. $y=\dfrac{8x}{4+x^2}$. 2. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$. 3. $y=8xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$. 5. $y=\dfrac{x}{e^x}$. 6. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$.

7. $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$. 8. $y=\dfrac{x}{x^2-1}$. 9. $y=x^2e^{-x}$.

10. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$. 11. $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. 12. $y=\dfrac{e^x}{x}$.

13. $y=(x^2-1)^3$. 14. $y=4e^{-\frac{x^2}{2}}$. 15. $y=\dfrac{e^x}{x+1}$.

16. $y=x^2\ln x$. 17. $y=\ln(x^2-4)$. 18. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

19. $y = \frac{1-2x}{x^2}$. 20. $y = \frac{e^{2x}}{x}$. 21. $y = \frac{e^x}{x+1}$.

22. $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$. 23. $y = x + \frac{1}{x}$. 24. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$.

25. $y = x\ln x$.

Розв'язання типового варіанта

1. Знайти похідні функцій:

а) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{4x-1}{4x+1}}$; *б*) $y=\frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$; *в*) $y=(\mathrm{tg}2x)^{\ln x}$; *г*) $\cos(xy)-\frac{x}{y}=0$.

► *а*) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{4x-1}{4x+1}}$.

Користуючись властивостями логарифмів, перетворимо праву частину:

$$y=\ln\sqrt[4]{\frac{4x-1}{4x+1}}=\frac{1}{4}(\ln(4x-1)-\ln(4x+1).$$

Застосовуючи правила диференціювання, маємо:

$$y'= \frac{1}{4}(\frac{4}{4x-1)}-\frac{4}{4x+1})=\frac{1}{4x-1}-\frac{1}{4x+1}=\frac{2}{16x^2-1}.$$

б) $y=\frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.

Прологарифмуємо дану функцію, застосовуючи властивості логарифмів:

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(x+7)+4\ln(x-3)-5\ln(x+2).$$

Продиференціюємо по x обидві частини отриманої рівності, вважаючи $\ln y$ складеною функцією від змінної x.

$$(\ln y)'=\frac{1}{2}(\ln(x+7))'+4(\ln(x-3))'-5(\ln(x+2))'.$$

Або

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2(x+7)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2};$$

$$y'=(\frac{1}{2(x+7)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2})\cdot y;$$

$$y'=(\frac{1}{2(x+7)}+\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2})\cdot\frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}.$$

в) $y=(\mathrm{tg}2x)^{\ln x}$.

Прологарифмуємо функцію:

$$\ln y=\ln x\cdot\ln \mathrm{tg}2x.$$

Знайдемо похідну від лівої і правої частини останньої рівності по x.

$$(\ln y)'=(\ln x)'\cdot\ln \mathrm{tg}2x+\ln x(\ln \mathrm{tg}2x)'.$$

Звідки

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\ln tg2x+\ln x\frac{1}{tg2x}\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2.$$

Далі

$$y'=y(\frac{\ln tg2x}{x}+\frac{4\ln x}{\sin 4x}).$$

Остаточно маємо:

$$y'=(\mathrm{tg}2x)^{\ln x}(\frac{\ln tg2x}{x}+\frac{4\ln x}{\sin 4x}).$$

г) $\cos(xy)-\frac{x}{y}=0$.

У даному випадку залежність між аргументом x та функцією y задана рівнянням, яке не розв'язане відносно функції y. Щоб знайти похідну y', необхідно продиференціювати по x обидві частини заданого рівняння, вважаючи при цьому змінну y функцією від x, і потім отримане рівняння розв'язати відносно шуканої похідної y'.

Маємо: $-\sin(xy)(y+xy')-\frac{y-xy'}{y^2}=0$.

З отриманої рівності, що зв'язує x, y та y', знаходимо похідну y':

$$-y^3\sin(xy)-xy^2y'\sin(xy)-y+xy'=0,$$
$$y'\left(x-xy^2\sin(xy)\right)=y+y^3\sin(xy).$$

Звідки

$$y'=\frac{y+y^3\sin(xy)}{x-xy^2\sin(xy)}=\frac{y\left(1+y^2\sin(xy)\right)}{x\left(1-y^2\sin(xy)\right)}.$$

2. За допомогою диференціала обчислити наближене значення $arctg1{,}02$.

► Розглянемо функцію $f(x)=arctgx$. Покладемо $x=1$, $\Delta x=0{,}02$ і застосуємо формулу

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x.$$

У нашому випадку $f'(x)=\left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=1}=\frac{1}{2}=0{,}5;\ f(x)\Big|_{x=1}=arctg1=\frac{\pi}{4}.$

Отже, маємо $arctg1{,}02\approx\frac{\pi}{4}+0{,}5\cdot0{,}02=0{,}785+0{,}01=0{,}795$. ◄

3. Дослідити функцію $y=(1-\frac{1}{x})^2$ методами диференційного числення та побудувати її графік.

►1. Задана функція існує при всіх значеннях аргументу, крім x=0. Область визначення складається з двох інтервалів (–∞ , 0) та (0 , ∞).

2. Функція не є парною або непарною.

3. З віссю *О*У графік функції не перетинається. Точки перетину графіка функції з віссю *О*Х:

$$(1-\frac{1}{x})^2=0;\quad x=1.$$

Відзначимо, що $y\geq 0$ для всіх значень x.

4. Функція має нескінченний розрив при x = 0, причому

$$\lim_{x\to-0}(1-\frac{1}{x})^2=+\infty;\qquad \lim_{x\to+0}(1-\frac{1}{x})^2=+\infty.$$

При всіх інших значеннях аргументу дана функція неперервна.

5. Оскільки x=0 – точка розриву ($\lim\limits_{x\to 0} y = \infty$), то x=0 – рівняння вертикальної асимптоти. Для визначення рівняння похилої асимптоти $y = kx + b$ скористуємося відомими формулами

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{і} \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

Маємо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(1-\frac{1}{x})^2}{x} = 0; \; b = \lim_{x\to\pm\infty} (1-\frac{1}{x})^2 = 1.$$

Отже, пряма y=1 є горизонтальною асимптотою графіка функції.

6. Знайдемо інтервали монотонності та точки екстремуму функції.

Перша похідна

$$y' = 2(1-\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} = \frac{2(x-1)}{x^3}.$$

Неважко бачити, що перша похідна дорівнює нулю при x=1 і обертається в нескінченність при x=0. Але при x=0 функція невизначена, отже ця точка не підлягає дослідженню. Розіб'ємо всю числову вісь на три інтервали: $(-\infty,0)$; $(0,1)$; $(1,\infty)$. Склавши таблицю, визначимо знак похідної на кожному з цих інтервалів та точки екстремуму.

x	$(-\infty\,,0)$	0	(0,1)	1	$(1,\infty)$
y'	+	не існує	–	0	+
y	зростає	не існує	спадає	min	зростає

Отже, при x = 1 функція має мінімум, $y_{\min}$= 0.

7. Знайдемо інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції. Друга похідна

$$y''=\frac{2x^3-6x^2(x-1)}{x^6} = \frac{2x^3-6x^2+6x^2}{x^6} = \frac{2(3-2x)}{x^4}.$$

З одержаного виразу видно, що друга похідна дорівнює нулю при $x=\frac{3}{2}$ і обертається в нескінченність при x=0. Оскільки при x=0 функція не існує, то ця точка не підлягає дослідженню. Розіб'ємо область існування функції на інтервали: $(-\infty,0)$; $(0, \frac{3}{2})$; $(\frac{3}{2},\infty)$.

Склавши таблицю, визначимо знак другої похідної на кожному з цих інтервалів та точки перегину.

x	$(-\infty\ , 0)$	0	$(0,\frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2},\infty)$
y''	+	не існує	+	0	–
y	угнута	не існує	угнута	перегин	опукла

Отже, при $x=\frac{3}{2}$ маємо точку перегину: $y(\frac{3}{2})=(1-\frac{3}{2})^2=\frac{1}{9}$.

Таким чином, $P(\frac{3}{2}, \frac{1}{9})$ – точка перегину.

8. На основі отриманих даних будуємо графік функції (рис. 4).

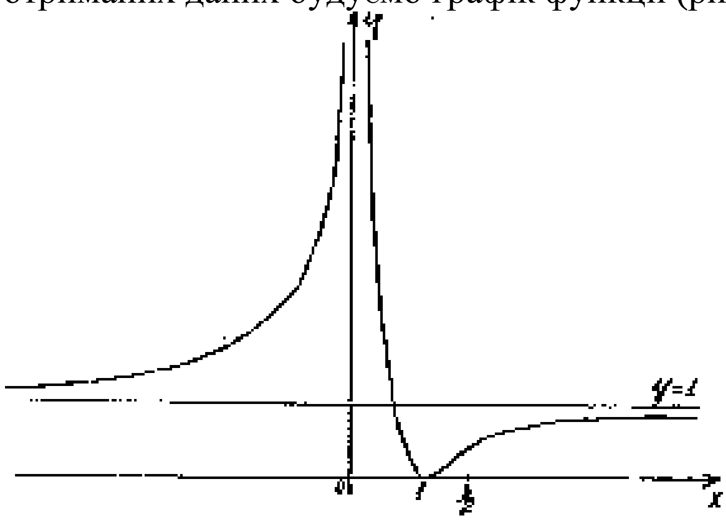


Рис. 4. ◄

4. Дослідити функцію $y=\ln\left(x^2-6x+10\right)$ методами диференціального числення та побудувати її графік.

► 1. Область визначення функції $D(y):(-\infty,\infty)$, тому що квадратний тричлен, що знаходиться під знаком логарифма завжди приймає додатні значення, тобто:

$$x^2-6x+10=(x-3)^2+1>0.$$

2. Функція не є парною або непарною, тому що

$$f(-x)=\ln\left((-x)^2-6(-x)+10\right)=\ln\left(x^2+6x+10\right)\neq f(x).$$

3. Точки перетину графіка функції з осями координат: $(0,\ln 10)$; $(3,0)$.
4. Функція є неперервною.
5. Вертикальних асимптот графік функції не має. Рівняння похилих асимптот шукаємо у вигляді $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln\left(x^2-6x+10\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2x-6}{x^2-6x+10}}{1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-6}{x^2-6x+10}=$$
$$=\frac{2}{2x-6}=0.$$

Відмітимо, що при знаходженні границі двічі було застосовано правило Лопіталя.

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\left(x^2-6x+10\right)-0\right)=+\infty.$$

Отже, графік функції асимптот не має.

6) Визначимо інтервали монотонності та точки екстремуму. Знаходимо першу похідну

$$y'=\left(\ln\left(x^2-6x+10\right)\right)'=\frac{2x-6}{x^2-6x+10}.$$

Для знаходження критичних точок першого роду розв’яжемо рівняння $y'=0$, тобто $2x-6=0$, $x^2-6x+10\neq 0$, звідки $x=3$ – критична точка першого роду.

Критична точка $x = 3$ поділяє область визначення функції на два інтервали $(-\infty, 3)$ і $(3, \infty)$. Очевидно, що

$y'(x) < 0$ при $x < 3 \Rightarrow$ функція спадає;

$y'(x) > 0$ при $x > 3 \Rightarrow$ функція зростає;

$y'(x) = 0$ при $x = 3 \Rightarrow$ функція має екстремум (мінімум); $y(3) = 0$.

7) Визначимо інтервали опуклості, угнутості, точки перетину.

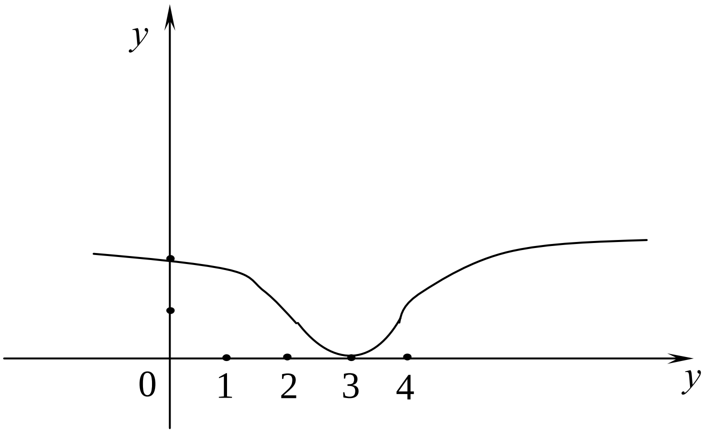
$$y'' = \frac{2\left(x^2 - 6x + 10\right) - (2x - 6)(2x - 6)}{\left(x^2 6x + 10\right)^2} = \frac{-2\left(x^2 - 6x + 8\right)}{\left(x^2 - 6x + 10\right)^2} = \frac{-2(x - 2)(x - 4)}{\left(x^2 - 6x + 10\right)^2}.$$

Для знаходження критичних точок другого роду розв'яжемо рівняння $y'' = 0$, тобто $(x - 2)(x - 4) = 0$, $\left(x^2 - 6x + 10\right)^2 \neq 0$, звідки $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ – критичні точки другого роду, які поділяють область визначення функції на інтервалі, що вказані у наведеній нижче таблиці.

x	$(-\infty; 2)$	2	(2; 4)	4	(4; ∞)
Знак y''	–	0	+	0	-
Поведінка графіка функції	опуклий	перегин	угнутий	перегин	опуклий

Отже, графік функції має дві точки перегину $y(2) = \ln 2$, $y(4) = \ln 2$.

На основі дослідження поступово будуємо графік функції $y = \ln\left(x^2 - 6x + 10\right)$, який наведено на рисунку



3. Диференціальне числення функції багатьох змінних

Означення 1. Якщо кожній парі значень двох незалежних змінних x, y із множини D (області їх завдання D) відповідає одне значення змінної z, то кажуть, що z є функцією двох змінних x, y яка визначається на області D і позначається $z = f(x, y)$.

Означення 2. Частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній x називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до Δx за умови, Δx прямує до нуля будь-яким чином,

або інакше: похідна функції $z = f(x, y)$ по x, яка обчислюється в припущенні, що y вважається незмінною (сталою) величиною:

$$z'_x = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Аналогічно

$$z'_y = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}.$$

Якщо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ продиференціювати по x або y, то одержимо похідні другого порядку

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Зауваження. Якщо похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ у деякій точці неперервні, то вони рівні.

Екстремум функції багатьох змінних

Функція $z = f(x, y)$ має у точці $M_0(x_0, y_0)$ максимум (мінімум), якщо для всіх точок $M(x, y)$, близьких до т. M_0 (координати їх одночасно не дорівнюють x_0, y_0), має місце нерівність

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \text{ – максимум,}$$

або

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \text{ – мінімум.}$$

Необхідні умови існування екстремуму

Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, то у розглядуваній точці похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю, або не існують.

Достатні умови існування екстремуму

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна разом з своїми похідними до 3-го порядку включно в околі точки $M_0(x_0, y_0)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0.$$

Позначимо

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_0} = A, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = B, \quad \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{M_0} = C.$$

Тоді, якщо

1) $AC - B^2 > 0$,

$C < 0$, то функція має у точці M_0 максимум;

2) $AC - B^2 < 0$,

$C > 0$, то функція має у точці M_0 мінімум;

3) $AC - B^2 = 0$, то з допомогою похідних другого порядку нічого сказати не можна стосовно наявності, або відсутньості екстремуму у розглядуваній точці.

Індивідуальне завдання № 3

Завдання 1

Знайти похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ від заданої функції $z = f(x, y)$.

1. $z = e^x(\cos y + x \sin y)$.
2. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.
3. $z = \frac{1}{5}\sqrt{(x^2 + e^2)^3}$.
4. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$..
5. $z = \frac{x - y}{y + x}$.
6. $z = \arcsin(xy)$.
7. $z = y^{\ln x}$.
8. $z = x^y$.
9. $z = e^y(\cos x - y \sin x)$.
10. $z = arcctg\frac{x}{y}$.
11. $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^2 + y^2)^2}$.
12. $z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$..
13. $z = \frac{x + y}{x - y}$.
14. $z = \arccos(xy)$.
15. $z = x^e$.
16. $z = y^x$.

17. $z=\ln(e^{x}+e^{y})$.

18. $z=e^{x}(x\cos y-y\sin x)$.

19. $z=\dfrac{y}{y^{10}-2x^{2}}$.

20. $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$.

21. $z=y\sin x$.

22. $z=x\cos^{2}y$.

23. $z=xe^{y}+ye^{x}$.

24. $z=xy^{2}+x^{2}y$.

25. $z=\cos(2x+y)$.

Завдання 2

Обчислити за допомогою повного диференціала наближене значення заданої величини.

1. $\sqrt{(1{,}01)^{3}+(1{,}98)^{3}}$.
2. $(0{,}98)^{1{,}02}$.
3. $\sqrt{(4{,}01)^{2}+(3{,}02)^{2}}$.
4. $(1{,}99)^{2{,}98}$.
5. $\sqrt{(2{,}02)^{3}+(0{,}98)^{3}}$.
6. $(2{,}03)^{0{,}97}$.
7. $(0{,}99)^{0{,}95}$.
8. $\sqrt{(3{,}98)^{2}+(3{,}01)^{2}}$.
9. $\sqrt{(5{,}01)^{2}-(3{,}02)^{2}}$.
10. $(2{,}05)^{2{,}98}$.
11. $\sqrt{(4{,}98)^{2}-(2{,}99)^{2}}$.
12. $(2{,}99)^{2{,}03}$.
13. $(3{,}01)^{3{,}02}$.
14. $\sqrt{(4{,}98)^{2}-(4{,}01)^{2}}$.
15. $(4{,}02)^{2{,}99}$.
16. $(7{,}05)^{0{,}98}$.
17. $\sqrt{(2{,}96)^{2}+(4{,}05)^{2}}$.
18. $(3{,}05)^{0{,}94}$.
19. $(3{,}04)^{0{,}95}$.
20. $\sqrt{(0{,}96)^{3}+(2{,}05)^{3}}$.
21. $\sqrt[3]{(1{,}98)^{5}-5^{0{,}97}}$.
22. $\sqrt[3]{(2{,}02)^{5}-5^{1{,}01}}$.
23. $(3{,}98)^{2{,}03}$.
24. $(7{,}03)^{1{,}05}$.
25. $\sqrt[3]{(4{,}97)^{3}+2^{1{,}04}}$.

Завдання 3

Задану функцію $z=f(x,\,y)$ дослідити на екстремум.

1. $z=x^{2}-xy+2y^{2}+2x-8y+3$.

2. $z=1-x+y-5xy-3x^{2}-3y^{2}$.

3. $z=2x^{2}+3xy+2y^{2}-4x-10y+12$.

4. $z=5+4x+10y-4xy-2x^{2}-3y^{2}$.

5. $z = 3xy - x^2 - 4y^2 + 4x - 6y + 5$.

6. $z = xy - 2x^2 - y^2 + 7x - 7y - 10$.

7. $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 6$.

8. $z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 7$.

9. $z = x^2 + 3xy - 2y^2 + 2x + 3y + 1$.

10. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

11. $z = x^2 + xy - y^2 - 5x + 5y - 2$.

12. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y + 4$.

13. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 + x + 3$.

14. $z = x^2 + 3xy + x + y^2 - x - 4y + 3$.

15. $z = 2x^2 - 3xy + 2y^2 - 9x + 12x + 10$.

16. $z = 3xy - x^2 - 3y^2 - 6x + 9y + 2$.

17. $z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 1$.

18. $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 17$.

19. $z = 3xy - x^2 - y^2 - 10x + 5y + 3$.

20. $z = x^2 + xy + y^2 + 4x - y + 5$.

21. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

22. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

23. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

24. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 1$.

25. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y$.

Розв’язання типового варіанта.

1. Знайти частинні похідні та повний диференціал функції

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

► Частинна похідна функції $z = z(x,y)$ по x визначається за правилами диференціювання функції однієї змінної, причому інші змінні вважаються постійними; аналогічно визначається частинна похідна по y, де всі змінні, крім y, вважаються постійними.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_x}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)'_y}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Повний диференціал даної функції визначається за формулою

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Отже маємо:

$$dz=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy. ◄$$

2. За допомогою повного диференціала обчислити наближено $(0{,}97)^{1{,}05}$.

► Розглянемо функцію $f(x,y)=x^y$ і застосуємо формулу

$$f(x+\Delta x,y+\Delta y)\approx f(x,y)+\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

Поклавши $x=1$, $y=1$, $\Delta x=-0{,}3$; $\Delta y=0{,}5$.

Врахуємо, що $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$;

$f(1,1)=1$; $\frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=1$; $\frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=1\cdot\ln 1=0$.

Отже $(0{,}97)^{1{,}05}\approx 1+1\cdot(-0{,}3)=0{,}97$. ◄

3. Дослідити на екстремум функцію $z=-x^2-xy-y^2+6x-4$.

► Знаходимо частинні похідні першого порядку функції z

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2x-y+6; \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-x-2y.$$

Для визначення стаціонарних точок згідно з необхідними умовами екстремуму, прирівнюємо до нуля ці похідні. Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2x - y + 6 = 0, \\ -x - 2y \qquad = 0, \end{cases}$$

розв’язок якої $x = 4$, $y = -2$.

Отже, дана функція має тільки одну стаціонарну точку $P_0(4;\, 2)$.

Для перевірки достатніх умов екстремуму знаходимо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\,; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1.$$

Як видно, частинні похідні другого порядку мають постійні значення в будь-якій точці, зокрема в точці $P(4;\,-2)$.

Обчислимо Δ для точки $P(4;\,-2)$, де $A = -2$; $B = -1$; $C = -2$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0\,.$$

Тому що $\Delta > 0$ та $A < 0$, то в точці $P(4;\,-2)$ задана функція має максимум.

$z_{\max} = z(4;-2) = -4 + 24 - 16 + 8 - 4 = 8\,.$◄

Правила виконання та оформлення індивідуальних робіт

При виконанні індивідуальних робіт необхідно строго дотримуватися вказаних нижче правил. Роботи, що виконані без дотримання цих правил, не зараховуються та повертаються студенту для переробки.

1. Контрольну роботу необхідно виконувати у зошиті та залишати поля для зауважень викладача.

2. На обкладинці зошита повинно бути розбірливо написане прізвище студента, його ініціали, назва дисципліни, номер варіанта.

3. У роботу повинні бути включені всі задачі, що вказані у завданні, строго свого варіанта. Контрольні роботи, що містять задачі не свого варіанта, не зараховуються.

4. Розв'язок задач потрібно розташовувати в порядку номерів, що вказані у завданнях, та зберігати номери задач.

5. Перед розв'язком кожної задачі необхідно виписати повністю її умову.

6. Розв'язки задач необхідно викладати докладно і акуратно, пояснюючи та мотивуючи усі дії по ходу розв'язання, при потребі робити креслення.

7. Після одержання перевіреної роботи студент повинен виправити всі помилки та віддати на повторну перевірку. Вносити виправлення в сам текст роботи після перевірки забороняється. Всі виправлення потрібно робити в зошиті після основної роботи.

Список рекомендованої літератури

1. Синєкоп М. С. Вища математика: навчальний посібник / М. С. Синєкоп, Н. О. Жилюк, А. В. Янчев. – Х.: ХДУХТ, 2012.
2. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків: навчальний посібник / Гула В. Г., Синєкоп М. С. та ін.; под ред. проф. О. П. Корж. – Х. : ХДУХТ, 2010.
3. Кулинич Г. Л. Вища математика. Спеціальні розділи / Г. Л. Кулинич. – К. : Либідь, 2003.
4. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – М. : Астрель, 2001.
5. Шипачев В. С. Высшая математика / В. С. Шипачев, 7-е изд., стер. – М., 2005.

ЗМІСТ

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

Вища математика

Розділи: Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної. Функції багатьох змінних

Методичні вказівки для самостійної роботи
та виконання індивідуальних домашніх завдань студентами
денної форми навчання за спеціальностями
131 «Прикладна механіка», 142 «Енергетичне машинобудування»

Укладач
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних
та інженерно-технічних дисциплін д-р техн. наук., проф. М.І. Погожих

Техн. редактор О.В. Щегельська

План 2017 р., поз. 31/

Підп. до друку 23.06.2017. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об’єм даних 1,93 Мб. Тираж 100 прим.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.12 р.