МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський державний університет харчування та торгівлі

М. І. Погожих, А. О. Пак, Л. В. Рурак

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ОПТИКА. АТОМНА ФІЗИКА: ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Харків

ХДУХТ

2018

УДК 537.8:535:539.18(075.8)
ББК 22.3
П43

Рецензенти:
д-р техн. наук, проф. О.М. Шаніна,
д-р техн. наук, доц. А.Б. Горальчук

Рекомендовано до видання вченою радою ХДУХТ
Протокол № 6 від «28» грудня 2017 року

Погожих М. І.
П43 Електромагнетизм. Оптика. Атомна фізика: практичні завдання для самостійної роботи : навч. посібник [Електронний ресурс] / М. І. Погожих, А. О. Пак, Л. В. Рурак. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROW); 12 см. – Назва з тит. екрана.
ISBN

Навчальний посібник орієнтовано на студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050604 «Енергомашинобудування». Посібник складається з 6 підрозділів, в яких викладені основи електродинаміки, електромагнетизму, хвильової оптики, квантової природи випромінювання, фізики атомів і молекул, фізики атомного ядра та елементарних частинок. У посібнику наведені приклади розв’язання типових задач.

Посібник спрямований на поглиблення розуміння фізичних явищ, які є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність майбутнього інженера.

УДК 537.8:535:539.18(075.8)
ББК 22.3

ЗМІСТ

ВСТУП

Вивчення дисципліни «Фізика» призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050604 «Енергомашинобудування».

Мета викладання фізики полягає у створенні передумов для подальшої широкої підготовки студентів у частині технічних дисциплін, володінні фундаментальними поняттями та теоріями класичної та сучасної фізики. Формуванні наукового світогляду та сучасного фізичного мислення.

Фізика викладається на 1 курсі НН ІХТБ для студентів скороченої форми навчання. Курс фізики повинен забезпечити майбутньому інженеру основу його теоретичної підготовки, яка дозволяє грамотно орієнтуватись у стрімкому потоці наукової і технічної інформації.

Курс фізики разом з курсами вищої математики і теоретичної механіки становить основу теоретичної підготовки інженерів, є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність інженера. Основне завдання полягає у тому, щоб дати студенту сучасні уявлення про фізичні явища та процеси, найважливіші закони, фундаментальні фізичні поняття, теорію, досліди та факти класичної та сучасної фізики, сучасні методи дослідження фізичних явищ.

Студент повинен володіти методами та навичками розв’язання конкретних задач, застосовувати одержані знання для ефективного опанування інших дисциплін і подальшої практичної діяльності, використовувати фізичну апаратуру у відповідності з вимогами метрології.

РОЗДІЛ 1.

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА

1.1. Основні визначення, закони та рівняння

Якщо в провіднику створити електричне поле, то носії заряду прийдуть в упорядкований рух: позитивні в напрямку поля, негативні в протилежну сторону. Упорядкований рух зарядів називається *електричним струмом*. Його прийнято характеризувати *силою струму* – скалярною величиною, рівною заряду, який переноситься носіями через розглянуту поверхню (наприклад, через поперечний переріз провідника) в одиницю часу. Якщо за час dt переноситься заряд dq, то сила струму I за визначенням дорівнює:

$$I = \frac{dq}{dt}.$$

Електричний струм може бути розподілений по поверхні, через яку він тече, нерівномірно. Більш детально електричний струм можна охарактеризувати за допомогою вектора *густини струму j*. Цей вектор чисельно дорівнює силі струму dI через розташовану в цій точці перпендикулярну до напрямку руху носіїв площадку $dS_{\perp}$, віднесену до величини цієї площини:

$$j = \frac{dI}{\mathrm{dS}_{\perp}}.$$

Г. Ом експериментально встановив закон (закон Ома), відповідно до якого сила струму, що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна спаду напруги U на провіднику:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Однорідним називається провідник, у якому не діють сторонні сили. У цьому випадку, напруга U збігається з різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, підтримуваною на кінцях провідника. Величина R називається *електричним опором* провідника. Одиницею опору є 1 Ом, який дорівнює опору такого провідника, у якому при напрузі в 1 В тече струм силою в 1 А.

Величина опору залежить від форми і розмірів провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він виконаний. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

де ρ – питомий опір, l – довжина, S – площа поперечного перерізу провідника.

Для більшості металів опір та питомий опір ростуть з температурою приблизно за лінійним законом:

$$R = R_0(1 + \alpha t),$$
$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

де R_0, ρ_0 – опір та питомий опір за температури 0°С; t – температура за шкалою Цельсія; α – відносний температурний коефіцієнт опору.

Опір системи резисторів дорівнює:
за послідовного з’єднання:

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n;$$

за паралельного з’єднання:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Закон Ома для неоднорідної ділянки електричного контуру:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де R – зовнішній опір, а r – внутрішній опір джерела е.р.с.

При проходженні по провіднику струму провідник нагрівається. Джоуль і Ленц (*закон Джоуля – Ленца*) знайшли експериментально, що кількість теплоти, яка виділяється в провіднику *dQ*, пропорційна його опору *R*, квадрату сили струму *I* і часу *dt*:

$$dQ = UIdt = \frac{U^2}{R}dt = I^2 Rdt.$$

Перший закон Кірхгофа (правило вузлів): алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0.$$

Вузлом називається точка, у якій сходиться більш ніж два провідники. Струм, що тече до вузла, має один знак (плюс чи мінус), що тече від вузла – протилежний знак (мінус чи плюс).

Другий закон Кірхгофа (правило контурів): алгебраїчна сума добутків сил струму на відповідні значення опорів дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с. в контурі.

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j .$$

При складанні рівнянь другого закону Кірхгофа струмам і е.р.с. потрібно приписувати знаки відповідно до обраного напрямку обходу (наприклад, за годинниковою стрілкою). Струм слід вважати позтиним, якщо він тече у напрямку обходу контуру, і негативним, якщо він тече назустріч обраному напрямку обходу. Е.р.с. також потрібно приписати знак «–», якщо вона діє в напрямку, протилежному напрямку обходу, і знак «+» для зворотного випадку.

Закон Фарадея: маса dm речовини, яка виділилася на електроді під час проходження електричного струму, прямо пропорційна значенню dq електричного заряду, що пройшов крізь електроліт

$$dm = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z} \cdot dq = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z} \cdot Idt ,$$

де dm – маса речовини, що виділяється на катоді під час електролізу; $F = 9.65 \cdot 10^7$ – постійна Фарадея; A – молярна маса речовини; Z – валентність.

1.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Струм I в провіднику змінюється з часом t за рівнянням I=4+2t, де I – в амперах і t – у секундах. Яка кількість електрики q проходить через поперечний переріз провідника за час від t_1=2 с до t_2=6 с? При якому постійному струмі I_0 через поперечний переріз провідника за той же час проходить та ж кількість електрики?

Розв'язання:

За визначенням сила струму $I = \dfrac{dq}{dt}$, звідси $dq = Idt$. $q = \int\limits_{t_1}^{t_2} Idt = \int\limits_{t_1}^{t_2} (4+2t)dt = 4t\Big|_{t_1}^{t_2} + t^2\Big|_{t_1}^{t_2} = 4(t_2 - t_1) + (t_2^2 - t_1^2)$=48 Кл. При постійному струмі $I_0 = \dfrac{q}{t}$, де $t = t_2 - t_1 = 6 - 2 = 4$ с. Підставляючи числові значення, одержимо I_0=12 А.

Приклад 2. Скільки витків ніхромового дроту діаметром d=1 мм необхідно навити на фарфоровий циліндр радіусом r=2,5 см, щоб отримати піч опором R=40 Ом?

Розв'язання:

Опір провідника можна розрахувати за формулою $R = \rho \dfrac{l}{S}$ (1), де ρ – питомий опір (для ніхрому ρ=100 мкОм·м), l – довжина провідника, S – площа його поперечного перерізу. Довжина одного витка дорівнює $2\pi r$, тоді довжина всього дроту $l = 2\pi rN$ (2), де N – кількість витків. Площа поперечного перерізу $S = \pi \dfrac{d^2}{4}$ (3). Підставивши (3) і (2) в (1), отримаємо $R = \dfrac{\rho 8rN}{d^2}$, звідки $N = \dfrac{Rd^2}{8\rho r}$=200 витків.

Приклад 3. Знайдіть опір R залізного стрижня діаметром d=1см, якщо маса стрижня m=1 кг.

Розв'язання:

Опір стрижня можна визначити за формулою $R = \rho \frac{l}{S}$ (1), де ρ – питомий опір заліза; l – довжина стрижня; S – площа його поперечного перерізу.

Маса стрижня $m = \rho_{Fe} V$, де ρ_{Fe} – густина заліза; V – об'єм стрижня рівний $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l$. Таким чином, $m = \frac{\rho_{Fe} \pi d^2 l}{4}$, звідки довжина стрижня дорівнює $l = \frac{4m}{\rho_{Fe} \pi d^2}$ (2).

Площа поперечного перерізу $S = \pi \frac{d^2}{4}$ (3). Підставляючи (2) та (3) в (1) отримаємо $R = \frac{\rho 16 m}{\rho_{Fe} \pi^2 d^4}$ =1,8 мОм.

Приклад 4. Вольфрамова нитка електричної лампочки при t_1=20°C має опір R_1=35,8 Ом. Яка буде температура нитки лампочки, якщо при включенні в мережу напругою U=120В по нитці йде струм I=0,33 A? Температурний коефіцієнт опору вольфраму $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Розв'язання:

Залежність опору нитки від температури виражається співвідношенням $R_2 = R_0 (1 + \alpha T_2)$, де R_0 – опір нитки при температурі 0°C. Звідси $T_2 = \frac{R_2 - R_0}{\alpha R_0}$ (1). За законом Ома $I = \frac{U}{R_2}$, звідки $R_2 = \frac{U}{I}$ (2).

R_0 знайдемо із співвідношення $R_1 = R_0(1+\alpha T_1)$, звідки $R_0 = \dfrac{R_1}{(1+\alpha T_1)}$ (3). Підставляючи (2) та (3) в (1), отримаємо: $T_2 = \dfrac{U(1+\alpha T_1) - R_1 I}{I\alpha R_1}$ =1927 К.

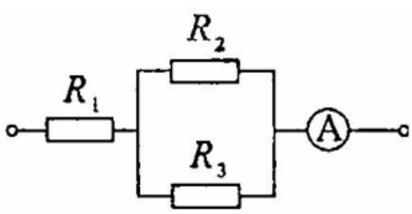
Приклад 5. Знайдіть падіння потенціалу U на мідному дроті довжиною l=500 м і діаметром d=7 мм, якщо струм в ньому I=2 A.

Розв'язання:

Струм, який проходе по ділянці однорідного провідника, підкоряється із законом Ома $I = \dfrac{U}{R}$, де U – падіння потенціалу на цій ділянці, R – опір ділянки.

Опір дроту $R = \rho\dfrac{l}{S}$, де ρ – питомий опір міді, l – довжина дроту, S – площа його поперечного перерізу. Оскільки $S = \pi\dfrac{d^2}{4}$, то $R = \rho\dfrac{4l}{\pi d^2}$. Згідно з законом Ома $U = IR = I\rho\dfrac{4l}{\pi d^2}$. Підставивши числові значення, знайдемо U=5,4 В.

Приклад 6. Знайдіть падіння потенціалу U в опорах R_1=4 Ом, R_2=2 Ом і R_3=4 Ом, якщо амперметр показує струм I=3 A. Знайти струми I_1 і I_2 в опорах R_1 і R_2.



Розв'язання:

За законом Ома $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$, звідки $U_1 = I_1 R_1$=12 В. Повний опір ланцюга, $R = R_1 + R_{23}$ де, $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ звідки $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8}{6}$ Ом.

Падіння потенціалу на всій ділянці ланцюга $U = U_1 + U_{23}$. При паралельному з'єднанні опорів всі опори знаходяться під однією різницею потенціалу, отже, $U_{23} = U_2 = U_3$. Відповідно до закону Ома $U = I_1 R = I_1(R_1 + R_{23})$, тоді $U_2 = U_3 = U - U_1$. $U_2 = U_3 = I_1(R_1 + R_{23}) - U_1$=4 В. Опір R_1 і еквівалентний опір R_{23} з'єднані послідовно, отже, струми, що протікають через них, рівні $I_1 = I_{23}$, де $I_{23} = I_2 + I_3$, тобто $I_1 = I_2 + I_3$. За законом Ома $I_2 = \frac{U_2}{R_2}$=2 А, тоді $I_3 = I_1 - I_2$=1 А.

Приклад 7. Е.р.с. елемента ε=6 В. При зовнішньому опорі R=1,1 Ом струм в ланцюзі I=3 А. Знайти падіння потенціалу всередині елемента U_r і його опір r.

Розв'язання:

Згідно з другим законом Кірхгофа $U_r + IR = \varepsilon$, звідки $U_r = \varepsilon - IR$=2,7 В. За законом Ома для ділянки кола $I = \frac{U_r}{r}$, звідки $r = \frac{U_r}{I}$=0,9 Ом.

Приклад 8. Елемент, амперметр і деякий опір з'єднані послідовно. Якщо взяти опір з мідного дроту довжиною l=100 м і поперечним перерізом S=2 мм^2, то амперметр показує струм I_1=1,43 А. Якщо ж взяти опір з алюмінієвого дроту довжиною l=57,3 м і поперечним перерізом S=1 мм^2, то амперметр показує струм I_2=1 А. Опір амперметра R_A=0,05 Ом. Знайдіть е.р.с. елемента і його внутрішній опір r.

Розв'язання:

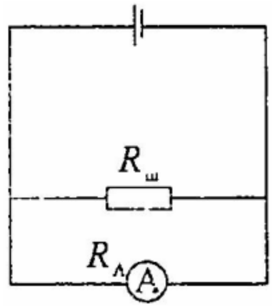
За законом Ома для повного кола $I = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + R}$, де опір $R = \rho\dfrac{l}{S}$, ρ – питомий опір, l – довжина дроту, S – площа його поперечного перерізу. Тоді для мідного й алюмінієвого дроту відповідно маємо $I_1 = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_1\dfrac{l_1}{S_1}}$ (1) і

$I_2 = \dfrac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_2\dfrac{l_2}{S_2}}$ (2).

Вирішуючи спільно рівняння (1) і (2), отримаємо вираз для внутрішнього опору джерела струму $r = \dfrac{I_2\left(R_A + \rho_2\dfrac{l_2}{S_2}\right) - I_1\left(R_A + \rho_1\dfrac{l_1}{S_1}\right)}{I_1 - I_2}$=0,5 Ом. З (1) е.р.с. джерела струму

$\varepsilon = I_1\left(r + R_A + \rho_1\dfrac{l_1}{S_1}\right)$=2В.

Приклад 9. Амперметр з опором R_A=0,18 Ом призначений для вимірювання струмів до I=10 А, шкала його розділена на 100 поділок. Який опір R необхідно взяти і як його включити, щоб цим амперметром можна було вимірювати струм до I_0=100 А? Як зміниться при цьому ціна поділки амперметра?



Розв'язання:

Якщо необхідно виміряти силу струму в n разів більшу, ніж можна виміряти даними амперметром, тобто $\frac{I_0}{I} = n = 10$, то слід паралельно підключити шунт з опором $R_ш = \frac{R_A}{n-1}$. Таким чином, $R_ш$=0,02 Ом. Ціна поділки без шунта дорівнює 0,1 А, з шунтом 1 А.

Приклад 10. У ланцюг включені послідовно мідний та сталевий дроти однакових довжини та діаметру. Знайти: а) відношення кількостей теплоти, що виділяються в цих дротах, б) відношення падінь напруги на цих дротах.

Розв'язання:

При послідовному включенні по мідному та сталевому дротам тече однаковий струм. Відповідно до закону Джоуля-Ленца на мідному дроті виділиться кількість теплоти $Q_1 = I^2 R_1 t = I^2 \rho_1 \frac{l}{S} t$, а на сталевому дроті – $Q_2 = I^2 R_2 t = I^2 \rho_2 \frac{l}{S} t$. Співвідношення $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$=0,17.

Падіння напруги на мідному дроті $U_1 = IR_1 = I\rho_1 \frac{l}{S}$. Падіння напруги на сталевому дроті $U_2 = IR_2 = I\rho_2 \frac{l}{S}$. Співвідношення $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}$=0,17.

Приклад 11. Батарея з е.р.с. ε=240 В і внутрішнім опором r=1 Ом замкнута на зовнішній опір R=23 Ом. Знайти повну потужність P_0, корисну потужність Р і к.к.д. η батареї.

Розв'язання:

К.к.д. батареї $\eta = \dfrac{R}{R+r}$=96%. Повна потужність батареї $P = \varepsilon I$, де відповідно до закону Ома, тобто $P_0 = \dfrac{\varepsilon^2}{R+r}$=2,4 кВт. Корисна потужність $P = \eta P_0$=2,3 кВт.

Приклад 12. Елемент замикають спочатку на зовнішній опір R_1=2 Ом, а потім на зовнішній опір R_2=0,5 Ом. Знайти е.р.с. ε елемента і його внутрішній опір r, якщо відомо, що в кожному з цих випадків потужність, що виділяється в зовнішньому ланцюзі, однакова і дорівнює P=2,54 Вт

Розв'язання:

Потужність, що виділяється в зовнішньому ланцюзі, дорівнює $P = I^2 R$, де відповідно до закону Ома для повного кола $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$. Звідси $P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$.

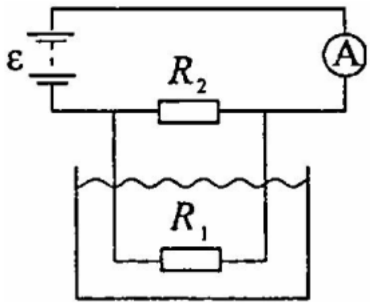
За умовою $P = \dfrac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2} = \dfrac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2}$ (1), звідси $\dfrac{(R_1+r)}{\sqrt{R_1}} = \dfrac{(R_2+r)}{\sqrt{R_2}}$;

$\sqrt{R_2}(R_1+r) = \sqrt{R_1}(R_2+r)$; $r\left(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}\right) = \sqrt{R_2}R_1 - \sqrt{R_1}R_2$;

$r = \dfrac{\sqrt{R_2}R_1 - \sqrt{R_1}R_2}{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}} = \sqrt{R_1 R_2}$ = 1 Ом.

З (1) знайдемо $\varepsilon = \dfrac{\left(R_1 + \sqrt{R_1 R_2}\right)\sqrt{P}}{R_1}$=3,4 Ом.

Приклад 13. Калориметр має спіраль опором R_1=60 Ом, яка включена в ланцюг, як показано на малюнку. Опір R_2=30 Ом. Амперметр показує струм I=6 A. На скільки нагрівається маса m=480 г води, налитої в калориметр, за час τ=5 хв пропускання струму?



Розв'язання:

За час τ на спіралі виділиться кількість теплоти $Q = I_1^2 R_1 \tau$ (1), де I_1 – струм, що проходить через спіраль. Оскільки спіраль і опір R_2, з'єднані паралельно, то $U_1 = U_2 = U$, а $I = I_1 + I_2$.

Тоді $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$, де $U = IR_{12} = I\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Звідси знайдемо $I_1 = \dfrac{IR_2}{(R_1 + R_2)}$=2А. Виділена кількість тепла пішла на нагрівання води, причому $Q = cm\Delta T$ (2), де c=4,19·10^3 Дж/(кг·К) – питома теплоємність води; ΔT – шукана зміна температури. Прирівнюючи праві частини (1) і (2), отримаємо $I_1^2 R_1 \tau = cm\Delta T$, звідки $\Delta T = \dfrac{I_1^2 R_1 \tau}{cm}$=36 К.

Приклад 14. Нагрівач електричної каструлі має дві однакові секції з опором R=20 Ом кожна. Через який час τ закипить об'єм V=2,2 л води, якщо: а) включена одна секція; б) обидві секції включені послідовно; в) обидві секції включені паралельно? Початкова температура води t_0=16°С, напруга в мережі U=110 В, к.к.д. нагрівача η=85%.

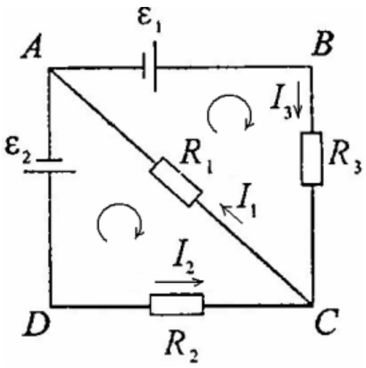
Розв'язання:

а) потужність нагрівача $P = UI = \dfrac{U^2}{R}$ (1). За час τ виділиться кількість теплоти $Q = \eta P \tau$ (2), яке піде на нагрівання води до температури кипіння $T_к$, тобто $Q = cV\rho(T_k - T_0)$ (3). Вирішуючи спільно рівняння (1)–(4), отримаємо $\tau = \dfrac{cV\rho(T_k - T_0)R}{\eta U^2}$=1506 с=25 хв;

б) при послідовному включенні секцій їхній загальний опір дорівнює 2R. Звідси τ=50 хв;

в) при паралельному з'єднанні секцій їхній загальний опір дорівнює R/2. Звідси τ=12,5 хв.

Приклад 15. Е.р.с. елементів ε_1=2,1 В і ε_2=1,9 В, опори R_1= 45 Ом, R_2= 10 Ом і R_3= 10 Ом. Знайдіть струми I, у всіх ділянках кола.



Розв'язання:

На малюнку стрілками вказано обраний напрям струмів та обходи контурів.

Для вузла A згідно з першим правилом Кірхгофа маємо $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Для контурів ABC і ACD згідно з другим правилом Кірхгофа маємо $I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1$; $-I_1R_1 - I_2R_2 = -\varepsilon_2$.

Таким чином, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 \\ I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Підставляючи числові дані:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 45I_1 + 10I_3 = 2{,}1 \\ 45I_1 + 10I_2 = 1{,}9 \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, одержимо I_1=0,04 А, I_2=0.01А, I_3=0,03 А.

Приклад 16. За який час τ при електролізі мідного купоросу маса мідної пластинки (катода) збільшиться на Δm=99 г? Площа пластинки S=25 см^2, густина струму j=200 А/м^2. Знайдіть товщину d шару міді, що утворився на пластинці.

Розв'язання:

Відповідно до першого закону Фарадея $\Delta m = KI\tau$. Молярна маса міді А=64·10^{-3} кг/моль, валентність міді в $CuSO_4$ дорівнює Z=2. Звідси електрохімічний еквівалент $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z}$=332,8·10^{-9} кг/Кл, де F – постійна Фарадея дорівнює 94,6·10^3 Кл/моль.

Сила струму $I = jS$.

Тоді $\Delta m = KjS\tau$ звідки $\tau = \frac{\Delta m}{KjS}$=595с≈10 хв.

Об'єм шару міді, що виділився $V = Sd = \frac{\Delta m}{\rho}$, звідси $d = \frac{\Delta m}{\rho S}$=4,6 мкм.

РОЗДІЛ 2.
ЕЛЕКТРОМАГНИТИЗМ

2.1. Основні визначення, закони та рівняння

Вивчаючи поля, що утворені струмами різної форми, французькі вчені Ж. Біо і Ф. Савар визначили, що магнітна індукція у всіх випадках пропорційна силі струму і залежить від відстані до точки, у якій визначалося поле. Інший французький вчений і математик Лаплас узагальнив ці експерименти і, застосувавши принцип суперпозиції для векторів магнітної індукції, довів, що вектор $\vec{B}$ може бути обчислений, як векторна сума полів, створюваних окремими елементарними ділянками струму в даній точці простору:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i = \int d\vec{B} .$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція для елемента струму довжиною dl.

Лапласом отримана формула (для вакууму):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} \left[d\vec{l} \cdot \vec{r} \right],$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць вимірювання; $d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює по модулю елементарній ділянці струму і співпадає за напрямком з напрямком струму I; $\vec{r}$ – радіус вектор, проведений від ділянки $d\vec{l}$ в точку, де визначається $\vec{B}$.

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний площині, у якій знаходяться $d\vec{l}$ і $\vec{r}$, а напрямок $d\vec{B}$ знаходиться за правилом правого гвинта: поступальний рух правого гвинта збігається з напрямком струму, а напрямок обертання голівки гвинта з напрямком $d\vec{B}$.

Модуль $d\vec{B}$ визначається за формулою (закон Біо-Савара-Лапласа):

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I \sin \alpha dl}{r^2},$$

де μ – магнітна проникність речовини; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} = 12.57 \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна постійна; I – сила струму в ділянці провідника dl; r – відстань від dl до точки, в якій визначається поле; α – кут між dl та r.

Магнітне поле від нескінченого прямолінійного провідника зі струмом I у точці на відстані r від нього:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}.$$

Магнітне поле в центрі кругового контуру зі струмом I:

$$B = \mu_0 \mu \cdot \frac{I}{2R},$$

де R – радіус кругового контуру.

Зв’язок між магнітною індукцією $\vec{B}$ та напруженістю магнітного поля $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}.$$

Потік магнітної індукції крізь контур:

$$\Phi = BS \cos \varphi,$$

де S – площа поперечного перерізу контуру; φ – кут між нормаллю до площини контуру и напрямком магнітного поля.

Електричні струми взаємодіють між собою через існування магнітного поля. Паралельні прямі струми однакових напрямків притягуються один до одного, а протилежно спрямовані – відштовхуються.

Відповідно до *закону Ампера*, на елемент струму, що знаходиться в магнітному полі діє сила:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l}\,,\vec{B}\right],$$

або у скалярній формі:

$$dF_A = BI\sin\alpha dl.$$

Сила $\vec{F}$ перпендикулярна до площини, у якій лежать $\vec{B}$ і $d\vec{l}$. Зручно визначати її напрямок за допомогою *правила «лівої руки»*. Якщо ліву руку розташувати так, щоб вектор $\vec{B}$ пронизував долоню, а чотири складені разом пальці були спрямовані уздовж струму, то напрямок великого пальця, відведеного на 90°, буде збігатися з напрямком сили.

Сила взаємодії двох прямолінійних провідників зі струмом:

$$dF = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{2I_1I_2}{R}dl.$$

Очевидною причиною дії магнітного поля на провідник зі струмом, є те, що у провіднику відбувається упорядкований рух електронів. Тобто на заряд, що рухається, у магнітному полі діє сила. Ця сила названа на честь видатного фізика Лоренца.

Величина сили Лоренца розраховується за формулою:

$$F_L = qvB\sin\alpha ,$$

а напрямок за правилом «лівої руки».

Якщо заряд рухається зі швидкістю $\vec{v} \perp \vec{B}$, то сила Лоренца виконує роль доцентрової сили, тобто:

$$F_L = qvB = m \cdot a_n = \frac{mv^2}{R}.$$

Тоді радіус траєкторії:

$$R = \frac{mv}{qB},$$

а період обертання заряду:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{vqB} = 2\pi \frac{m}{qB}.$$

Тобто і R, і T визначаються $\frac{m}{q}$ – питомим зарядом зарядженої частинки.

В основі електродинаміки змінних полів лежить фундаментальний закон електромагнітної індукції, дослідно відкритий Фарадеєм у 1831 р. Суть цього закону полягає у виникненні струму в довільному замкненому провідному контурі при зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур.

Фарадей прийшов до висновку що причиною виникнення індукційного струму є змінювання потоку магнітного поля, що пронизує провідник.

Оскільки індукційний струм провідності може виникати в замкненому полі тільки під дією сторонніх сил, то відповідна їм електрорушійна сила (е.р.с.) називається *е.р.с. електромагнітної індукції* ε_i.

Закон Фарадея: Е.р.с. електромагнітної індукції у контурі пропорційна швидкості змінювання магнітного потоку Φ крізь поверхню, що охоплює цей контур:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

ε_i – е.р.с. самоіндукції, L – індуктивність контуру.

Напрямок індукційного струму визначається за *правилом Ленца:* при всякому змінюванні магнітного потоку крізь поверхню, що охоплює замкнений провідний контур, в останньому виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє змінюванню цього магнітного потоку.

Самоіндукція – поодинокий випадок електромагнітної індукції. Це виникнення е.р.с. електромагнітної індукції в електричному колі, внаслідок зміни в ньому електричного струму. Така е.р.с. називається *е.р.с. самоіндукції*

$$\varepsilon_c = -\frac{d\varphi_c}{dt},$$

де φ_c – потокозчеплення обумовлене власним магнітним полем струму в цьому електричному колі.

Індуктивністю замкнутого провідного контуру називається скалярна величина *L*, яка дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції контуру до сили струму в цьому контурі:

$$L=\frac{\varphi_C}{I}.$$

Індуктивність соленоїда:

$$L=\mu_0\mu n^2 lS,$$

де l – довжина соленоїда; S – площа його поперечного перерізу; n – кількість витків на одиницю довжини.

Магнітна енергія контуру зі струмом:

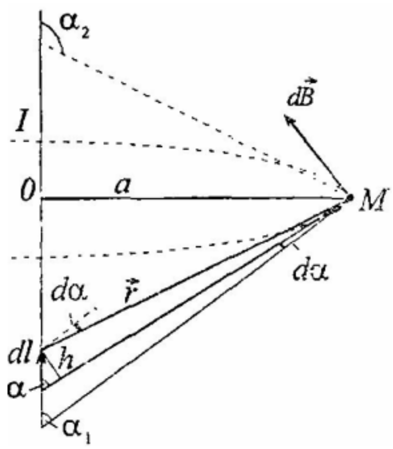
$$W=\frac{LI^2}{2}.$$

2.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайдіть напруженість Н магнітного поля в точці, яка відступає на відстані $a=2$ м від нескінченно довгого провідника, по якому тече струм I = 5 А.

Розв'язання:

Виберемо на провіднику зі струмом елемент струму довжиною dl (див. рисунок). Індукція магнітного поля, що створюється цим елементом в точці М, відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа, $d\vec{B}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$.



Вектор $d\vec{B}$ в точці М спрямований від нас у площину креслення. Модуль цього вектора $dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl\, sin\, \alpha}{r^2}$.

Висловимо dl і r через α: $r = \frac{a}{sin\, \alpha}$, а оскільки $\frac{h}{dl} = \frac{rd\alpha}{dl} = sin\, \alpha$, то $dl = \frac{rd\alpha}{sin\, \alpha} = \frac{ad\alpha}{sin^2\, \alpha}$.

Тоді $dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{Iad\alpha\, sin\, \alpha\, sin^2\, \alpha}{a^2\, sin^2\, \alpha} = \frac{\mu_0\, \mu I}{4\pi a} sin\, \alpha d\alpha$.

Результуючу індукцію магнітного поля в точці М знайдемо інтегруванням: $B = \int dB = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0\, \mu I}{4\pi a} sin\, \alpha d\alpha$

Тут α – кут між напрямом струму в провіднику (напрямом вектора $d\vec{l}$) і вектором $\vec{r}$, проведеним від елемента dl у крапку М, в якій визначається індукція магнітного поля. Якщо провідник нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$. Тоді результуюча індукція магнітного поля: $B = \int\limits_0^{\pi} \frac{\mu_0\, \mu I}{4\pi a} sin\, \alpha d\alpha = \frac{\mu_0\, \mu I}{4\pi a}$.

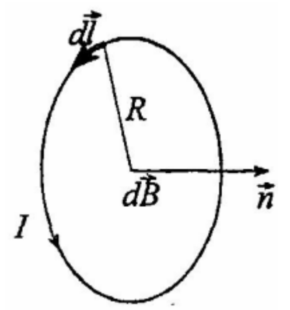
Оскільки $B = \mu_0 \mu H$, то $H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2\pi a}$=398 мА/м.

Приклад 2. Знайдіть напруженість Н магнітного поля в центрі кругового дротяного витка радіусом R=1 см, по якому тече струм I=1 A.

Розв'язання:

Кожен елемент струму створює в центрі індукцію, спрямовану вздовж позитивної нормалі до контуру. Тому векторна сума $d\vec{B}$ зводиться до складання їх модулів. За законом Біо-Савара-Лапласа $dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin\alpha}{r^2}$.

Оскільки $\alpha = \pi/2$, тоді $\sin(\pi/2) = 1$. Для кругового витка $r = R$.

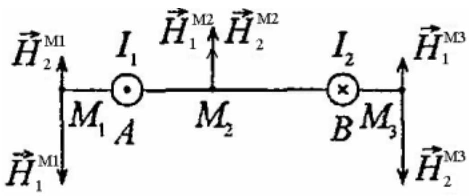


Таким чином, $dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl}{R^2}$.

Проінтегруємо цей вираз по всьому контуру: $B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}$.

Оскільки $B = \mu_0 \mu H$, то $H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2R}$=50 А/м.

Приклад 3. На рисунку зображені перерізи двох прямолінійних нескінченнодовгих провідників зі струмами. Відстань між провідниками AB=10 см, струми I_1=20 A і I_2=30 A. Знайдіть напруженості Н магнітного поля, викликаного струмами I_1 і I_2 в точках M_1, M_2 і M_3. Відстані M_1A=2 см, AM_2=4 см і BM_3=3 см.



Розв'язання:

Згідно з принципом суперпозиції напруженості $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ магнітного поля в точках M_1, M_2 і M_3 складаються з напруженостей створюваних струмами I_1 і I_2.

Таким чином, в точці M_1: $\vec{H}_{M1} = \vec{H}_1^{M1} + \vec{H}_2^{M1}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M1} = -H_1^{M1} + H_2^{M1}$ (1);

в точці M_2: $\vec{H}_{M2} = \vec{H}_1^{M2} + \vec{H}_2^{M2}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M2} = H_1^{M2} + H_2^{M2}$ (2);

в точці M_3: $\vec{H}_{M3} = \vec{H}_1^{M3} + \vec{H}_2^{M3}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M3} = H_1^{M3} - H_2^{M3}$ (3).

Напруженість $H = \dfrac{I}{2\pi a}$, де а – відстань від провідника з струмом до точки, в якій визначається напруженість.

Тоді $H_1^{M1} = \dfrac{I_1}{2\pi(M_1A)}$=159,2 А/м, $H_2^{M1} = \dfrac{I_2}{2\pi(AB + M_1A)}$=39,8 А/м;

$H_1^{M2} = \dfrac{I_1}{2\pi(AM_2)}$=79,6 А/м, $H_2^{M2} = \dfrac{I_2}{2\pi(AB - AM_2)}$=79,6 А/м;

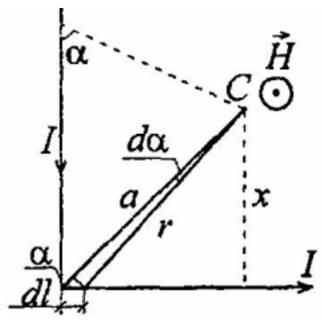
$H_1^{M3} = \dfrac{I_1}{2\pi(AB + BM_3)}$=24,5 А/м, $H_2^{M3} = \dfrac{I_2}{2\pi(AB + BM_3)}$= 159,2 А/м.

Звідси, з урахуванням (1), (2) та (3)H_{M1}=-119,4 А/м;H_{M2}=159,2 А/м; H_{M3}=134,7 А/м

Приклад 4. Струм I=20 А йде по довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайдіть напруженість магнітного поля в точці, що лежить на бісектрисі цього кута на відстані від вершини кута a=10 см.

Розв'язання:

Розіб'ємо провідник на вертикальну та горизонтальну ділянки, кожна з яких створює в точці С магнітне поле. Нехай $\vec{H}_1$ – напруженість магнітного поля, створюваного вертикальною ділянкою, $\vec{H}_2$ – горизонтальною. Тоді результуюча напруженість $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Оскільки вектори $\vec{H}_1$ і $\vec{H}_2$ спрямовані на нас, то можна записати: $H = H_1 + H_2$ (1). За законом Біо-Савара-Лапласа $H_1 = \int\limits_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ (2), $H_2 = \int\limits_{\pi/4}^{\pi} \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ (3). Виразимо величини r і dl через кут α: $dl = \frac{r d\alpha}{\sin\alpha}$; $r = \frac{x}{\sin\alpha}$, де $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, тобто $r = \frac{a}{\sqrt{2}\sin\alpha}$, $dl = \frac{a d\alpha}{\sqrt{2}\sin^2\alpha}$.



Підставимо отримані співвідношення в інтеграл $\int \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl$ і обчислимо його: $\int \frac{I \sin\alpha}{4\pi r^2} dl = \frac{I}{4\pi} \int \frac{2a \sin^3\alpha}{\sqrt{2} a^2 \sin^2\alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \int \sin\alpha d\alpha$.

$$H_1 = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \int\limits_0^{3\pi/4} \sin\alpha d\alpha = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot \left(-\cos\alpha\right)\Big|_0^{3\pi/4} = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot \left(-\cos 3\pi/4 + \cos 0\right) = 37{,}9 \text{ А/м.}$$

Аналогічно

$$H_2 = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin\alpha d\alpha = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\cdot\left(-\cos\alpha\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi} = \frac{\sqrt{2}I}{4\pi a}\cdot\left(-\cos\pi + \cos{\pi/4}\right)\text{=39,3 А/м.}$$

Підставивши отримані значення в (1), знайдемо Н=77,2 А/м.

Приклад 5. Знайдіть напруженість Н магнітного поля на осі кругового контуру на відстані а=3см від його площини. Радіус контуру R=4 см, струм в контурі I=2А.

Розв'язання:

Виберемо елемент струму $d\vec{l}$. У точці А він створює поле $d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}$.

В силу симетрії сумарний вектор $\vec{B}$ спрямований вздовж осі х, а це значить, що для знаходження модуля вектора треба скласти проекції всіх векторів $d\vec{B}$ на вісь Ох. $dB_x = dB\cos\varphi = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}\cos\varphi$ (кут між $d\vec{l}$ і $\vec{r}$ дорівнює α=π/2, звідси $\sin\alpha = 1$).

Інтегруючи цей вираз по всім $d\vec{l}$, що дає $2\pi R$, і враховуючи, що $\cos\varphi = \frac{R}{r}$, $r = \sqrt{a^2 + R^2}$, отримуємо $B = \frac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\frac{2I\pi R^2}{\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$.

Оскільки $B = \mu_0\mu H$, то $H = \frac{IR^2}{2\left(a^2+R^2\right)^{3/2}}$=12,7 А/м.

Приклад 6. Два прямолінійних довгих паралельних провідника знаходяться на відстані d_1=10 см один від одного. По провідникам в одному напрямку течуть струми I_1=20 А і I_2=30 А. Яку роботу А, необхідно виконати (на одиницю довжини провідників), щоб розсунути ці провідники до відстані d_2=20 см?

Розв'язання:

Відповідно до закону Ампера для паралельних струмів сила, що діє на одиницю довжини кожного з провідників: $F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r}$.

Робота, що витрачається на одиницю довжини провідника, при переміщенні одного провідника зі струмом у магнітному полі, створюваному іншим провідником зі струмом: $A = \int\limits_{d_1}^{d_2} F dr = \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} ln \frac{d_2}{d_1}$.

Підставляючи числові дані, отримаємо А=83·10^{-6} Дж/м.

Приклад 7. Із дроту довжиною l=20см зроблені квадратний і круговий контури. Знайдіть обертаючі моменти сил M_1 і M_2, що діють на кожний контур, поміщений в однорідне магнітне поле з індукцією B=0,1 Тл. По контурах тече струм I=2 А. Площина кожного контуру складає кут α=45° з напрямом поля.

Розв'язання:

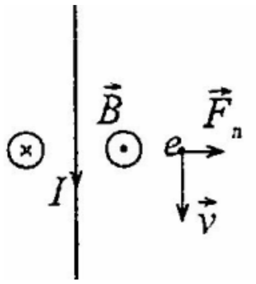
На замкнутий контур зі струмом у магнітному полі діє обертальний момент $M = BIS \sin\alpha$.

Площа квадратного контуру $S_1 = \left(\frac{l}{4}\right)^2$. Площа кругового контуру, $S_2 = \pi R^2$ де, $R = \frac{l}{2\pi}$ отже, $S_2 = \frac{\pi l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$. Тоді на квадратний контур діє обертальний момент $M_1 = BI\left(\frac{l}{4}\right)^2 \sin\alpha$=3,5·$10^{-4}$ Н·м. На кругової контур діє обертальний момент $M_1 = BI\frac{l^2}{4\pi} \sin\alpha$=4,5·$10^{-4}$ Н·м.

Приклад 8. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=300 В, рухається паралельно прямолінійному довгому дроту на відстані a=4 мм від нього. Яка сила F діє на електрон, якщо по провіднику пустити струм I=5 А?

Розв'язання:

З боку магнітного поля, створюваного провідником зі струмом, на електрон діє сила Лоренцо $\vec{F} = -q[\vec{v}, \vec{B}]$. Напрям сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку векторів. У скалярному вигляді $F = qvB\sin\alpha$ (1). Індукція магнітного поля провідника зі струмом дорівнює $B = \dfrac{\mu_0 \mu I}{2\pi a}$ (2).



Кінетична енергія електрона, що пройшов різницю потенціалів U, дорівнює $\dfrac{mv^2}{2} = qU$, звідки $v = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$ (3).

Підставляючи (2) та (3) в (1), отримаємо $F = q\sqrt{\dfrac{2qU}{m}}\dfrac{\mu_0 \mu I}{2\pi a}\sin\alpha$. Враховуючи, що кут між $\vec{B}$ і $\vec{v}$ дорівнює 90° і підставляючи числові дані, отримаємо F=$4{,}12 \cdot 10^{-16}$ Н.

Приклад 9. Протон і електрон, рухаючись з однаковою швидкістю, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більше радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

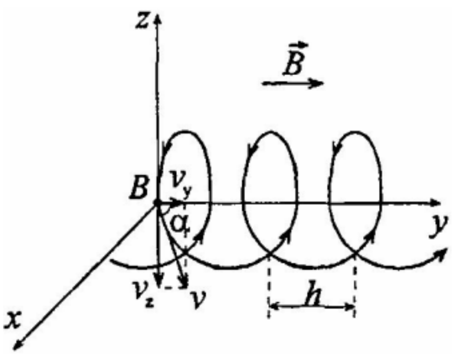
Розв'язання:

З боку магнітного поля на електрон діє сила Лоренцо $\vec{F}_1 = -q[\vec{v}, \vec{B}]$, а на протон діє сила Лоренцо $\vec{F}_2 = q[\vec{v}, \vec{B}]$.

Ці сили рівні за модулем і протилежні за напрямком. У скалярному вигляді $F_1 = F_2 = qvB$. Робота сили Лоренца дорівнює нулю, тому $v = const$ і тангенціальне прискорення $a_\tau = 0$. Частинки рухаються з постійним по модулю нормальним прискоренням $a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m}$ (1), яке перпендикулярно швидкості. Радіус кривизни траєкторії часток можна знайти із співвідношення $a_n = \frac{v^2}{R}$ (2).

Прирівнявши (1) і (2), отримаємо $\frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{R}$, звідки $R = \frac{vm}{qB}$. Для протона $R_2 = \frac{vm_p}{qB}$. Для електрона $R_1 = \frac{vm_e}{qB}$. Звідси $\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_p}{m_e}$=1840.

Приклад 10. Електрон, прискорений різницею потенціалів U=6 кВ, влітає в однорідне магнітне поле під кутом α=30° до напрямку поля і рухається по гвинтовій траєкторії. Індукція магнітного поля B=13 мТл. Знайти радіус R і крок h гвинтової траєкторії.



Розв'язання:

Розкладемо швидкість електрона, влітаючого в магнітне поле, на два напрямки: уздовж ліній поля – v_y і паралельно їм – v_z. Складемо два рівняння. Сила Лоренца створює доцентрове прискорення, тобто

$qv_zB = \dfrac{mv_z^2}{R}$, звідки $qB = \dfrac{mv_z}{R}$ (1). Оскільки $\dfrac{mv^2}{2} = qU$, а з малюнка $v = \dfrac{v_z}{sin\,\alpha}$, то $qU = \dfrac{mv_z^2}{2\,sin^2\alpha}$ (2).

Розділимо обидві частини рівняння (2) на квадрати обох частин рівняння (1). Отримаємо $\dfrac{qU}{q^2B^2} = \dfrac{mv_z^2R^2}{2m^2v_z^2\,sin^2\alpha}$; $\dfrac{U}{qB^2} = \dfrac{R^2}{2m\,sin^2\alpha}$ звідки $R = \dfrac{sin\,\alpha}{B}\sqrt{\dfrac{2mU}{q}}$=1 см.

Крок спіралі знайдемо з співвідношень $2\pi R = v_zt$ і $h = v_yt$, звідки $h = 2\pi R\dfrac{v_y}{v_z}$. Оскільки $\dfrac{v_y}{v_z} = ctg\alpha$ =1,73, то h=11 см.

Приклад 11. Котушка діаметром D=10 см, що складається з N=500 витків дроту, знаходиться у магнітному полі. Знайдіть середню е.р.с. самоіндукції $\varepsilon_{сер}$, що виникає в цій котушці, якщо індукція магнітного поля збільшується протягом часу t=0,1 с від 0 до 2 Тл.

Розв'язання:

Згідно з законом Фарадея $\varepsilon_{сер} = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де зміна потоку магнітної індукції через котушку $\Delta\Phi = NS\Delta B$.

Таким чином, $\varepsilon_{сер} = -NS\dfrac{\Delta B}{\Delta t}$, де $\Delta B = B_2 - B_1$. За умовою $B_1 = 0$, $B_2 = 2$ Тл. Підставляючи числові дані, отримаємо $\varepsilon_{сер}$=78,5 В.

Приклад 12. У магнітному полі, індукція якого B=0,05 Тл, обертається стрижень довжиною l=1 м з кутовою швидкістю ω=20 рад/с. Вісь обертання проходить через кінець стрижня і паралельна магнітному полю. Знайдіть е.р.с. індукції ε, що виникає на кінцях стрижня.

Розв'язання:

Відповідно до закону Фарадея $\varepsilon = -\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де зміна магнітного потоку $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ або, оскільки α=90°, $\Delta\Phi = B\Delta S$.

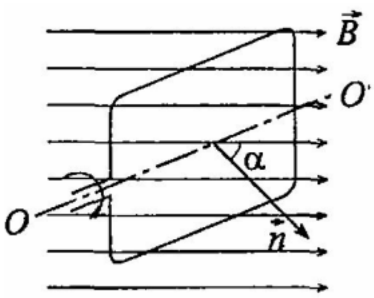
За один оберт стрижень перетинає площу $\Delta S = \pi l^2$ за час $\Delta t = t$. Тоді магнітний потік, що перетинається стрижнем за один оберт, $\Delta\Phi = B\pi l^2$, а е.р.с. що виникає на кінцях стрижня $\varepsilon = -\dfrac{B\pi l^2}{t} = -B\pi l^2\omega$.

Підставляючи числові дані, отримаємо ε=-0,5 В.

Приклад 13. В однорідному магнітному полі, індукція якого B=0,1 Тл, рівномірно обертається котушка, що складається з N=100 витків дроту. Частота обертання котушки $n=5c^{-1}$; площа поперечного перерізу котушки $S=0{,}01$ $м^2$. Вісь обертання перпендикулярна до осі котушки і напряму магнітного поля. Знайдіть максимальну е.р.с. індукції ε_{max} у котушці що обертається.

Розв'язання:

Розглянемо один виток рамки. При рівномірному обертанні навколо осі OO' з кутовою швидкістю ω магнітний потік через його площу буде змінюватися за законом $\Phi = BS\cos\alpha$ (1), де S − площа рамки; α − кут між нормаллю до площини та вектором B.



Вважаючи, що при t=0 α=0, маємо $\alpha = \omega t$.

Індукована у витку е.р.с. індукції $\varepsilon_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\left(-\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}\right) = -\frac{d\Phi}{dt}$ (2). Оскільки $\Phi(t) = BS\cos\omega t$, то, диференціюючи цю функцію і враховуючи, що $\frac{d(\cos\omega t)}{dt} = -\omega\sin\omega t$, отримаємо $\varepsilon_i = BS\omega\sin\omega t$ (3).

Індукована в N витках е.р.с. буде в N разів більше: $\varepsilon = N\varepsilon_i = NBS\omega\sin\omega t = \varepsilon_{max}\sin\omega t$, де ε_{max} – максимальне значення (амплітуда) е.р.с. індукції: $\varepsilon_{max} = NBS\omega$ (4). Таким чином, при рівномірному обертанні рамки в однорідному магнітному полі в ній виникає е.р.с. самоіндукції, що змінюється за синусоїдальним законом. Підставляючи в (4) значення кутової швидкості $\omega = 2\pi n$, де n – частота обертання рамки, отримаємо $\varepsilon_{max} = 2\pi nNBS$=3,14 В.

Приклад 14. Котушка довжиною l=20 см має N=400 витків. Площа поперечного перерізу котушки S=9см^2. Знайти індуктивність котушки L_1. Яка буде індуктивність котушки L_2, якщо всередину котушки введений залізний сердечник? Магнітна проникність матеріалу сердечника μ=400.

Розв'язання:

Індуктивність котушки визначається виразом $L = \mu\mu_0\frac{N^2S}{l}$. Враховуючи, що магнітна проникність повітря μ=1, одержимо L_1=0,9·10^{-3}Гн; L_2=0,36 Гн.

Приклад 15. Соленоїд довжиною l=50 см і площею поперечного перерізу S=2см^2 має індуктивність L=0,2 мкГн. При якому струмі I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда W_0=1 мДж/м^3?

Розв'язання:

Густина енергії магнітного поля всередині соленоїда визначається за формулою $W_0 = \dfrac{B^2}{2\mu\mu_0}$ (1).

Індукція магнітного поля всередині соленоїда дорівнює $B = \dfrac{\mu\mu_0 NI}{l}$ (2). Число витків N можна знайти з виразу для індуктивності соленоїда: $L = \mu\mu_0 \dfrac{N^2 S}{l}$, звідки $N = \sqrt{\dfrac{lL}{\mu\mu_0 S}}$ (3). Підставляючи (3) в (2), отримаємо $B = I\sqrt{\dfrac{\mu\mu_0 L}{Sl}}$.

Тоді з (1) $W_0 = \dfrac{I^2 L}{2lS}$, звідки $I = \sqrt{\dfrac{2W_0 lS}{L}}$ =1 А.

РОЗДІЛ 3.

КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

3.1 Основні визначення, закони та рівняння

Коливання – це процеси, які з більшою або меншою точністю повторюються у часі.

Коливальний рух, у якому відповідні положення тіла або точки повторюються через однакові проміжки часу, називають *періодичним*. Найпростішими серед періодичних коливань є гармонічні коливання. *Гармонічними* називають коливання, якщо величина, що коливається, змінюється з часом по закону синуса або косинуса.

Рівняння гармонічного коливання:

$$x = A\,sin(\omega t + \alpha_0);$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A sin(wt + \alpha_0) = \omega^2 A sin(wt + \alpha_0 + \pi),$$

де x – зміщення від положення рівноваги; v – швидкість; a – прискорення.

Проміжок часу, протягом якого здійснюється один повний цикл коливань, називається *періодом коливань T*.

Кількість коливань за одиницю часу називається частотою коливань. Частота коливань ν пов’язана з періодом коливань T співвідношенням:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

За одиницю частоти приймають частоту такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Одиницю частоти називають Герц (Гц).

Частоту ω називають *циклічною* або *коловою*, вона пов'язана з частотою ν співвідношенням:

$$\omega = 2\pi\nu \ .$$

Частота ω дорівнює кількості коливань за 2π секунд. Період коливань:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Відстань між найближчими точками, які коливаються в однакових фазах, називається довжиною хвилі λ.

Довжина хвилі дорівнює відстані, на яку поширюється хвиля за період T:

$$\lambda = vT \ .$$

Швидкість v називають *фазовою швидкістю*:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \ ,$$

де ν – частота.

Диференціальне рівняння механічних коливань у загальному вигляді, коли на коливальну систему діє змушувальна періодична змінна сила, має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx + r\frac{dx}{dt} = F_0 \sin \omega t \, .$$

Коливання які виникають у цьому випадку називаються *вимушеними*.

Якщо коливальна система зазнала лише зовнішнього поштовху або була виведена з положення рівноваги і залишена сама собі, то її коливання називають *вільними.* Диференціальне рівняння вільних механічних коливань має вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx+r\frac{dx}{dt}=0.$$

Дія сил опору, приводить до того, що вільне коливання буде *згасаючим*. Таким чином, дане рівняння є рівнянням механічних згасаючих коливань.

При відсутності сил опору вільні коливання називають *власними*.

Диференціальне рівняння власних незгасаючих механічних коливань має вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2x=0,$$

де ω_0 – колова частота власних коливань.

Диференціальне рівняння коливань в електричному контурі:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=\varepsilon_0\sin\omega t,$$

де L – індуктивність контуру; R – електричний опір; C – електрична ємність.

Частота власних коливань в електричному контурі:

$$\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушених коливань ω, до частоти власних коливань ω_0, називається *резонансом.*

3.2. Приклади розв'язання завдань

Кінематика коливального руху

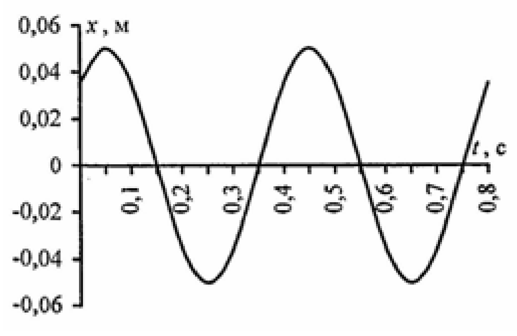
Приклад 1. Напишіть рівняння гармонічного коливального руху з амплітудою A=5 см, якщо за час t=1 хв відбувається 150 коливань, та початкова фаза коливань φ=π/4. Накресліть графік цього руху.

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливання має вигляд:

$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$. Колова частота $\omega = 2\pi\nu = 2\pi\dfrac{N}{t}$. За умовою N=150, звідси $\omega = 5\pi$. Підставляючи числові дані, отримаємо рівняння даного коливання: $x(t) = 0{,}05\sin(5\pi t + \pi/4)$.

Графік коливання буде мати вигляд наведений на рисунку.



Приклад 2. Через який час від початку руху точка, яка здійснює гармонічне коливання, зміститься від положення рівноваги на половину амплітуди? Період коливання T=24 с, початкова фаза $\varphi = 0$.

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливального руху має вигляд: $x(t) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$. Підставляюючи числові значення періода Т та початкової фази φ, отримаємо: $x(t) = A\,sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$.

За умовою $x = 0{,}5A$, звідки $0{,}5 = sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$, або $\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}t$. Звідки $t = 2$ с.

Приклад 3. Початкова фаза гармонічного коливання $\varphi = 0$. Через яку долю періода швидкість точки буде дорівнювати половині її максимальної швидкості?

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливального руху має вид: $x(t) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

Швидкість точки, що здійснює коливання: $v = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{2\pi}{T}A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Максимальної швидкості точка досягне при $cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 1$, тобто $v_{max} = \frac{2\pi}{T}A$.

За умовою $v = \frac{\pi}{T}A$, тоді $\frac{2\pi}{T}A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{\pi}{T}A$. Звідки $cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}$ і $\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3}$, тоді $t = \frac{T}{6}$.

Приклад 4. Амплітуда гармонічного коливання А=5 см, період Т=4 с, початкова фаза $\varphi = 0$. Знайти максимальну швидкість v_{max} точки та її максимальне прискорення a_{max}.

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливального руху має вигляд: $x(t) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

Швидкість та прискорення точки, що здійснює гармонічні коливання, визначаються співвідношеннями: $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T}A\,cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$; $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\,sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. Вони мають максимальні значення за умови коли sin або cos дорівнюють ± 1, тобто $v_{\max} = \frac{2\pi}{T}A = 7{,}85 \cdot 10^{-2}$ м/с, а $a_{\max} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = 0{,}12$ м/с^2.

Динаміка гармонічних коливань

Приклад 1. Рівняння коливань матеріальної точки масою $m = 10$ г має вигляд $x(t) = 5\,sin\left(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$ м. Знайдіть максимальну силу F_{max}, що діє на точку, та повну енергію точки.

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливання має вигляд: $x(t) = A\,sin(\omega t + \varphi)$. Прискорення в даному випадку: $a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\,sin(\omega t + \varphi)$, де $A\omega^2 = a_{max}$ максималльне прискорення точки, що здійснює коливання. За другим законом Ньютона сила, яка діє на точку, дорівнює добутку маси точки на її прискорення: $F = m \cdot a = m \cdot a_{max}\,sin(\omega t + \varphi)$. Максимальною сила буде за умови $sin(\omega t + \varphi) = 1$, тобто $F_{max} = ma_{max} = mA\omega^2$. За умовою $m = 10$ г; $A = 5$ м; $\omega = \pi/5$, тоді $F_{max} = 1{,}97 \cdot 10^{-2}$ Н.

Повна енергія точки дорівнює сумі потеннціальної та кінетичної енергій: $W = W_p + W_k$ (1).

Кінетична енергія розраховується за формулою: $W_k = \frac{mv^2}{2}$, де $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\, cos(\omega t + \varphi)$. Звідси $W_k = \frac{mA^2\omega^2 cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$.

Потенціальна енергія розраховується за формулою: $W_p = \frac{kx^2}{2}$, де $k = m\omega^2$. Тоді $W_k = \frac{mA^2\omega^2 sin^2(\omega t + \varphi)}{2}$.

Враховуючи (1) та підставляючи числові дані, отримаємо: $W = \frac{mA^2\omega^2}{2}\left(cos^2(\omega t + \varphi) + sin^2(\omega t + \varphi)\right) = \frac{mA^2\omega^2}{2} = 4{,}93 \cdot 10^{-2}\, Дж$.

Приклад 2. До пружини підвішений тягарець. Максимальна кінетична енергія коливань тягарця $W_{k\,max} = 1 Дж$. Амплітуда коливань $A = 5 \cdot 10^{-2}\, м$. Знайдіть коефіцієнт жорсткості пружини.

Розв'язання:

Рівняння гармонічного коливання має вид: $x(t) = A\, sin(\omega t + \varphi)$.

Кінетична енергія розраховується за формулою: $W_k = \frac{mv^2}{2}$, де $v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\, cos(\omega t + \varphi)$. Звідси $W_k = \frac{mA^2\omega^2 cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$. Максимального значення кінетична енергія досягає, коли $cos^2(\omega t + \varphi) = 1$, тоді $W_{k\,max} = \frac{mA^2\omega^2}{2}$. Якщо врахувати, що $\omega = \frac{2\pi}{T}$, то можна записати: $W_{k\,max} = \frac{4\pi^2 mA^2}{2T^2}$ (1).

Період коливань тягарця на пружині визначається за формулою: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Піднесемо даний вираз в другий степень та підставимо в (1): $W_{k\,max} = \frac{4\pi^2 m A^2 k}{8\pi^2 m} = \frac{A^2 k}{2}$. Звідси коефіцієнт жорсткості пружини дорівнює $k = \frac{2W_{k\max}}{A^2} = 800\ Н/м$.

Приклад 3. Як зміниться період вертикальних коливань тягарця, який висить на двох пружинах, якщо від послідовного їх з'єднання перейти до паралельного?

Розв'язання:

Сила пружності пружини за законом Гука $F = kx$. Якщо до пружини підвісити тягарець масою m, то в положенні рівноваги $kx = mg$, звідси подовження буде дорівнювати $x = \frac{mg}{k}$.

Якщо дві пружини з'єднати послідовно, то їх подовження будуть однаковими, а загальне подовження складатиме: $x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}$ (1). З іншого боку $x_2 = \frac{mg}{k_1}$ (2).

Якщо прирівняти (1) та (2), то для послідовного з'єднання отримаємо: $\frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}$, звідки $k_1 = \frac{k}{2}$.

Для паралельного з'єднання $k_2 = 2k$.

Таким чином, періоди коливань при послідовному та паралельному з'єднанні пружин відповідно дорівнюють: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}}$ та $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}}$.

Відношення періодів дорівнює: $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2$.

Електромагнітні хвилі

Приклад 1. На який діапазон довжин хвиль можна настроїти коливальний контур, якщо його індуктивність $L = 2$ мГн, а ємність може змінюватись від $C_1 = 69\ n\Phi$ до $C_2 = 533\ n\Phi$?

Розв'язання:

Довжина хвилі, на яку можна настроїти контур, можна знайти із формули Томпсона для періода коливань контура: $T = 2\pi\sqrt{LC}$, якщо врахувати, що $\lambda = cT$, де с – швидкість поширення світла. Тобто довжина хвилі дорівнює $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$ (1).

Підставляючи у (1) значення L, C_1 та C_2, отримаємо діапазон довжин хвилі від $\lambda_1 = 700$ м до $\lambda_2 = 1946$ м.

Приклад 2. Котушка з індуктивністю $L = 30$ мкГн приєднана до плаского конденсатора з площею пластин $S = 0{,}01\ \text{м}^2$ з відстанню між ними $d = 1 \cdot 10^{-4}$ м. Знайти діелектричну проникність ε середовища, що заповнює простір між пластинами, якщо контур настроєний на довжину хвилі $\lambda = 750$ м.

Розв'язання:

Ємність плаского конденсатора дорівнює: $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, де ε – діелектрична проникність середовища, S – площа пластин конденсатора, d – відстань між ними.

Довжина хвилі, на яку настроєний коливальний контур знаходиться за формулою: $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$. Підставимо в (2) вираз для ємності (1): $\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}}$ (3).

Піднесемо вираз (3) у другий степінь: $\lambda^2 = 4\pi^2 c^2 \frac{\varepsilon\varepsilon_0 SL}{d}$ та розв'яжемо рівняння відносно шуканої ε: $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 SL} = 5{,}96$.

Приклад 3. Напруга на кінцях ділянки ланцюга, по якому тече змінний струм, змінюється із часом за законом $U = U_0\, sin(\omega t + \pi/6)$. В момент часу $t = T/12$ миттєва напруга дорівнює 10 В. Визначити амплітуду напруги.

Розв'язання:

Підставимо в рівняння $U = U_0\, sin(\omega t + \pi/6)$ значення t та враховуючі, що $\omega = 2\pi/T$, отримуємо $10 = U_0\, sin(\frac{2\pi T}{12T} + \frac{\pi}{6})$ або $10 = U_0\, sin\frac{\pi}{3}$, звідки отримаємо $U_0 = \frac{10}{\sin(\pi/3)} = \frac{10}{0{,}87} B \approx 11{,}5\ B$.

РОЗДІЛ 4.
ЕЛЕМЕНТИ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ТА ХВИЛЬОВОЇ ОПТИКИ

4.1. Основні визначення, закони та рівняння

Закон відбиття: світовий промінь, що падає на межу двох середовищ, і промінь, відбитий від другого середовища, лежать в одній площині з перпендикуляром, проведеним у точку падіння променя, при цьому кут відбиття за величиною дорівнює куту падіння

$$|\alpha| = |\alpha'|,$$

де α та α' – відповідно кут падіння та відбиття.

Закон заломлення: промінь, що падає на межу двох середовищ, і промінь заломлений лежать у одній площині з перпендикуляром, проведеним у точку падіння променя; відношення синуса кута падіння α до синуса кута заломлення β є величина стала для даних середовищ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

де β – кут заломлення; n_1 та n_2 – абсолютні показники заломлення 1 та 2 середовища; n_{21} – відносний показник заломлення.

Фазова швидкість світла v у середовищі розраховується за формулою:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

де c – швидкість світла у вакуумі; ε – діелектрична проникність середовища; μ – магнітна проникність середовища.

Абсолютний показник заломлення:

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} .$$

Інтерференція хвиль – це явище накладання двох або кількох когерентних хвиль, при якому відбувається стійке посилення їх в деяких точках простору (максимум інтерференційної картини) і послаблення в інших точках (мінімум інтерференційної картини) в залежності від співвідношення фаз цих хвиль.

Когерентність – властивість хвилі зберігати свої частотні, поляризаційні й фазові характеристики. *Когерентність* – це корельоване протікання в часі й у просторі декількох випадкових коливальних або хвильових процесів, яке дозволяє одержувати при їхньому додаванні чітку інтерференційну картину. Умовою когерентності хвиль є незмінюваність у часі різниці між фазами коливань у них, що можливо лише тоді, коли хвилі мають однакову довжину (частоту).

Умови максимумів і мінімумів інтерференційної картини:

$$\delta = L_2 - L_1 = \pm m\lambda \text{ (умова максимумів)},$$

$$\delta = L_2 - L_1 = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \text{ (умова мінімумів)}.$$

Сукупність явищ, які зумовлені хвильовою природою світла і спостерігаються при його розповсюдженні у середовищі з різко вираженою оптичною неонорідністю має назву *дифракції*. *Дифракція* – це будь-яке відхилення розповсюдження хвиль поблизу перешкод від законів геометричної оптики, хвиля огинає перешкоди, що зустрічаються на її шляху.

Явище дифракції можна пояснити за допомогою *принципу Гюйгенса.* За цим принципом кожна точка, до якої дійшла хвиля, є центром вторинних хвиль, а огинаюча цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу.

Умови дифракційних мінімумів та максимумів на щілині:

$$a\,sin\,\varphi = \pm m\lambda\,;$$

$$a\,sin\,\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}\text{, де } m\text{=1, 2, 3…}$$

Умови дифракційних мінімумів та максимумів на дифракційній решітці:

$$d\,sin\,\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}\,;$$

$$d\,sin\,\varphi = \pm m\lambda\text{, де } m\text{=1, 2, 3…}$$

Закон Брюстера: при деякому куті падіння, який називається кутом Брюстера, відбитий промінь виявляється поляризованим повністю, а заломлений промінь – частково, але максимально

$$tg\alpha_Б = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}\,,$$

де $\alpha_Б$ – кут Брюстера; n_{21}– показник заломлення другого середовища по відношенню до першого, n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення першого та другого середовищ.

Закон Малюса: інтенсивність світла, яке пройшло крізь аналізатор:

$$I = I_0\,cos^2\,\alpha\,,$$

де I_0 – інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор, α – кут між площинами поляризатора і аналізатора або кут між площиною коливань вектора $\vec{E}$ світла, яке пройшло крізь поляризатор, і площиною коливань вектори $\vec{E}$ світла, яке пройшло крізь аналізатор.

4.2. Приклади розв'язання завдань

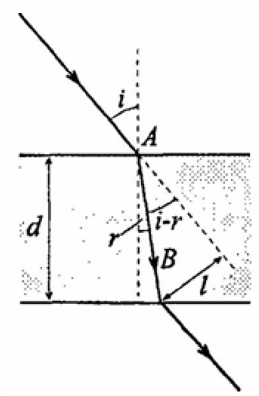
Елементи геометричної оптики

Прикалад 1. Промінь світла падає під кутом i=30° на плоскопаралельну скляну пластинку і виходить із неї паралельно первісному променю. Показник заломлення скла n=1,5. Яку товщину d має пластинка, якщо відстань між променями l=1,94 см?

Розв'язання:

Зміщення променя $l = AB\,sin(i-r)$(1), де r – кут заломлення променя в склі.

Товщина пластинки d зв'язана зі зміщенням променя наступним співвідношенням: $d = AB\cos r$. Оскільки із (1) $AB = \dfrac{l}{sin(i-r)}$, та враховуючи, що $sin(i-r) = sin\,i\cos r - cos\,i\,sin\,r$, то можна отримати $d = \dfrac{l\cos r}{sin\,i\cos r - cos\,i\,sin\,r}$ (2).



Відповідно до закону заломлення $\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{n_2}{n_1}$, де n_1 та n_2 показники заломлення першого та другого середовища, тобто $n_1=1$, а $n_2=n$. Тоді $\dfrac{\sin i}{\sin r}=n$ та $\dfrac{\sin i}{n}=\sin r$, а $\cos r=\sqrt{1-\dfrac{\sin^2 i}{n^2}}=\dfrac{\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{n}$.

Підставляючи в (2), отримаємо $d=\dfrac{l\sqrt{n^2-\sin^2 i}}{\sin i\sqrt{n^2-\sin^2 i}-\cos i\sin i}$.

Після розрахунку отримаємо $d=0{,}1$ м.

Приклад 2. Промінь падає під кутом *i* на тіло з показником заломлення *n*. Як повинні бути зв'язаня між собою *i* та *n*, щоб відбитий промінь був перепендикулярним до заломленого.

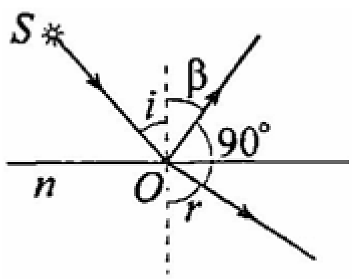
Розв'язання:

Відповідно до закону заломлення $\dfrac{\sin i}{\sin r}=\dfrac{n_2}{n_1}$, оскільки $n_1=1$, а $n_2=n$, то $\dfrac{\sin i}{\sin r}=n$ (1).

Із рисунка видно, що $\angle\beta+\angle r+90^\circ=180^\circ$.

Із закона відбиття відомо, що $\angle i=\angle\beta$, тоді $\angle i+\angle r=90^\circ$, звідки $\angle r=90^\circ-\angle i$.

Підставимо отримане в (1): $\dfrac{\sin i}{\sin(90^\circ-\angle i)}=n$.



Враховуючи, що $sin(90^{\circ} - \angle i) = cos(-i) = cos\, i$, отримаємо $\frac{sin\, i}{cos\, i} = tgi = n$.

Приклад 3. Промінь світла виходить із скипидару у повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбиття для цього променя β=42°23’. Знайти швидкість поширення світла в скипидарі.

Розв’язання:

Фізичний зміст абсолютного показника заломлення полягає в тому, що він показує, у скільки разівшвидкість світла у вакуумі більше швидкості світла у даній речовині, тобто $n = \frac{c}{v}$.

Тоді швидкості поширення світла в скипидарі та повітрі зв’язані з відповідними показниками заломлення співвідношенням: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$ (1).

Оскільки $n_2 = 1$, а $v_2 = c$, то $n_1 = \frac{c}{v_1}$ (2), де $c = 3 \cdot 10^8\, м/с$ – швидкість світла. Значення n_1 знайдемо із співвідношення: $sin\,\beta = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1}$, звідки $n_1 = \frac{1}{sin\,\beta}$.

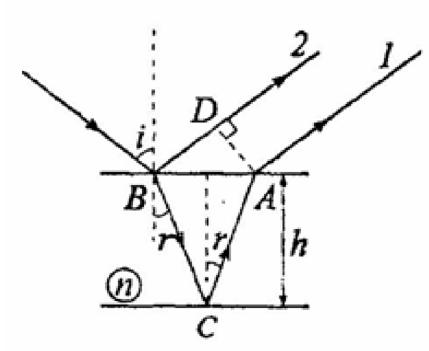
Далі із (2) знайдемо: $v_1 = \frac{c}{n_1} = c \cdot sin\,\beta$. Підставлюючи числові значення, отримаємо: $v_1 = 2{,}02 \cdot 10^8\, м/с$.

Інтерференція світла

Приклад 1. На мильну плівку падає біле світло під кутом $i = 45^{\circ}$ до їїповерхні. При якій найменшій товщині плівки відбиті промені будуть забарвлені в жовтий колір ($\lambda = 600$ нм)? Показник заломлення мильної води $n = 1{,}33$.

Розв'язання:

Максимум інтерфернеції буде спостерігатись, коли світлові хвилі, відбиті від обох поверхонь плівки (див. рисунок), будуть підсилювати одна одну. Для цього оптична різниця ходу Δd променів 1 і 2 повинна дорівнювати цілому числу довжин хвилі: $\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda$.



Доданок $\frac{\lambda}{2}$ враховує що під час відбиття променя 1 від оптично більш щільного середовища фаза коливань електромагнітного поля змінюється на протилежну, тобто виникає така ж зміна фази, як при проходженні шляху $\frac{\lambda}{2}$.

Множник n враховує зменьшення швидкості світла в середовищі. Використовуючи співвідношення: $AC = BC = \frac{h}{cos\,r}$; $AD = 2h \cdot sin\,i \cdot tgr$, а також використовуючи закон заломлення світла, отримуємо: $\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - sin^2 i}$. Звідки $h = \frac{\left(k - {}^1\!/_2\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - sin^2 i}}$.

При $k = 1$ (мінімальна товщина плівки): $h = 0{,}13 \cdot 10^{-6}\,м$.

Приклад 2. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, що падає по нормалі до поверхні пластинки. Радіус кривизни лінзи $R = 15$ м. Спостереження ведеться в відбитому світлі. Відстань між п'ятим та двадцятим світлими кільцями Ньютона $l = 9$ мм. Знайти довжину хвилі λ монохроматичного світла.

Розв'язання:

Радіус k-го світлого кільця у відбитому світлі визначається співвідношенням $r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$.

Тоді $l = r_{25} - r_5 = \sqrt{(2\cdot 25-1)R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{(2\cdot 5-1)R\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{49R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{9R\frac{\lambda}{2}}$,

$l = 4\sqrt{R\frac{\lambda}{2}}$. Звідси $\lambda = \frac{l^2}{8R} = 675\cdot 10^{-9}\ м$.

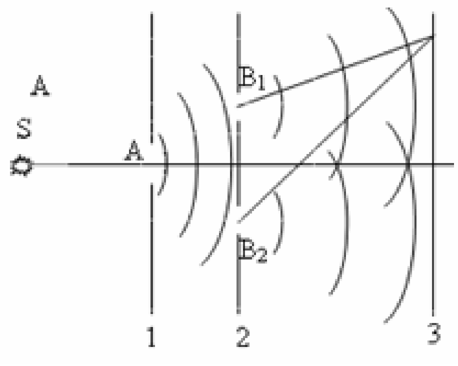
Приклад 3. У скільки разів збільшиться відстань між сусідніми інтерференційними смугами на екрані в досліді Юнга, якщо зелений світлофільтр ($\lambda_1 = 500$ нм) замінити червоним ($\lambda_2 = 650$ нм)?

Розв'язання:

Умова інтерференційного максимума: $y_{max} = k\frac{L}{d}\lambda$ (1), де $k = 0,1,2\ldots$

Умова інтерференційного мінімуму: $y_{max} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda$ (2), де $k = 0,1,2\ldots$.

Відстань між сусідніми максимумами інтенсивності називається відстанню між інтерференційними смугами, а відстань між мінімумами інтенсивності – шириною інтерференційної смуги.



Із (1) та (2) слідує, що відстань між смугами та ширина смуги мають однакове значення, яке дорівнює $\Delta y = \frac{L}{d}\lambda$.

Тоді відстань між інтерференційними смугами при зеленому світлофільтрі дорівнює $\Delta y_1 = \frac{L}{d}\lambda_1$, а при червоному – $\Delta y_2 = \frac{L}{d}\lambda_2$, де L відстань від екрана до джерел світла, а d – відстань між джерелами світла. Тоді $\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1{,}3$.

Дифракція світла

Приклад 1. Світло від монохроматичного джерела (λ=600 *нм*) падає нормально на діафрагму з діаметром отвору $r = 6\,\text{мм}$. За діафрагмою на відстані $b = 3\,\text{м}$ від неї знаходиться екран. Яке число k зон Френеля укладається в отвір діафрагми. Яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним?

Розв'язання:

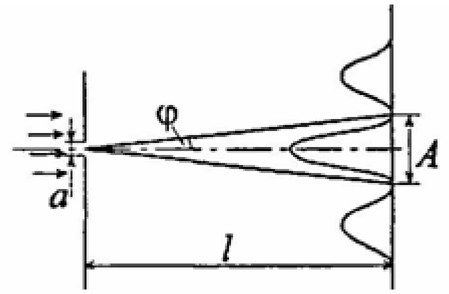
Нехай в отворі діафрагми укладається k зон Френеля, тоді радіус k-ї зони дорівнює радіусу отвору діафрагми: $r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{bk\lambda}$. Звідки $k = \frac{d^2}{4b\lambda} = 5$.

Оскільки число відкритих зон непарне, то центр дифракційної картини буде світлим.

Приклад 2. На щілину шириною $a = 20\,\text{мкм}$ падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла ($\lambda = 500\,\text{нм}$). Знайти ширину A зображення щілини на екрані, який віддалений від щілини на відстань $l = 1\,\text{м}$. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, що розміщаються по обидві сторони від головного максимума освітленості.

Розв'язання:

Із рисунка видно, що $\frac{A}{2} = l \cdot tg\varphi$.



Оскільки кут φ малий, то можна вважати $tg\varphi = sin\varphi$. Тоді $A = 2l \cdot sin\varphi$ (1). Умова мінімумів інтенсивності дифракції світла від щілини $a \cdot sin\varphi = k\lambda$, звідки при $k = 1$: $sin\varphi = \frac{\lambda}{a}$ (2).

Підставляючи (2) в (1), отримаємо: $A = \frac{2l\lambda}{a} = 0{,}05\,\text{м}$.

Приклад 3. Яку кількість штрихів N_0 на одиницю довжини має дифракційна решітка, якщо зелена лінія ртуті ($\lambda = 546\,\text{нм}$) в спектрі першого порядку спостерігається під кутом $\varphi = 19^\circ 8'$.

Розв'язання:

Відповідно до умови максимума дифракційної решітки $d \cdot sin\varphi = k\lambda$.

Оскільки число штрихів N_0, що приходяться на одиницю довжини решітки, пов'язане з періодом решітки d співвідношенням $N_0 = \frac{1}{d}$, то $\frac{sin\varphi}{N_0} = k\lambda$.

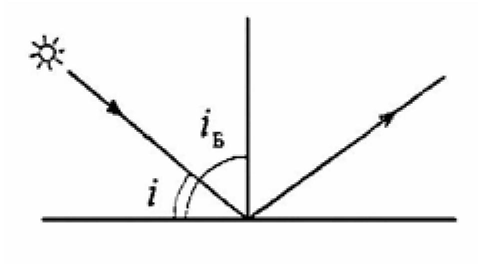
Звідки $N_0 = \frac{sin\varphi}{k\lambda} = 600$ штрихів.

Поляризація світла

Приклад 1. Під яким кутом i до горизонту повинне знаходитися Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні озера, були найбільш повно поляризовані?

Розв'язання:

Нехай $i_Б$ – кут падіння сонячних променів, i – кут між напрямком на Сонце та горизонтом.



За законом Брюстера для умови найбільш повної поляризації відбитого світла: $tgi_Б = n$, де n – показник заломлення води.

Тоді $i_Б = arctg(n) = 53^\circ$. Звідки $i = 90^\circ - i_Б = 37^\circ$.

Приклад 2. Природне світло проходить через поляризатор та аналізатор так, що кут між їх головними осями дорівнює φ. Як поляризатор, так і аналізатор поглинають та відбивають 8% світла, що падає на них. В результаті, інтенсивність променя, що вийшов із аналізатора, дорівнює 9% інтенсивності природного світла, що падає на поляризатор. Знайдіть кут φ.

Розв'язання:

Відповідно до закону Малюса, інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор та аналізатор: $I = I_0'' cos^2 \varphi$ (1), де I_0'' – інтенсивність природного світла з урахуванням поглинання і відбиття поляризатора та аналізатора.

Інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор дорівнює $I_0' = (1 - 0{,}08)I_0 = 0{,}92 I_0$ (2).

Інтенсивність світла, що пройшло через аналізатор дорівнює $I_0'' = (1 - 0{,}08)I_0' = 0{,}92 I_0' = 0{,}8464 I_0$ (3).

За умовою інтенсивність світла, що вийшло із аналізатора: $I = 0{,}09 I_0$ (4).

Із формули (1) маємо $cos\varphi = \sqrt{\frac{I}{I_0''}}$, звідки кут між головними осями поляризатора та аналізатора $\varphi = arccos\left(\sqrt{\frac{I}{I_0''}}\right)$ (5).

Підставляючи (3) та (4) в (5), отримаємо $\varphi = 70^\circ 54'$.

РОЗДІЛ 5
КВАНТОВІ ВЛАСТИВОСТІ ВИПРОМІНЮВАННЯ

5.1. Основні визначення, закони та рівняння

Світло випромінюється за рахунок переходів атомів, молекул та інших атомних систем із стану з більшою в стан з меншою енергією. Перехід у збуджений стан (у стан з більшою енергією) таких систем може здійснюватись у результаті теплового руху молекул і атомів.

Електромагнітне випромінювання, яке виникає за рахунок внутрішньої енергії випромінюючого тіла, яка залежить від температури цього тіла, називається *тепловим випромінюванням*.

Тепловим (температурним) випромінюванням називають *світіння* тіл, обумовлене нагрівом. Теплове випромінювання властиве всім тілам, температура яких вище 0°К.

Кількісною спектральною характеристикою теплового випромінювання є *спектральна густина енергетичної світності* тіла $r_{\lambda,T}$:

$$r_{\lambda,T} = \frac{dE_{випр}}{d\lambda}, \; [r_{\lambda,T}] = \frac{Дж}{м^2 с},$$

де $dE_{випр}$ – це енергія, яка випромінюється з одиниці площі тіла за одиницю часу за всіма напрямками в інтервалі довжин хвиль від λ до $\lambda + d\lambda$.

Таким чином, спектральна густина енергетичної світності дорівнює потужності випромінювання одиниці площі поверхні тіла в одиничному інтервалі довжин хвиль. $r_{\lambda,T}$ є функцією довжини хвилі (частоти) і температури.

Якщо підсумувати спектральну густину енергетичної світності за всіма довжинами хвиль, то можна обчислити *інтегральну енергетичну світність*:

$$R_e = \int_0^\infty r_{\lambda,T}\, d\lambda .$$

Енергетична світність R_e залежить від температури тіла.

Формули для спектральної густини енергетичної світності $r_{\lambda,T}$ та для енергетичної світності R_e можна написати і у вигляді функції частоти хвилі:

$$r_{\lambda,\nu} = \frac{dE_{випр}}{d\nu};\ R_e = \int_0^\infty r_{\nu,T} d\nu .$$

Зв’язок між $r_{\lambda,T}$ та $r_{\nu,T}$ має вигляд:

$$dE_{випр} = r_{\nu,T} d\nu = r_{\lambda,T} d\lambda .$$

Враховуючи, що $\lambda\nu = c$, де c – швидкість світла:

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c},$$

де знак «-» показує, що при зростанні однієї величини інша зменшується:

$$r_{\nu,T} = \frac{\lambda^2}{c} r_{\lambda,T} .$$

Д. Стефан на підставі аналізу експериментальних даних дійшов до висновку, що енергетична світність R_e тіла пропорційна T^4.

Л. Больцман, застосувавши термодинамічний метод до випромінювання абсолютно чорного тіла, довів теоретично (*закон Стефана-Больцмана*):

$$R_e = \sigma T^4,$$

де σ – стала Стефана-Больцмана, σ=5,672 10^{-8} $\dfrac{Дж}{м^2 с К^4}$.

Закон зміщення Віна: довжина хвилі, яка припадає на максимуми залежності $r_{\lambda,T}$ від λ обернено пропорційна температурі тіла T

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T},$$

де b – стала Віна, b=2,9·10^{-3} м·К.

Випромінювання і поглинання світла речовиною відбувається не неперервними, а скінченими порціями, які називаються квантами світла або квантами енергії:

$$E=h\nu=\hbar\omega,$$

де h – стала Планка; $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$; h=6,62 10^{-34} *Дж·с.*

Емісія електронів з поверхні твердих тіл та рідини під дією електромагнітного випромінювання називається *зовнішнім фотоефектом.*

Основні закони фотоефекту:

– кількість фотоелектронів, що випускаються з поверхні катода за одиницю часу, прямо пропорційна інтенсивності світла при його незмінному спектральному складі;

– максимальна початкова швидкість фотоелектронів визначається частотою світла і не залежить від його інтенсивності;

– для кожної речовини є червона границя фотоефекту, тобто існує мінімальна частота $\nu_ч$, або максимальна довжина хвилі $\lambda_ч$, при яких ще можливий зовнішній фотоефект.

Рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекту:

$$h\nu = \frac{mv^2{}_{max}}{2} + A_{вих}.$$

Фотоефект можливий, якщо енергія фотона $h\nu$ не менша роботи виходу електрона $A_{вих}$. Тобто існує гранична мінімальна частота $\nu_ч$, при якій ще можливий фотоефект. Ця частота має назву червоної границі фотоефект:

$$\nu_ч = \frac{A_{вих}}{h};$$

$$\lambda_ч = \frac{hc}{A_{вих}}.$$

Закон взаємозв’язку маси та енергії Ейнштейна:

$$E = mc^2,$$

де m – маса фотона, c – швидкість світла у вакуумі.

Маса спокою фотона $m_0 = 0$, тому $E = c \cdot p$, або:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h \cdot \nu}{c} = m \cdot c.$$

Враховуючи, що $E = h\cdot\nu = h\cdot\frac{c}{\lambda}$, можна також записати, що $p = \frac{h}{\lambda}$. Тому довжина хвилі фотона:

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

5.2. Приклади розв'язання задач

Теплове випромінювання

Приклад 1. Знайдіть температуру T печі, якщо відомо, що випромінювання із отвору в ній площею $S = 6{,}1\,\text{см}^2$ має потужність $N = 34{,}6\,Вт$. Випромінювання вважати близьким до випромінювання абсолютно чорного тіла.

Розв'язання:

Потужність випромінювання із отвору печі визначається співвідношенням $N = R_e S$ (1).

Оскільки за умовою випромінювання близьке до випромінювання абсолютно чорного тіла, то за законом Стефана-Больцмана: $R_e = \sigma T^4$ (2), де σ – стала Стефана-Больцмана, σ=5,672 10^{-8} $\frac{Дж}{м^2 с К^4}$.

Підставляючи (2) в (1), отримаємо $N = \sigma T^4 S$, звідки температура печі дорівнює $T = \sqrt[4]{\frac{N}{\sigma S}} = 1000\ K$.

Приклад 2. Діаметр вольфрамової спіралі в електричній лампочці $d = 0{,}3\,\text{мм}$, довжина спіралі $l = 5\,\text{см}$. При включенні лампочки в мережу з напругою $U = 127\,B$ через лампочку тече струм $I = 0{,}31\,A$. Знайдіть температуру спіралі. Вважати, що при встановленні рівноваги вся теплота, яка виділяється в спіралі, втрачається в результаті випромінювання. Відношення енергетичних світностей вольфрама та абсолютно чорного тіла для даної температури $k = 0{,}31$.

Розв'язання:

Оскільки вольфрамова спіраль випромінює як сіре тіло, то її потужність випромінювання $N' = R'_e S$ (1), де за законом Стефана-Больцмана $R'_e = k\sigma T^4$ – енергетична світність сірого тіла; $S = 2\pi l d$ (3) – площа поверхні вольфрамової спіралі.

Підставляючи (2) та (3) в (1), отримаємо: $N' = k\sigma T^4 2\pi l d$ (4).

З іншого боку, потужність струму $N' = UI$ (5). Прирівняємо (4) та (5) та отримаємо $UI = k\sigma T^4 2\pi l d$. Звідки температура спіралі $T = \sqrt[4]{\dfrac{UI}{2\pi k\sigma l d}} = 2208K$.

Приклад 3. Температура T абсолютно чорного тіла змінилась при нагріванні від 1000 до 3000 К. У скільки разів збільшилась при цьому його енергетична світність. На скільки змінилась довжина хвилі λ, на яку приходиться максимум спектральної густини енергетичної світності. У скільки разів збільшилася його максимальна спектральна густина енергетичної світності?

Розв'язання:

За законом Стефана-Больцмана для абсолютно чорного тіла $R_e = \sigma T^4$, звідки $\dfrac{R_{e1}}{R_{e2}} = \dfrac{\sigma T_1^4}{\sigma T_2^4} = \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right)^4 = \left(\dfrac{1000}{3000}\right)^4 = \dfrac{1}{81}$, або $\dfrac{R_{e2}}{R_{e1}} = 81$.

Із першого закона Віна: $\lambda_{max} = \dfrac{b}{T}$, де b – стала Віна, $b=2{,}9\cdot10^{-3}$м·К. Тоді

$\lambda_{\max 1} = \dfrac{b}{T_1} = 2{,}9$ мкм; $\lambda_{\max 2} = \dfrac{b}{T_2} = 0{,}97$ *мкм*, а $\lambda_{\max 1} - \lambda_{\max 2} = 1{,}93$ мкм.

Відповідно до другого закону Віна: $r_{\lambda,T} = b_1 T^5$, де b_1 – стала величина, $b_1 = 1{,}29 \cdot 10^{-5} \frac{Дж}{м^2 K^5 с}$ (1). Тоді із формули (1): $r_{\lambda,T_1} = b_1 T_1^5$ (2), $r_{\lambda,T_2} = b_1 T_2^5$ (3).

Розділимо (2) на (3) та отримаємо: $\frac{r_{\lambda,T_1}}{r_{\lambda,T_2}} = \frac{b_1 T_1^5}{b_1 T_2^5} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^5 = 243$.

Основи квантової оптики

Приклад 1. Знайти масу фотона а) червоних променей світла ($\lambda = 700\,нм$); рентгенівських променей ($\lambda = 25\,пм$); гама променей ($\lambda = 1{,}24\,пм$).

Розв'язання:

Енергія фотона (1), де $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с$ – стала Планка

$\nu = \frac{c}{\lambda}$ – частота коливання, де $c = 3 \cdot 10^8\,{м}/{с}$.

Таким чином, рівняння (1) можна записати у вигляді: $E = h\frac{c}{\lambda}$ (2).

З іншого боку відповідно до рівняння Ейнштейна $E = mc^2$ (3). Прирівнюючи (2) до (3) отримаємо: $h\frac{c}{\lambda} = mc^2$, звідки $m = \frac{h}{\lambda c}$.

Підставляючи числові дані, отримаємо: а) $m = 3{,}2 \cdot 10^{-36}\,кг$; б) $m = 8{,}8 \cdot 10^{-32}\,кг$; в) $m = 1{,}8 \cdot 10^{-30}\,кг$.

Приклад 2. З якою швидкістю v повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона з довжиною хвилі $\lambda = 520\,нм$.

Розв'язання:

Імпульс електрона $p_e = m_e v$ (1).

Імпульс фотона $p_ф = \frac{h}{\lambda}$ (2).

Прирівнюючи праві частини рівняннь (1) та (2), отримаємо $m_e v = \frac{h}{\lambda}$, звідки $v = \frac{h}{\lambda m_e}$. Підставляючи числові дані, отримаємо $v = 1{,}4 \cdot 10^3\ м/с$.

Приклад 3. При якій температурі T кінетична енергія молекули двохатомного газу буде дорівнювати енергії фотона з довжиною хвилі $\lambda = 589$ нм ?

Розв'язання:

Кінетична енергія молекули двохатомного газу $W = \frac{i}{2} kT$, де $i = 5$ число ступенів вільності молекули.

Кінетична енергія фотона $E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$.

За умовою $W = E$, тоді $\frac{5}{2} kT = h\frac{c}{\lambda}$, звідки $T = \frac{2hc}{5k\lambda} = 9800\ K$.

Приклад 4. Знайдіть частоту світла, яке вириває із метала електрони, що повністю затримуються різницею потенціалів $U = 3B$. Червона границя фотоефекту для даного металу $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайдіть роботу виходу електронів із металу.

Розв'язання:

Робота виходу електрона $A_{вих} = h\nu_0 = 39{,}72 \cdot 10^{20}\ Дж$. Відповідно до рівняння Ейнштейна для зовнішнього фотоефекта $h\nu = \frac{mv^2{}_{max}}{2} + A_{вих}$.

Якщо електрони повністю затримуються різницею потенціалів U, то за законом збереження енергії $qU = \frac{mv^2{}_{max}}{2}$, де q – заряд електрона. Тоді $h\nu = qU + A_{вих}$, звідки $\nu = \frac{qU + A_{вих}}{h} = 13{,}2 \cdot 10^{14}$ Гц.

РОЗДІЛ 6

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

6.1 Основні визначення, закони та рівняння

У 1923 р. французький вчений Луї де Бройль висунув гіпотезу про універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму. Він стверджував, що не тільки фотони, але й електрони і будь-які інші частинки матерії поряд з корпускулярними володіють також і хвильовими властивостями.

Згідно з де Бройлем, з кожним мікрооб'єктом зв'язані з однієї сторони корпускулярні характеристики енергія E та імпульс p, а з іншої хвильові частота ν і довжина хвилі λ.

За аналогією з фотонами: $E = h\nu$, $p = \dfrac{h}{\lambda}$.

Будь-якій частинці, що має імпульс, відповідає хвильовий процес з довжиною хвилі, яка визначається за формулою де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p} \text{ (для } v << c\text{)},$$

$$\lambda = \frac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2m_0 W_k + \dfrac{W_k^2}{c^2}}} \text{ (для } v \text{ сумірних з } c\text{)}.$$

Уявлення про подвійну корпускулярно-хвильову природу частинок речовини поглиблюється ще й тим, що на частинку переноситься зв'язок її повної енергії E з частотою хвиль де Бройля ν:

$$E = h\nu .$$

Це універсальне співвідношення справедливе як для фотонів, так і для інших мікрочастинок.

Фазова швидкість:

$$u_{\phi} = \frac{W}{k} = \frac{\hbar W}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v},$$

де $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

Групова швидкість:

$$u = \frac{dW}{dk} = \frac{d(\hbar W)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

В. Гейзенберг у 1927 р. прийшов до висновку, що об’єкт мікросвіту не може з наперед заданою точністю одночасно характеризуватися імпульсом (проекції p_x, p_y, p_z) і координатами (x, y, z).

Невизначеність цих величин відповідає умовам:

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p \geq h \\ \Delta y \Delta p \geq h \\ \Delta z \Delta p \geq h \end{cases}$$

Якщо $\Delta x = 0$ то $\Delta p \to \infty$ і навпаки.

Таким чином, для мікрочастинок немає станів для яких координати і імпульс були б точно визначені.

Оскільки у класичній механіці приймається, що вимірювання координат і імпульсу може бути зроблене з будь-якою точністю, то співвідношення невизначеності являється, таким чином, квантовим обмеженням застосування класичної механіки до мікрооб’єктів.

У квантовій механіці стан мікрочастинок описується за допомогою хвильової функції, що являється основним носієм інформації про їх корпускулярні та хвильові властивості.

Основне рівняння нерелятивістської квантової механіки сформулював у 1926 р. Е. Шредінгер. Рівняння Шредінгера не виводиться, а постулюється. Правильність рівняння підтверджується узгодженням з дослідами і отриманими результатами, що додає йому характер закону природи.

Рівняння Шредінгера має вигляд:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z, t)\Psi = i\hbar\frac{d\Psi}{dt},$$

де $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; m – маса частинки; Δ – оператор Лапласа ($\Delta\Psi = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$); $U(x, y, z, t)$ – потенційна функція частинки в силовому полі, де вона рухається; Ψ – хвильова функція.

Постулати Бора:

Перший постулат (постулат стаціонарного стану): в атомі існують стаціонарні стани, у яких він не випромінює енергії. Стаціонарним станам атома відповідають стаціонарні орбіти, по яким рухаються електрони. Рух електронів на стаціонарних орбітах не супроводжується випромінюванням електромагнітних хвиль.

У стаціонарному стані атому електрон, рухаючись по круговій орбіті, повинен мати дискретні квантові значення моменту імпульсу, які задовольняють умову:

$$m_e v r_n = n\hbar,\ (n=1, 2, 3\ldots),$$

де m_e – маса електрону, v – його швидкість на n-ій орбіті радіуса r_n.

Другий постулат (правило частот). При переході електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу випромінюється (поглинається) один фотон з енергією $h\nu = E_n - E_m$, де E_n, E_m – енергія стаціонарного стану атому до і після випромінювання (поглинання). При $E_n < E_m$ – випромінювання, при $E_m > E_n$ – поглинання (перехід на більш віддалену орбіту).

Радіус n-ї стаціонарної орбіти:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{m_e Z e^2},\ n=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Повна енергія електрона на n-й стаціонарній орбіті:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \varepsilon_0{}^2},\ n=1,\ 2,\ 3\ldots$$

Маси нейтрона m_n і протона m_p у вуглецевій шкалі атомних мас (а.о.м.) відповідно дорівнюють: m_n=1.008665012 а.о.м., m_p=1.007276470 а.о.м. Протон і нейтрон належать до класу ферміонів – частинок, які мають півцілий спін. Кількість протонів у ядрі визначає заряд ядра $+Ze$. Значення Z збігається з атомним номером відповідного хімічного елемента в періодичній системі Менделєєва. Загальну кількість нуклонів у ядрі називають масовим числом A ядра:

$$A=N+Z,$$

де N – кількість нейтронів, Z – кількість протонів.

Атомні ядра позначають символами. Якщо X відповідає символу атомного хімічного елемента в періодичній системі Менделєєва, то символ цього ядра має вигляд ${}^A_Z X$. Ядра, які мають той самий Z при різних A, називають ізотопами. Ізотопи ядер хімічного елемента мають однакове число протонів, але різне число нейтронів у складі ядра.

Більшість ядер – це стійкі утворення, хоч між протонами, що входять до складу ядра, діють сили кулонівського відштовхування. Стійкість атомних ядер означає, що між нуклонами в ядрах існує певна взаємодія. Про міцність того чи іншого утворення роблять висновки з того, наскільки легко чи важко зруйнувати його: чим важче його зруйнувати, тим воно міцніше. Зруйнувати ядро – це значить розірвати зв'язки між його нуклонами, або, інакше кажучи, виконати роботу проти сил зв'язку між ними. Такий підхід, що ґрунтується на законі збереження енергії, дає можливість зробити ряд важливих висновків про специфіку тих зв'язків, які утримують нуклони в ядрі.

Введемо поняття енергії зв'язку окремого нуклона в ядрі, тобто питомої енергії зв'язку $W_{пит}$. Це фізична величина, що дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб видалити нуклон з ядра. Повна енергія зв'язку ядра вважається роботою, яку необхідно виконати щоб розщепити ядро на нуклони, які його утворюють. Із закону збереження енергії випливає, що при утворенні ядра виділяється енергія, необхідна для розщеплення ядра на нуклони, з яких воно складається. Повну енергію зв'язку ядра характеризує величина Δm, яку називають дефектом маси. Під дефектом маси розуміють різницю між сумою мас протонів і нейтронів, які перебувають у вільному стані, і масою утвореного з них ядра. Якщо ядро з масою $M_я$, утворене із Z протонів з масою m_p кожний, і з $(A\text{-}Z)$ нейтронів з масою m_n кожний, то:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_я .$$

Наявність дефекту маси показує, що для повного розщеплення ядра на нуклони (протони і нейтрони), які його утворюють, необхідно витратити енергію:

$$W_{зв} = \Delta mc^2 .$$

Величину $W_{зв}$ називають енергією зв'язку (повною енергією зв'язку). Вона є безпосередньою мірою стійкості ядра.

У ядерній фізиці для обчислення енергій застосовують атомну одиницю енергії (а.о.е.) – величину, яка відповідає енергії однієї атомної одиниці маси: 1а.о.е.=$c^2 \cdot$1а.о.м.=$9 \cdot 10^{16} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг=$1,5 \cdot 10^{-10}$ Дж=931,1 МеВ.

Як було вже показано, питома енергія зв'язку – це енергія, що припадає на один нуклон:

$$W_{пит} = \frac{\Delta W_{зв}}{A} .$$

Взаємодія між нуклонами в ядрі є прикладом сильних взаємодій – взаємодій через ядерні сили.

Ядерні сили мають ряд характерних властивостей:

1) вони є силами притягання;

2) це короткодіючі сили, їх дія проявляється на відстані порядку 10^{-15} м. Відстань, на якій діють ядерні сили, називають радіусом дії ядерних сил;

3) ядерні сили мають властивість зарядової незалежності: ядерні сили, які діють між протоном і нейтроном, між двома протонами або між двома нейтронами, однакові;

4) ядерні сили не є центральними, як, наприклад, сили гравітаційні і кулонівські;

5) ядерні сили мають властивість насичення.

Кількість атомів радіоактивної речовини, що розпадається за час dt, пропорційна кількості наявних атомів і визначається співвідношенням:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N,$$

де λ – стала радіоактивного розпаду.

Після інтегрування:

$$N = N_1 e^{-\lambda t},$$

де N_1 – кількість атомів при $t = 0$; N – їх число в момент часу t.

Період напіврозпаду:

$$T = \frac{ln2}{\lambda}.$$

6.2. Приклади розв'язання задач

Елементи квантової механіки

Приклад 1. Знайдіть довжину хвилі де Бройля λ для атома водню, який рухається за температури $T = 293K$ з найбільш імовірною шидкістю.

Розв'язання:

Найбільш імовірна швидкість руху атома водню: $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ (1), де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $Дж/К$ – стала Больцмана.

Довжина хвилі де Бройля: $\lambda = \frac{h}{p}$, де $p = mv$. Таким чином, отримуємо: $\lambda = \frac{h}{mv}$ (2).

Підставляючи (1) в (2), отримаємо: $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2kTm}} = 180$ пм.

Приклад 2. Знайдіть довжину хвилі де Бройля λ для електронів, що пройшли різницю потенціалів $U = 1\,B$ та $U = 100\,B$.

Розв'язання:

Пучок елементарних частинок має властивості пласької хвилі, яка поширюється в напрямку руху цих частинок. Довжина хвилі λ, що відповідає даному пучку, визначається співвідношенням де Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{mv}$ (1), де m – маса частинки; v – її швидкість.

Швидкість частинки можна знайти із виразу для її кінетичної енергії $W_k = \dfrac{mv^2}{2}$, звідки $v = \sqrt{\dfrac{2W_k}{m}}$. Підставляючи у вираз (1), отримаємо: $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2mW_k}}$ (2).

Якщо швидкість частинки сумірна зі швидкістю світла, то формула (2) приймає вигляд: $\lambda = \dfrac{h}{m_0 v}\sqrt{1-\beta^2} = \dfrac{h}{\sqrt{2m_0 W_k + \dfrac{W_k^2}{c^2}}}$ (3), де $\beta = \dfrac{v}{c}$; m_0 – маса спокою частинки.

При проходженні електроном різниці потенціалів, він отримує кінетичну енергію: $W_k = \dfrac{mv^2}{2} = qU$, де q – заряд електрона. Звідси $v = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$ (4). При $U = 1\,B$: $v = 6\cdot 10^5\,м/с$; при $U = 100\,B$: $v = 6\cdot 10^6\,м/с$.

У першому випадку для знаходження довжини хвилі де Бройля слід користуватись формулою (2), а в другому – формулою (3).

Після підстановки числових даних отримаємо: $\lambda_1 = 1{,}22\cdot 10^{-9}\,м$; $\lambda_1 = 0{,}122\cdot 10^{-9}\,м$.

Будова водневоподібних систем

Приклад 1. Знайти радіуси r_k трьох перших боровських електронних орбіт в атомі водню та швидкості v_k електрона на них.

Розв'язання:

На електрон, який рухається в атомі водню по k-й боровській орбіті, діє кулонівська сила $F = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2}$ (1), де q – заряд електрона.

Дана сила є доцентровою та надає електрону нормальне прискорення: $a_n = \dfrac{v_k^2}{r_k}$ (2), де v_k – швидкість електрона на k-й боровській орбіті.

За другим законом Ньютона: $F = ma$ (3). Підставляючи (1) та (2) в (3), отримаємо: $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_k^2} = \dfrac{mv_k^2}{r_k}$. Звідки $r_k = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m v_k^2}$ (4).

Згідно з першим постулатом Бора рух електрона навколо ядра можливий лише по визначеним орбітам, радіуси яких задовольняють умови: $mv_k r_k = k\dfrac{h}{2\pi}$ (5).

Вирішуючи спільно рівняння (4) та (5), знайдемо $v_k = \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0 kh}$; $r_k = \dfrac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m q^2}$. Підставляючи числові дані отримаємо: $r_1 = 0{,}53 \cdot 10^{-10}\,м$; $v_1 = 2{,}19 \cdot 10^6\,м/с$; $r_2 = 2{,}12 \cdot 10^{-10}\,м$; $v_2 = 1{,}1 \cdot 10^6\,м/с$; $r_3 = 4{,}77 \cdot 10^{-10}\,м$; $v_3 = 7{,}3 \cdot 10^5\,м/с$.

Приклад 2. Знайдіть період T обертання електрона на першій боровській орбіті атома водню та його кутову швидкість ω.

Розв'язання:

Радіус k-ї боровської орбіти електрона в атомі водню та швидкість руху електрона по k-й орбіті відповідно дорівнюють $r_k = \frac{\varepsilon_0 k^2 h^2}{\pi m q^2}$ (1); $v_k = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 k h}$ (2).

Період обертання електрона по k-й орбіті дорівнює: $T_k = \frac{2\pi r_k}{v_k}$ (3).

Підставляючи (1) та (2) в (3), отримаємо $T_k = \frac{4\varepsilon_0^2 k^3 h^3}{m q^4}$ (4). Для $k = 1$ знайдемо $T_1 = 1{,}52 \cdot 10^{-16}$.

Кутова швидкість руху електрона по k-тій орбіті $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$ (5).

Підставляючи (4) в (5), отримаємо $\omega_k = \frac{\pi m q^4}{2\varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k = 1$ знайдемо $\omega_1 = 4{,}13 \cdot 10^{16}\ рад/с$.

Приклад 3. Знайти потенціал іонізації U_i атома водню.

Розв'язання:

Потенціал іонізації U_i атома визначається співвідношенням $U_i = A_i$, де A_i – робота по віддаленню електрона з нормальної орбіти на нескінченність.

Для атома водню $A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, де $R = 1{,}097 \cdot 10^7\ м^{-1}$ – стала Рідберга. При $k = 1$ та $n = \infty$ маємо: $A_i = hRc$. Тоді потенціал іонізації $U_i = \frac{A_i}{q} = \frac{hRc}{q} = 13{,}6 B$.

Елементи фізики ядра

Приклад 1. Скільки атомів полонія розпадеться за час $\Delta t = 1$ доба із $N = 10^6$ атомів?

Розв'язання:

За час Δt розпадеться число атомів $|\Delta N| = \lambda N \Delta t$ (1). Дана формула справедлива за умови $\Delta t << T_{1/2}$, де $T_{1/2} = \frac{ln 2}{\lambda}$ – період напіврозпаду.

Період напіврозпаду полонію $T_{1/2} = 138$ діб (табличні дані), відповідно, оскільки $\Delta t << T_{1/2}$, число атомів, що розпадаються, можна визначити за формулою (1). Підставляючи числові дані, отримаємо: $|\Delta N| = \frac{ln 2}{\lambda} N \Delta t = 5025$ атомів.

Приклад 2. Знайдіть сталу розпаду λ радону, якщо відомо, що число атомів зменшується за час $t = 1$ доба на 18,2%.

Розв'язання:

Число атомів радіоактивної речовини dN, що розпадається за час dt, пропорційне числу наявних атомів і визначається співвідношенням: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, звідки розділяючи змінні, отримаємо: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$.

Інтегруючи вираз, отримаємо: $ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$, звідки постійна розпаду

$$\lambda = \frac{ln\left(N / N_0\right)}{t} \quad (1).$$

З умови задачі $N = (1 - x)N_0$ (2), де N – число атомів після проходження часу t; $x = 0{,}182$ – доля атомів, що розпались за час t. Підставляючи (2) в (1), отримуємо $\lambda = \frac{N_0(1-x)}{t} = 2{,}33 \cdot 10^{-6} c^{-1}$.

Приклад 3. Знайдіть число протонів та нейтронів, що входять в склад ядер трьох ізотопів магнія: а) ${}^{24}_{12}Mg$; б) ${}^{25}_{12}Mg$; в) ${}^{26}_{12}Mg$.

Розв'язання:

Ядро позначається тим же символом, що і нейтральний атом: ${}^{A}_{Z}X$, де X – символ хімічного елемента; Z – зарядове число (атомний номер, число протонів в ядрі); A – масове число ядра (число нуклонів в ядрі).

Число нейтронів в ядрі $N = A - Z$.

З урахуванням вищевикладеного знайдемо:

а) ядро ${}^{24}_{12}Mg$ утримує 12 протонів та 12 нейтронів;

б) ядро ${}^{25}_{12}Mg$ утримує 12 протонів та 13 нейтронів;

б) ядро ${}^{26}_{12}Mg$ утримує 12 протонів та 14 нейтронів.

Приклад 4. Знайдіть енергію зв'язку ядра ізотопа літія ${}^{7}_{3}Li$.

Розв'язання:

Енергія зв'язку ядра будь-якого ізотопа визначається співвідношенням: $W_{зв} = \Delta mc^2$, де Δm – дефект маси, який показує різницю між масою частинок, що входять до складу ядра, та масою ядра.

Дефект маси дорівнює: $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_я$ (1), де $m_p = 1{,}00759$ а.о.м – маса протона; $m_n = 1{,}00899$ *а.о.м.* – маса нейтрона; $M_я = 7{,}01823$ *а.о.м.* – маса ядра ізотопа ${}^{7}_{3}Li$ (табличні дані).

Підставляючи числові дані у рівняння (1), отримаємо: $\Delta m = 0{,}0405$ а.о.м.

Масі 1 *а.о.м.* відповідає енергія 931 МеВ, тоді енергія зв'язку ядра ${}^{7}_{3}Li$ дорівнює $\Delta W_{зв} = 0{,}0405 \cdot 931 = 37{,}7055$ МеВ. Таку енергію необхідно витратити, щоб розщепити ядро ${}^{7}_{3}Li$ на нуклони.

Навчальне електронне видання
комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимах

ПОГОЖИХ Микола Іванович
ПАК Андрій Олегович
РУРАК Людмила Володимирівна

ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. ОПТИКА. АТОМНА ФІЗИКА: ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск зав. кафедри фізико-математичних та інженерно-технічних дисциплін проф. М.І. Погожих
Техн. редактор А.О. Гончарова

План 2018 р., поз.82/–

Підп. до друку 17.04.2018 р. Один електронний оптичний диск (CD-ROM); супровідна документація. Об'єм даних 2,41 МБ. Тираж 10 прим.

Видавець та виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, м. Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.