

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТОТЫ В ГЕНЕРАТОРАХ МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА НА ОСНОВЕ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ

Черенков А. Д.¹, Гордийчук И. И.², Косулина Н. Г.¹

¹Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко

²Подольский государственный аграрно-технический университет

Определены элементы структурной схемы переноса спектра от эталонного генератора в миллиметровый диапазон синхронизируемого генератора с учетом нелинейных свойств системы фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ).

Постановка проблемы. Эксплуатационные характеристики генераторов миллиметрового диапазона для облучения биологических объектов зависят от параметров системы преобразования частоты (СПЧ) на основе фазовой автоподстройки частоты синхронизируемого генератора (СГ) по частоте эталонного [1].

В этой связи возникает задача по теоретическому и экспериментальному исследованию стабильности частоты СГ с учетом нелинейных свойств СПЧ. Игнорирование нелинейных свойств системы при анализе СПЧ часто приводит к значительным трудностям при проектировании систем автоматического регулирования частоты [2].

Анализ последних исследований и публикаций.

С учетом нелинейных свойств СПЧ приобретаем смысл поиска метода анализа систем переноса, который дал бы возможность с одной стороны оценить потенциально достижимые показатели СПЧ, а с другой создать основу для дальнейших оптимизаций СПЧ.

В работе [3] показано, что аппарат функционального метода с использованием рядов Вольтерра позволяет преодолеть ограничения, о которых говорилось выше и, в значительной степени удовлетворяет решению задач в такой постановке. Как показал анализ наиболее близкой по постановке и методу решения является задача, рассмотренная в работе [4].

Однако результаты этой работы не могут быть использованы в нашем случае непосредственно, т.к. разработанный в этой работе метод позволяет получить лишь дисперсию флуктуации фазы выходного сигнала системы ФАПЧ первого порядка, в то время как в случае анализа СПЧ требуется оценка более сложной характеристики – спектральной плотности фазовых флуктуаций – $S_\varphi(\Omega)$ выходного сигнала для нелинейной системы ФАПЧ второго порядка.

Цель статьи. Целью статьи является решение следующих основных задач:

- обосновать модель входного воздействия;
- разработать нелинейную модель системы;
- определить ядра Вольтерра рассматриваемой системы;

- получить выражение для спектральной плотности фазовых флуктуаций выходного сигнала.

Основные материалы исследования. Обобщенная структурная схема генератора приведена на рис. 1.

В структурной схеме (рис. 1) блок $1/p$ отображает операцию интегрирования; $F(\varphi)$ – дискриминацион-

ная характеристика фазового детектора; $S_{y\varphi}$ – крутизна регулировочной характеристики СГ; $K_\phi(p)$ – коэффициент передачи ФНЧ; $K_{УПЧ}(p)$, $K_{УПТ}$, $K_{СГ}$ – коэффициенты передачи УПЧ, УПТ и СГ.

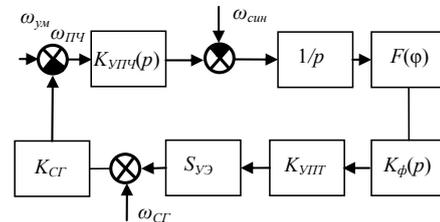


Рисунок 1 – Структурная схема генератора на основе ФАПЧ

Структурная схема (рис. 1) представляет собой неавтономную нелинейную систему ФАПЧ второго порядка и описывается уравнением [5].

$$p\varphi + \Omega_y \cdot K(p) \cdot F(\varphi) = \Omega_n, \quad (1)$$

где p – оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$; φ –

отличие фазы мгновенного значения сигнала синхронизируемого генератора по отношению к значению фазы кварцевого генератора на выходе умножителя; Ω_y – полоса удержания; $K(p)$ – коэффициент передачи разомкнутой системы в операторной форме; Ω_n – начальная круговая расстройка.

Анализ полученной схемы целесообразно провести в предположении воздействия на вход аддитивной смеси белого Гауссова шума и высокостабильного сигнала.

Разделим в выражении начальную настройку Ω_n на Ω'_n – среднее значение настройки и $\dot{\varphi}(t)$ – возмущения, действующие на систему ФАПЧ:

$$p\varphi(t) + \Omega_y K(p) F(\varphi) = \Omega'_n + \dot{\varphi}(t). \quad (2)$$

Следуя методике, предложенной в [3, 4], запишем решение уравнения (2) в виде ряда Вольтерра:

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \quad (3)$$

где
$$\varphi_n(t) = \int \dots \int \alpha \tau_1 \dots \alpha \tau_n h_n(\tau_1 \dots \tau_n) \prod_{k=1}^n x(t - \tau_k);$$

$h_n(\tau_1 \dots \tau_n)$ – ядро Вольтерра n -го порядка; $n = 1, 2$, характеризующие систему.

Считаем, что характеристика ФД – синусоидальна. Тогда подставляя (3) в (2) и раскладывая $\sin \varphi$ в ряд Тейлора, а также собирая члены одной порядка при $x(t)$, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t) + \dots + \\ & + \Omega_y K(p) \left\{ \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \dots \right\} - \frac{1}{3} \left[\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \dots \right]^3 \end{aligned} \right\} = x(t).$$

Ограничиваясь, согласно выводам работы [4], первыми тремя членами и приравнивая члены с равными степенями $x(t)$, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) \dot{\varphi}_1(t) + \Omega_E K(p) \varphi_1(t) &= x(t); \\ \dot{\varphi}_2(t) \dot{\varphi}_1(t) + \Omega_y K(p) \varphi_2(t) &= 0; \\ \dot{\varphi}_3(t) + \Omega_y K(p) \varphi_3(t) &= \frac{\Omega_y K(p)}{3!} \varphi_1^3(t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Применив многомерные преобразования Лапласа [4] к обеим частям уравнений и решив уравнения относительно $K(p) \leftrightarrow \varphi(t)$, получим выражение для ядер Вольтерра в операторной форме:

$$\begin{aligned} H_1(p_1) &= \frac{1}{p + \Omega_y K(p)}; \\ H_2(p_1, p_2) &= 0; \\ H_3(p_1, p_2, p_3) &= \\ &= \frac{1}{3!} \frac{\Omega_y + K(p_1 + p_2 + p_3)}{p_1 + p_2 + p_3 + \Omega_y K(p_1 + p_2 + p_3)} \cdot \prod_{i=1}^3 \frac{1}{p_i + \Omega_y K(p_i)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Ядра не зависят от характера входного воздействия, они отражают свойства системы. Для удобства анализа, структурную схему (рис. 2) представим в виде, показанном на рис. 2.

Здесь $\dot{x}(t) = \dot{\theta}_1(t) + N(t)K(p)\Omega_y$ – представляет собой аддитивную смесь сигнала и шумов схемы, приведенных к ее входу, и под сигналом $\dot{\theta}_1(t)$ понимаются относительные флуктуации частоты подстраиваемого генератора. В свою очередь, фильтр, формирующий входной сигнал, можно представить согласно [4] в виде, показанном на рис. 3.

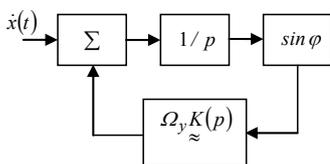


Рисунок 2 – Преобразованная обобщенная схема ФАПЧ

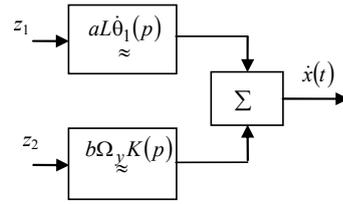


Рисунок 3 – Формирующий фильтр обобщенной схемы ФАПЧ

В данной схеме (рис. 3) a^2 – среднее квадратическое отклонение частоты кварцевого генератора (рассмотрим для удобства вывода выражения спектральной плотности фазовых флуктуации общий случай воздействия на вход схемы ФАПЧ сигнала со случайно меняющейся частотой); $L\dot{\theta}_1(p)$ – фильтр, формирующий сообщение; b – отношение помеха/сигнал в полосе системы:

$$\dot{\theta}_1(t) = aL\dot{\theta}_1(p)Z_1; \quad \Omega_y K(p)N(t) = b\Omega_y K(p)Z_2.$$

Здесь Z_1 и Z_2 – выборочные функции независимых белых процессов. Учитывая, что мы рассматриваем систему в предположении воздействия на ее вход аддитивной смеси сигнала и белого гауссова шума, $L\dot{\theta}_1(p) = 1$.

Если известны ядра системы с двумя входами, состоящей из последовательного соединения формирующего фильтра и набора цепей, описываемых ядрами системы, можно получить следующее выражение для спектра фазовых флуктуации синхронизируемого генератора:

$$S_1(p) = aH_1(p)S_{Z_1}(p) + b\Omega_y K(p)H(p)S_{Z_2}(p) = aH_1(p) + b\Omega_y K(p)H_1(p). \quad (6)$$

Очевидно, что введение коэффициентов "a" и "b" позволяют принять $S_{Z_1}(p) = S_{Z_2}(p) = 1$.

В СПЧ применен в качестве ФНЧ пропорционально интегрирующий фильтр, что позволяет расширить полосу удержания системы, ограничиваемую условием устойчивости [5]. Передаточная характеристика имеет вид:

$$K(p) = \frac{mTP + 1}{TP + 1}, \quad (7)$$

где $T = (R_1 + R_2)C$ – постоянная времени фильтра;

$$m = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Окончательно линейный член выражения спектральной плотности фазовых флуктуации выходного сигнала синхронизируемого генератора будет равен:

$$S_{1\varphi}(\Omega) = b^2 \Omega_y \times$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{m_2 \Omega^2 + \frac{1}{T^2}}{\Omega^4 + \frac{1}{T^2} [1 + 2T\Omega_y(m-1) + m^2 T^2 \Omega_y^2] + \Omega^2 + \frac{\Omega_y^2}{T^2}} \times \\ & \times \frac{(aT + b\Omega_y m T)^2 \Omega^2 + (a + b\Omega_y)^2}{b^2 (\Omega_y m T)^2 \Omega^2 + b^2 \Omega_y^2} = S_{1\varphi}'(\Omega) \cdot \varphi_1''(\Omega). \end{aligned} \quad (8)$$

Кубический член спектральной плотности фазовых флуктуаций согласно [4] равен:

$$\begin{aligned} S_{3\varphi}(p_1, p_2, p_3) &= H_3(p_1, p_2, p_3) \times \\ & \times [a^3 + 3a^2 b K(p_3) \Omega_y + 3ab^2 K(p_2) K(p_3) \Omega_y^2 + \\ & + b\Omega_y^3 K(p_1) K(p_2) K(p_3)]. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (5) и (7) в (9) и осуществляя ассоциирование переменных p_1, p_2, p_3 , т.е. переход к одной переменной, используя таблицы ассоциированных переменных, получим выражение для кубического приближения спектральной плотности фазовых флуктуации частоты подстраиваемого генератора:

$$\begin{aligned} S_{3\varphi}(\Omega) &= \frac{S_{1\varphi}'(\Omega)}{36b^2} \times \\ & \times \frac{A_4^2 \Omega^6 + (A_2^2 - 2A_4 A_3) \Omega^4 + (A_3^2 - 2A_4 A_2) \Omega^2 + A_4}{\Omega^8 + (B_1^2 - 2B_2) \Omega^6 + 2B_4 + (2B_2^2 - 2B_1 B_2) \Omega^4 + (B_3^2 - 2B_2 B_4) \Omega^2 + B_4^2} \end{aligned} \quad (10)$$

где $A_1 = (A + C)^3$;

$$\begin{aligned} A_2 &= A^3 [3(B + D) + 3D] + 3A^2 C [(2D + B) + 3(B + D)] + \\ & + 3AC^2 [(2B + D) + 3(B + D)] + C^3 [3(B + D) + 3B]; \\ A_3 &= A^3 [9D(B + D) + 3(2D + B)(2B + D)] + \\ & + 3AC^2 [9BD + 3(CBd + d)(2B + d)] + \\ & + 3A^2 C [9BD + 3(B + D)(2D + B)] + \\ & + C^3 [9(B + D) + (2D + B)(2B + D)]; \\ A_4 &= A^3 [(2D + B)(2B + D)3D + C^3 (2D + B)(2B + D)3B] + \\ & + 3AC^2 [(2B + D)9BD + 3A^2 C 9BD(2D + B)]; \end{aligned}$$

$$B_1 = 6 \left(\frac{1}{T} + m\Omega_y \right);$$

$$B_2 = 11 \left(\frac{1}{T} + m\Omega_y \right)^2 + \frac{\Omega_y}{T};$$

$$B_3 = 3 \left(\frac{\Omega_y}{T} \right) + 18 \left(\frac{\Omega_y}{T} \right) \left(\frac{1}{T} + m\Omega_y \right);$$

$$B_4 = 3 \left(\frac{\Omega_y}{T} \right)^2 + 18 \frac{\Omega_y}{T} \left(\frac{1}{T} + m\Omega_y \right)^2.$$

A, B, C, D находятся из следующей системы уравнений:

$$A + C = a + \Omega_y b m; \quad B + D = \frac{1}{T} + m\Omega_y;$$

$$AC + BC = \frac{a + b\Omega_y}{T}; \quad BD = \frac{\Omega_y}{T}.$$

Окончательно выражение для спектральной плотности фазовых флуктуаций:

$$\begin{aligned} S_\varphi(\Omega) &= [S_{1\varphi}(\Omega) + S_{3\varphi}(\Omega)] [S_{1\varphi}^*(\Omega) + S_{3\varphi}^*(\Omega)] = \\ & = S_{1\varphi}(\Omega) + S_{3\varphi}(\Omega) + S_{13\varphi}(\Omega). \end{aligned} \quad (11)$$

Знак * обозначает комплексно-сопряженную величину. Для удобства запишем выражение (10) в виде:

$$S_\varphi(\Omega) = S_{1\varphi}'(\Omega) [S_{1\varphi}''(\Omega) + S_{3\varphi}'(\Omega) + S_{13\varphi}(\Omega)],$$

где $S_{1\varphi}'(\Omega)$ определено в выражении (8).

$$S_{3\varphi}'(\Omega) = \frac{S_{3\varphi}(\Omega)}{S_{1\varphi}'(\Omega)};$$

$$S_{13\varphi}'(\Omega) = \frac{S_{13\varphi}(\Omega)}{S_{1\varphi}'(\Omega)};$$

$$S_{1\varphi}''(\Omega) = \frac{S_{1\varphi}(\Omega)}{S_{1\varphi}'(\Omega)}.$$

Используя (10) и (11), а также учитывая, что частота кварцевого генератора обладает высокой стабильностью, а значит $a = 0$, получим:

$$\begin{aligned} S_\varphi(\Omega) &= \frac{m^2 \Omega^2 \frac{1}{T^2}}{\Omega^4 + \frac{1}{T^2} [1 + 2T\Omega_y(m-1) + m^2 T^2 \Omega_y^2] \Omega^2 + \frac{\Omega_y^2}{T^2}} \times \\ & \times \left\{ 1 + \frac{1}{6} b^2 \Omega_y^2 \frac{K_1 \Omega^6 + K_2 \Omega^4 + K_3 \Omega^2 + K_4}{\Omega^8 + L_1 \Omega^6 + L_2 \Omega^4 + L_3 \Omega^2 + L_4} \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $L_1 = B^2 - 2B_2$; $L_2 = B_2^2 - 2B_1 B_2 - 2B_4$;

$$L_3 = B_3^2 - 2B_4 B_2; \quad L_4 = B_4^2;$$

$$K_1 = - \left[2A_2 + A_1 \left(2B_1 - A_1 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right) \right];$$

$$K_2 = 2A_4 - 2A_2 \left(2B_2 + A_2 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right) +$$

$$+ A_3 \left(2B_1 + A_2 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right) - A_1 \left(2B_3 + b^2 \Omega_y^2 \frac{A_3}{6} \right);$$

$$K_3 = - \left[A_4 \left(2B_2 + A_2 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right) + A_2 \left(2B_4 + \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} A_4 \right) - \right.$$

$$\left. - A_3 \left(2B_3 + A_3 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right) \right];$$

$$K_4 = A_4 \left[2B_4 + A_4 \frac{b^2 \Omega_y^2}{6} \right].$$

Коэффициенты $A_1 - A_4$ и $B_1 - B_4$ находятся по формулам (10) с тем, что A, B, C, b находятся из следующих уравнений: $A + C = m$; $BC + DA = \frac{1}{T}$;

$$B + D = \frac{1}{T} + m\Omega_y; \quad BD = \frac{\Omega_y}{T}.$$

Особый интерес при исследовании СПЧ представляет теоретическое определение возможных зна-

чений кратковременной нестабильности частоты СГ и сравнение их с полученными экспериментально. Результаты проведенного выше анализа позволяют рассчитать характеристику частоты СГ.

Перепишем уравнение (1) относительно частоты $\omega_{СГ}$:

$$P\varphi N + \Omega_y NK(p)F(\varphi) = \Omega_H = \omega_{кГ} N - \omega_{СГ}. \quad (13)$$

После вычислений, аналогичных случаю обобщенной схемы ФАПЧ, получим ядра Вольтерра для реальной системы $H_1 = \frac{1}{p + \Omega_y K(p)}$;

$$H_3 = \frac{1}{3!} (N)^2 \Omega_y \frac{K(p_1 + p_2 + p_3)}{p_1 + p_2 + p_3 + \Omega_y K(p_1 + p_2 + p_3)} \cdot \prod_{i=1}^3 \frac{1}{p_i + \Omega_y K(p_i)}. \quad (14)$$

Выражение для спектральной плотности фазовых функций выходного сигнала синхронизируемого генератора, учитывая $\Omega'_y = \Omega_y / N$, выглядит следующим образом:

$$S_\varphi(\Omega) = b^2(\Omega'_y) \times \frac{m^2 \Omega^2 + \frac{1}{T^2}}{\Omega^4 + \frac{1}{T^2} \left[1 + 2T\Omega'_y(m-1) + m^2 T^2 (\Omega'_y)^2 + \left(\frac{\Omega'}{T} \right)^2 \right]} \times \left\{ 1 - \frac{1}{6} b^2(\Omega'_y)^3 (N)^2 \frac{K_1 \Omega^6 + K_2 \Omega^4 + K_3 \Omega^2 + K_4}{\Omega^8 + L_1 \Omega^6 + L_2 \Omega^4 + L_3 \Omega^2 + L_4} \right\},$$

$$\text{где } K_1 = - \left\{ 2A_2 - A_1 \left[2B_1 - A_1 (N)^2 + \frac{b^2(\Omega'_y)^2}{6} \right] \right\};$$

$$K_2 = 2A_4 + 2A_2 \times \left[2B_2 (N)^2 \frac{b^2(\Omega'_y)^2}{6} \right] + A_3 \left[2B_1 - A_1 (N)^2 \frac{b^2(\Omega'_y)}{6} \right] - A_1 \left[2B_3 + \frac{b^2(\Omega'_y)^3}{6} A_3 (N)^2 \right];$$

$$K_3 = - \left\{ A_4 \left[2B_2 + A_2 (N)^2 \frac{b^2(\Omega'_y)}{6} \right] - A_2 \left[2B_4 + \frac{b^2(\Omega'_y)^3}{6} A_4 (N)^2 \right] - A_3 \left[2B_3 + A_3 (N)^2 \frac{b^2(\Omega'_y)^3}{6} \right] \right\};$$

$$K_4 = A_4 \left[2B_4 + \frac{b^2(\Omega'_y)^3}{6} A_4 \right].$$

Все остальные коэффициенты вычисляются так же, как и в (12).

Относительная кратковременная нестабильность, согласно [1], определяется выражением:

$$\frac{\sigma[\langle \varphi > \tau_u]}{\omega_{СГ}} = \left(\frac{2}{\pi \tau_u^2 \omega_{СГ}^2} \int S_\varphi(\Omega) \sin\left(\frac{\Omega \tau_u}{2}\right) d\Omega \right)^2. \quad (16)$$

Выводы. Проведенный анализ позволяет определить относительную нестабильность генераторов на основе ФАПЧ с учетом нелинейных свойств системы

Список использованных источников

1. Кварцевые и квантовые меры частоты / Под ред. Б. И. Макаренко. – М.: МО СССР, 1976. – 412 с.
2. Пупков К. А. Методы классической и современной теории автоматического управления / К. А. Пупков. М.: МГТУ им. Баумана, 2000. – 283 с.
3. Пупков К. А. Анализ и расчет нелинейных систем с помощью функциональных рядов / К. А. Пупков, Н. А. Шмыкова. – М.: Машиностроение, 2000. – 150 с.
4. Ван-Трис Г. Функциональные методы анализа нелинейного поведения систем фазовой автоподстройки частоты / Г. Ван-Трис // ТИИР. – 1964. –Т. 8. – С. 957 – 975.
5. Капланов М. Р. Автоматическая перестройка частоты / Капланов М. Р., Левин В. А. – М.: Госэнергоиздат, 1962. – 320 с.

Анотація

ТЕОРЕТИЧНИЙ АНАЛІЗ СИСТЕМИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЧАСТОТИ В ГЕНЕРАТОРАХ МІЛІМЕТРОВОГО ДІАПАЗОНУ НА ОСНОВІ ФАЗОВОГО АВТОПІДСТРОЮВАННЯ ЧАСТОТИ

Черенков О. Д., Гордійчук І. Й., Косуліна Н. Г.

Визначено елементи структурної схеми перенесення спектра від еталонного генератора в міліметровий діапазон синхронізованого генератора з урахуванням нелінійних властивостей системи фазового автопідстроювання частоти (ФАПЧ).

Abstract

THEORETICAL ANALYSIS OF SYSTEM OF FREQUENCY CONVERSION FOR GENERATORS IN THE MILLIMETER RANGE BASED ON A PHASE-LOCKED LOOP

A. Cherenkov, I. Gordiychuk, N. Kosulina

The elements of the block diagram of the transfer of spectrum from the reference oscillator in the millimeter range of the synchronized generator taking into account the nonlinear properties of the phase locked loop (PLL) are determined.