УДК 577.4

МАТРИЧНА МОДЕЛЬ РОЗВИТКУ ПОПУЛЯЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ВІКОВОЇ СТРУКТУРИ

Щербань А.Е. здобувач 1-го курсу бакалаврського рівня освіти,
Масленніков Д.І. канд. фіз.-мат. наук, доцент (науковий керівник)

HU University of Applied Sciences, Utrecht, Netherlands,
Державний біотехнологічний університет

Наведено метод опису динаміки розвитку популяції тварин з урахуванням її вікової структури. Використовуються матричні методи дослідження. Знайдено стійкий розподіл популяції по віковій структурі.

Введення

У деяких популяціях врахування вікової структури популяції має істотне значення. Можна виділити кілька стадій розвитку або вікових груп. Вважатимемо, що популяція складається з n вікових груп; спосіб розбиття визначається біологічними особливостями організмів та специфікою задачі. Вікові групи мають різну ймовірність виживання та народжуваності для кожного часового періоду. Один з ранніх варіантів матричної моделі був розроблений Леслі [1] на початку сорокових років минулого сторіччя і поширена багатьма науковцями пізніше, наприклад, [2]. Як детерміністська модель вона передбачає майбутню вікову структуру популяції самиць по відомій структурі в даний момент часу і гіпотетичним коефіцієнтам виживання і плодючості. Популяцію розбивають на n+1 вікових груп (тобто 0,1,2,.,n), причому кожна група складається з особин одного віку, так що сама старша група або група, в якій усі тварини, що доживають до цього віку, вимирають, має вік n. Модель представляється матричним рівнянням:

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \dots\dots\dots f_{n-1} & f_n \\ P_0 & 0 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \dots\dots\dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 \dots\dots\dots 0 & 0 \\ \dots & & & \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots\dots p_{n-1} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} n_{t,0} \\ n_{t,1} \\ n_{t,2} \\ n_{t,3} \\ \dots \\ \dots \\ n_{t,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_{t+1,0} \\ n_{t+1,1} \\ n_{t+1,2} \\ n_{t+1,3} \\ \dots \\ \dots \\ n_{t+1,n} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Згідно з цим рівнянням чисельності тварин вікових класів у момент часу $t+1$ можна отримати, помноживши чисельності вікових класів у момент часу t на матрицю, елементами якої є коефіцієнти плодючості і виживання для кожного вікового класу. Величини fi (i=0,1,2.,n) представляють число самиць, народжуваних однією самицею i- того вікового класу, а p_i (i=0,1,2.,n - 1) - вірогідність того, що самиця і- того вікового класу доживе до віку $i+1$.

Менш очевидне те, що поведінку цієї моделі можна передбачити, аналізуючи деякі формальні властивості матриці [3] в рівнянні

$$A \times a_t = a_{t+1}, \qquad (2)$$

де a_t - вектор-стовпець, що представляє вікову структуру популяції у момент t, а a_{t+1} - вектор-стовпець, що представляє вікову структуру у момент $t+1$. По-перше, послідовно помноживши рівняння на матрицю A, легко отримати загальніше рівняння для чисельності вікових класів до моменту часу $t+k$:

$$a_{t+k}=A^k \times a_t. \quad (3)$$

По-друге, оскільки матриця A квадратна з n+1 рядками і стовпцями, вона має n+1 власних чисел і власних векторів. Елементи A - це позитивні числа або нулі, оскільки ні f_i, ні p_i не можуть набувати негативних значень, в цьому випадку найбільше власне число і усі координати власного вектору, що відповідає йому, також позитивні і мають певний екологічний зміст.

Постановка задачі

Припустимо, існує деяка популяція, в котрій самки поділені на три вікові групи, назвемо їх «молодша», «середня» і «старша». Відомо, що в молодшій групі виживають три самки з п'яти, в середній – три з чотирьох і переходять до наступної вікової групи. Кожна самка середнього віку народжує, в середньому, 10 самок, старшого – 20. В молодшому віці самки не народжують. Вважаємо, що всі числа відносяться до певного часового інтервалу. Початкова популяція складається з однієї самки старшого віку. Знайти: 1) кількість і розподіл даної популяції через один, два, три та чотири часових інтервалу. 2) стійку вікову структуру популяції.

Результати

1. Складемо матричну модель розвитку популяції. Матриця плодючості і виживання має такий вигляд:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix},$$

початковий вектор:

$$a_0=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Початкова популяція складається з однієї самиці старшого віку, що показано у векторі-стовпці.

2. Після одного часового інтервалу в популяції буде вже 20 самиць молодшого віку, оскільки

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Повторне застосування моделі, коли вектор для попередньої популяції множиться на коефіцієнти плодючості і виживання, дає такі результати:

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix},$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

і т.д.

3. Головне власне число знаходиться із рівняння

$$det\ (A\text{-}\lambda E)=0,$$

де E – одинична матриця матриця розміру (3×3).

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 10 & 20 \\ 0,6 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0,75 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (8)$$

Після розкриття визначника маємо рівняння:

$$\lambda^3\text{-}6\lambda\text{-}9=0.$$

Перший корінь $\lambda=3$ знаходиться підбором, розділивши вираз λ^3-6λ-9 на λ-3, отримаємо квадратне рівняння

$$\lambda^2+3\lambda+3=0.$$

Це рівняння не має дійсних розв'язків. Отже, маємо єдине власне число $\lambda=3$. Головне власне число дає швидкість, з якою зростає розмір популяції, в нашому випадку це 3, тобто за кожен часовий інтервал розмір популяції подвоюється. Для знаходження власного вектора v, складемо рівняння

$$A \times v = 2 \times v$$

або

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,75 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

що дає нам систему рівнянь

$$\begin{cases} 10y + 20z = 3x \\ 0,6x = 3y \\ 0,75y = 3z \end{cases}$$

Перше рівняння можна відкинути, підставив в третє z=1 отримаємо y=4, x=20. Тобто, власний вектор має вигляд:

$$v = \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Зміст власного вектора v - стійка вікова структура популяції, причому чисельність вікових класів представлена у вигляді відносних величин. У нашому прикладі цей вектор вказує на те, що між чисельністю тварин молодшого, середнього і старшого вікових класів в популяції, що досягла стійкої вікової структури, є певне співвідношення, яке не залежить від початкового розподілу.

Висновок

У доповіді запропонована формальна задача моделювання чисельності одновидової популяції з віковою структурою, побудованої на підставі лінійної матричної моделі Леслі. Досліджено приклад конкретного розподілу вікової структури популяції. Показано, що розподіл стійкої вікової структури не залежить від початкового розподілу популяції. Дані результати можуть бути використані для прогнозування вікової структури популяцій з поколіннями, що не перекриваються.

Список літератури:

1. Leslie P.H. On the use of matrices in certain population mathematics/ Biometrica.– 1945.–V.33, N3.– P.183-212.
2. Ризниченко Г.Ю Математические модели биологических продукционных процессов / Г.Ю. Ризниченко, А.Б Рубин. – М.: изд. МГУ. – 1993.– 301 с.
3. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. – М.: «Наука». – 1967. – 548 с.