

ОБ УПРОЩЁННОМ РАСЧЁТЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОТОКЕ ВОЗДУХА

Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф.

(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко)

Ольшанский С.В., к.ф.-м.н.

(Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»)

Упрощение расчёта траектории, времени и дальности полёта частицы, как материальной точки, в потоке воздуха достигнуто применением в линейной модели движения аппроксимации типа Паде для экспоненциальной функции. Определены условия, когда использование аппроксимации не вносит существенных погрешностей в результаты расчётов.

Постановка проблемы. Исследуя процессы пневмосепарирования и вибропневмосепарирования, приходится решать задачи баллистики частицы в потоке воздуха. При строгой (условно точной) постановке, эти задачи являются нелинейными [1,2]. Их приходится решать численно на компьютере для конкретных значений исходных данных. Однако при расчёте движения частицы на небольшое расстояние, путём линеаризации исходных дифференциальных уравнений движения, можно, с небольшой погрешностью, решить задачу полёта частицы аналитически и упростить теоретическую модель. Идея линеаризации в задачах пневмосепарирования впервые, по-видимому, предложена и реализована в [3]. Позже её применяли в расчётах авторы работ [4,5,6]. Линейные уравнения движения использованы также в диссертации [7] для описания движения частиц лёгкой фракции в потоке воздуха, после отделения их из зерновой смеси. Однако и в рамках линейной модели движения для определения времени и дальности полёта частицы приходится численно искать корень трансцендентного уравнения или решать обратную задачу баллистики, применяя функцию Ламберта [8]. Ниже для решения обратной задачи предлагается использовать аппроксимацию типа Паде для экспоненциальной функции. Такое

упрощение уже применяли в [9] при расчёте свободного движения частицы в неподвижной линейно-сопротивляющейся газообразной среде. Оно позволяет найти приближённые аналитические зависимости абсциссы x и ординаты y от аппликаты z на траектории полёта, что удобно для расчёта времени и дальности полёта частицы. Их определение становится не связанным с численным решением трансцендентного уравнения.

Целью работы является разработка упрощённого способа вычисления времени и дальности полёта материальной точки в движущейся газообразной среде.

Основная часть работы. Задачу баллистики решаем в пространственной декартовой системе координат $Oxyz$, показанной на рис. 1.

Траектория движения точки является пространственной кривой, поскольку принимаем, что вектор начальной скорости точки \vec{v}_0 и вектор скорости воздуха \vec{V} не лежат в одной вертикальной плоскости.

Движение точки описываем уравнениями:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \alpha V_x; \quad \ddot{y} + \alpha \dot{y} = \alpha V_y; \quad \ddot{z} + \alpha \dot{z} = -g + \alpha V_z, \quad (1)$$

в которых x, y, z – координаты точки, как функции времени t ; α – коэффициент аэродинамического взаимодействия частицы с движущимся воздухом; V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости воздуха на координатные оси; g – ускорение свободного падения; точка над символами означает производную по t .

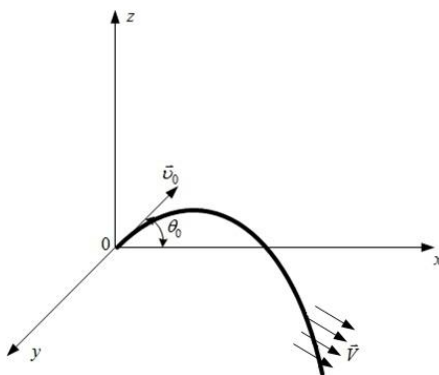


Рис. 1. Расчётная схема

Решения уравнений (1) при начальных условиях:

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0; \dot{x}(0) = v_1; \dot{y}(0) = v_2; \dot{z}(0) = v_3,$$

имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x(t) = V_x t + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) (1 - e^{-\alpha t}); \\ y &= y(t) = V_y t + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) (1 - e^{-\alpha t}); \\ z &= z(t) = \frac{1}{\alpha} (v_3 + g_1) (1 - e^{-\alpha t}) - g_1 t, \end{aligned} \quad (2)$$

где $g_1 = \frac{g}{\alpha} - V_z$; v_1, v_2, v_3 – проекции вектора начальной скорости точки на координатные оси ox, oy, oz соответственно.

Заметим, что решения (2) несколько отличны от тех, что опубликованы в работе [10].

Согласно (2), для расчёта времени полёта и координат точки на траектории $x_* = x(t)$, $y_* = y(t)$ в конце пути, при заданном $z = z_*$, приходится решать численно трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{\alpha} (v_3 + g_1) (1 - e^{-\alpha t_*}) - g_1 t_* = z_*. \quad (3)$$

Однако при небольших значениях αt_* уравнение (3) с хорошей точностью можно решить приближённо, не прибегая к численным методам, на чём остановимся далее.

Ограничиваясь значениями $\alpha t < 1$, заменим (2) более простыми приближёнными выражениями:

$$\begin{aligned} x &= V_x t + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) f(t); \\ y &= V_y t + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) f(t); \\ z &= \frac{1}{\alpha} (v_3 + g_1) f(t) - g_1 t, \end{aligned} \quad (4)$$

в которых

$$f(t) = \alpha t \frac{1 - \alpha t / 6}{1 + \alpha t / 3} \approx (1 - e^{-\alpha t}).$$

О погрешности принятой аппроксимации позволяют судить результаты вычислений в табл. 1.

Таблица 1

К оценке погрешности аппроксимации

αt	$1 - e^{-\alpha t}$	$f(t)$	αt	$1 - e^{-\alpha t}$	$f(t)$
0	0	0	0,6	0,4512	0,4500
0,2	0,1813	0,1813	0,8	0,5507	0,5474
0,4	0,3297	0,3294	1,1	0,6321	0,6250

Точность аппроксимации ухудшается с увеличением αt и при $\alpha t = 1$ погрешность составляет 1,12%.

Разрешив третье уравнение в (4) относительно t , получаем для заданного z , два значения времени:

$$t_{1,2} = a(z) \mp \sqrt{a^2(z) - b(z)}. \quad (5)$$

$$\text{Здесь } a(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{v_3 - \alpha z / 3}{g_1 + v_3 / 3}; \quad b(z) = \frac{2}{\alpha} \frac{z}{g_1 + v_3 / 3}.$$

Меньшее значение времени $t = t_1$ соответствует движению точки на восходящем участке траектории, а $t = t_2$ – на нисходящем.

Равенство $t_1 = t_2$ имеет место, когда движущаяся точка занимает наиболее высокое положение $z = z_e$ или $a^2(z) - b(z) = 0$. Из последнего уравнения следует, что:

$$z_e = c - \sqrt{c^2 - \frac{9}{\alpha^2} v_3^2}, \quad \text{где } c = \frac{9}{\alpha} \left(\frac{2}{3} v_3 + g_1 \right).$$

Абсцисса и ордината точки экстремума равны:

$$x_e = V_x t_e + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) f(t_e);$$

$$y_e = V_y t_e + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) f(t_e),$$

$$\text{причём } t_e = \frac{1}{\alpha} \frac{v_3 - \alpha z_e / 3}{g_1 + v_3 / 3}.$$

Подставив t_j из (5) в первое и второе уравнения в (4), получаем приближённые аналитические выражения $x = x(z)$ и $y = y(z)$:

$$x(z) = V_x t_j(z) + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) f(t_j(z)); \quad (6)$$

$$y(z) = V_y t_j(z) + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) f(t_j(z)).$$

При $j = 1: x \leq x_e; y \leq y_e$, а при $j = 2: x \geq x_e; y \geq y_e$.

Формулы (6) удобны для расчёта дальности полёта частицы, падающей с заданной высоты по наклонной траектории.

При расчёте дальности полёта зёрен приходится вычислять такие значения x_* и y_* , для которых движущаяся точка окажется на h ниже исходного положения [3,4]. В этом случае:

$$x_* = V_x t_* + \frac{1}{\alpha} (v_1 - V_x) f(t_*); \quad (7)$$

$$y_* = V_y t_* + \frac{1}{\alpha} (v_2 - V_y) f(t_*);$$

$$t_* = a_* + \sqrt{a_*^2 + b_*}; \quad a_* = \frac{1}{\alpha} \frac{v_3 + \alpha h / 3}{g_1 + v_3 / 3}; \quad b_* = \frac{2}{\alpha} \frac{h}{g_1 + v_3 / 3}.$$

Итак, при $\alpha t_* < 1$ вычисление x_* и y_* сводится к компактным формулам (7).

Результаты вычисления x_* и y_* при разных α , V_x и V_y представлены в табл. 2. Для проведения расчётов задавали: $v_1 = 15$ м/с; $v_2 = 0$; $v_3 = 5$ м/с; $h = 1$ м; $V_z = -1$ м/с. Поскольку $v_3 = v_1 / 3$, траектория полёта точки является пологой кривой.

Таблица 2

Расчётные t_* , x_* , y_* для пологих траекторий

α , с ⁻¹	V_x , м/с	V_y , м/с	t_* , с	x_* , м	y_* , м
0,2	6	3	1,148	16,12	0,37
0,2	-6	-3	1,148	14,65	-0,37
0,4	6	3	1,110	14,71	0,64
0,4	-6	-3	1,110	12,14	-0,64
0,6	6	3	1,075	13,55	0,86
0,6	-6	-3	1,075	10,13	-0,86

Влияние потока воздуха для принятых исходных данных оказалось несущественным. Разница в x_* , вызванная попутным и встречным потоками, небольшая. Она возрастает с увеличением значения α .

Однако, по мере нарастания скорости воздуха, он может значительно влиять на дальность полёта частицы. Это подтверждают результаты расчётов в табл. 3. Они получены при: $v_1 = 10$ м/с; $v_2 = 0$; $v_3 = 5$ м/с; $h = 1$ м; $V_y = V_z = 0$; $V_x = -15$ м/с и четырёх значениях α .

Встречный поток значительно уменьшает координату x и, как следствие, x_* , для которого $z = -1$ м.

Таблица 3

Значение x при разных α и z

$z, \text{ м}$	$x, \text{ м}$ при			
	$\alpha = 0,1 \text{ с}^{-1}$	$\alpha = 0,2 \text{ с}^{-1}$	$\alpha = 0,4 \text{ с}^{-1}$	$\alpha = 0,6 \text{ с}^{-1}$
0,4	8,11	7,04	5,27	3,87
0,2	8,48	7,33	5,40	3,86
0,0	8,81	7,58	5,50	3,83
-0,2	9,11	7,80	5,59	3,79
-0,4	9,39	8,00	5,65	3,73
-0,6	9,65	8,19	5,70	3,66
-0,8	9,89	8,36	5,74	3,58
-1,0	10,12	8,52	5,76	3,50

Характерно, что в конце полёта падение частицы, при малых α , сопровождается увеличением абсциссы x . Но при $\alpha = 0,6 \text{ с}^{-1}$ наблюдается противоположная закономерность. С уменьшением z уменьшается и x , т.е. имеет место реверсирование движения в направлении координатной оси ox . Ранее такой эффект, приводящий к петлеобразным траекториям, рассматривали в [8]. Изложенная здесь упрощённая теория также подтверждает возможность реверсирования полёта частицы встречным воздушным потоком.

Выводы. Введение аппроксимации для экспоненциальной функции существенно упростило вычисление дальности полёта частицы в движущейся газообразной среде при $\alpha t < 1$. Но проводя расчёты, следует соблюдать указанное неравенство, чтобы сохранить точность аппроксимации в линейной модели движения.

Список литературы

1. Заїка П.М. Теорія сільськогосподарських машин. Т.2. Частина 2. Зернозбиральні машини / П.М. Заїка. – Х.: ОКО, 2004. – 402с.
2. Абдуев М.М. Обґрунтування параметрів сепаратора з нахиленим повітряним каналом для розділення зернових сумішей: Автор. дис. канд. техн. наук / М.М. Абдуев – Х.: ХНТУСГ, 2007. – 21с.

3. Гортинский В.В. Процессы сепарирования на зерно-перерабатывающих предприятиях / В.В. Гортинский, А.Б. Демский, М.А. Борискин. – М.: Колос, 1980. – 304с.

4. Заика П.М. Методические указания к изучению расчётного курса лекций “Сельскохозяйственные и мелиоративные машины”. Избранные задачи земледельческой механики. Тема 8. Движение обрабатываемого материала в сопротивляющейся среде // П.М. Заика. – Х: ХИМЭСХ, 1991 – 62с.

5. Бакум М.В. Лінійна модель руху часток у плоскому нахиленому каналі пневмосепаратора / М.В. Бакум, В.П. Ольшанський, М.М. Крекот // Праці ТДАТУ, Вып. 10., Т. 2, 2009 – С. 29-36.

6. Бакум М.В. Спрощений розрахунок характеристик руху зерновки в плоскому нахиленому каналі пневмосепаратора / М.В. Бакум, В.П. Ольшанський, М.М. Крекот // Вісник ХНАУ ім. В.В. Докучаєва, 2009, № 11(1). – С. 36-40 с.

7. Сліпченко М.В. Обґрунтування параметрів процесу і розробка пневмосепаруючого пристрою вібровідцентрових зернових сепараторів: Автор. дис. канд. техн. наук / М.В. Сліпченко – Х.: ХНТУСГ, 2013. – 20с.

8. Ольшанский В.П. Функция Ламберта в задачах бал-листики материальной точки / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Изд. Савчук А.О., 2013. – 204с.

9. Ольшанский В.П. Упрощённый расчёт дальности полёта частиц удобрений, вылетающих с разбрасывателя / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник ХНТУСГ: Механізація сільськогосподарського виробництва. – Х.: ХНТУСГ, 2013. Вип. 135. С 63-66.

10. Ловейкін В.С. Визначення швидкості руху частинки твердих мінеральних добрив після сходження з лопатки диска при врахуванні дії вітру / В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, А.І. Дитюк // Вісник ДДАУ: Сучасні проблеми землеробської механіки. – Дніпропетровськ: ДДАУ, 2009, № 2. – С. 186-188.

Анотація

ПРО СПРОЩЕНИЙ РОЗРАХУНОК РУХУ ЧАСТКИ В ПОТОЦІ ПОВІТРЯ

Спрощення розрахунку траєкторії, часу та дальності польоту частки, як матеріальної точки, в повітряному потоці досягнуто

застосуванням в лінійній моделі руху апроксимації типу Паде для експонентної функції. Визначено умови, коли використання апроксимації не вносить суттєвих похибок в результати розрахунків.

Abstract

SIMPLIFIED CALCULATION OF PARTICLE MOTION IN A STREAM OF AIR

Simplification of calculation, time and range of the particle as a material point in a stream of air achieved by using a linear model of the motion of the Pade approximation of the type for the exponential function. The conditions where the use of the approximation does not introduce significant errors in the calculation results are determined.