УДК 534.044

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ БІОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ В ОБЛАСТІ РЕЗОНАНСНИХ ЧАСТОТ

Мазнєва Г.Г., к.т.н., доц.
Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Розглянута біомеханіка тіла оператора сільськогосподарських машин. Показано, що коливання оператора є нелінійними і представляють «м'який» тип нелінійної жорсткості. Одержані аналітичні залежності переміщень оператора від коливань різних форм нелінійності

Постановка проблеми. У зв'язку зі збільшенням енергонасиченості сільськогосподарських машин і тракторів, підвищенням їх робочих швидкостей вібрації в кабінах посилюються і як правило, перевищують санітарні норми [1]. Тому виникає проблема захисту оператора, а конкретніше – тіла оператора, як біомеханічної системи. Підвищена вібрація негативно впливає на здоров'я оператора машини, особливо в діапазоні резонансних частот, які знаходяться від 3 Гц до 7 Гц. Тому задача гасіння шкідливих вібрацій на низьких частотах є актуальною. Для розв'язку цієї задачі необхідно визначити схему віброзахисної системи, її структуру, враховуючи динамічні характеристики тіла оператора, як біомеханічної системи.

Дія вібрацій безпосередньо на тіло оператора може привести до порушення нормального стану, а також до виникнення вібраційної хвороби. Структурний шум, і вібрація впливають на психіку оператора, його продуктивність [2]. Отже при розв'язанні задачі віброзахисту оператора машини необхідне вивчення питання проходження механічних коливань через кістково-м'язові тканини, та реакції на такі вібрації. Такі питання не можливо розв'язати тільки теоретичним шляхом, необхідно також підключити і експериментальні дослідження.

Аналіз останніх досліджень. Питаннями, які присвячені вивченню динамічних властивостей тіла оператора, аналізу їх стану займалися ряд авторів: Фролов К.В., Гурко Х.О, Потьомкін Б.А і інші [2]. Дослідження цих авторів проводились в припущенні, що коливання тіла оператора описуються лінійними диференціальними рівняннями. Але лінійна теорія лише наближено описує реальну біомеханічну систему «машина-оператор». Наближено були знайдені параметри коливань в області резонансних частот. Ряд авторів вважають, що в дійсності модель тіла оператора є нелінійною.

Метою досліджень є розробка аналітичних методів розрахунку динамічних параметрів нелінійної біомеханічної системи під дією гармонічного збудження в діапазоні резонансних частот.

Виклад основного матеріалу. Для з'ясування нелінійності біомеханічної системи необхідно переконатися, що такі параметри, як частота, фаза коливань є змінними і залежать від амплітуди коливань, рівня віброзбудження крісла, на якому знаходиться оператор.

Скористаємось результатами експериментів [2]. На рис. 1 представлена залежність амплітуди коливань від рівнів віброзбудження для різних частот.

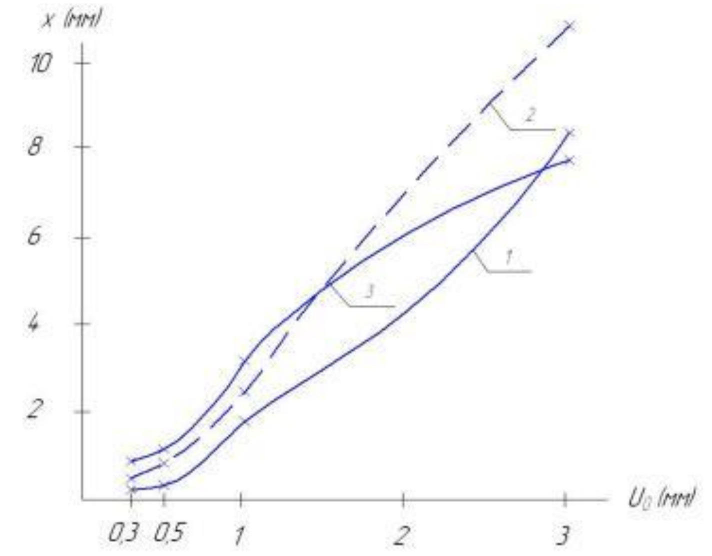

Рис. 1 – Амплітуда коливань голови оператора в залежності від рівня збудження при різних частотах: 1– частота 3 Гц; 2 – 4 Гц; 3– 5 Гц

Рівень віброзбудження змінювався від 0,3 мм до 3 мм. Частота змінювалась в діапазоні від 3 Гц до 5 Гц. Для віброзбудження 0,3 мм різниця між амплітудами коливань голови оператора є несуттєвою і змінюється від 0,1 мм до 0,7 мм. Коли рівень віброзбудження зростає, то амплітуда коливань теж збільшується. Особливо це помітно для частоти 4 Гц, де амплітуда коливань досягає 11 мм. Отже, для низьких рівнів віброзбудженості спостерігається лінійна залежність амплітуди від частоти, що неможливо сказати для великих рівнів, де спостерігається нелінійність, а частота наближається до резонансної.

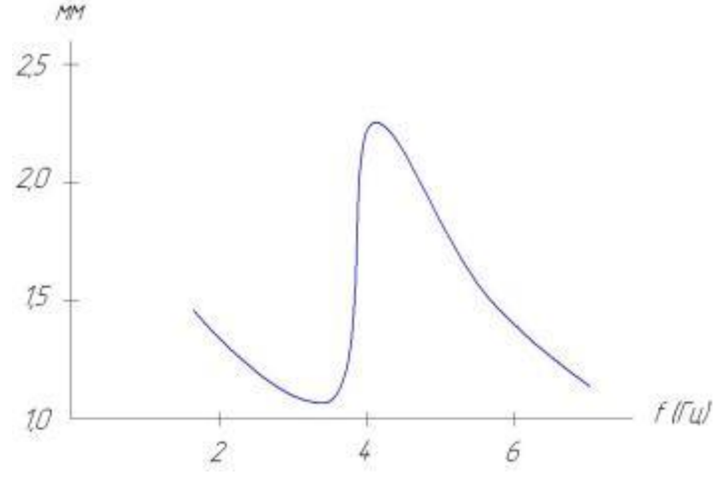

Рис. 2 – Залежність амплітуди коливань від частоти віброзбудженя

На рис. 2 представлена амплітудно-частотна характеристика тіла оператора, яка вказує на нелінійність біомеханічної системи. Крива відхиляється у лівий бік, що свідчить про «м'який» тип зв'язку пружних характеристик тіла оператора. Резонансна частота зсувається в лівий бік на 1,3 Гц і наближається до частоти 4 Гц.

Оператор сільськогосподарської машини тривалий час знаходиться під дією віброзбудження. Помічено, що при тривалому перебуванні під дією вібрацій, динамічні характеристики тіла оператора змінюються (рис. 3)

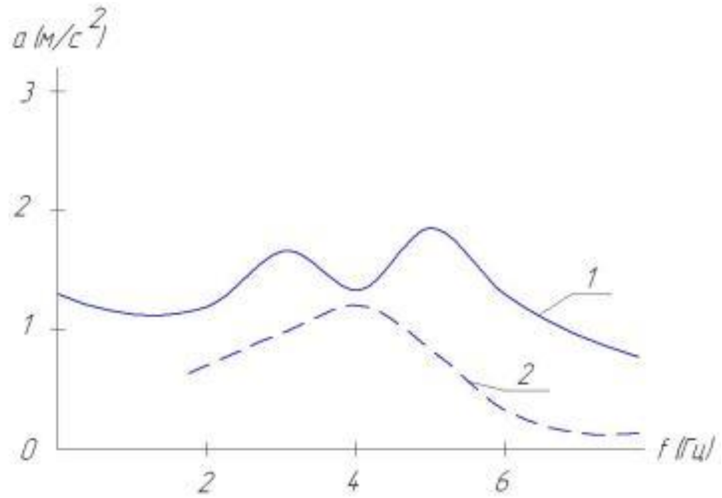

Рис. 3 – Амплітуда прискорення голови оператора в залежності від частоти коливань після різних термінів віброзбудження: 1 – термін дії 3 години; 2 – термін дії 1,25 години

Із збільшенням терміна дії вібрації майже в 2,5 рази прискорення збільшується не тільки по величині, а і в сторону зростання частоти. Якщо термін дії віброзбудження 1,25 години (крива 2) максимальне значення прискорення досягається на частоті 4 Гц, тоді як для терміну дії 3 години максимальне значення прискорення досягається в сторону збільшення частоти – до 5 Гц. На частоті 4 Гц віброприскорення мало залежить від терміну дії віброзбудження і різниця між ними дорівнює наближено 0,1 $\text{м}/\text{с}^2$, в той же час, як на частоті 5 Гц ця різниця майже в 10 разів більше. Так як амплітуди прискорення і переміщення по різному змінюються в залежності від частоти, то можна зробити висновок про нестаціонарність процесу коливань тіла оператора.

Дослідимо математичну модель тіла оператора сільськогосподарської машини. Будемо вважати, що маса оператора зосереджена в одній точці верхньої частини хребта і дорівнює m. Задача зводиться до дослідження коливань матеріальної точки масою m.

Диференціальне рівняння коливань маси m з урахуванням нелінійності пружних сил має вигляд:

$$x'' + \omega^2 x - \mu x^3 = 0, \tag{1}$$

де $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$, $\mu = \sqrt{\frac{C_1}{m}}$,

C і C_1 – характеристики пружних сил,

x – координата верхньої точки хребта.

Для якісної характеристики коливань матеріальної точки застосуємо метод фазової площини до рівняння (1). Рівняння (1) запишемо через швидкість x', в результаті чого маємо:

$$\frac{1}{2}x'^2 + \frac{\omega^2 x^2}{2} - \mu\frac{x^4}{4} = c \qquad (2)$$

Останнє рівняння представляє собою інтеграл енергії, де потенціальна енергія має вигляд:

$$\Pi = \frac{\omega^2 x^2}{2} - \mu\frac{x^4}{4} \qquad (3)$$

Із рівняння (2) знайдемо швидкість переміщення матеріальної точки

$$x' = \pm\sqrt{2\left(\text{c} - \frac{\omega^2 x^2}{2} + \mu\frac{x^4}{4}\right)} \qquad (4)$$

Аналіз структури фазової площини $(x(t), x'(t))$ показує, що коливання в околі початкового стану точки будуть малими, а отже доданок, який має параметр μ буде малим і рух буде періодичним та нагадуватиме гармонічні коливання. При зростанні початкової енергії періодичність коливань порушується.

Знайдемо критичне значення енергії C_M, яке співпадає з максимумом потенціальної енергії Π. Дослідимо функцію $\Pi(x)$ на екстремум, маємо:

$$C_M = \frac{\omega^4}{4|\mu|} \qquad (5)$$

При зростанні μ величина C_M необмежено зростає, так як $\mu < 0$. Отже, коливання стають необмеженими, коли $t \to \infty$.

При $C = C_M$ фазова траєкторія матеріальної точки є замкнена крива, яка називається сипаратрисою. Отже, ця крива відокремлює періодичний рух точки від необмеженого. Для кількісної оцінки динамічних параметрів коливань матеріальної точки запишемо розв'язок диференціального рівняння (1), [4]

$$x = Csn[\sigma(t+h), k], \qquad (6)$$

де $sn[\sigma(t+h), k]$ – еліптичний синус;
C, σ, k – невідомі сталі, які необхідно знайти через відомі параметри ω і μ.

Підставимо розв'язок (6) в диференціальне рівняння (1)

$$(Csn[\sigma(t+h), k])'' + \omega^2 Csn[\sigma(t+h), k] - (\mu(Csn[\sigma(t+h)]), k)^3 = 0 \qquad (7)$$

Знайдемо похідні x' і x'' і підставимо в диференціальне рівняння

$$x' = C\sigma cn[\sigma(t+h), k]dn[\sigma(t+h), k],$$

$$x'' = -C\sigma^2\{sn[\sigma(t+h), k]dn^2[\sigma(t+h), k] +$$

$$+k^2 sn[\sigma(t+h), k]cn^2[\sigma(t+h), k]\} \qquad (8)$$

де $cn[\sigma(t+h),k]$ – еліптичний косинус;
$dn[\sigma(t+h),k]$ – функція дельта амплітуди, яка визначається за формулою:

$$dn[\sigma(t+h),k] = \sqrt{1-k^2 \sin am[\sigma(t+h),k]} \tag{9}$$

Так як $Csn[\sigma(t+h),k] = x$, то диференціальне рівняння (7) приймає вигляд

$$x'' + \sigma^2(1+k^2)x - \frac{2\sigma^2 k^2}{C^2}x^3 = 0, \tag{10}$$

де k – називається модулем еліптичної функції.

Порівнюючи рівняння (1) і (10) можна записати

$$\begin{cases} \omega^2 = \sigma^2(1+k^2) \\ \mu = \dfrac{2\sigma^2 k^2}{C^2} \end{cases} \tag{11}$$

Невідомі параметри σ, k і C входять в систему рівнянь (11). Отже, розв'язок диференціального рівняння (1) має вигляд (6), де параметри σ, k, C задовольняють рівнянню (11). Необхідно одержати третю умову для того, щоб знайти третій невідомий параметр.

Нехай початкові умови приймають вигляд:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = V_0 \tag{12}$$

Із другої початкової умови маємо:

$$V_0 = \sigma C \tag{13}$$

Враховуючи, що $cn(0) = dn(0) = 1$, із рівнянь (11), (13) знайдемо невідомі сталі:

$$\sigma^2 = \frac{\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 - 2\mu\mathcal{V}_0^2}}{2}$$

$$C^2 = \frac{2\mathcal{V}_0^2}{\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 - 2\mu\mathcal{V}_0^2}} \tag{16}$$

$$k^2 = \frac{\mu\mathcal{V}_0^2}{\omega^2\left(\omega^2 \pm \sqrt{\omega^4 - 2\mu\mathcal{V}_0^2}\right) - \mu\mathcal{V}_0^2}$$

Розглянемо частинний випадок, коли пружна сила є лінійною. Формули (16) приймають вигляд:

$$\sigma = \omega, \quad k = 0, \quad C = \frac{\mathcal{V}_0}{\omega} \tag{17}$$

Значення σ, k, c не суперечать розв'язку лінійного рівняння, отже, перед радикалом в формулах (16) необхідно брати знак плюс. Розв'язком рівняння (1) буде функція:

$$x = Csn\,(\sigma t, k) \tag{18}$$

Невідомі сталі визначаються за формулами:

$$\sigma = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

$$C = \pm\frac{\mathcal{V}_0\sqrt{2}}{\lambda} \tag{19}$$

$$k = \pm\frac{\sqrt{\mu}\mathcal{V}_0}{\sqrt{\omega^2\lambda^2 - \mu\mathcal{V}_0}},$$

де $\lambda^2 = \omega^2 + \sqrt{\omega^4 - 2\mu\mathcal{V}_0^2}$.

Підставимо формули (19) в формулу (18), одержимо переміщення матеріальної точки, як функцію параметрів $\omega, \mu, \mathcal{V}_0$ при $\lambda > 0$.

$$x(t) = \frac{\mathcal{V}_0\sqrt{2}}{\lambda} sn\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}t, \frac{\sqrt{\mu}\mathcal{V}_0}{\sqrt{\omega^2\lambda - \mu\mathcal{V}_0^2}}\right) \tag{20}$$

Припустимо, що крісло оператора переміщується по гармонічному закону. Диференціальне рівняння коливання оператора приймає вигляд:

$$x'' + \omega^2 x - \mu x^3 = a\cos pt, \tag{21}$$

де a – амплітуда вимушених коливань,
p – частота.

Розв'язок диференціального рівняння (21) шукаємо наближено. Першим наближенням нехай буде функція:

$$x_0 = Acos\,pt \tag{22}$$

Підставимо формулу (22) в диференціальне рівняння (21)

$$-Ap^2 cos\,pt + \omega^2 Acos\,pt - \mu A^3 cos\,^3 pt = a\cos pt \tag{23}$$

Понизимо порядок тригонометричної функції $cos\,^3 pt$ за формулою:

$$cos\,^3 pt = \frac{3}{4}\cos pt + \frac{1}{4}\cos(3pt) \tag{24}$$

Підставимо формулу (24) в рівняння (23)

$$\left(-Ap^2 - \frac{3}{4}\mu A^3 + \omega^2 A\right)\cos pt - \frac{1}{4}\mu A^3\cos(3pt) = a\cos pt \tag{25}$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos pt$

$$-Ap^2 - \frac{3}{4}\mu A^3 + \omega^2 A = a,$$

або $$-\frac{3}{4}\mu A^3 + (\omega^2 - p^2)A - a = 0 \qquad (26)$$

Із останнього кубічного рівняння знайдемо амплітуду А

$$A_{1,2} = \pm\sqrt[3]{\frac{4a}{3\mu}}\left(\sqrt[3]{1+B} + \sqrt[3]{1-B}\right) \qquad (27)$$

де $$B = \sqrt{1 - \frac{16(\omega^2 - p^2)^3}{81\mu a^2}} \qquad (28)$$

У випадку, коли частота власних коливань дорівнює частоті вимушених $(\omega^2 = p^2)$ наступає резонанс. Коефіцієнт B у цьому випадку дорівнює одиниці, амплітуда

$$A = \pm 2\sqrt[3]{\frac{4a}{3\mu}} \qquad (29)$$

При малих значеннях μ, коли $\mu \to 0$ амплітуда необмежено зростає.

Знайдемо друге наближення розв'язку x_1 рівняння (21). Із рівняння маємо:

$$x'' = a\cos pt - \omega^2 x + \mu x^3$$

Підставимо в останнє рівняння замість x значення x_0. За формулою (22)

$$x_1'' = a\cos pt - \omega^2 A cos\, pt - \mu A^3 cos^3 pt$$

Застосуємо формулу (24), одержимо:

$$x_1'' = -Ap^2 \cos pt - \frac{\mu A^3}{4}\cos 3pt \qquad (30)$$

Із формули (30) маємо:

$$x_1' = -Ap \sin pt - \frac{\mu A^3}{12}\sin 3pt \qquad (31)$$

Тоді друге наближення переміщення матеріальної точки буде:

$$x_1 = A\cos pt + \frac{\mu A^3}{36p^2}\cos 3pt,$$

або

$$x_1 = x_0 + \frac{\mu A^3}{36p^2}\cos 3pt, \qquad (32)$$

де A – амплітуда коливань визначається за формулою (27).

Подальше наближення розв'язку x_2 знаходиться аналогічно, але це пов'язано з громіздкими викладками.

Висновок. Аналіз тіла оператора сільськогосподарських машин і тракторів, як біомеханічної системи показав, що ці коливання є нелінійними і нестаціонарними. Нелінійність пов’язана з пружними характеристиками біомеханічної системи. Амплітудно-частотна характеристика вказує на «м’який» тип пружних сил. Розглянута математична модель нелінійних, нестаціонарних коливань. В результаті досліджень одержано закон коливань в залежності від механічних параметрів системи в області резонансних частот. Одержані аналітичні вирази дозволяють обчислити амплітуду коливань, яка залежить від вимушеної сили, а також параметрів, що обумовлюють нелінійність біомеханічної системи.

Список використаних джерел

1. Шкляр А. Результати досліджень шумових характеристик зернозбиральних комбайнів / А. Шкляр // Техніка і технології АПК. -2010. - №1. – С.32-34.
2. Влияние вибраций различных спектров на организм человека и проблемы виброзащиты. Под редакцией К.В. Фролова. - М.: Наука, 1992.
3. Коловский М.З. Нелинейная теория виброзащитных систем / М.З. Коловский – М.: Наука, 1996.
4. Янке Э. Специальные функции/ Э.Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1968.
5. Михайлович Я. Кого турбує стан парку тракторів?/ Я. Михайлович, А. Рубець // Пропозиція -2010.-№1(175). - С. 102-107.

Аннотация

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ БИОМЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОБЛАСТИ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ

Мазнева Г.Г.

Рассмотрена биомеханика тела оператора сельскохозяйственных машин. Показано, что колебания оператора являются нелинейными и представляют «мягкий» тип нелинейной жесткости. Получены аналитические зависимости перемещений оператора от колебаний разных форм нелинейности

Abstract

BIOMECHANICAL STUDY OF THE OSCILLATIONS OF THE SYSTEM IN THE VICINITY OF THE RESONANCE FREQUENCIES

G. Mazneva

We consider the operator's body biomechanics of agricultural machinery. It is shown that the fluctuations are nonlinear operator and provide a "soft" type of non-linear stiffness. Analytical dependences of displacement operator from vibrations of different forms of nonlinearity