УДК 631.01:534.1

ЕНЕРГЕТИЧНІ ПОКАЗНИКИ ПАРАМЕТРИЧНОГО КОЛИВАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Черниш О.М., к.т.н.,
Національний університет біоресурсів і природокористування України

Теоретично розглянуті умови зміни механічної енергії при визначенні характеристик параметричних коливань.

Вступ. Характер і особливості коливальних процесів у сільськогосподарському виробництві суттєво впливають на продуктивність, довговічність і надійність обладнання, а також якість переробки продукції [3-5]. Тому дослідження і розрахунки параметрів коливальних процесів є невід'ємною частиною динамічних розрахунків.

Огляд літератури. На сьогоднішній день механічним коливанням і їх практичному застосуванню присвячено багато наукових досліджень і публікацій [1-4, 6, 7]. Але проблема вибору методики досліджень та розрахунків при розв'язанні наукових і технічних задач залишається актуальною.

Тому дослідження і аналіз зміни механічної енергії в коливальних процесах механічних систем допоможе не тільки усвідомити їх фізичну сутність, але і дасть можливість їх прогнозування та розрахунку.

Мета дослідження. Встановити вплив параметричних коливань на енергетичні показники процесу.

Виклад основного матеріалу. Як відомо, параметричні коливання виникають в механічних системах, до яких підводиться енергія від зовнішнього джерела, а параметри системи (жорсткість, маса, момент інерції) заданим чином періодично змінюються у часі. Якщо стан відносного спокою параметричної системи буде яким-небудь чином порушено, то виникнуть коливання, причому залежно від поєднання параметрів системи вказані коливання можуть бути як обмеженими, так і необмежено зростаючими в часі. У останньому випадку говорять про параметричний резонанс системи.

Для отримання енергетичних співвідношень в параметричному коливальному процесі спочатку розглянемо елементарне рівняння гармонійного коливального руху, коли узагальнена координата q і її похідна змінюються пропорційно синусу із аргументом, що лінійно залежить від часу:

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)\ , \tag{1}$$

де A – амплітуда; ω – колова або циклічна частота; α – початкова фаза коливань.

При цьому амплітуду A будемо вважати повільно мінливою функцією у припущенні, що за один період коливань $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ вона мало змінюється у порівнянні з її середнім значенням. Таке припущення в межах періоду коливань дозволяє вважати амплітуду сталою величиною, що дорівнює її середньому значенню. Вважатимемо також, що зміна амплітуди коливань буде відбуватись лише при переході від одного періоду коливань до наступного.

Далі визначимо зміну механічної енергії ΔE гармонійних коливань за відрізок часу Δt, що дорівнює періоду T :

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1), \tag{2}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1 = T$.

Для цього складемо диференціальне рівняння у вигляді

$$m\ddot{q} + cq = Q(\dot{q}, t), \tag{3}$$

де m, c – відповідно інерційний і квазипружний коефіцієнти; Q – величина неконсервативної узагальненої сили.

Помножимо ліву і праву частину рівняння (3) на $\dot{q}dt$ [5] і отримаємо:

$$dE = Q\dot{q}dt\ , \tag{4}$$

Тоді зміна механічної енергії ΔE гармонійних коливань за період T буде дорівнювати:

$$\Delta E = \int_0^T Q\dot{q}dt\ , \tag{5}$$

де $Q\dot{q}dt = Qdq$.

Вираз (5) показує, що величина зміни механічної енергії ΔE при гармонійному коливальному процесі за період T дорівнює роботі неконсервативних узагальнених сил.

Тобто, при додатній зміні механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу (при $\Delta E > 0$) амплітуда коливань буде зростати ($\Delta A > 0$), при від'ємній зміні механічної енергії ΔE (при $\Delta E < 0$) амплітуда коливань буде зменшуватись ($\Delta A < 0$), а при відсутності зміни (при $\Delta E = 0$) амплітуда залишиться постійною ($\Delta A = 0$).

При цьому вважаємо, що у загальному випадку за період коливань T величина зміни механічної енергії ΔE може мати дві складові

$$\Delta E = \Delta E_+ + \Delta E_-\ . \tag{6}$$

Індекс зі знаком мінус параметра ΔE означає, що енергія від коливальної системи відбирається, а зі знаком плюс – що енергія до системи надходить.

Так, наприклад в ідеальному випадку вільних гармонійних коливань механічної системи без опору величина узагальненої сили відсутня ($Q = 0$) і згідно (5) зміна її енергії відсутня: $\Delta E = 0$, а амплітуда коливань буде сталою величиною ($A = const$). У випадку дії на вільні гармонійні коливання сили опору величина зміни механічної енергії ΔE буде від'ємною, а коливання будуть згасальними ($\Delta A < 0$).

Проаналізуємо тепер з позицій зміни механічної енергії параметричну коливальну систему зі змінною жорсткістю $c(t)$ при дії на неї сили опору.

Нехай жорсткість даної механічної системи змінюється за гармонійним законом

$$c = c_0(1 - \varepsilon \sin \Omega t), \tag{7}$$

де c_0 – початкова жорсткість механічної системи; ε – величина глибини пульсації; Ω – частота параметричного збудження.

При цьому закон зміни сили опору в даному коливальному процесі будемо вважати лінійним:

$$Q = -b\dot{q}, \tag{8}$$

де b – коефіцієнт пропорційності сили опору.

Тоді диференціальне рівняння, що описує дану параметричну коливальну систему має вигляд:

$$m\ddot{q} + b\dot{q} + c_0(1 - \varepsilon \sin \Omega t)q = 0, \tag{9}$$

Перенесемо у праву частину рівняння (9) неконсервативні сили і отримаємо:

$$m\ddot{q} + c_0 q = c_0 \varepsilon q \sin \Omega t - b\dot{q}, \tag{10}$$

У якості наближеного розв'язку останнього рівняння будемо вважати гармонійні коливання виду

$$q \approx A \cdot \sin(k_0 t + \alpha), \tag{11}$$

де $k_0 = \sqrt{\dfrac{c_0}{m}}$ – середня частота вільних (власних) коливань системи.

Із виразу (5) можна отримати наступне значення зміни механічної енергії, що підводиться до коливальної параметричної системи за період T:

$$\Delta E_+ = c_0 \varepsilon \int_0^T q\dot{q} \sin \Omega t dt, \tag{12}$$

або із врахуванням (11):

$$\Delta E_{+} = c_0 k_0 \varepsilon A^2 \int_0^T \sin \Omega t \sin(k_0 t + \alpha) dt \ , \tag{13}$$

де $T = \dfrac{2\pi}{k_0}$ – період коливань параметричної системи.

Відповідно величина зміни механічної енергії, що відводиться від коливальної параметричної системи за цей період визначається як:

$$\Delta E = -b \int_0^T \dot{q}^2 dt < 0 \,, \tag{14}$$

або згідно [5].

$$\Delta E_{-} = 0{,}5 \psi c A^2 \ , \tag{15}$$

де ψ – коефіцієнт розсіювання.

У випадку параметричного резонансу механічної системи при $\Omega = 2k_0$ в результаті інтегрування (13) отримаємо:

$$\Delta E_{+} = 0{,}5 c_0 \varepsilon A^2 \cos 2\alpha \ . \tag{16}$$

Тобто максимуму підведеної механічної енергії до параметричної системи відповідає зсув фази $\alpha = 0$.

Таким чином із врахуванням виразів (16) і (15) зміна механічної енергії ΔE коливальної параметричної системи в умовах резонансу визначається як

$$\Delta E = \Delta E_{+} - \Delta E_{-} = 0{,}5 c_0 \varepsilon A^2 - 0{,}5 \psi c_0 A^2 \ . \tag{17}$$

Умові затухання коливань відповідає нерівність $\Delta E < 0$, коли глибина пульсації ε менша ніж її критичне значення $\varepsilon_{кр.}$:

$$\varepsilon < \varepsilon_{кр.} = \frac{\psi}{\pi} \ . \tag{18}$$

Нерівність (18) забезпечує динамічну стійкість системи і параметричний резонанс буде подавлений ($A \to 0$).

Треба відмітити, що навіть при умові $\varepsilon << 1$, не зважаючи на рівняння (9), параметричним збудженням нехтувати не варто. Як видно з нерівності (18), у цьому випадку величину глибини пульсації ε треба порівнювати не з одиницею, а з його критичним значенням $\varepsilon_{кр.}$, яке також, як правило, суттєво менше за одиницю.

Висновки. У наведеному випадку розглянуто лише один з найпростіших видів параметричних коливань зі змінною за гармонійним законом жорсткістю $c(t)$ при дії лінійної сили опору. Але розглянутий аналіз зміни механічної енергії такого коливального процесу дає можливість розглядати і інші, більш складні, коливальні процеси та визначити їх оптимальні режими.

Список використаних джерел

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 560 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. – 480 с.
3. Булгаков В.М., Головач І.В. Теорія вібраційного викопування коренеплодів // Зб. наук. праць НАУ «Механізація сільськогосподарського виробництва». – К.: НАУ, 2003. – Т.XIV. – С. 34-86.
4. Вулфсон И.И. Колебания машин с механизмами циклового действия. Л.:Машиностроение, 1990. – 306 с.
5. Коловский М.З. Динамика машин. – Л.: Машиностроение, 1989. – 263 с.
6. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. М.: Изд. Физ.-мат. лит., 2002. – 292 с.
7. Мангус К. Колебания. Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
8. Павловський М.А. Теоретична механіка. Підручник. К.: Техніка, 2002. – 512 с.

Аннотация

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Черныш О.Н.

Теоретически рассмотрены условия изменения механической энергии при определении характеристик параметрических колебаний

Abstract

ESTIMATE OF THE PARAMETRIC VIBRATIONAL PROCESS FROM THE POINT OF VIEW OF ENERGY

O. Chernysh

Requirements of change of a mechanical energy are theoretically viewed at definition of performances of parametric oscillations