УДК 630*848.4

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВЗАЄМОДІЇ КРУГЛИХ ЛІСОМАТЕРІАЛІВ У ШТАБЕЛІ

Б. Я. Бакай, канд. техн. наук, доцент,
(Національний лісотехнічний університет України, м. Львів)

Розглянуто питання взаємодії круглих лісоматеріалів у штабелі. Побудовано рівняння системи круглих лісоматеріалів з включеннями в розподілену жорсткість, а також з навантаженнями типу зосереджених сил.

Для введення зосереджених включень в аналітичні вирази розподілених параметрів використано сингулярні функції.

Актуальність роботи. Вдосконалення існуючих і створення нових високопродуктивних конструкцій підіймально-транспортувального машин і устатковання для роботи на лісових складах є важливим інженерним завданням. Його вирішення можливе тоді, коли будуть відомі зусилля взаємодії круглих лісоматеріалів між собою [1, 2]. Визначення зусилля взаємодії круглих лісоматеріалів під час захоплювання та пакетування доцільно розглядати як однорідну систему круглих колод, які взаємодіють одна з одною під дією власного і зовнішнього навантаження.

Під час дослідження процесу захоплювання колод стропами і захоплювачем важільного типу також виявлено утворення “балки” як негативного процесу [3, 4], що у свою чергу значно зменшує ефективність виконання робіт.

Методика. Розглянемо безпрокладочний штабель круглих лісоматеріалів (штабель) як дискретне середовище і відзначимо механічні властивості, які властиві даному середовищу. Як відомо, об’єм штабеля складається з об’єму твердих дотичних між собою колод і порожнеч між ними. Кожна колода окремо володіє всіма властивостями твердого тіла, а сукупність колод утворює дискретне середовище. Таке середовище здатне сприймати зовнішні стискаючі навантаження, створювати розпірне зусилля при передачі їх в середині середовища і розподіляти зовнішні та внутрішні стискаючі навантаження на велику площу всередині штабеля. Здатність штабеля сприймати зовнішні стискаючі навантаження вказує на те, що дане середовище володіє властивостями твердого тіла [5, 6].

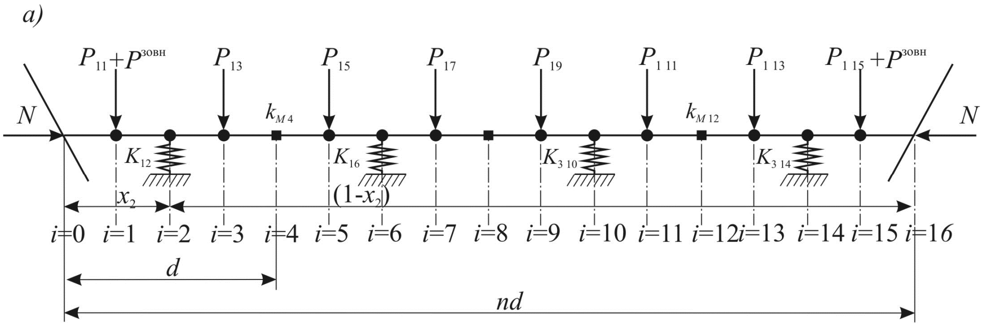
Відомо, що механічні властивості штабеля визначаються розмірами, формою і взаємним розташуванням колод [6]. Кожний з цих показників може бути випадковим або впорядкованим. Наприклад, можна створити модель штабеля у вигляді впорядкованої системи ближнього порядку, яка утворена з циліндрів однакових розмірів із строго певним порядком їх укладання. Проте, практично ймовірність дотримання цих умов рівна нулю, оскільки випадкові чинники (відхилення в розмірах циліндрів, відхилення від правильної форми тощо) змінюватимуть структуру середовища відносно заданого стану. Звідси випливає, що зміняться параметри середовища в цілому, умови передачі зусиль і характер розподілу тиску всередині середовища.

В реальному штабелі круглих лісоматеріалів характер розподілу зусиль всередині середовища залежить від зміни структури середовища, яке у свою чергу визначається розмірами, формою і взаємним розміщенням окремих колод, які створюють це середовище. У зв'язку з цим, аналіз визначальних чинників середовища необхідно провести з врахуванням специфіки технологічного виробництва круглих лісоматеріалів на лісових складах, а також існуючих стандартів і технічних умов розподілу лісоматеріалів за довжиною, діаметром, породами.

В роботах Лазаряна В. А. і Конашенка С. Й., було запропоновано наступне. Під час дослідження коливань одномірних стержневих систем з зосередженими включеннями в розподілену масу і в пружну жорсткість стержня, моделювати їх з застосовуванням імпульсних функцій 1-4-порядків. В даному випадку довільне зосереджене включення розглядається як включення в той чи інший розподілений параметр: в інтенсивність розподіленої маси $m(x)$, жорсткість $EI(x)$ під час згинання стержня [7, 8].

Для введення зосереджених включень в аналітичні вирази розподілених параметрів використовуються сингулярні функції. Тому диференціальні рівняння форм коливань мають сингулярні коефіцієнти [8].

Аналогічний метод використовуємо для визначення значення взаємодії колод у штабелі круглих лісоматеріалів, які вирівняні за довжиною. В певному перетині система колод утворює "балку" з певними пружними зв'язками між собою і навантаженнями зверху, рис. 1.



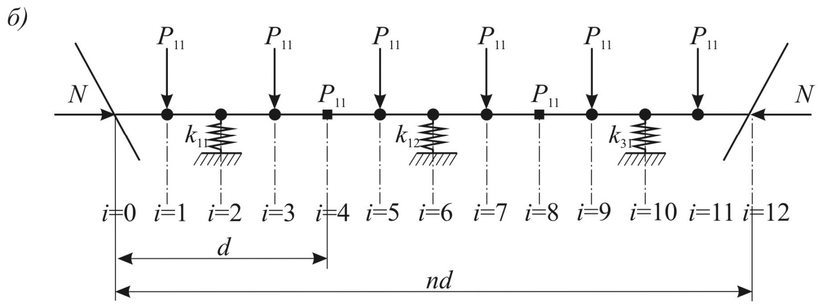


Рисунок 1 – Модель взаємодії колод: а – $n = 4$; б – $n = 3$

Диференціальні рівняння згинання “балки” містять імпульсні функції до 4-го порядку включно. Проміжні параметри, які входять в розв’язки цих рівнянь і відображають наявність включень, виключаються з допомогою рекурентних співвідношень. При цьому розв’язок має єдиний аналітичний вираз у всій області зміни аргументу і виражається тільки через початкові параметри і деякі функції впливу, які є узагальненими функціями Крилова.

Зосереджені навантаження на “балкову систему” в проекції на вісь x по всій довжині “балки” зобразимо навантаженнями P_i і моментами M_i, які прикладені до центральної осі. Величина цих сил залежатиме від кількості рядів балок, що знаходяться зверху “балочної системи”.

Зв’язки між колодами, які утворюють “балку”, зобразимо включеннями в пружну жорсткість “балки” типу пружних шарнірів, див. рис. 1. Вони вводяться як включення в згинальну жорсткість одномірної стержневої системи за довжиною “балки”. Припустимо, що згинальна жорсткість $EI(x)$ незмінна всередині кожної ділянки і однакова для всіх ділянок за $x \neq x_i$ та дорівнює еквівалентній жорсткості EI_0, а за $x = x_i$ має особливості. При цих включеннях згинальний момент і поперечна сила є неперервні функції x [8].

Величина зосереджених навантажень і моментів залежатиме від кількості рядів сортиментів над “балкою” та від типу “балки”, стійкість якої розглядаємо. Якщо виключити проміжні параметри у включеннях типу шарнірів, то прогини і кути повороту будуть розривними функціями, але моменти і перерізуючі сили неперервні.

Зосереджені сили P_i і моменти Q_i приведемо до певних аргументів та вважатимемо їх величину рівною $\frac{P_i n_i}{n}$.

Виклад основного матеріалу. Побудова математичної моделі для балки змінного перетину.

Розглянемо “балку”, яка навантажена розподіленим навантаженням інтенсивності q, рис. 2.

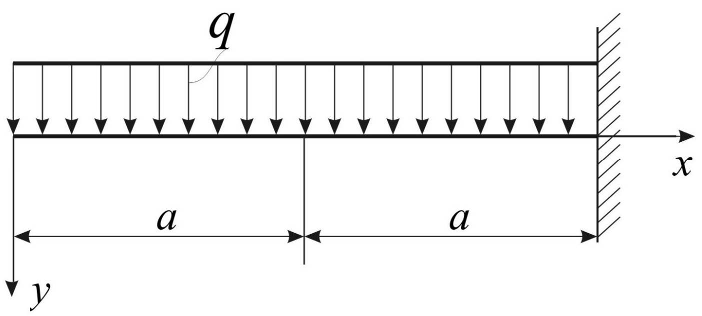


Рисунок 2 – Схема навантаження балки рівномірно розподіленим навантаженням

Диференціальне рівняння зігнутої осі “балки” наступне

$$\left[EI(x)\upsilon''\right] = q(x), \tag{1}$$

Якщо маємо стержень змінної жорсткості, наприклад кусково-сталої, то

$$EI(x) = EI_0\left[1 + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - x_i)\right], \tag{2}$$

де EI_0 – жорсткість за $0 < x < x_1$;

α_i – параметр стрибка $EI(x)$ в перетині $x = x_i$.

Продиференціюємо ліву частину рівняння, що виражає інтенсивність довільного навантаження, прикладеного в точці $x = x_i$, і отримаємо

$$\upsilon^{IV} + 2\frac{I'(x)}{I(x)}\upsilon''' + \frac{I''(x)}{I(x)}\upsilon'' = \frac{q(x)}{EI(x)}, \tag{3}$$

Позначимо $2\frac{I'(x)}{I(x)}\upsilon''' + \frac{I''(x)}{I(x)}\upsilon'' = A$.

Якщо $I(x)$ має стрибки в перетинах $x = a_i$, то $I(x) = I_0\left[1 + \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)\right]$,

тоді

$$A = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{2\upsilon'''\sigma_1(x - a_i) + \upsilon''\sigma_2(x - a_i)}{1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)}. \tag{4}$$

Згинальний момент $M(x)$ можна виразити через жорсткість і другу похідну переміщення наступним чином

$$EI_0\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)\right]\upsilon'' = -M(x),$$

тому

$$\upsilon'' = \frac{-M(x)}{EI_0\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)\right]}.$$

Третя похідна переміщення виражається через перерізуючу силу $Q = M'(x)$ та момент наступним чином

$$\upsilon''' = -\frac{2Q(x)}{EI_0\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)\right]} + \frac{\sum\alpha_i M(x)\sigma_1(x - a_i)}{EI_0\left[1 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_i)\right]^2}.$$

Тоді

$$A = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{EI_0}\frac{2Q(x)\sigma_1(x - a_i) + M(x)\sigma_2(x - a_i)}{\left[1 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sigma_0(x - a_j)\right]^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{EI_0}\frac{M(x)\sigma_1^2(x - a_i)}{\left[1 + \sum_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x - a_j)\right]^3}. \tag{4}$$

Враховуючи, що з властивостей функцій $\sigma_1(x - a_i)$, $\sigma_2(x - a_i)$,

$$\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sigma_0(x-a_j)\right]^{-2}\sigma_1(x-a_i)=\frac{\sigma_1(x-a_i)}{(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j)(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j)},\tag{5}$$

$$\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sigma_0(x-a_i)\right]^{-2}\sigma_2(x-a_i)=\frac{\sigma_2(x-a_i)}{(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j)(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j)}+$$

$$+2\alpha_j\left[\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\sigma_0(x-a_j)\right]^{-3}\sigma_1^2(x-x_i),$$

вираз для A приймає вигляд

$$A=-\frac{2Q(x)}{EI_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_i\sigma_1(x-x_i)}{(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j)(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j)}-\frac{M(x)}{EI_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\sigma_2(x-x_i)}{(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j)(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j)}\tag{6}$$

За умови, що $Q(x)$ і $M(x)$ є неперервними в точках стрибків жорсткості x_i, з властивості $\sigma_1(x)=\sigma_0'(x)$ випливає

$$Q(x)\sigma_1(x-x_i)=Q(x_i)\sigma_1(x-x_i);$$

$$M(x)\sigma_2(x-x_i)=M(x_i)\sigma_2(x-x_i)-Q(x_i)\,\sigma_1(x-x_i).$$

Отримаємо

$$A=-\frac{1}{EI_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\lfloor Q(x_i)\,\sigma_1(x-x_i)+M(x_i)\,\sigma_2(x-x_i)\rfloor}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}\tag{7}$$

При цьому рівняння зігнутої осі “балки”, з зовнішніми силами N, запишеться у вигляді

$$EI_0\upsilon^{IV}+\frac{N\upsilon''}{\lfloor 1+\Sigma\alpha_i\sigma_o(x-x_i)\rfloor}=\frac{q(x)}{1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_o(x-x_i)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\lfloor Q(x_i)\sigma_1(x-x_i)+M(x_i)\sigma_2(x-x_i)\rfloor}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right)\left(1+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j\right)}.\tag{8}$$

Враховуючи неперервність, замість $M(x_i)$, $Q(x_i)$ можна взяти $M(x_i-0)$, $Q(x_i-0)$ або $M(x_i+0)$, $Q(x_i+0)$, хоча похідна υ'' розривна, а υ''' має особливості в точках $x=x_i$, оскільки $I(x)$ терпить розриви неперервності 1-го роду

$$Q(x_i-0)=-EI_0\upsilon''(x_i-0)\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right);\quad Q(x_i-0)=-EI_0\upsilon'''(x_i-0)\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_j\right). \quad (9)$$

Тоді рівняння (7) запишемо у вигляді

$$\upsilon^{\mathrm{IV}}+\frac{N}{EI_0\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x-x_i)\right]}\upsilon''=\frac{q(x)}{EI_0\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_0(x-x_i)\right]}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j}\left[\upsilon'''(x_i-0)\,\sigma_1(x-x_i)+\upsilon''(x_i-0)\,\sigma_2(x-x_i)\right]. \quad (10)$$

Розподілену інтенсивність навантаження $q(x)$ можна представити так

$$q(x)=\sigma_*(x)\left[1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sigma_0(x-x_i)\right], \quad (11)$$

де $\sigma_*(x)$ – неперервна функція в точках $x=x_i$ (i=1, 2, …, n). Функція $q(x)$ має розриви неперервності 1-го роду, які визначаються параметрами стрибків β_i. З властивостей добутку функції Хевісайда $\sigma_o(x-x_i)$

$$\left[1+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\sigma_o(x-x_i)\right]\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_o(x-x_i)\right]^{-1}=1+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sigma_o(x-x_i), \quad (12)$$

де $\gamma_i=\left(1+\sum_{i=1}^{i}\beta_i\right)\left(1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)^{-1}-\left(1+\sum_{i=1}^{i-1}\beta_i\right)\left(1+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_i\right)^{-1}$.

Якщо в перетині $x=x_i$ прикладені зосереджені сили P_i і моменти M_i, то рівняння згину стиснутої силою “балки” буде мати вигляд

$$\upsilon^{\mathrm{IV}}+\frac{N\upsilon''}{EI\left[1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\sigma_0(x-x_j)\right]}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i\sigma_1(x-x_{i-0})+M_i\sigma_2(x-x_{i-0})}{\left[1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\sigma_o(x-x_i)\right]}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i\left[\upsilon'''(x_i-0)\sigma_1(x-x_i)+\upsilon''(x_i-0)\sigma_2(x-x_i)\right]}{1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j}+\frac{\sigma_*(x)}{EI}\left[1+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\sigma_0(x-x_i)\right]. \quad (13)$$

Якщо $\sigma_*(x)=0$, то рівняння (11) запишеться

$$\upsilon^{\mathrm{IV}}+\frac{N\upsilon''}{EI_0\left[1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\sigma_o(x-x_i)\right]}=\frac{1}{EI_0}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{P_i\sigma_1(x-x_i)}{\left(1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}+\frac{M_i\sigma_2(x-x_i)}{\left(1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}\right]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1+\sum_{j=1}^{i}\alpha_j}\left[\upsilon'''(x-0)\sigma_1(x-x_i)+\upsilon''(x_i-0)\sigma_2(x-x_i)\right]. \qquad (14)$$

Таким чином, отримано рівняння “балки” змінної жорсткості під час дії зовнішніх стискуючих сил N та зосереджених в точках x_i сил і моментів.

Висновки. На основі розроблених моделей отримано рівняння “балкової системи” з включеннями в розподілену жорсткість, а також з навантаженнями типу зосереджених сил і моментів. Це рівняння є основним для дослідження втрат стійкості “балкової системи” під дією навантаження зовнішніми силами N.

Звернемо увагу, що при нумерації точок неоднорідностей, точки прикладення сил і моментів не співпадають з точками стрибків жорсткості “балки”. Необхідно також розрізняти зосереджені включення в згинальну жорсткість “балки” і в жорсткість основи (в даній задачі не розглядається).

Список літератури

1. Метод определения параметров грейфера для бревен с помощью теории размерности [Текст] / С. Д. Парамонов, В. Ф. Ильин // Механизация погрузочно-разгрузочных работ. – Химки, 1972. – С. 77–80. – (Труды / ЦНИИМЭ; вып. 124).

2. Бакай Б. Я. Гидроманипулятор как незаменимый элемент производственного процесса [Текст] / Б. Я. Бакай // Оборудование и инструмент для профессионалов. – Харьков : ЧФ ЦентрИнформ, 2005. – Вып. 12 (71) – С. 46–52.

3. Таубер Б. А. Грейферные механизмы [Текст] / Б. А. Таубер. – [3-е изд., перераб.]. – М. : Машиностроение, 1985. – 272 с.

4. Wang J. Effects of Tong Shapes on Hydraulic Log Grapple's Performance in

Loading and Unloading Operations [Text] / Jingxin Wang // International Journal of Forest Engineering: Forest Products Society. – Madison, WI, USA, January 2003. – Vol. 14, No. 1. – 59–66 p.

5. Исследование давления в штабелях круглых лесоматериалов на парные вертикальные элементы [Текст] / Е. Н. Быков, В. И. Игнатов // Механизация погрузочно-разгрузочных работ. – Химки, 1972. – С. 66–69. – (Труды / ЦНИИМЭ ; вып. 124).

6. К вопросу о распределении внешней сжимающей нагрузки внутри беспрокладочого штабеля [Текст] / В. Е. Игутов // Вопросы механизации лесозаготовок. – Химки, 1968. – С. 100–111. – (Труды / ЦНИИМЭ ; вып. 91).

7. Конашенко С. И. О расчете балок, имеющих упругие шарниры и лежащих на упругом основании с двумя характеристиками [Текст] / Конашенко, С. И. // Исследования колебаний подвижного состава: сб. науч. тр. / ДИИТ / – Днепропетровск, 1977. – Вып. 190/23. – С. 37–48.

8. Лазарян В. А. Обобщенные функции в задачах механики [Текст] / В. А. Лазарян, С. И. Конашенко. – К. : Наукова думка, 1974. – 192 с.

Аннотация

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРУГЛЫХ ЛЕСОМАТЕРИАЛОВ В ШТАБЕЛЕ.

Б. Я. Бакай

Рассмотрены вопросы взаимодействия круглых лесоматериалов в штабеле. Построено уравнение системы круглых лесоматериалов с включениями в распределенную жесткость, а также с нагрузками типа сосредоточенных сил. Для ввода сосредоточенных включений в аналитические выражения распределенных параметров использованы сингулярные функции.

Abstract

MATHEMATICAL MODEL OF THE INTERACTION OF ROUND TIMBER IN THE STACK.

B. Ya. Bakay

The problem of the interaction of round timber in the stack has been considered. Built mathematical model of the system is constructed of round timber with inclusions in a distributed stiffness, as well as the type of loads concentrated forces. A singular functions have been used to focus inclusion in the analytical expressions of distributed parameters