

ОБГРУНТУВАННЯ МОДИФІКАЦІЇ МЕТОДУ МІНІМУМУ ПОТЕНЦІАЛЬНОЇ ЕНЕРГІЇ ДЕФОРМАЦІЇ (ММПЕД)

Рибак Т.І., д.т.н., проф.; Довбуш Т.А., магістр; Цьонь Г.Б., аспірант
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

У статті обґрунтовано модифікацію методу мінімуму потенціальної енергії деформації. Отримані результати дозволяють зробити висновок про те, що застосовуючи ММПЕД для визначення невідомих величин, можна використовувати лише потенціальну енергію деформації кручення, що значно спрощує аналітичні формули.

Рама є основою будь-якої мобільної машини. Весь спектр статичних та динамічних навантажень від всіх складових вузлів машини акумулюються в ній. В більшості с/г машинах рама виконується конструктивно, без достатніх аналітичних розрахунків, з подальшим удосконаленням [1]. Розрахунок рамних конструкцій - це складовий аналітично-графічний процес. Складність полягає в тому, що будь-яка рама плоска чи просторова складається з численних замкнутих контурів, в кожному з яких при довільному зовнішньому навантаженні виникає 6-ть внутрішніх силових факторів, визначення яких з рівнянь статички неможливе, рис. 1.

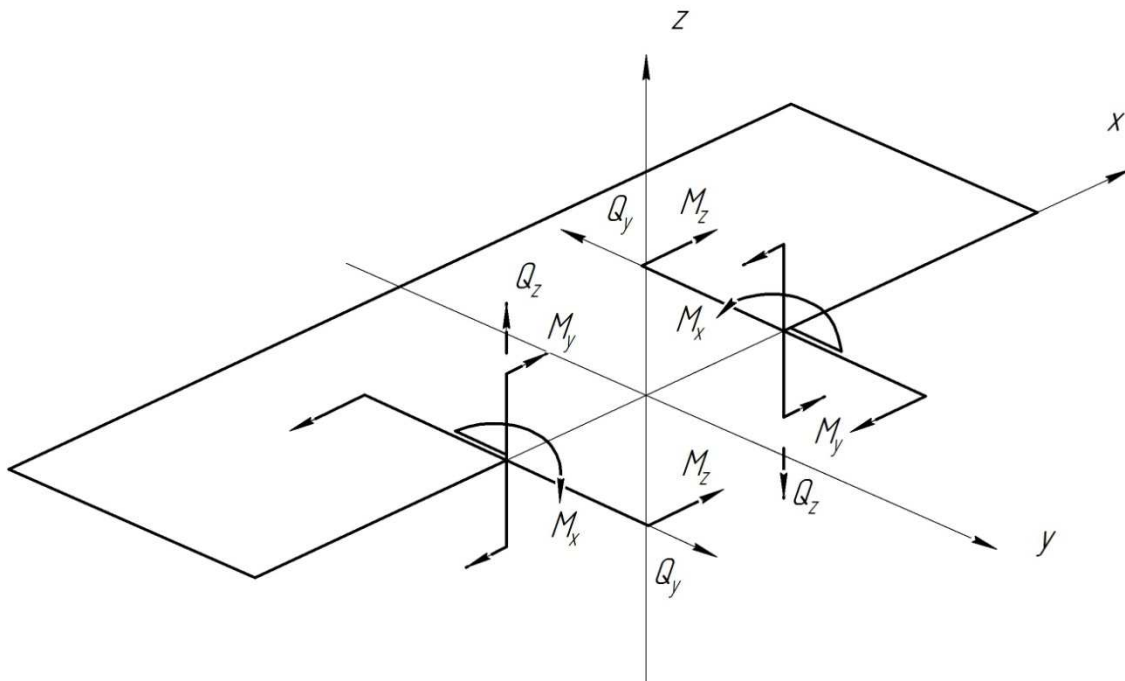


Рисунок 1 - Контур рами

Розрахунок таких рамних конструкцій методом сил чи переміщень методикою викладеною в курсах "Опір матеріалів" фактично неможливо. У сучасній інженерній практиці, в зв'язку з розвитком комп'ютерної техніки та розробкою універсальних прикладних програм, використовуються розрахункові

моделі побудовані за методом кінцевих елементів (МКЕ). Такі розрахунки з визначення напружено-деформованого стану (НДС) складних конструктивних структур суттєво прискорюються. Все це робить метод кінцевих елементів найбільш універсальним, що відповідає, в значній мірі, вимогам до розрахунку будь-яких базових несучих систем. Однак, поглиблений аналіз отриманих результатів приводить до висновків, що МКЕ забезпечує отримання значень внутрішніх силових факторів, переміщень та інших характеристик у вузлах кінцевих елементів локально, але не враховує вплив змін перепадів жорсткостей на деформовану несучу систему в цілому.

Переваги МКЕ у порівнянні із традиційними числовими методами полягають у простоті алгоритмізації, можливості повної автоматизації складання рівнянь і отримання результатів для будь-яких складних комбінованих систем [2]. В роботах [3], [4] проведено дослідження напружено-деформованого стану у рамних конструкціях методом кінцевих елементів і експериментальним (тензOMETричним). Результати в деяких випадках відрізняються на 30-40 %.

Тому є необхідність проводити перевірку результатів розрахунків які отримані МКЕ класичними аналітичними дослідженнями. Для розрахунку таких систем є більш доступний метод мінімуму потенціальної енергії деформації (ММПЕД) [5], хоча без його спрощення (модифікації) використовувати складно. У загальному випадку потенціальна енергія деформації плоских просторово-навантажених конструкцій рам запишеться:

$$U_0 = U_K + U_{M_x} + U_{M_y} + U_{M_z} + U_{Q_y} + U_{Q_z} + U_N, \quad (1)$$

де $U_K = \sum \int \frac{[K]^2}{2GI_k} ds$ - потенціальна енергія деформації кручення елементів;

$$U_{M_y} = \sum \int \frac{[M_y]^2}{2EI_y} ds, \quad U_{M_z} = \sum \int \frac{[M_z]^2}{2EI_z} ds$$
 - потенціальна енергія від згинальної

деформації елементів відносно осей у та z;

$$U_{Q_y} = \sum \int \frac{[Q_y]^2}{2GF} ds, \quad U_{Q_z} = \sum \int \frac{[Q_z]^2}{2GF} ds$$
 - потенціальна енергія деформації

елементів рами від зрізу вздовж осей у та z;

$$U_N = \sum \int \frac{[N]^2}{2GF} ds$$
 - потенціальна енергія деформації елементів рами від

розтягу-стиску;

K - вирази крутних моментів кожного елемента конструкції;

M_y, M_z - вирази згинальних моментів кожного елемента конструкції;

Q_y, Q_z - вирази перерізуючих сил кожного елемента конструкції;

N - вирази нормальних сил кожного елемента конструкції;

I_y, I_z - осьові моменти інерції поперечного перетину елементів профілю

рамної конструкції;

I_K - момент інерції поперечного перетину при крученні профілю рамної конструкції;

E - модуль пружності, для сталей $E=2 \cdot 10^5$ МПа;

G - модуль зсуву, для сталей $G=8 \cdot 10^4$ МПа;

F - площа поперечного перетину.

Для одного замкнутого контура просторово навантаженої рами виразів внутрішніх силових факторів буде, як мінімум 24. Рамна конструкція може складатися від 1-го контура до декількох десятків. Безумовно скласти таку кількість виразів складно, а обробити їх, тобто, визначити невідомі величини є громіздким аналітично-розрахунковим процесом. Ставимо за мету модифікувати ММПЕД. Розглянемо на деяких прикладах якими складовими повної потенціальної енергії деформації можна знехтувати.

В роботі [6] розглянуто розкриття статичної невизначеності плоскої рами навантаженою просторовою системою сил, рис.2.

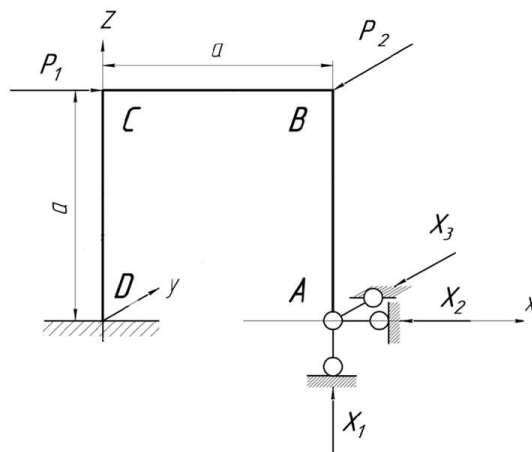


Рисунок 2 - Схема рами:

$P_1=1000\text{H}$; $P_2=1500\text{H}$; $a=1\text{м}$; швелер №10; $F=12,74 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $I_K=2,727 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$;
 $I_y=198,3 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $I_z=25,6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $G=8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Повна потенціальна енергія деформації конструктивної системи

$$U = U_K + U_M + U_Q + U_N, \quad (2)$$

де $U_K = \int_0^a \frac{[X_3 \cdot a]^2}{2GI_K} ds + \int_0^a \frac{[X_3 \cdot a + P_2 \cdot a]^2}{2GI_K} ds$ - потенціальна енергія деформації від кручення;

$$U_M = \int_0^a \frac{[X_2 \cdot s]^2}{2EI_z} ds + \int_0^a \frac{[X_3 \cdot s]^2}{2EI_y} ds + \int_0^a \frac{[X_2 \cdot a - X_1 \cdot s]^2}{2EI_z} ds + \int_0^a \frac{[X_3 \cdot s + P_2 \cdot s]^2}{2EI_y} ds +$$

$$\int_0^a \frac{[P_1 \cdot s + X_2 \cdot a - X_1 \cdot a - X_2 \cdot s]^2}{2EI_z} ds + \int_0^a \frac{[X_3 \cdot a - X_3 \cdot s + P_2 \cdot s]^2}{2EI_y} ds -$$

потенціальна енергія деформації згину;

$$U_Q = \int_0^a \frac{[X_2]^2}{2GF} ds + \int_0^a \frac{[X_3]^2}{2GF} ds + \int_0^a \frac{[X_3 + P_2]^2}{2GF} ds + \int_0^a \frac{[X_1]^2}{2GF} ds + \int_0^a \frac{[P_1 - X_2]^2}{2GF} ds + \int_0^a \frac{[P_2 + X_2]^2}{2GF} ds -$$

потенціальна енергія від зрізу;

$$U_N = \int_0^a \frac{[X_1]^2}{2EF} ds + \int_0^a \frac{[X_2]^2}{2EF} ds + \int_0^a \frac{[X_1]^2}{2EF} ds - \text{потенціальна енергія розтягу-стиску.}$$

Використовуючи ММПЕД з системи рівнянь $\frac{dU}{dX_1} = 0$, $\frac{dU}{dX_2} = 0$, $\frac{dU}{dX_3} = 0$, визначаємо величини X_1 , X_2 та X_3 для 5-и варіантів. Аналітичні вичислення проводимо за допомогою пакету прикладних програм (ППП) MatLab. Результати заносимо в порівняльну таблицю 1.

Таблиця 1 – Результати обчислень за допомогою пакету прикладних програм

Силіві характеристики	Варіант				
	I $U_I = U_K + U_M + U_Q + U_N$	II $U_{II} = U_K + U_M + U_N$	III $U_{III} = U_K + U_M$	IV $U_{IV} = U_K$	V $U_V = U_M$
X_1 , Н	544,96	545,30	545	0	545,45
X_2 , Н	227,11	227,34	227,27	0	227,27
X_3 , Н	-750,008	-750,01	-750	-750	-750

Аналізуючи результати вичислень, робимо висновки:

1. Потенціальними енергіями деформацій від зрізу та розтягу-стиску можна нехтувати, похибка у визначенні невідомих складає 0,063%- 1.3%.
2. Якщо елементи конструкції сприймають потенціальну енергію деформації кручення, то вона є домінуючою для даної металоконструкції і складає 98,5% від сумарної енергії.
3. Для визначення невідомих, які в металоконструкції викликають деформацію кручення, є доцільним використовувати лише потенціальну енергію кручення. Похибка при визначенні X_3 відсутня.

На даному прикладі показано, що ММПЕД можна модифікувати, тобто записувати потенціальну енергію деформації лише кручення, що суттєво зменшить і спростить аналітичні вирази, а саме $U=U_K$.

В наступному прикладі розглянемо плоску конструктивну систему (рис.3), яка складається з 2-х частин. Зосередженні зовнішні навантаження на раму в цілому проводиться з врахуванням їх асиметрії, тобто $P_i \neq P_i^l$. У зв'язку з тим, що зовнішнє навантаження діє перпендикулярно до площини рами, а дією тягової сили на розподіл внутрішніх силових факторів в ній нехтуємо, тому згинальні моменти, поперечні та нормальні сили в горизонтальних площинах приймаємо рівними нулю. Таким чином у поперечному перерізі рами залишаються три невідомі: загальний крутний момент K ; згинальний момент

М, загальна поперечна сила Q - що діє у площині перпендикулярній до рами. Після прийнятих допущень та узагальнень, а також враховуючи, що кінці рами, з'єднані з корпусом причепа, який вільно переміщається один відносно одного, отримаємо 3 рази статично невизначену систему.

Потенціальна енергія деформації розглядуваної конструктивної системи у такому випадку запишеться у формі суми потенціальних енергій двох її частин:

$$U = U_I + U_{II}, \quad (3)$$

де $U_I = U_{IM} + U_{IK}$ - потенціальна енергія деформації згину та кручення елементів першої частини рами;

$U_{II} = U_{IIM} + U_{IIC}$, - потенціальна енергія деформації згину та кручення елементів другої частини рами.

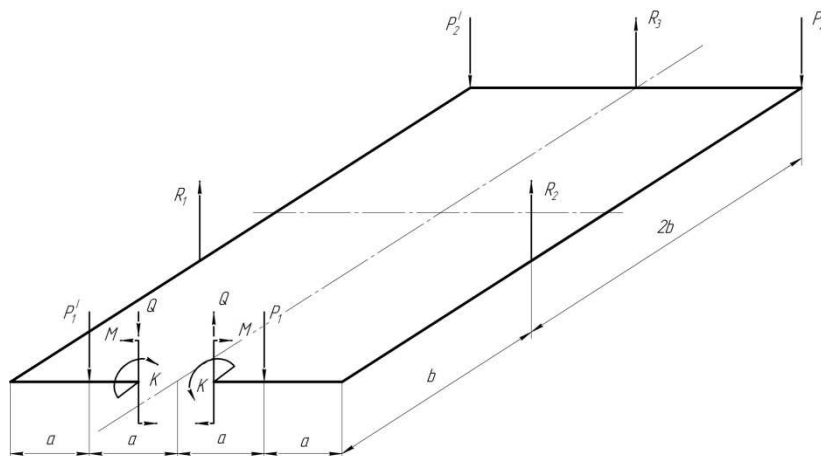


Рисунок 3 - Схема рами:

$P_1=10000\text{H}$; $P_2=15000\text{H}$; $P_1^I=7500\text{H}$; $P_2^I=12500\text{H}$; $R_1=11250\text{H}$; $R_2=15000\text{H}$;
Швелер №12; $I_K=3,634 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $I_0=304 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $E=2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$; $G=8 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$.

Потенціальна енергія деформації правої частини рамної конструкції від згину:

$$U_{IM} = \int_0^a \frac{[M+Q \cdot s]^2}{2EI_0} ds + \int_0^a \frac{[M+Q \cdot a+Q \cdot s-P_1 \cdot s]^2}{2EI_0} ds + \int_0^b \frac{[K+Q \cdot s-P_1 \cdot s]^2}{2EI_0} ds +$$

$$\int_0^{2b} \frac{[K+Q \cdot b+Q \cdot s-P_1 \cdot b-P_1 \cdot s+R_2 \cdot s]^2}{2EI_0} ds + \int_0^{2a} \frac{[-M-2Q \cdot a+P_1 \cdot a+R_2 \cdot s-P_1 \cdot s+Q \cdot s-P_2 \cdot s]^2}{2EI_0} ds.$$

$$U_{IK} = \int_0^{2a} \frac{[K]^2}{2EI_K} ds + \int_0^{3b} \frac{[M+2Q \cdot a-P_1 \cdot a]^2}{2GI_K} ds + \int_0^{2a} \frac{[K+3Q \cdot b-3P_1 \cdot b+R_2 \cdot 2b]^2}{2GI_K} ds.$$

Потенціальна енергія деформації лівої частини рамної конструкції від згину:

$$U_{\text{ІІМ}} = \int_0^a \frac{[M - Q \cdot s]^2 ds}{2EI_0} + \int_0^a \frac{[M - Q \cdot a - Q \cdot s - P_1' \cdot s]^2 ds}{2EI_0} + \int_0^b \frac{[-K - Q \cdot s - P_1' \cdot s]^2 ds}{2EI_0} +$$

$$+ \int_0^{2b} \frac{[-K - Q \cdot b - Q \cdot s - P_1' \cdot b - P_1' \cdot s - R_1 \cdot s]^2 ds}{2EI_0} +$$

$$+ \int_0^{2a} \frac{[-M + 2Q \cdot a + P_1' \cdot a + R_1 \cdot s - P_1' \cdot s - Q \cdot s - P_2' \cdot s]^2 ds}{2EI_0}.$$

Потенціальна енергія деформації лівої частини рамної конструкції від кручення:

$$U_{\text{ІІК}} = \int_0^{2a} \frac{[-K]^2 ds}{2EI_K} + \int_0^{3b} \frac{[-M + 2Q \cdot a + P_1' \cdot a]^2 ds}{2GI_K} + \int_0^{2a} \frac{[K + 3Q \cdot b + 3P_1' \cdot b - R_1 \cdot 2b]^2 ds}{2GI_K}.$$

Використовуючи ММПЕД, а саме $\frac{dU}{dM} = 0$, $\frac{dU}{dK} = 0$, $\frac{dU}{dQ} = 0$, визначаємо M,

K, Q для двох випадків. В першому випадку $U = U_{\text{ІМ}} + U_{\text{ІК}} + U_{\text{ІІМ}} + U_{\text{ІІК}}$, для другого випадку $U = U_{\text{ІК}} + U_{\text{ІІК}}$. Для порівняння результатів вичислення внутрішніх силових факторів рами проводимо розрахунок за допомогою ППП Ліра-9,2. Результати вичислень занесені в таблицю 2.

Таблиця 2 – Результати порівняння ви числення внутрішніх силових факторів рами

Розміри рами	Згин+кручення			Кручення			ППП Ліра 9.2		
	М, Н · м	К, Н · м	Q, Н	М, Н · м	К, Н · м	Q, Н	М, Н · м	К, Н · м	Q, Н
a=0,3м b=0,4 м	2613,0	-197,8	305,2	2625	-187,5	312,5	2600	-204	283
a=0,2м b=0,6 м	1746,0	-201,8	169,5	1750	-173	192,3	1725	-191	187
a=0,1м b=0,4 м	873,0	-117,6	134,0	875,0	-93	155,7	850	-98	143

Висновок

Елементи рамної конструкції рис.3 сприймають деформації кручення та згину. Оцінюючи отримані результати (таблиця 2) приходимо до висновку, що використовуючи ММПЕД для визначення невідомих величин, можна використовувати лише потенціальну енергію деформації кручення, що значно спрощує аналітичні формули.

Список літератури

1. Рамы сварные сельськохозяйственных машин. Конструктивно-технологическое проектирование. - Москва: 1983.-114 с.
2. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
3. Черников С.А., Садчиков К.В. О достоверности расчетных оценок НДС рамы грузового автомобиля / Проблемы машиностроения и надежность машин, 1998. – №3. – С. 117-121.
4. Вырский А.Н. Исследование нагруженности рамных конструкций // Тракторы и сельхозмашины, 1990. - № 11. – С. 26 – 27.
5. Рыбак Т.І. Пошукове конструювання на базі оптимізації ресурсу мобільних сільськогосподарських машин. – Тернопіль: "Збруч", 2002. – 332 с.
6. Довбуш Т.А. Розкриття статичної невизначеності плоскої рами навантаженою просторовою системою сил.// III Всеукраїнська студентська науково-технічна конференція "Природничі та гуманітарні науки. Актуальні питання." Збірки тез. Том1.-Тернопіль.- ТДТУ,2010.-с.192.
7. Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц. Справочное пособия по сопротивлению материалов.- Минск : "Вышэйшая школа", 1970. - 640 с.

Аннотация

ОБОСНОВАНИЕ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ (ММПЕД)

Рыбак Т.И., Довбуш Т.А., Цень Г.Б.

В статье обоснована модификация метода минимума потенциальной энергии деформации. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что применяя ММПЕД для определения неизвестных величин, можно использовать только потенциальную энергию деформации кручения, что значительно упрощает аналитические формулы.

Abstract

JUSTIFY MODIFICATION METHOD OF MINIMUM POTENTIAL ENERGY OF DEFORMATION (MMPED)

T. Rybak, T.Dovbush, A. Tsion

In the article the modified method of minimum potential energy of deformation. These results suggest that using MMPED to determine the unknown quantities, you can only use the potential energy of deformation torsion, which greatly simplifies the analytical formulas.