Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Харківський державний університет харчування та торгівлі

М. І. ПОГОЖИХ М. М. ЦУРКАН А. О. ПАК Ж. В. ВОРОНЦОВА

ФІЗИКА

Навчальний посібник

Харків

2012

УДК 53.008
ББК 22.3 (075.8)

Ф-93
Рецензенти:
д-р біол. наук, проф. В. Г. Кнігавко;
д-р техн. наук, проф. В. О. Потапов.

Рекомендовано вченою радою Харківського державного університету харчування та торгівлі, протокол № 9 від 31.05.2012 р.

Ф-93 **Погожих, М. І.** Фізика [Текст] : навчальний посібник / М. І. Погожих, М. М. Цуркан, А. О. Пак, Ж. В. Воронцова ; Харк. держ. ун-т харч. та торгівлі. – Х., 2012. – 466 с.

ISBN

Навчальний посібник спрямований на поглиблення розуміння фізичних явищ, які є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність майбутнього інженера.

Посібник складається з 7 розділів, в яких викладені основи механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електростатики, електродинаміки, електромагнетизму, хвильової оптики, квантової природи випромвнювання, фізики атомів і молекул, фізики атомного ядра та елементарних частинок.

В посібнику наведені приклади розв’язання типових задач. Навчальне видання комплектується оптичним носієм з його електронною версією, до якої внесено відеоролики з візуалізацією фізичних експериментів.

УДК 53.008
ББК 22.3 (075.8)

ISBN

ЗМІСТ

1. Фізичні основи механіки

5. Хвильова оптика

6. Квантові властивості випромінювання

1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. Кінематика матеріальної точки

Вступ

Фізика – універсальна наука про основні явища природи, які цією наукою відокремлюються та описуються за допомогою уявлень, моделей та законів у вигляді математичних формул та рівнянь. Фізика вивчає фундаментальні "структури всесвіту", досліджує гармонічний зв'язок між ними, тому фізичні уявлення можуть бути абстрактними й не завжди наочними. Фізичні уявлення – кількісні, тому невід'ємним є математичне формулювання зв'язків між ними.

Фізична наука є базою для розвитку інших наук у тому числі й для інженерних (прикладних).

Основа методів пізнання опирається на три основні положеннях у сучасній науці:

1. Усе в світі є матерією поза залежністю від почуттів та розуміння людини.
2. Основна властивість матерії – рух.
3. Матерія і форми її руху пізнані людиною.

У природі існує багато форм прояву руху матерії: механічний, електричний, електромагнітний, хімічний, психічний, біологічний та інші.

Будь-який фізичний процес відбувається у просторі та часі. Простір і час мають певну властивість, яку називають симетрією: одне й теж явище за збіжних умов може бути повторене з однаковим результатом. Цей, на перший погляд, зрозумілий принцип є одним з основних проявів природи, що відомі людині. Саме це надало можливості проводити експериментальні дослідження з подальшим їх узагальненням для всієї природи.

Найпростіший фізичний процес це механічний рух. Розглянемо основні методи його опису та закони, яким він підпорядковується.

1.1.1. Механіка. Поступальний рух. Кінематика поступального руху

Механічним рухом називається переміщення тіл, або частин того ж самого тіла в просторі та часі відносно один одного.

Розділ Фізики, що вивчає механічний рух називається механікою. Механіка поділяється на кінематику, динаміку та статику. Кінематика вивчає рух поза залежністю від причин, що спричиняють цей рух.

Спочатку наведемо уявлення про основних "учасників" механічного руху, а саме про їх моделі:

Абсолютно тверде тіло – будь-яке за природою та сполукою тіло, геометрична форма і розміри якого в процесі механічного руху не змінюються.

Абсолютно пружне тіло – будь-яке тіло, що приймає первісні геометричну форму і розміри після зняття механічної дії.

Матеріальна точка – будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даного механічного руху можна знехтувати. Знехтувати геометричним розміром можна, якщо максимальний розмір даного тіла хоча б у десять разів менше за мінімальний розмір того простору, де відбувається рух.

Необхідно особливо звернути увагу на те, що перелічені уявлення – універсальні і не мають ніякого відношення до якогось конкретного тіла: теж саме тіло може бути абсолютно твердим, або пружнім залежно від умов механічного руху.

Самі тіла можуть складати одне ціле, що називається механічною системою.

Механічна система – будь-який набір взаємодіючих чи не взаємодіючих тіл що рухаються, штучно відокремлених у просторі. Механічна система може рухатися або знаходитися у спокої відносно інших механічних систем або тіл. Тому сам механічний рух носить відносний характер.

Якщо під час руху усі точки, що належать тілу або механічній системі описують у просторі рівнобіжні незамкнені лінії, то такий рух називають *поступальним.*

Для того щоб змінити будь-який рух треба виконати певну дію. У разі механічного руху такою дією є механічна дія.

Механічна дія – будь-яка взаємодія двох чи декількох тіл, що приводить до зміни механічного руху.

Описати механічний рух означає у будь-який момент часу знайти місце розташування тіла або системи тіл у просторі. Тому уявлення про простір та час є дуже важливими у фізиці. Насамперед, розглянемо яким чином можна вказати де знаходиться тіло. Для цього використовують так звану систему відліку.

1.1.2. Система відліку. Переміщення. Довжина шляху. Швидкість. Прискорення. Нормальне, тангенціальне, повне прискорення

Система відліку складається з тіла відліку, жорстко закріпленої до нього системи координат, та годинника.

Саме тіло, обрана система координат (декартова, сферична, полярна та інші) знаходяться у просторі та часі. Тому треба накласти деякі вимоги до простору та часу. Уявлення про простір та час є такими ж фізичними, як і для інших об'єктів. Дослід свідчить, що для повної характеристики місця знаходження точки у просторі відносно будь-якого іншого тіла треба задати три відстані до неї – три координати. З цього простір вважається трьохмірним. Далі треба встановити: чи змінюється довжина відрізку у різних частинах простору? Ми будемо вважати, що простір, де будемо розглядати рух є однорідним та ізотропним, тобто це *евклідовий простір* – рівнобіжні лінії не перетинаються. Питання про те, яка геометрія реально існуючого простору – це питання фізичне, а відповідь на нього можна отримати лише експериментальним шляхом. Таку ж саму вимогу застосуємо й для часу: у будь-якій системі відліку час є однорідним.

Розглянемо яким чином описується рух матеріальної точки у декартовій системі координат (рис.1.1). У деякий момент часу точка А має координати: x, y, z. Задавши величини кожної координати, можна однозначно характеризувати розташування точки відносно початку координат (тіла відліку). Прямокутна система координат пов’язана з полярною співвідношенням:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти одиничної довжини за координатами.

Через деякий час Δt точка, описавши у просторі лінію, зміститься у положення В (рис.1.2). Лінія, уздовж якої рухається матеріальна точка, називається *траєкторією*. Ділянка траєкторії за час Δt, що проходить точка, називається *довжиною шляху* S.

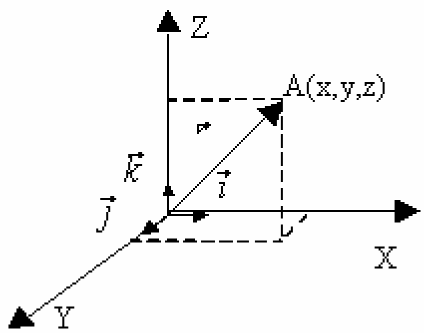


Рис.1.1

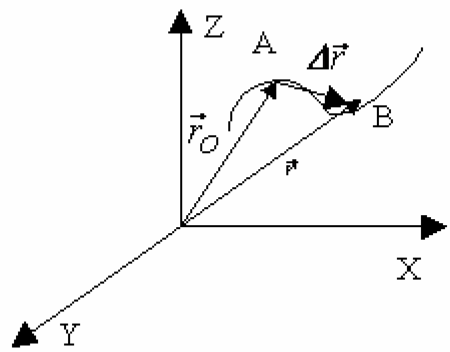


Рис.1.2

Вектор, що з'єднує початкове і кінцеве положення точки на траєкторії називається *переміщенням*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0\,. \tag{1.2}$$

Модуль переміщення $|\Delta\vec{r}|$ менше або дорівнює довжині шляху (у випадку прямолінійного руху).

Середня швидкість – це векторна величина, яка характеризує деякий середній темп руху:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}\,. \tag{1.3}$$

За умов $\Delta t \to 0$, $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$ – рух прямолінійний, тому можна ввести уявлення про миттєву швидкість:

Миттєва швидкість – векторна величина. Це швидкість точки у певний момент часу за величиною і напрямком:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.4}$$

швидкість вимірюється – $[v]_{SI} = м/с$.

Середнє прискорення скалярна величина, яка характеризує середній темп зміни швидкості:

$$< a >= \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|v_1 - v|}{\Delta t}, \tag{1.5}$$

прискорення вимірюється – $[a]_{SI} = м/с^2$.

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{1.6}$$

Повне прискорення характеризує темп зміни швидкості як за величиною, так і за напрямком (рис.1.3):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Перша складова (тангенціальне прискорення) відповідає за зміну величини швидкості, а вектор $\vec{a}_\tau$ співпадає з напрямком швидкості. Друга складова – ($\vec{a}_n$), нормальне прискорення, характеризує зміну напрямку швидкості і спрямована перпендикулярно до вектора швидкості:

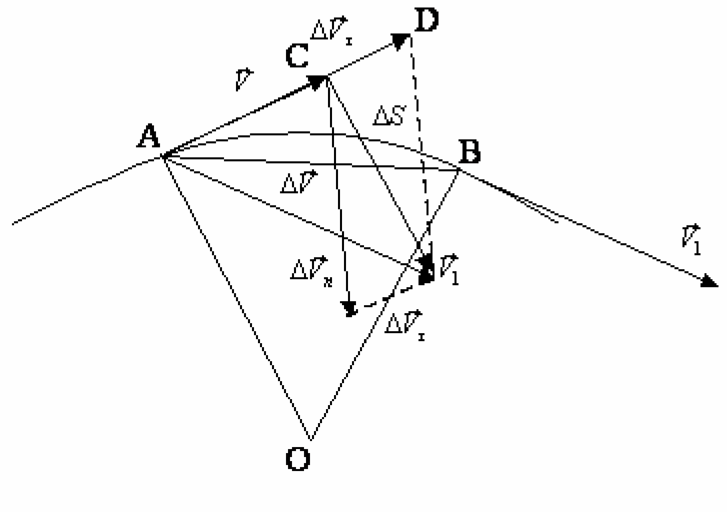


Рис.1.3

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.8}$$

Величина повного прискорення знаходиться за теоремою Піфагора, а напрямок залежить від величин векторів:

$$|a| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.9}$$

Тангенс кута між напрямком швидкості і повним прискоренням знаходиться:

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}. \tag{1.10}$$

Нормальне прискорення знаходиться за формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \tag{1.11}$$

де $R = OA$ – радіус кривизни траєкторії у заданій точці.

У загальному випадку, прискорення може бути деякою функцією часу, тобто змінюватися за якимось законом:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = f(t). \qquad (1.12)$$

Тоді швидкість буде визначатися:

$$d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt = f(t) \cdot dt. \qquad (1.13)$$

Якщо $a \neq f(t)$, тобто є сталою величиною, тоді:

$$\vec{v}(t) = \int d\vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt = \vec{a} \int dt = \vec{a} \cdot t + \vec{C}, \qquad (1.14)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t, \qquad (1.15)$$

де $\vec{v}_0 = \vec{C}$.

Отримаємо формулу для довжини шляху. На підставі (1.4):

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt},$$
$$dS = v \cdot dt,$$
$$S = \int dS = \int v \cdot dt = \int (v_o \pm at) \cdot dt,$$

Тоді:

$$S = v_o t \pm \frac{at^2}{2}. \qquad (1.16)$$

Якщо вектора швидкості і прискорення співпадають за напрямком, то обирається знак "+", а якщо спрямовані протилежно – знак "–".

Співвідношення (1.15) та (1.16) – *основні рівняння кінематики* поступального руху матеріальної точки при сталому прискоренні.

Якщо точка рухається у просторі, то кожна з складових швидкості за координатами може змінюватися за своїм законом, що відбивається у *принципі незалежності руху:*

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z, \tag{1.17}$$

де $\vec{v}$ – результуюча швидкість у просторі.

Число ступенів вільності – число незалежних координат, за допомогою яких можна описати усі види руху, у яких бере участь тіло або точка. Це уявлення дуже важливе не тільки під час розгляду механічного руху, а й взагалі: наприклад, під час розгляду молекулярно-кінетичної теорії будови речовини.

1.2. Динаміка матеріальної точки

1.2.1. Перший закон Ньютона. Інерційні системи відліку

Динаміка вивчає рух у зв'язку з причинами, що спричиняють цей рух. Але саме уявлення про механічний рух носить відносний характер, тобто у різних

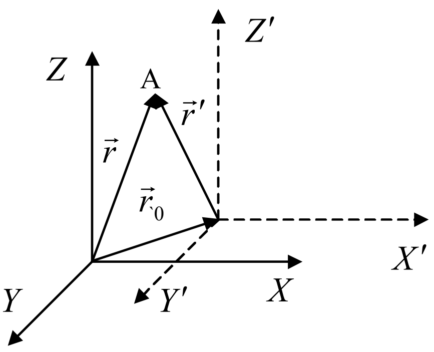


Рис.1.4

ати різний характер руху. Наприклад, на столі столу цей предмет знаходиться у спокої, але, то відносно спостерігача предмет буде теж іна? Розв'язання цього питання дуже важливе е середовище. Зі спостерігань відомо, що будь- спокою або прямолінійного рівномірного (без овго, якщо на це тіло не діють інші тіла або середовище. Цей досвід дозволяє вважати, що стан спокою або прямолінійного рівномірного руху є властивістю тіл. Щоб змінити цей стан треба прикласти певну дію, тобто тіла нібито мають "пам'ять" про стан спокою або прямолінійний рівномірний рух. Таку властивість тіл було названо інерцією. Саме це уявлення є основою для І-го закону Ньютона. *1-ий закон Ньютона: будь-яке тіло рухається прямолінійно і рівномірно або знаходиться в стані спокою нескінченно довго, поки до нього не прикладено механічної дії.*

Цей важливий закон дає змогу відокремити такі системи відліку, де будь-який рух буде виглядати однаково: якщо тіло знаходиться у стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно, та, якщо тіло рухається з прискоренням, то такий же характер руху буде у будь-якій системі відліку, якщо ці системи відліку є *інерційними*.

Інерційні системи відліку – ті, які рухаються відносно один одного рівномірно і прямолінійно або знаходяться в стані спокою. На рис.1.4 зображено дві системи відліку, одна з яких (штрихована) може рухатися. Так ось ці системи відліку будуть називатися інерційними, якщо штрихована система буде рухатися рівномірно та прямолінійно, або знаходитися у стані спокою. При цьому виконуються перетворення:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}, \vec{a}' = \vec{a}, \tag{1.18}$$

де $\vec{V}$ - швидкість руху штрихованої системи (закон додавання швидкостей).

Перетворення Галілея, що відбиває принцип відносності у класичній механіці:

$$\vec{r}' = \vec{r}_o + \vec{V} \cdot t, t' = t. \tag{1.19}$$

З перетворень Галілея витікає вимога до "миттєвої" взаємодії тіл між собою, бо якщо припустити, що взаємодія відбувається з деякою певною швидкістю, то спостерігач у рухомій системі відліку може не "встигнути" зафіксувати результат взаємодії тіл. Тому вважається, що у класичній (ньютонівській) механіці має місце *дальнодія.*

1.2.2. Другий закон Ньютона. Поняття сили, маси. Третій закон Ньютона

Для зміни характеру руху точки треба спричинити механічну дію. Для характеристики, та чисельної оцінки механічної дії запроваджено уявлення про силу. *Сила* – векторна величина, що характеризує механічну дію за величиною та напрямком. У природі існує багато видів сил, які тим чи іншим способом можуть змінювати рух тіла. Незважаючи на різноманітність, більшість сил мають однакові властивості, що є універсальними.

Типи та властивості сил:

Зосереджені, такі сили прикладаються до тіла у якійсь точці та вони мають лінію дії. Зосереджену силу можна переносити уздовж лінії дії, якщо вона прикладена до абсолютно твердого тіла. При цьому результат її дії не зміниться: що тягнути тіло, що штовхати – результат однаковий.

Розподілені, тобто дія їх розподілена за яким-небудь законом уздовж поверхні або в об’ємі. У цьому випадку прийнято говорити про тиск, або механічне напруження. Величина тиску (напруження) визначається як відношення сили, що діє по нормалі до поверхні, до площини поверхні. Якщо розподілена сила рівномірно прикладена до поверхні твердого або нестисливого тіла, то у певних перерізах площини цього тіла механічна напруга (тиск) є сталою величиною. На цьому принципі працюють багато механічних пристроїв. Так дію сили можна передати за допомогою, наприклад, рідини (гідропідсилювачі). Аналогічний принцип втілено у канцелярську кнопку, де збільшення сили натиску відбувається у стільки разів, у скільки площина кнопки більша за площину її гострої частини.

Окремо наводиться уявлення про так зване силове поле. *Силове поле* – простір, у кожній точці якого діє визначена за величиною, напрямком та природою сила. Це дуже важливе уявлення коли треба розглядати дію між тілами, які безпосередньо не торкаються одне одного. Тобто силове поле виступає у якості деякого "посередника" дії. Властивості силових полів будуть розглянуті на прикладі сил гравітації, електричної, магнітної взаємодії.

Ньютон емпіричним шляхом, та узагальненням набутого людиною досвіду, запропонував принцип прямо пропорційної залежності між причиною (силою) та наслідком цієї причини (прискоренням):

$$\vec{a} = k\vec{F}\,. \qquad (1.20)$$

Питання про коефіцієнт пропорційності не є тривіальним. Але у класичній механіці вважається, що цей коефіцієнт обернено пропорційний масі тіла (інерційній масі). З великою точністю доведено, що інерційна та гравітаційна маси збігаються, але самі уявлення про них різні. *Маса* – є властивістю тіл, що мають різку границю розділу з оточуючим середовищем. Ця властивість має два прояви – інерцію та гравітацію. Більш точного уявлення про масу (у рамках класичної механіки) запровадити неможливо. Тоді k – міра інерційних властивостей тіл:

$$k = \frac{1}{m}, \qquad (1.21)$$

де $[k]_{SI} = кг^{-1}$.

Остаточно, II закон Ньютона виглядатиме:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (1.22)$$

де

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\,. \qquad (1.23)$$

Матеріальна точка набуває прискорення уздовж результуючої усіх сил, що діють на точку, величина якого прямо пропорційна величині сили та обернено пропорційна масі точки.

Цей закон виконується для системи матеріальних точок, де $\vec{F}$ – результуюча $\vec{F}_i$ сил, що діють на матеріальну точку масою m_i.

З якою силою можна подіяти на інше тіло? На власному досвіді можна переконатися, що тільки з тією, з якою те тіло буде діяти на нас. Цей факт, що є також одним з проявів природи, відбито у III-ому законі Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \tag{1.24}$$

III-й закон Ньютона: Усякій дії існує рівна за величиною і протилежна за напрямком протидія.

1.2.3. Імпульс. Основний закон руху. Закон збереження імпульсу

Сила, що діє певний відрізок часу, призводить до зміни швидкості, тобто до зміни кількості руху. Розглянемо цей факт детальніше, використавши II закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}\,, \tag{1.25}$$

з чого отримаємо:

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt\,. \tag{1.26}$$

У класичній механіці вважається, що маса не залежить від швидкості руху тіла - $m \neq f(t)$, тоді:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot dt \tag{1.27}$$

Імпульс матеріальної точки, векторна величина:

$$\vec{P}_i = m_i\vec{v}\,. \tag{1.28}$$

Закон руху: кожна сила, що діє на матеріальну точку призводить до зміни імпульсу з часом.

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F} \qquad (1.29)$$

Імпульс тіла – сума імпульсів усіх точок, що утворюють це тіло:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i \,. \qquad (1.30)$$

Якщо розглядати механічну систему, що складається з матеріальних точок, то на кожну точку будуть діяти зовнішні сили (з боку оточуючого середовища) та внутрішні – взаємодія між матеріальними точками.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,зовн} + \sum_{i=1,k=1}^{l,S} \vec{F}_{i,k}^{\,внут} \,. \qquad (1.31)$$

Використовуючи ІІІ закон Ньютона, отримаємо:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}\,, \text{ або } \sum_{i=1,k=1}^{l,S} \vec{F}_{i,k}^{\,внут} = 0 \,. \qquad (1.32)$$

Тоді у загальному вигляді головний вектор зовнішніх сил є:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,зовн} = \vec{F} \,. \qquad (1.33)$$

Основний закон динаміки поступального руху для механічної системи або тіла.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} . \qquad (1.34)$$

Якщо $\vec{F} = 0$, механічна система називається *замкненою,* тобто, зовнішні сили або не діють, або їх результуюча дорівнює нулю, тоді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 . \qquad (1.35)$$

Закон збереження імпульсу: імпульс механічної замкненої системи з часом не змінюється.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m\vec{v} = const . \qquad (1.36)$$

Для механічної системи, де зосереджені різні тіла, частини тіл або ціле тіло, запроваджується уявлення про *центр інерції* або *центр мас.*

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i}{m_T} = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot r_i , \qquad (1.37)$$

де $g_i = \frac{m_i}{m_T}$ – масова частка даної частини тіла від загальної маси тіла.

З цього уявлення доводиться закон руху центра мас тіла, що має вигляд:

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \vec{F} . \qquad (1.38)$$

Якщо $\vec{F} = 0$, тоді виконується закон:

$$\vec{P}_c = const. \tag{1.39}$$

$\dfrac{d\vec{P}_c}{dt} = 0$ *– закон збереження імпульсу центру мас.*

За цим законом можна розраховувати рух частин механічної системи будь-яких розмірів у будь-який момент часу.

1.2.4. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл

Розглядаючи дію сили було встановлено:

$$d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt\,, \tag{1.40}$$

де $\vec{F} \cdot dt$ – імпульс сили. Тобто імпульс можна змінювати не тільки силою, але її дією з часом.

Крім того, сила може діяти під час руху тіла на деякому протязі шляху. Тоді кажуть про роботу сили. Елементарна робота dA знаходиться як:

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F \cdot dr \cdot \cos\alpha\,, \tag{1.41}$$

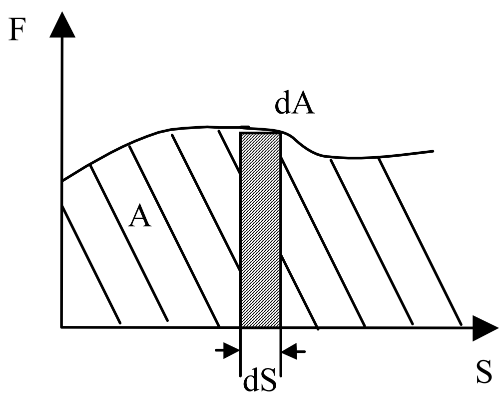


Рис.1.5

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і $d\vec{r}$, вимірюється $[dA]_{SI} = Н \cdot м = Дж$.

Повна робота знаходиться як криволінійний інтеграл функції діючої сили по траєкторії руху і є площею, що обмежена кривою $F(r)$ та віссю S (рис.1.5).

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr \cdot \cos\alpha \,. \qquad (1.42)$$

Властивості роботи:

1. $dA = 0$, якщо $\alpha = 90^o = \frac{\pi}{2}$. Сила, що діє під таким кутом називається *нормальною (центральною)*. При дії нормальної сили робота не здійснюється.

2. Робота може бути позитивною, $dA > 0$, якщо $0 < \alpha < \pi/2$. Тоді робота здійснюється *над тілом*, а сила називається прискорюючою.

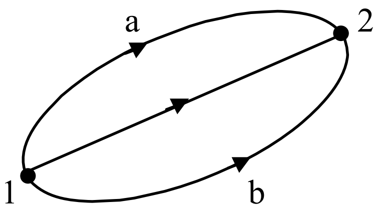


Рис.1.6

3. Робота може бути негативною, $dA < 0$, якщо $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Тоді робота *виконується тілом*, а сила називається гальмуючою.

Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла на траєкторії (рис.1.6) називаються *консервативними.* Поле консервативних сил має назву *потенціального*.

$$dA_a = dA_b = dA_{12} \,. \qquad (1.43)$$

Поняття енергії пов'язане з уявленням про роботу. При цьому сама енергія виступає як кількісна міра руху матерії. Щоб змінити енергію потрібно виконати роботу над системою чи тілом, або створити умови для здійснення роботи системою над зовнішнім середовищем. Але це не єдиний спосіб змінити енергію, бо видів енергії, як і форм руху, існує нескінченна безліч.

Енергія ділиться:

- за видами у зв’язку з природою руху: механічна, електрична, электро-механічна, ядерна та ін.;

- за характером щодо механічного руху: *кінетична, потенційна;*

- за відношенням до системи, що розглядається: *внутрішня,* яка характеризує енергію руху і взаємодії часток самої системи; *зовнішня,* яка характеризує енергію системи в цілому, в тому числі її енергію у зовнішньому силовому полі; *повна* – сума внутрішньої і зовнішньої енергії системи.

1.2.5. Кінетична енергія тіла. Властивості кінетичної енергії

Продовжуючи розглядати механічний рух, зосередимо увагу на уявленні про енергію саме цього руху. Для цього виконаємо деякі перетворення з тими уявленнями та законами, що було вже запроваджено:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\frac{d\vec{P}}{dt} \cdot d\vec{r}), \quad d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt\,,$$

тоді

$$dA = (\frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt) = v \cdot dP = v \cdot d(mv), \tag{1.44}$$

тому що $\alpha = \vec{F} \overset{\wedge}{\ } \vec{v}, \alpha = 0$, $m \neq f(v)$, тоді $dA = mv \cdot dv$, з цього

$$A = m\int v \cdot dv = \frac{mv^2}{2} + C\,. \tag{1.45}$$

Тобто у тіла з'явилася швидкість завдяки роботі, що витрачено на зміну енергії тіла:

$$A = \Delta E_k\,, \tag{1.46}$$

де

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \cdot \left(v_2^2 - v_1^2\right). \tag{1.47}$$

Кінетична енергія – міра руху тіла з деякою швидкістю.

Властивості кінетичної енергії:

1. $E_k \geq 0$ – завжди, при цьому:

$E_k = 0$ – якщо швидкість руху в даній системі відліку дорівнює нулю;

$E_k > 0$ – якщо швидкість руху в даній системі відліку відмінна від нуля.

Зміна ΔE_k може бути, як позитивною, так і негативною, і визначається знаком роботи що змінює цю енергію.

2. Кінетична енергія має відносний характер, оскільки швидкість – уявлення відносне і залежить від вибору системи відліку.

1.2.6. Тіло у силовому полі. Потенційна енергія та її властивості

Ми вже визначились, що поле сил це спосіб існування матерії, який можна виявити за допомогою "індикатора" (пробника). Сам пробник повинен збігатися за своєю природою з полем, що виявляється. Тобто, розташувавши такий пробник у силовому полі, ми знайдемо дію на даний пробник деякої сили з боку поля. Величину цієї сили можна визначити механічним шляхом (динамометром), але природа сили визначається тільки природою самого пробника.

Потенційна енергія – це енергія, пов'язана з місцем розташування тіла (або пробника) у даному місці силового поля. Тому не тільки тіло, а й саме поле може мати потенційну енергію. Величина потенційної енергії визначається як робота, яку потрібно виконати під час переміщення тіла (пробника) з даної точки в нескінченність:

$$E_n = A_{1\infty},\ dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \tag{1.48}$$

якщо $\vec{F}$ – сила самого поля, тоді зв'язок між силою, що діє у полі, та потенціальною енергією поля наступний:

$$dE_n = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}), або\ \vec{F} = -\frac{dE_n}{dr}, \quad (1.49)$$

$$\vec{F} = -gradE_n, \quad (1.50)$$

де

$$gradE_n = \frac{\partial E_n}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (1.51)$$

У силового поля є здатність накопичувати потенційну енергію. Силове поле – це згусток енергії.

Потенційна енергія, на відміну від кінетичної, може бути позитивною і негативною, тому що вона пов'язана з місцем розташування тіла, тобто залежить від вибору початку відліку у системі відліку.

1.2.7. Закон збереження і перетворення механічної енергії

Повна механічна енергія системи – це енергія руху системи в цілому, включаючи потенційну енергію системи у силовому полі:

$$E = E_k + E_n. \quad (1.52)$$

Повну механічну енергію системи можна змінити також тільки за рахунок роботи з боку зовнішніх тіл;

Якщо на дану систему не діють зовнішні сили, то повна енергія буде зберігатися – *закон збереження механічної енергії:*

$$E = E_k + E_n = const. \quad (1.53)$$

Сили, що діють проти руху, називаються *силами тертя*. Вони призводять до розсіювання (дисипації) повної механічної енергії. У цьому випадку відбувається перетворення енергії з "корисних" форм у "менш корисні" (марні).

Енергія, що розсіяна силами тертя, ніколи не може самовільно перетворитися знов у механічну. Найчастіше спостерігається теплове перетворення механічної енергії за рахунок сил тертя, з якими ми познайомимося пізніше. Робота сил тертя залежить від швидкості руху і завжди протилежна напрямку руху. Тобто, сили тертя є неконсервативними, а силові поля, що подібні за характером до таких сил є непотенціальними. Тому в загальному випадку кажуть про закон збереження і перетворення енергії:

Енергія не звідкіля не виникає і нікуди не зникає, а лише перетворюється з одних видів в інші.

Як правило, напрямок цього перетворення завжди однаковий – з "корисних" форм у "марні" форми енергії.

Особливо необхідно відзначити, що названі закони збереження (імпульсу, енергії) є відбиттям нашого уявлення про час і простір: саме з однорідних властивостей часу й простору, майже "автоматично", виникає вимога для існування законів збереження, які є фундаментом у будь якій науці про природу.

1.2.8. Фундаментальні сили. Їх властивості

Вже відзначалося, що у класичній механіці вважається, що взаємодія між тілами відбувається миттєво: *теорія дальнодії*. Але, після відкриття існування електромагнітного поля, було встановлено, що максимальна швидкість "передачі" взаємодії обмежена деякою константою c, і з цією швидкістю поширюється світло у вакуумі $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. На цій підставі розроблено *теорію близькодії*. Після появи уявлень про квантову побудову силового поля, було зазначено, що будь-якому силовому полю повинна відповідати якась квантова частинка – *корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей матерії (квантова теорія поля)*. Не зважаючи на різноманітність взаємодій між фізичними тілами, сьогодні вони поділяються на чотири основні види (за мірою зростання інтенсивності): гравітаційна взаємодія; слаба взаємодія; електромагнітна взаємодія; сильна взаємодія. *Гравітаційна* взаємодія має прояв у тому, що будь-які тіла, поза залежністю від природи, електричного заряду між собою притягаються. *Слаба* взаємодія – має дуже складну природу та має прояв при розгляді взаємодії та перетворень у світі елементарних частинок. *Електромагнітна* взаємодія – відбивається у взаємному перетворенні змінних електричних та магнітних полів, та впливу на ці перетворення заряджених частинок. *Сильна* взаємодія – обумовлює такі стійкі утворення у "мікросвіті" як ядра атомів та має теж дуже складну природу.

Усі сили, поза залежністю від природи та типу взаємодії поділяються на два основні види: сили притягання та відштовхування. Окремо необхідно відзначити найпоширеніші сили – сили тертя (опору). Саме ці прояви взаємодії людина може експериментально вимірювати, тобто давати чисельну оцінку самої сили. Розглянемо деякі найпоширеніші у природі сили та їх властивості.

1.2.9. Сили пружності. Закон Гука. Енергія пружно-деформованого тіла

Під дією сили, тіло, що знаходиться у стані спокою, може змінювати свої геометричні розміри. Процес руху часток того ж самого тіла відносно одна одної будемо називати *деформацією*. Внутрішні сили, що виникають під час деформації, називаються силами *пружності*. Сили пружності виступають у якості перешкоди до деформування тіла й завжди направлені проти зовнішніх сил. Сили пружності обумовлені електромагнітною взаємодією частинок (молекул та ін.), що входять до складу та визначають геометричну форму тіла.

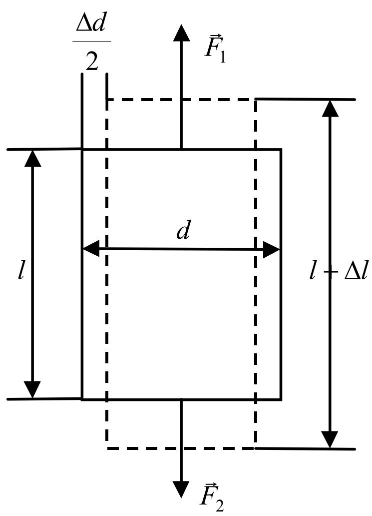


Рис.1.7

Якщо прикласти до циліндру, який виготовлено з металу, силу (рис.1.7), то під дією цієї сили буде спостерігатися деформація. При цьому, запроваджують такі уявлення:

σ – напруга, Н/м^2;

$$\frac{F}{S_0} = \sigma; \tag{1.54}$$

ε – подовжня відносна деформація:

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}; \tag{1.55}$$

ε' – поперечна відносна деформація:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta S}{S}. \tag{1.56}$$

Зв’язок між подовжньою та поперечною деформацією визначається за *формулою Пуассона*:

$$\varepsilon = -\mu \cdot \varepsilon', \tag{1.57}$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, який відбиває фізичну властивість тіла до деформації.

У деякому діапазоні напруги виконується прямо пропорційна залежність між величиною напруги та відносною деформацією тіла. Тоді виконується закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{1.58}$$

де E – *модуль Юнга*, Н/м^2.

Виконаємо перетворення. З того, що $\sigma = \frac{F}{S}$, отримаємо

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l},$$

або

$$F = \frac{E \cdot S}{l} \cdot \Delta l. \qquad (1.59)$$

Якщо замінити $\Delta l = x$ – абсолютна деформація, то

$$\vec{F} = kx \cdot \vec{i}, \qquad (1.60)$$

де $\vec{i}$ – орт уздовж напрямку деформації, $\vec{F}$ – сила деформації.

Закон Гука: Сила пружності прямо пропорційна величині абсолютної деформації тіла.

Закон Гука для сили пружності:

$$\vec{F}_n = -kx \cdot \vec{i}, \qquad (1.61)$$

де $\vec{F}_n$ – сила пружності, k – коефіцієнт пружності, Н/м.

Цей закон виконується для абсолютно пружних тіл. Пружні властивості будь-яких тіл зручно аналізувати за діаграмою пружних властивостей (рис.1.8).

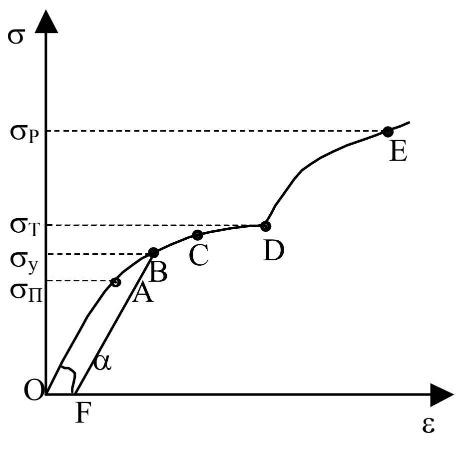


Рис.1.8

Немає напруги σ – немає деформації, що відповідає точці O на діаграмі. Далі, ділянка OA, де виконується прямолінійна залежність між напругою та відносною деформацією, відповідає абсолютно пружному тілу. σ_n – межа прямо пропорційної залежності між напругою та відносною деформацію.

Точці B відповідає *межа пружності*. Після зняття напруги, з цієї точки тіло повертається за прямою лінією FB, але спостерігається залишкова деформація (OF).

Лінія BCD – *область пластичності, плинності* тіла. На цій ділянці виконуються закони внутрішнього тертя, а саме тіло здатне змінювати геометричну форму при малих величинах напруги.

Точка E – *межа міцності*. У цій точці тіло втрачає пластичні властивості й відбувається руйнування цілісності тіла.

Умовно, усі тіла можна поділити залежно від того, є чи немає певної області даного виду деформації. Так, якщо у тіла відсутня область пластичності, таке тіло вважається *крихким*, а якщо відсутня область пружності – *пластичним*, та ін.

Сили пружності можна вважати консервативними, тоді існує зв'язок між потенціальною енергією та силою у вигляді:

$$\vec{F} = -gradE_n, \tag{1.62}$$

або, у разі деформації повздовж однієї координати

$$F_y = \frac{dE_n}{dx}. \tag{1.63}$$

З цього:

$$dx \cdot F_y = dE_n\ ; \quad E_n = \int kx \cdot dx, \quad E_n = \frac{kx^2}{2}. \tag{1.64}$$

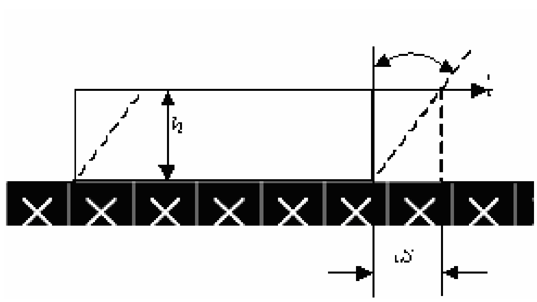


Рис.1.9

За формулою (1.64) можна визначити потенційну енергію пружно-деформованого тіла.

Для багатьох матеріалів, у тому числі й для харчових продуктів, відокремлюють *пружність зсуву*. Якщо одна площина тіла стикається з нерухомою твердою поверхнею, а до іншої прикласти тангенціальну напругу, то тіло буде деформуватись, як на (рис.1.9). Існує взаємозв'язок між кутом зсуву та величиною тангенціальної сили:

$$F_\tau = k_\tau \cdot tg(\gamma), \tag{1.65}$$

де k_τ - коефіцієнт пружності зсуву, Н.

1.2.10. Закон всесвітнього тяжіння. Потенційна енергія тіла, що підняте над Землею. Вага тіла

Будь-які тіла, що мають інерційну масу, взаємодіють між собою (тяжіють один до одного). Така взаємодія називається *гравітаційною.* Ньютоном запропоновано *закон всесвітнього тяжіння* записати у вигляді:

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{1.66}$$

де G = 6,67·10-11 м3/(кг·с2) – гравітаційна стала, r – відстань між центрами мас.

Два тіла, поза залежністю від свого складу та середовища, у якому вони знаходяться, завжди взаємно тяжіють із силою, прямо пропорційною добутку мас цих тіл і обернено пропорційною квадрату відстані між центрами цих тіл.

Закон всесвітнього тяжіння обумовлює тяжіння тіл до Землі:

$$F = G\frac{M_З \cdot m_m}{(R_З + h)^2}, \tag{1.67}$$

де h – відстань, на якій тіло знаходиться над Землею. Якщо тіло розташоване поблизу до поверхні Землі, то $h << R_З$, тоді:

$$F = G\frac{M_3}{R_3^2} \cdot m = m \cdot a\,, \tag{1.68}$$

де $a = g$, $g = 9{,}81$ м/с^2 - *прискорення вільного падіння*. Величина g залежить від широти місцевості, тому що Земля не є ідеальною кулею: відстань від полюсів до центра менша за відстань від екватора до центра Землі.

Гравітаційне поле є потенціальним, тому:

$$\vec{F} = -gradE_n\,. \tag{1.69}$$

Якщо розглядати тільки координату h – висота над Землею, на якій знаходиться тіло, та вважати що з висотою потенційна енергія зменшується, то будемо мати:

$$F = \frac{dE_n}{dh}\,, \tag{1.70}$$

з цього

$$dE_n = F \cdot dh\,, \tag{1.71}$$

тоді

$$E_n = \int mg \cdot dh = mgh + C\,. \tag{1.72}$$

Вважається, що на поверхні Землі при $h = 0$, $C = 0$, тоді потенційна енергія тіла, що знаходиться над Землею на висоті $h << R_з$:

$$E_n = mgh\,. \tag{1.73}$$

З висотою, прискорення вільного падіння зменшується.

Щоб тіло не рухалось вздовж координати h, треба встановити для нього опору. Використовуючи III закон Ньютона запроваджують уявлення про вагу:

вага (P) – реакція опори чи підвісу на силу тяжіння. У загальному випадку вага залежить від прискорення, з яким рухається тіло з опорою відносно напрямку прискорення вільного падіння. При цьому:

$$P = m(g \pm a), \tag{1.74}$$

знак "+" обирається, коли прискорення спрямовано проти, а "–", коли прискорення спрямовано вздовж напрямку $\vec{g}$. Коли $a = g$, то тіло начебто вільно падає разом з опорою, тоді кажуть про *невагомість.* Якщо тіло рухається проти сили тяжіння, то кажуть про *перевантаження*. Перевантаження часто виміряють у одиницях g. Пристрої, що імітують перевантаження за рахунок обертального руху, називають *центрифугами*, де відцентрова сила, обумовлена нормальним прискоренням, придавлює тіло до стінки центрифуги. Це явище використовується для штучної сепарації рідинних або газових сумішей, що складаються з речовин або часток з різною густиною.

1.2.11. Сила тертя, види тертя

Для того щоб тіло, яке лежить на площині (рис.1.10), почало рухатися, треба прикласти силу, щоб компенсувати *силу тертя спокою*. Але й подальший рух пов'язаний з дією сил тертя. Відрізняють такі основні види тертя:

сухе (зовнішнє) тертя – сила тертя між площинами двох тіл, що стикаються між собою;

внутрішнє тертя – тертя, що виникає унаслідок відносного руху шарів цілого тіла.

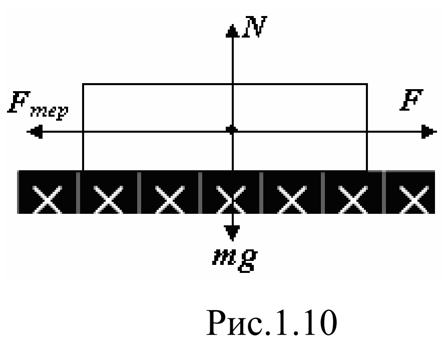


Рис.1.10

Зовнішнє тертя (сухе і гідромеханічне) поділяється на: тертя *ковзання* F_c, тертя *кочення* F_k, тертя *кручення* $F_в$. Між величинами цих сил, за звичайних умов, виконується співвідношення:

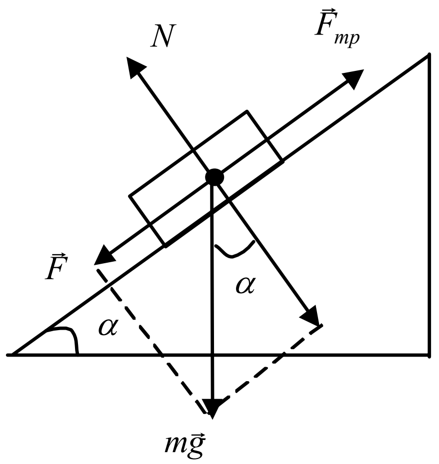


Рис.1.11

$$F_c > F_k > F_в\,. \tag{1.75}$$

Тому в машинах та апаратах завжди намагаються використовувати пристрої, які забезпечили б заміну тертя ковзання на інші види сухого тертя. Щоб зменшити силу тертя ковзання вживають різні мастила, тоді кажуть про *гідродинамічне тертя.*

У загальному вигляді (рис. 1.11) сили тертя підпорядковуються формулі:

$$F_{тр} = f \cdot N\,, \tag{1.76}$$

де N – реакція опори, f – коефіцієнт тертя.

На нахиленій площині можна визначити коефіцієнт тертя, як

$$f = tg\alpha\,, \tag{1.77}$$

де α - кут нахилу площини, при якому тіло починає ковзати по нахиленій площині.

Внутрішнє тертя буде розглянуте в інших розділах.

1.3. Кінематика і динаміка обертального руху твердого тіла

1.3.1. Елементи кінематики обертального руху. Кутова швидкість і прискорення. Зв'язок кутових кінематичних характеристик з лінійними швидкостями і прискореннями точок, що належать тілу

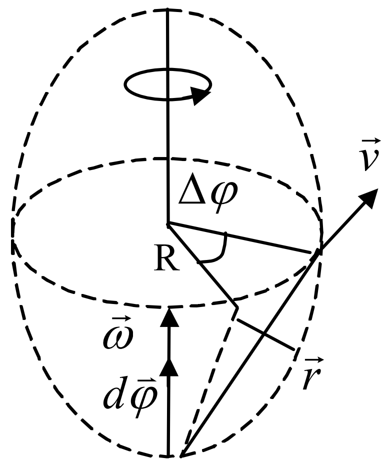


Рис.1.12

Обертальний рух відносно нерухомої вісі – це такий рух, при якому усі точки абсолютно твердого тіла описують кола, центри яких лежать на нерухомій прямій, що називається віссю обертання.

Для опису кінематики матеріальної точки, що здійснює обертальний рух, необхідно, як і в кінематиці поступального руху, увести такі поняття як кутове прискорення і кутова швидкість.

Нехай матеріальна точка, що належить твердому тілу, рухається по колу з радіусом R (рис.1.12). Її положення на колі через малий проміжок часу задамо кутом $\Delta\varphi$. Треба відзначити, що лінійна швидкість точок, які обертаються по іншому радіусі буде відрізняться від тих, що знаходяться на відстані R. Але усі точки об'єднує параметр $\Delta\varphi$. Тоді запровадимо уявлення про кутову швидкість: *кутовою швидкістю* називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \tag{1.78}$$

Напрямок векторів $\vec{\omega}$ та $\Delta\vec{\varphi}$ задається правилом гвинта: вектор кутової швидкості збігається за напрямком з поступальним рухом вістря гвинта, голівка якого обертається в напрямку руху точки по колу (рис.1.13). Кутова швидкість розраховується за формулою:

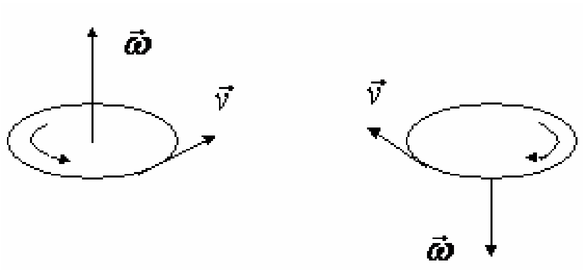


Рис.1.13

$$[\omega] = \frac{1}{c}, \tag{1.79}$$

і вимірюється в $\frac{рад}{c}$.

Знайдемо зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю. Для цього використаємо уявлення про миттєву лінійну швидкість, та те, що довжину дуги, на яку опирається малий кут, можна знайти за формулою $\Delta S = R\Delta\varphi$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

$$v = \omega R. \tag{1.80}$$

Якщо $\omega = const$, то обертання рівномірне і його можна характеризувати *періодом обертання* T. *Період обертання це час, за який точка здійснює один повний оберт.* Зв'язок між періодом та кутовою швидкістю знайдемо з таких міркувань. Оскільки за визначенням, за час $\Delta t = T$ тіло змінить своє положення на $\Delta\varphi = 2\pi$, тоді, за визначенням:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.81}$$

Число повних обертів, здійснених тілом під час рівномірного руху по колу за одиницю часу називається частотою обертання.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \ \omega = 2\pi\nu, \tag{1.82}$$

де ν - частота обертання, 1/с.

Крім рівномірного, тіло може здійснювати перемінний обертальний рух. Тоді запроваджується поняття про кутове прискорення. *Кутовим прискоренням називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.83}$$

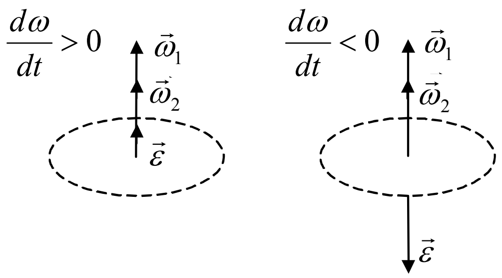


Рис.1.14

З формули випливає, що вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований по осі обертання у бік вектора елементарного збільшення кутової швидкості (рис.1.14).

Зв'язок між величинами кутових характеристик руху та лінійних знайдемо використовуючи їх уявлення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \tag{1.84}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2. \tag{1.85}$$

Для рівномірного обертального руху, отримаємо основні кінетичні рівняння. Для цього виконаємо деякі перетворення:

$$S = v \cdot t = R \cdot \omega \cdot t = R \cdot \varphi, \tag{1.86}$$

$$v = R\omega, \tag{1.87}$$

$$a_n = \omega^2 R, \tag{1.88}$$

$$\varphi = \omega \cdot t. \tag{1.89}$$

Для рівнозмінного обертального руху ($\varepsilon = const$):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\varepsilon} \cdot t, \tag{1.90}$$

$$\varphi = \omega_o t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{1.91}$$

Використовуючи отримані кінематичні рівняння можна описати рух твердого тіла або точки навколо нерухомої осі.

1.3.2. Момент інерції. Кінетична енергія тіла, що обертається. Основне рівняння динаміки обертального руху

Під час переходу до розгляду питання динаміки обертання матеріальної точки по колу, необхідно ввести деякі додаткові поняття, що мають фізичну аналогію з масою тіла в динаміці поступального руху.

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається добуток маси точки на квадрат відстані до осі обертання:

$$I_i = m_i r_i^2, \tag{1.92}$$

де I_i – момент інерції, вимірюється в кг·м^2.

Якщо розглядати тіло, що обертається, як сукупність матеріальних точок, то момент інерції тіла – це сума моментів інерцій усіх точок, що складають це тіло, відносно розглянутої осі:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2. \tag{1.93}$$

Якщо тіло однорідне, тобто є безперервний розподіл мас, ця сума зводиться до інтегралу:

$$I = \int_m r^2 dm, \tag{1.94}$$

де $m = f(r)$ - відома функція розподілу маси за координатами тіла. Інтегрування здійснюється за всім об'ємом тіла.

Для тіл правильної геометричної форми момент інерції відносно осі, що проходить через центр інерції (мас), розраховується за формулами:

1. Порожній тонкостінний циліндр (обід, колесо) радіусом R: $I = mR^2$.

2. Суцільний циліндр чи диск: $I = \frac{1}{2}mR^2$.

3. Куля радіуса R: $I = \frac{2}{5}mR^2$.

4. Стрижень довжиною l: $I = \frac{1}{12}m \cdot l^2$

Якщо момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас – відомий, то момент інерції тіла щодо будь-якої іншої рівнобіжної осі визначається *теоремою Штейнера: момент інерції тіла відносно будь-якої осі обертання дорівнює його моменту інерції відносно рівнобіжної осі, яка проходить через центр мас тіла, складеному з добутком маси тіла на квадрат відстані між осями.*

$$I = I_c + ma^2. \tag{1.95}$$

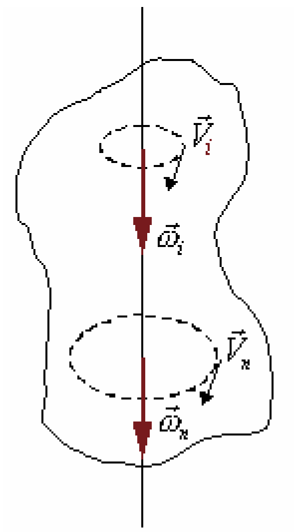


Рис.1.15

Слід зазначити, що момент інерції може існувати безвідносно до обертання. Будь-яке тверде тіло поза залежністю покоїться воно чи обертається має момент інерції подібно тому, як тіло має масу не залежно від стану свого руху.

Тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має кінетичну енергію. Знайдемо формулу для кінетичної енергії. Кожна матеріальна точка тіла має кінетичну енергію $\frac{m_i v_i^2}{2}$. Тоді для всього тіла:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (1.96)$$

З рис.1.15 бачимо, що $v_i \neq v_n$; але оскільки $\omega = \frac{v_i}{r_i} = \omega_i = \omega_n$ - для всіх точок однакова, то, замінивши $v_i = \omega \cdot r_i$, отримаємо:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (1.97)$$

Таким чином, кінетична енергія тіла що обертається дорівнює $E_k = \frac{I\omega^2}{2}$. Якщо тіло до того ж бере участь і у поступальному русі (котиться), то

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = E_k^{пост} + E_k^{об}. \qquad (1.98)$$

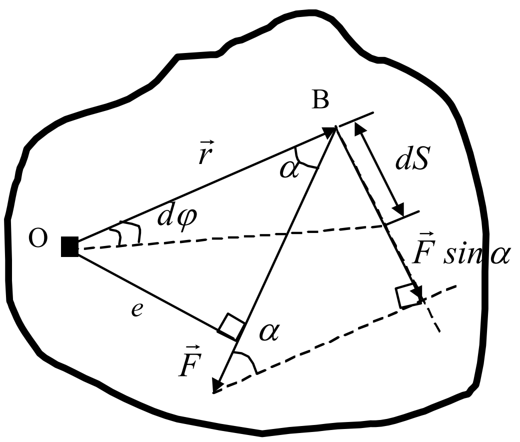


Рис.1.16

Якщо до тіла, закріпленого на осі, прикласти зовнішню силу, то цією силою буде виконуватися робота, що витрачається на зміну кінетичної енергії тіла, що обертається.

Нехай до тіла (рис.1.16), що закріплено у точці О до нерухомої осі (вісь перпендикулярна до площини рисунка), у точці В, що належить тілу, прикладена сила $\vec{F}$ під кутом $\vec{F}\,^\wedge \vec{r} = \alpha$. Тому що тіло тверде, робота цієї сили витрачається на поворот усього тіла на деякий кут $d\varphi$. При цьому точка В проходить шлях $dS = r \cdot d\varphi$. Відомо, що робота дорівнює проекції сили $\vec{F}$ на напрямок переміщення, помножений на величину переміщення, тобто:

$$dA = dE_k = F \cdot sin\alpha \cdot r \cdot d\varphi. \qquad (1.99)$$

Необхідо відмітити, що $r \cdot \sin\alpha = l$ – найкоротша відстань між лінією дії сили і віссю обертання і називається *плечем сили*. Тоді добуток сили на її плече називається *моментом сили.* Модуль моменту сили є:

$$M = F \cdot l. \qquad (1.100)$$

Момент сили – величина векторна, тому що $l = r \cdot \sin\alpha$, то:

$$\vec{M} = \left\lfloor \vec{F} \cdot \vec{r} \right\rfloor. \qquad (1.101)$$

Вектор $\vec{M}$ перпендикулярний площині, у якій знаходяться вектора $\vec{F}$ і $\vec{r}$, колінеарний з віссю обертання (лежить на осі), а його напрямок визначається за правилом правого гвинта.

Тоді вираз для роботи моменту сил (1.99) буде мати вигляд:

$$dA = M \cdot d\varphi, \qquad (1.102)$$

оскільки

$$dA = dE_k^{об} = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega \cdot d\omega, \qquad (1.103)$$

то

$$M \cdot d\varphi = I\omega \cdot d\omega; \qquad (1.104)$$

поділивши на dt, отримаємо:

$$M\frac{d\varphi}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{dt}, \text{ або } M\omega = I\omega\varepsilon. \tag{1.105}$$

Виконавши спрощення, отимаємо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}. \tag{1.106}$$

Цей запис має фізичну аналогію з II законом Ньютона.

Момент сили, що діє на тверде тіло, надає йому кутове прискорення, величина якого прямо пропорційна величині моменту сили й обернено пропорційна моменту інерції тіла.

Вектори, що лежать на осі симетрії, називають аксіальними, або псевдовекторами. Кінематика та динаміка обертального руху описується псевдовекторами.

Розрізняють моменти сил відносно осі обертання, відносно точки (центра) обертання і момент пари сил. У другому випадку, рух відносно точки описувати складно: необхідно враховувати, що тіло буде володіти трьома ступенями вільності. Для опису такого руху використовують кути Ейлера.

Розгляд моментів пари сил зводиться до *правила важеля*:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \tag{1.107}$$

Рівняння (1.107) – умова для рівноваги тіла, що може обертатися.

1.3.3. Момент імпульсу. Закон зміни та збереження моменту імпульсу

Введемо уявлення про момент імпульсу матеріальної точки, як векторного добутку імпульсу матеріальної точки на радіус вектор її положення відносно осі обертання:

$$\vec{L}_i = \left[\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i\right]. \tag{1.108}$$

Виконаємо наступні перетворення:

$$L_i = p_i \cdot r_i \cdot sin(\alpha) = m_i \cdot v_i \cdot r_i , \tag{1.109}$$

кут між векторами $\vec{v}$ і $\vec{r}$ $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, тоді

$$L_i = m_i \cdot r_i^2 \omega_i = I_i \cdot \omega_i , \tag{1.110}$$

але оскільки $\vec{L}$ є аксіальний вектор, то:

$$\vec{L}_i = I_i \cdot \vec{\omega}_i . \tag{1.111}$$

Напрямок $\vec{L}$ знаходиться за тим же правилом, що й напрямок $\vec{\omega}$. З часом, вектор $\vec{L}$ може змінюватись. Якщо йдеться мова про тіло, то момент імпульсу буде мати вираз:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{n} I_i = I \cdot \vec{\omega}, \tag{1.112}$$

де I - момент інерції тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Зміна моменту імпульсу з часом буде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M} \,. \qquad (1.113)$$

Рівняння (1.113) – це основний закон динаміки обертального руху твердого тіла**.**

Якщо механічна система, що обертається, замкнена ($\vec{M} = 0$) тоді виконується *закон збереження моменту імпульсу*, який має вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,\ \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} I_i \cdot \vec{\omega}_i = const. \qquad (1.114)$$

Момент імпульсу замкненої системи з часом не змінюється.

1.4. Елементи механіки рідини

1.4.1. Рідинний стан речовини. Закон Паскаля. Закон Архімеда

Рідина – агрегатний стан речовини, при якому речовина має деякі властивості газоподібного і твердого агрегатних станів одночасно.

У рідині молекули знаходяться близько одна до одної, не можуть переміщатися по об'єму всієї рідини, як у газі. Рідина завжди приймає форму посудини, у якій вона знаходиться, однак не обов'язково займає весь об’єм цієї посудини, що властиво газам. Рідині властива пластична деформація, тобто плин (течія).

Плинність - вільне переміщення частин тіла відносно самих себе.

Під плином рідини розуміють і плин газів, оскільки закони такого руху в рамках моделі і для рідкого агрегатного стану і для газоподібного однакові.

Рідина і газ – суцільні середовища, тобто не мають розривів густини.

Суцільне середовище – деякий обсяг простору, у якому основні фізичні властивості нерозривні для даного тіла чи силового поля.

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{1.115}$$

де ρ – густина (кг/м^3), нерозривна функція в кожній точці простору.

Якщо в одному і тому ж середовищі густина міняється залежно від координат, то говорять про стисливість рідини, якщо густина не змінюється – рідину вважають *нестисливою.*

Умова нестисливості рідини:

$$grad\rho = 0. \tag{1.116}$$

Закон Паскаля: У кожній точці нестисливої рідини тиск однаковий.

Тиск – сила, що діє по нормалі до одиниці поверхні посудини та віднесена на одиницю площини поверхні:

$$P = \frac{F}{S_n}. \qquad (1.117)$$

Тиск вимірюється у Н/м^2 (Па).

У полі сили тяжіння тиск стовпа рідини висотою h буде визначатись:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho g h,$$

або

$$P = \rho g h. \qquad (1.118)$$

Такий тиск називається *гідростатичним тиском.*

Модель рідини для опису її руху базується на наступному.

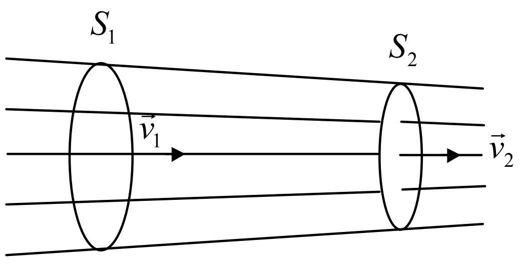


Рис.1.17

Відокремимо точки в об'ємі рідини. Якщо спостерігати за їхнім рухом, то можна виявити, що ці точки будуть описувати у просторі деякі лінії. Лінії, уздовж яких рухаються точки рідини називаються *лініями струму.* Сукупність ліній струму утворюють *трубку струму.* Швидкості кожної точки є дотичними до ліній струму.

З закону збереження маси речовини витікає: скільки маси в одиницю часу проходить через переріз трубки струму S_1, стільки ж проходить через переріз S_2. Якщо $\rho = const.$, то виконується *рівняння нерозривності:*

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2. \qquad (1.119)$$

Об’ємна секундна витрата рідини V' (м^3/с) визначається, як:

$$S \cdot V = V', \tag{1.120}$$

а масова секундна витрата рідини M' (кг/с):

$$M' = S \cdot V' \cdot \rho. \tag{1.121}$$

Рівняння нерозривності насправді відбиває закон збереження маси для нестисливої рідини і є *основним кінематичним рівнянням течії нестисливої рідини.*

Якщо якесь тіло занурити у рідину або газ, які знаходяться у полі сил тяжіння, то на це тіло буде діяти сила, що виштовхує – *сила Архімеда*. Розглянемо це на прикладі циліндра з площиною S та висотою h. З уявлення про тиск, як $P = \dfrac{F}{S}$, та з урахуванням гідростатичного тиску отримаємо, що на нижню та верхню (за відношенням до орієнтації циліндра в полі сил тяжіння) площину діють різні за величиною сили. Різниця цих сил буде зумовлювати силу Архімеда F_a:

$$F_a = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g S (h_2 - h_1) = \rho g S h = \rho V g. \tag{1.122}$$

Закон Архімеда: *Сила, що виштовхує тіло занурене в рідину або газ, дорівнює вазі рідини (газу) в об’ємі зануреного тіла.*

1.4.2. Плин рідини. Рівняння Бернуллі

Для доведення рівняння динаміки руху рідини скористуємося рис.1.18. У наведеній на рис.1.4.2 трубці струму рухається нестислива рідина. Причина руху - різниця тисків (сил) на вільних кінцях трубки (див. рис.1.18).

Під час переміщення рідини, об’єм 1-1' нібито "перенесено" до об’єму 2-2'.

Це припущення цілком справедливе, бо ми розглядаємо течію нестисливої рідини, для якої виконується рівняння нерозривності. Для цього переміщення була здійснена робота, яка сприяла зміні повної енергії рідини. З цих уявлень виконаємо математичні перетворення:

$$dA = dE = dE_k + dE_n. \tag{1.123}$$

З того що $dA = F \cdot dl$ отримаємо:

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = P_1 S_1 V_1 dt - P_2 S_2 V_2 dt = SVdt\left(P_1 - P_2\right) = Sl\left(P_1 - P_2\right). \tag{1.124}$$

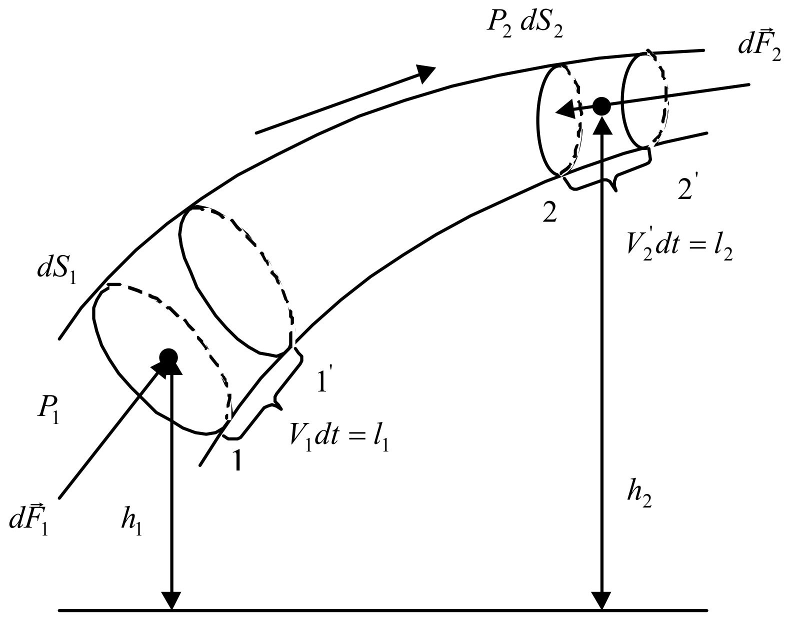


Рис.1.18

Приріст кінетичної енергії за рахунок цієї роботи складатиме:

$$\Delta E_k = \frac{dm}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right) = \frac{\rho Sl}{2}\left(V_1^2 - V_2^2\right). \tag{1.125}$$

Приріст потенційної енергії складатиме:

$$\Delta E_n = dm \cdot g(h_1 - h_2) = \rho g S l (h_1 - h_2). \qquad (1.126)$$

Тоді

$$\Delta E = A = \rho S l \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + g h_1 - g h_2 \right) = S l (P_1 - P_2). \qquad (1.127)$$

З цього отримаємо:

$$\rho \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + h_1 - h_2 \right) = P_1 - P_2, \qquad (1.128)$$

або

$$\frac{\rho V_1^2}{2} - \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_1 - \rho g h_2 = P_1 - P_2, \qquad (1.129)$$

остаточно отримаємо:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2, \qquad (1.130)$$

де $\frac{\rho V^2}{2}$ – *динамічний тиск,* зумовлений рухом рідини; $\rho g h$ – *гідростатичний тиск*, зумовлений зовнішнім силовим полем; P – *статичний тиск*, зумовлений тиском навколишнього середовища.

Сума динамічного, гідростатичного й статичного тисків називається *повним тиском*. Для нестисливої рідини повний тиск є сталою величиною:

$$P_n = P_д + P_г + P_{ст} = const. \qquad (1.131)$$

Таке рівняння буде застосовуватись для любого перерізу трубки течії рідини. Це і є рівняння Бернуллі - основне рівняння гідродинаміки. Повний тиск нестисливої рідини є сталою величиною у будь-якому перерізі трубки течії рідини.

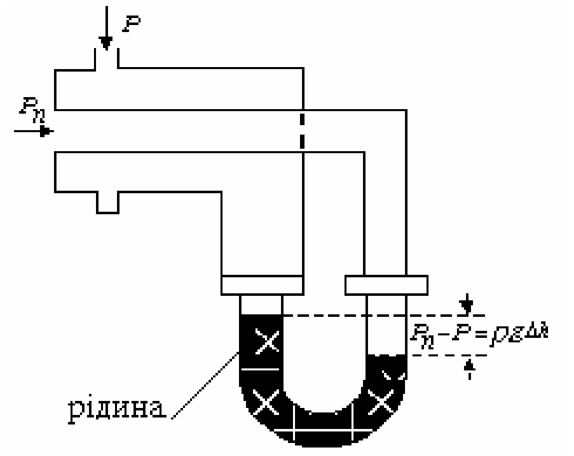


Рис.1.19

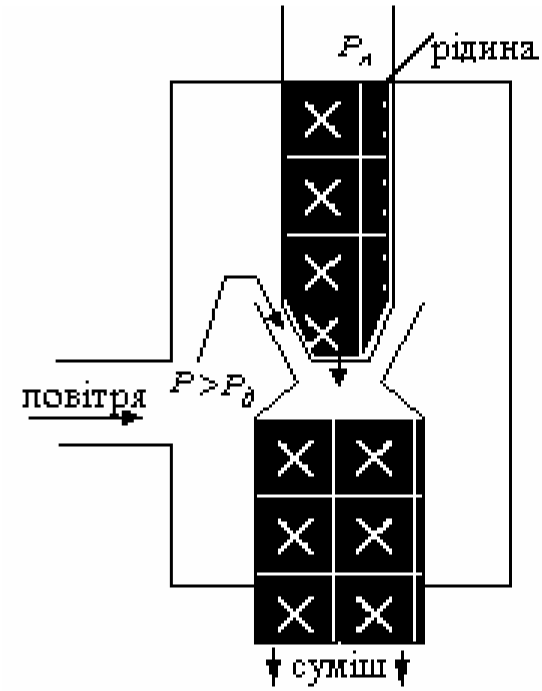


Рис.1.20

Використовуючи рівняння Бернуллі та за допомогою пристрою (трубка Піто), схему якого наведено на рис.1.19, можна вимірювати швидкість газових потоків з густиною речовини $\rho_г$. Орієнтуючи трубку за відношенням до потоку газу так, як показано на рис.1.20, бачимо, що отвори окремо вимірюють статичний P та повний P_n тиски, різниця яких є величиною динамічного тиску:

$$P_n - P = \frac{\rho_г \cdot v^2}{2}. \qquad (1.132)$$

Ця різниця компенсується гідростатичним тиском $\rho g \Delta h$ в U-подібній трубці, що наповнена рідиною з густиною ρ. Тоді швидкість руху потоку газу можна обчислити за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{2(P_n - P)}{\rho_г}} = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{\rho_г}}. \qquad (1.133)$$

За умов локального зростання швидкості (наприклад, за рахунок локального зменшення площини перерізу трубки) повний тиск залишається сталим:

динамічний збільшується, а статичний зменшується. Завдяки цьому можна розпилювати рідину, змішувати рідину з газом, або використовувати такий пристрій у якості насосу. Схематично такий насос (рідиннострумний) зображено на рис.1.20. Рідиннострумні насоси використовуються у харчовій промисловості для утворення різноманітних за своєю дисперсністю продуктів харчування та напівфабрикатів.

1.4.3. Внутрішнє тертя. Ламінарний і вихровий режими течії. Число Рейнольдса: гідромеханічна подібність

Під час доведення основного рівняння гідродинаміки ми вважали, що лінії струму не перетинаються між собою. Але це не завжди так. Між окремими шарами рідини, що стикаються між собою, діють сили тертя. Ці сили сприяють "переносу" імпульсу (кількості руху) від одного шару до іншого. Це явище носить назву внутрішнього тертя і належить до групи явищ, що мають назву *явища переносу* (див. 2.2). Силу внутрішнього тертя, віднесену на одиницю площини шарів рідини, що стикаються між собою, визначають за рівнянням Ньютона:

$$\frac{\vec{F}}{S} = \vec{f} = -\eta \cdot grad(\vec{v}). \qquad (1.134)$$

де η – коефіцієнт динамічної в’язкості рідини, Па·с.,

Коефіцієнт динамічної в’язкості рідини є фізичною характеристикою рідинних речовин. Але не всі рідини підпорядковуються рівнянню Ньютона, а саме – не виконується прямо пропорційна залежність між силою та градієнтом швидкості шарів, що стикаються. У цьому випадку кажуть *про неньютонівську рідину*.

Внутрішнє тертя призводить до перемішування шарів рідини. З рівняння Ньютона можна зробити висновок, що залежно від швидкості відносного руху шарів наступає момент, коли вони починають змішуватися. Тобто, режим течії змінюється. Саме з цим пов'язана класифікація *режимів течії:*

- ламінарний – це такий, коли шари паралельні один одному, і кожний з них характеризується власним розподілом швидкостей;
- турбулентний – це такий, коли шари рідини перетинаються між собою та утворюють вихор;
- перехідний – проміжний між першими двома.

Для багатьох рідин та газів є деяка подібність режимів течії: за певних умов, що мають відношення до геометричної форми каналу, швидкості та природи речовини, різні рідини мають подібний режим течії. Ця подібність відбивається так званим числом Рейнольда Re. Це безрозмірне число можна розрахувати за виразом:

$$\mathrm{Re} = \frac{v \cdot d_e \cdot \rho}{\eta}, \tag{1.135}$$

де d_e - еквівалентний діаметр каналу, де відбувається течія рідини. Еквівалентний діаметр визначають за формулою:

$$d_e = \frac{4 \cdot S}{\Pi}, \tag{1.136}$$

де S та Π - площа перерізу каналу та його периметр, відповідно.

Якщо рідина не займає увесь канал, то маємо на увазі ті геометричні розміри, що має трубка течії. Число Рейнольдса характеризує режим течії: якщо $\mathrm{Re} < 2000$ – ламінарна течія; якщо $\mathrm{Re} > 2300$ – турбулентна течія. Режим течії досить сильно впливає на такі процеси, як тепло- і масоперенос. Турбулентний режим, у загальному випадку, інтенсифікує ці процеси. Вихрові утворення під час турбулентного режиму мають складну форму і певну нестійкість, як за часом, так і за координатами. У цьому випадку основним математичним прийомом для опису процесів переносу є теорія подібності.

1.5. Елементи спеціальної теорії відносності

1.5.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

Відносність механічного руху та деякі явища, що пов'язані з поширенням світла, поставили питання: чи існує універсальна, "ідеальна" система відліку, відносно якої усе рухається або знаходиться у спокої? Таку систему відліку було названо ефіром. Тоді усі об'єкти рухаються в ефірі. Якщо це так, то повинен існувати "ефірний вітер". Саме його, або його прояв й намагалися знайти вчені. Найбільш вдалий експеримент з цього приводу було здійснено Майкельсоном.

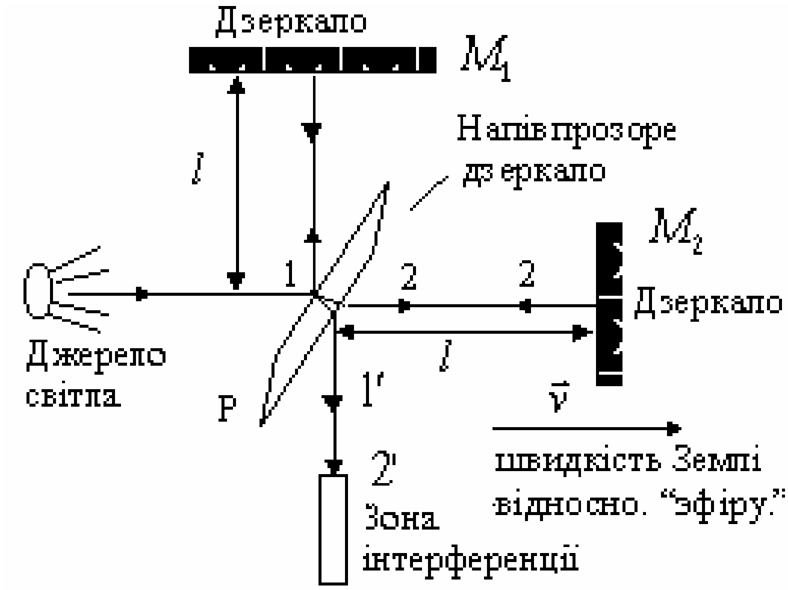


Рис.1.21

Суть цього досліду у наступному. За допомогою явища інтерференції світла знайти "ефірний вітер", який би змінював положення інтерференційної картини. Схему пристрою наведено на рис.1.21.

Орієнтуючи пристрій відносно напрямків полюсів Землі, очікувалось, що інтерференційна картинка буде мінятися. Але за будь-яких умов інтерференційна картинка не змінювалась. З чого зроблено висновок*: ніякого "ефірного вітру" та ефіру чи універсальної системи відліку не існує.*

Виходячи з експериментальних результатів, та уявлень про електромагнітне поле А. Ейнштейн сформулював постулати, які становлять основу *спеціальної теорії відносності:*

I Постулат:

Усі закони природи інваріантні стосовно інерційних систем відліку, а усі інерційні системи відліку рівноправні.

II Постулат:

Швидкість світла є деякою фізичною сталою, величина якої не залежить від того, рухається чи знаходиться у спокої приймач (джерело) світла. Ця константа є максимальною швидкістю поширення будь-якої взаємодії чи поля, що відомі людині.

У 1904 р. голландським фізиком Лоренцем було запропоновано перетворення координат та часу рухомої (K') та нерухомої (K) системи відліку (рис.1.22). Ці перетворення дають змогу зберегти вигляд рівнянь класичної електродинаміки. Аналогічні рівняння були доведені у 1905 р. й А. Ейнштейном.

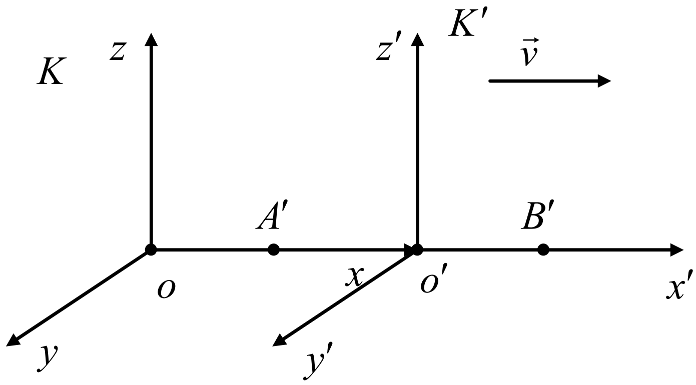


Рис.1.22

Перетворення Лоренца:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$y' = y, z' = z, \tag{1.137}$$

$$t' = \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

1.5.2. Відносність довжини та проміжків часу

Легко довести, що розміри тіла, яке рухається з швидкістю v, та проміжки часу подій, які відбуваються у рухомих системах відліку, будуть змінюватись:

$$l' = (x_2' - x_1') = (x_2 - x_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

або

$$l = l_o \cdot \sqrt{1-\beta^2}\ , \tag{1.138}$$

де $\beta = \dfrac{v^2}{c^2}$; l_o – власні розміри нерухомого тіла.

Для проміжку часу:

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \tag{1.139}$$

де Δt_o – власний час, що вимірюється годинником, який рухається разом з об'єктом.

Розміри тіла, що рухається, скорочуються вздовж напрямку руху залежно від швидкості (лоренцеве або фітцджеральдове скорочення).

Годинник, що рухається відносно інерційної системи відліку, йде повільніше за нерухомий годинник. Тобто, власний час – найкоротший.

1.5.3. Межі застосування класичної механіки

З перетворень Лоренца витікає, що в будь-яких інерційних системах відліку існують відповідні координати та час для певної події. А між подіями в обраних інерційних системах відліку існує визначений зв’язок.

Слід відзначити, що за умови $v << c$ перетворення Лоренца трансформуються у перетворення Галілея (класична теорія відносності). Якщо припустити на випадок, що $v > c$, то з перетворень Лоренца витікає, що координати та проміжки часу будуть мати мнимі величини, чого не може бути. Тоді:

Швидкість відносного руху будь-яких інерційних систем не може перевищувати швидкість поширення світла у вакуумі, тобто $v \le c$.

Швидкості руху тіл поблизу швидкості світла називають *релятивістськими,* а закони руху для таких тіл вивчає *релятивістська механіка*.

1.5.4. Релятивістський імпульс. Основний закон релятивістської динаміки. Границі застосування класичної механіки

З першого постулату спеціальної теорії відносності витікає, що формальний опис законів чи явищ у всіх інерційних системах відліку повинен мати однаковий вигляд, тобто підпорядковуватися так званому принципу Лоренца. Але, як було доведено, однакові процеси у різних системах відліку тривають різний час. Крім того, записуючи основний закон механічного руху вважалося, що маса тіла не залежить від швидкості його руху.

У спеціальній теорії відносності доводиться, що маса залежить від швидкості руху тіла й тим сильніше, чим більш швидкість руху тіла наближається до швидкості світла у вакуумі:

$$m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{1.140}$$

або

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.141}$$

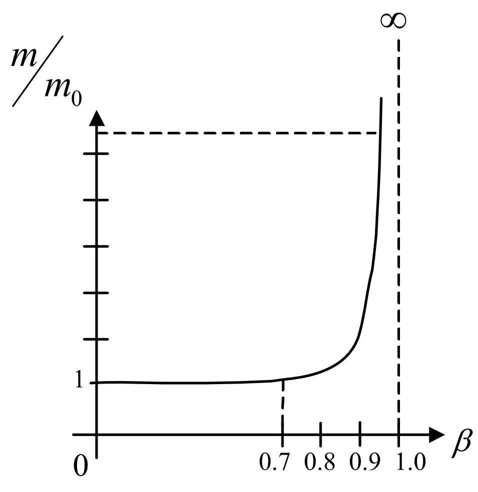


Рис.1.23

З рис.1.23 бачимо, що маса залежить від швидкості руху нерівномірно: за умов збільшення β до 1,0 відношення $\frac{m}{m_0}$ прагне в нескінченність. Цей факт експериментально підтверджується: якщо електрон сильно розігнати, то його маса збільшується у сотні разів.

При цьому запроваджують уявлення про інерційну масу:

m_0 – маса спокою;

m – маса тіла, що рухається.

Тоді вирази для імпульсу тіла, та закону динаміки будуть мати вигляд:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} = m(v) \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \vec{v}, \tag{1.142}$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \tag{1.143}$$

Основний закон релятивістської динаміки. Зміна імпульсу тіла з часом дорівнює зовнішній силі:

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \cdot \vec{v}\right] = \vec{F}. \tag{1.144}$$

Якщо система замкнена, зовнішні сили не діють, тоді

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \cdot \vec{v}\right] = 0. \tag{1.145}$$

Якщо ж до того маємо не одне тіло, а декілька, то

$$\frac{d}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{m_{0i}}{\sqrt{1-v_i^2/c^2}}\right)\cdot\vec{v}_i\right]=\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i=0. \qquad (1.146)$$

Релятивістський закон збереження імпульсу. Імпульс у замкненій механічній системі з часом не змінюється.

З закону динаміки витікає:

$$d\left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\vec{v}\right)\right]=\vec{F}\cdot dt. \qquad (1.147)$$

Тобто, якщо $\beta \to 1$, то $\vec{F}\cdot dt \to \infty$. Якщо тіло може рухатися з такою швидкістю, то це значить, що в природі існує нескінченна сила або нескінченний проміжок часу. Людству невідомі такі нескінченні сили або час. Тоді щоб виконувався закон релятивістської динаміки треба внести обмеженість щодо швидкості руху тіла з будь-якою масою спокою:

$$v < c. \qquad (1.148)$$

Ця нерівність і є відображенням границі застосовності законів класичної механіки та її висновків.

1.5.5. Кінетична енергія. Релятивістський вираз для кінетичної енергії

Щоб змінити кінетичну енергію потрібно виконати роботу:

$$dA = dE_k,\ dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt. \qquad (1.149)$$

З того, що

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right), \tag{1.150}$$

отримаємо:

$$dA = dE_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_o \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{v} \cdot d\left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \tag{1.151}$$

або

$$dE_k = \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}. \tag{1.152}$$

Використовуючи рівняння (1.40) $m = f(v)$, отримаємо:

$$dm = d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{c^2\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}. \tag{1.153}$$

Порівнюючи (1.152) і (1.153), доводимо:

$$dE_k = c^2 \cdot dm. \tag{1.154}$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \int_1^2 dE_k = \int_1^2 c^2 dm = c^2 \int_1^2 dm = c^2\left(m - m_0\right) = mc^2 - m_0c^2 = \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \end{aligned} \tag{1.55}$$

Зміна кінетичної енергії пов'язана зі збільшенням маси спокою тіла.

Релятивістський вираз для кінетичної енергії:

$$\Delta E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \tag{1.156}$$

Кінетичну енергію можна також визначити через релятивістський імпульс:

$$E_k = c\sqrt{P^2 + m_0^2 c^2}\ . \tag{1.157}$$

Зміна кінетичної енергії може бути знайдена за виразом:

$$\Delta E_k = mc^2 - m_0 c^2, \tag{1.158}$$

де $m_0 c^2 = const$ для даного тіла у даній системі відліку. Тобто, це початкова умова для тіла, що не рухається – енергія спокою є:

$$E_c = m_0 c^2. \tag{1.159}$$

Тоді mc^2 – енергія, зв'язана з рухом і з масою, тобто повна енергія:

$$E_n = mc^2. \tag{1.160}$$

Тоді зміна кінетичної енергії визначатиметься:

$$\Delta E_k = E_n - E_c \tag{1.161}$$

або

$$\Delta E_k = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2\ . \tag{1.162}$$

З цього випливає рівняння:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_k}{c^2} \tag{1.163}$$

Це рівняння буде проаналізовано у наступному параграфі.

1.5.6. Взаємозв'язок маси та енергії

Взаємозв'язок маси та енергії має вигляд:

$$E = m \cdot c^2 .$$

Не існує маси без енергії, а енергії без маси. За своєю природою енергія та маса є тотожніми. Ми експериментально фіксуємо масу, тільки тому, що це є енергія. Це фундаментальне визначення належить А. Ейнштейну.

Якщо "розібрати" спочиваюче тіло на складові частини, то треба здійснити роботу ΔA на його руйнування до частинок з масою m_{0i}:

$$E_0 + \Delta A = \sum_{i=1}^{n} m_{0i} c^2 \text{ , або } m_0 c^2 - \sum_{i=1}^{n} m_{0i} c^2 = -\Delta A . \tag{1.164}$$

Енергія зв’язку між частками тіла (механічної системи, атома тощо):

$$c^2 \cdot \left(m_0 - \sum_{i=1}^{n} m_{0i} \right) = -\Delta E_{зв} . \tag{1.165}$$

Дефект маси показує, що доданок мас спокою складових більше за масу спокою усього тіла:

$$\Delta m = \sum_{i=1}^{n} m_{0i} - m_0 . \qquad (1.166)$$

Але, щоб одержувати реальні релятивістські ефекти потрібно мати тіла з дуже маленькою масою. Тоді, змінюючи повну енергію тіла, можна зафіксувати зміну інерційної маси.

Приклади розв’язання задач

Приклад 1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 км/год$, а другу половину часу – з швидкістю $v_2 = 40 км/год$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв’язання:

Середня швидкість визначається виразом: $\bar{v} = \frac{s}{t}$, *де* $s = s_1 + s_2 = v_1\frac{t}{2} + v_2\frac{t}{2}$, *оскільки* $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$. *Тобто* $s = \frac{t}{2}(v_1 + v_2)$, *звідси* $v = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \, {км}/{год}$.

Приклад 2. Першу половину свого шляху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 км/год$, а другу половину часу – з швидкістю $v_2 = 40 км/год$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв’язання:

Середня швидкість визначається виразом:

$$v = \frac{s}{t}, \tag{1}$$

де $t = t_1 + t_2$, $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$. *Тоді* $t_1 = \frac{s}{2v_1}; t_2 = \frac{s}{2v_2}$, *звідки*

$$t = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2} \tag{2}$$

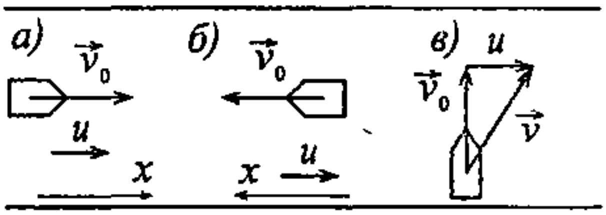
Підставляючи (2) в (1), отримаємо $v = \frac{s2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{(v_1 + v_2)}$,

$$v = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80 + 40} \approx 53{,}3 км/год$$

.

Приклад 3. Знайти швидкість v відносно берега річки: а) човна, що йде за течією; б) човна, що йде проти течії; у) човна, що йде під кутом $\alpha = 90^\circ$ до течії. Швидкість течії річки u=1 м/с , швидкість човна відносно води v_0=2 м/с.

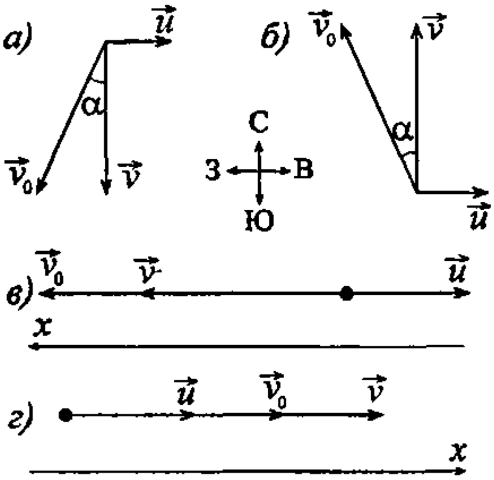
Розв'язання:



а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь x: $v = v_0 + u = 3 м/с$.

б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь x: $v = v_0 - u = 1 м/с$.

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, склавши вектори за правилом трикутників, отримаємо $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2{,}24 м/с$.



Приклад 4. Літак летить відносно повітря з швидкістю $v_0 = 800 км/год$. Вітер дме із заходу на схід з швидкістю $u = 15 м/с$. З якою швидкістю v літак рухатиметься щодо землі і під яким кутом α до меридіану треба тримати курс, щоб переміщення було: а) на південь; б) на північ; у) на захід; г) на схід?

Розв'язання:

а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ *або в скалярному вигляді:* $v = \sqrt{v^2 - u^2}$. *Підставляючи числові дані і враховуючи, що* $u = 15 м/с = 54 км/год$, *отримуємо* $v = 798 км/год$.

З малюнка видно, що $v = v_0 \cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{v}{v_0}$, $\cos\alpha = 0{,}998$, $\alpha = 4°$. *Курс на південний захід.*

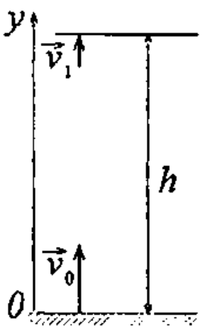
б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ *або в скалярному вигляді:* $v = \sqrt{v^2 - u^2}$ *або* $v = 798 км/год$. *Оскільки* $v = v_0 \cos\alpha$, *то* $\cos\alpha = \dfrac{v}{v_0}$, $\cos\alpha = 0{,}998$, $\alpha = 4°$. *Курс на північний захід.*

в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ *або в проекції на вісь x:* $v = v_0 - u = 800 - 54 = 746 \,{}^{км}\!/_{год}$. *Курс на захід.*

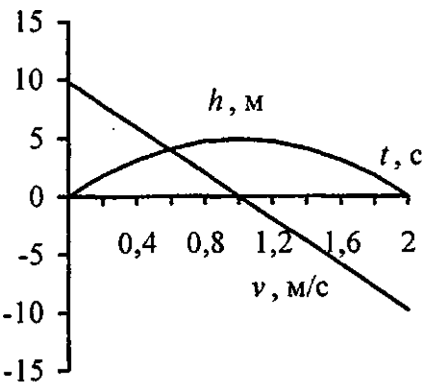
г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ *або в проекції на вісь у:* $v = v_0 + u = 800 + 54 = 854\ {}^{км}\!/_{год}$. *Курс на схід.*

Приклад 5. Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулося на землю через час t=3 с. Яка була початкова швидкість v_0 тіла і на яку висоту h воно піднялось?

Розв'язання



Запишемо рівняння кінематики в проекціях на вісь у: $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, $v(t) = v_0 - gt$ *В найвищій точці підйому маємо* $y(t_1) = h$; $v(t_1) = 0$, *тобто* $h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ *і* $0 = v_0 - gt_1$, *де* $t_1 = \frac{t}{2}$ *– час підйому. Звідки* $v_0 = gt_1$, $v_0 = \frac{gt}{2}$, $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$; $h = \frac{gt_1^2}{8}$. *Підставляючи числові дані, отримаємо* $v_0 = 14{,}7 м/с$; $h = 11 м$.



Приклад 6. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 9{,}8 м/с$. Побудувати графік залежності висоти h і швидкості v від часу t для інтервалу $0 \le t \le 2с$ через 0,2с.

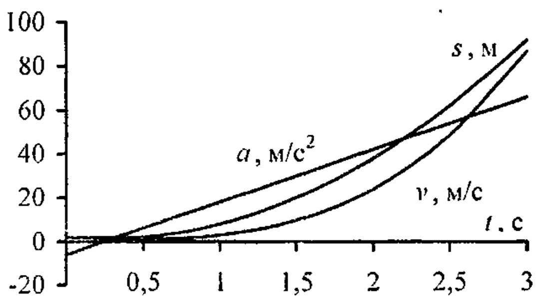
Розв'язання

Залежність швидкості і висоти від часу виражається наступними формулами $v = v_0 - gt$, $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. *Для заданого інтервалу складемо таблицю і побудуємо графік.*

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
H, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

Приклад 7. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2м/с$, $B = 3м/с^2$ та $C = 4м/с^3$. Знайти: а) залежність швидкості v і прискорення a від часу t; б) відстань s, пройдене тілом, швидкість v і прискорення a тіла через час t=2c після початку руху. Побудувати графік залежності шляху s, швидкості s і прискорення s від часу t для інтервалу $0 \le t \le 3c$ через 0,5с.

Розв'язання:



а) Швидкість тіла $v = \dfrac{dS}{dt}$,

$s = At - 2Bt + 3Ct^2$, $s = 2 - 6t + 12t^2 м/с$.

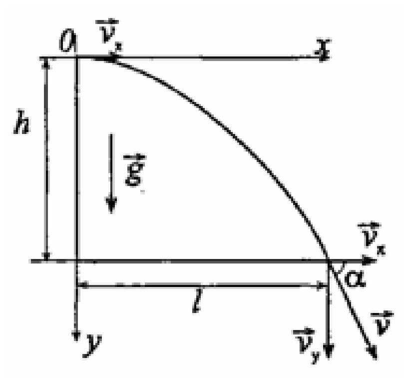
Прискорення тіла $a = \dfrac{dv}{dt} = -2B + 6Ct$;

$a = -6 + 24t \ м/с$.

б)Відстань, пройдена тілом $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. *Тоді через час t=2 с маємо s=24 м; v=38 м/с; a=42 м/с².*

Приклад 8. З башти заввишки h=25м горизонтально кинутий камінь із швидкістю $v_x = 15м/с$. Який час *t* камінь буде рухатися? На якій відстані *l* від підніжжя башти він впаде на землю? З якою швидкістю *v* він впаде на землю? Який кут φ складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

Розв'язання



Переміщення каменя по вертикалі

$$S_y = h = \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

по горизонталі:

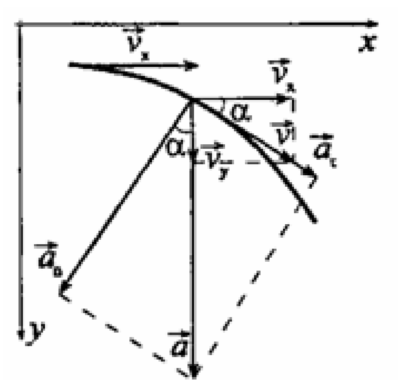
$$S_x = l = v_x t. \qquad (2)$$

З рівняння (1): $t = \sqrt{2h/g}$, *t=2,26 с. З рівняння*

(2): $l = v_x t$, *l=33,9 м. Швидкість каменя* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. *Вертикальна складова швидкості* $v_y = gt$, *отже* $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$.

Шуканий кут φ *- кут між напрямами вектора швидкості* $\vec{v}$ *і вектора її горизонтальної складової* $\vec{v}_x$. *З малюнка видно, що* $cos\,\varphi = \frac{v_x}{v}$*;*

$cos\,\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$, $cos\,\varphi = 0{,}56$*;* $\varphi = 56°$



Приклад 9. Камінь кинутий горизонтально із швидкістю $v_x = 15 м/c$. Знайти нормальне a_x і тангенціальне a_τ, прискорення каменя через час t=1с після початку руху.

Розв'язання

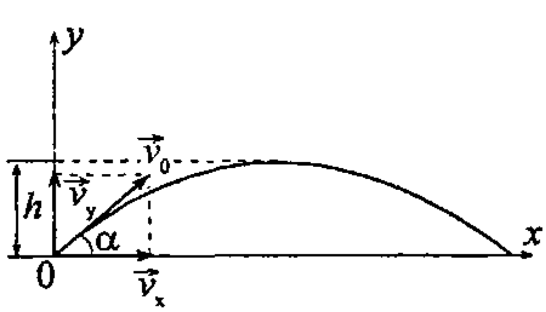
Повне прискорення каменя a=g; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Повна швидкість $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

З малюнка видно, що $cos\,\alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}$, $sin\,\alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$. *Тоді*

$a_n = \frac{gv_x}{v} = \frac{gv_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$, $a_\tau = \frac{gv_y}{v} = \frac{gv_y}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}$. $a_n \approx 8{,}2 м/c^2$, $a_\tau \approx 5{,}4 м/c^2$

Приклад 10. Тіло кинуте із швидкістю v_0 під кутом до горизонту. Час польоту t=2,2с. На яку висоту h підніметься тіло?



Розв'язання

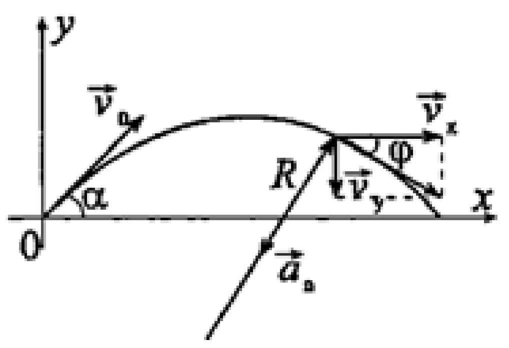
Переміщення по вертикалі

$$S_y = (v_0\, sin\,\alpha)t - \frac{gt^2}{2} \qquad (1)$$

Позначимо t_1 – час підйому тіла на висоту h. Тоді з (1) отримаємо $h = v_0 t_1 \sin\alpha - \frac{g t_1^2}{2}$. *У верхній точці* $v_y = 0$, *але* $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$, *отже* $v_0 \sin\alpha = g t_1$. *Тоді* $h = g t_1^2 - \frac{g t_1^2}{2} = \frac{g t_1^2}{2}$. *Оскільки* $t_1 = \frac{t}{2}$, *то* $h = \frac{g t_1^2}{8}$.

$$h = \frac{9{,}8 \cdot 2{,}2^2}{8} = 5{,}9\text{м}$$

Приклад 11. Тіло кинуте із швидкістю $v_0 = 10 м/с$ під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту. Знайти радіус кривизни R траєкторії тіла через час t=1с після початку руху.



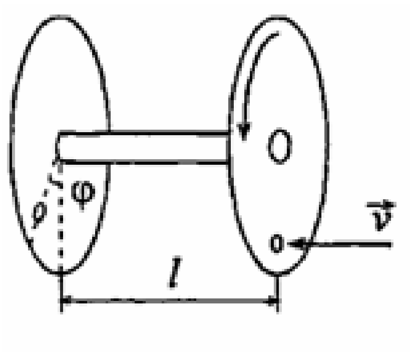
Розв'язання:

Знайдемо час, за яке тіло підніметься до верхньої точки траєкторії. Вертикальна складова його швидкості $v_y = v_0 \sin\alpha - g t_1$. *У верхній точці траєкторії* $v_y = 0$, *тому* $v_0 \sin\alpha = g t_1$, *звідки* $t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $t_1 = 0{,}7$ с, *тобто при t=1с тіло знаходиться вже на спуску, таким чином можна вважати, що тіло кинули горизонтально із швидкістю* $v_x = v_0 \cos\alpha$. *Нормальне прискорення тіла* $a_n = \frac{v^2}{R}$, *де* $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. *З малюнка видно, що* $a_n = g \sin\varphi$, $\sin\varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. *Тоді* $a_n = g \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$,

$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$ *Обчислимо окремо* v_x *та* v_y. $v_x = v_0 \cos\alpha = 5\sqrt{2} м/с$, $v_y = g(t - t_1) = 3 м/с$. *Підставивши числові значення, отримаємо* $R \approx 6{,}3 м$.

Приклад 12. Вісь з двома дисками, розташованими на відстані *l*=0,5м один від одного, обертається з частотою n=1600 об/хв. Куля, що летить уздовж осі, пробиває обидва диски; при цьому отвір від кулі в другому диску зміщений щодо отвору в першому диску на кут $\varphi = 12°$. Знайти швидкість v кулі.

Розв'язання



Рівняння обертального руху $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}t + \dfrac{\vec{\beta}t^2}{2}$.

Виберемо $\varphi_0 = 0$. *Із умови задачі видно, що рух здійснюється з постійною кутовою швидкістю* $\omega = 2\pi n$, *отже, кутове прискорення рівне 0, тобто зсув* $\varphi = \omega t$, *звідки:*

$$t = \frac{\varphi}{\omega}, \qquad (1)$$

$$\omega = 2\pi n. \qquad (2)$$

Швидкість кулі

$$v = \frac{l}{t} \qquad (3)$$

Підставивши (2) в (1). а потім (1) в (3) отримаємо: $v = \dfrac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. *Провівши обчислення, знайдемо швидкість кулі* $v = 419$ м/с.

Приклад 13. Колесо, обертаючись рівноприскорено, через час t=1хв після початку обертання набуває частоти n=720 об/хв. Знайти кутове прискорення ε колеса і число оборотів N колеса за цей час.

Розв'язання

Кутова швидкість колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$. *У скалярному вигляді при* $\omega_0 = 0$ *отримаємо* $\omega = \varepsilon t$, *крім того,* $\omega = 2\pi n$. *Звідси* $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t} = \dfrac{n \cdot 2\pi}{t}$, $\varepsilon = 1{,}25$ рад/с^2.

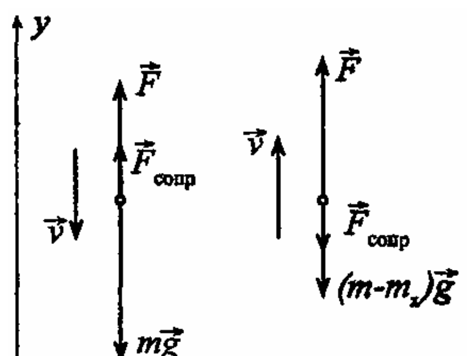
Приклад 14. Точка рухається по колу радіусом R=20 см з постійним тангенціальним прискоренням a_τ=5 см/с^2. Через який час *t* після початку руху нормальне прискорення a_n точки буде: а) рівно тангенціальному; б) удвічі більше тангенціального?

Розв'язання

За умовою, обертання є рівноприскореним, тому, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$ *; звідси* $t = \frac{v}{a_\tau}, v = \sqrt{a_n R}$. *Тоді* $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. *а) Якщо* $a_n = a_\tau$, *то* $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}}$ *=2с; б) якщо* $a_n = 2a_\tau$, *то* $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2\cdot 20}{5}}$ *=2,8с.*

Динаміка

Приклад 1. Якої маси m_x баласт треба скинути з аеростата, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом *m*=1600 кг, підйомна сила аеростата *F=12* кН. Вважати, що сила опору $F_{опор.}$ повітря однакова при підйомі та спуску.



Розв'язання:

По другому закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{опор.} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{опор.} + (m - m_x)\vec{g} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

або в проекціях на вісь y:

$$\begin{cases} F - mg + F_{опор} = 0 \\ F - F_{опор} - (m - m_x)g = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Перше рівняння отриманої системи (2) описує рух аеростату, що опускається, друге – аеростату, що піднімається. Розкривши дужки і склавши перше рівняння з другим, отримаємо: $m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 2(m - \frac{F}{g}); m_x = 752кг.$

Приклад 2. До нитки підвішений вантаж масою m=1 кг Знайти силу натягнення нитки Т, якщо нитку з вантажем: а) піднімати з прискоренням a=5 м/с^2; б) опускати з тим же прискоренням a=5 м/с^2.

Розв'язання:

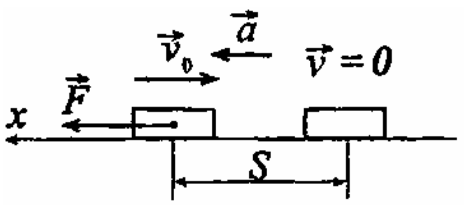
В обох випадках, а і б, використаємо другий закон Ньютона.

а) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ *або* $T - mg = ma$*, звідси* $T = ma_1 + mg = m(a_1 + g)$*; Т=14,8 Н.*

б) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ *або* $-mg + T = -ma_2$*, звідси* $T = mg - ma_2 = m(g - a_2)$ *Т=4,8Н.*

Приклад 3. Автомобіль масою m=1020 кг, рухаючись рівноуповільнено, зупинився через час t=5 с, пройшовши шлях s=25 м. Знайти початкову швидкість v_0 автомобіля і силу гальмування F.

Розв'язання:



По другому закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ *або в проекції на вісь x:*

$$F = ma. \qquad (1)$$

Рівняння руху при рівноуповільненому русі автомобіля мають вид:

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \qquad (2)$$

$$v_0 - at. \qquad (3)$$

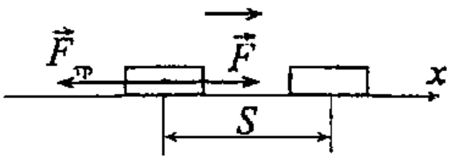
Оскільки кінцева швидкість автомобіля v =0, то з (3) початкова швидкість автомобіля $v_0 = at$*. Підставляючи цей вираз у (2), знайдемо*

$$a = \frac{2S}{t^2}. \qquad (4)$$

Підставивши (4) в (1), отримаємо: $F = \frac{2Sm}{t^2}; F = 2{,}04кН.$

Приклад 4. Яку силу F треба прикласти до вагону, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час t=30с пройшов шлях s=11 м? Маса вагону m=16 т. Під час руху на вагон діє сила тертя $F_{тер.}$, рівна 0,05 діючої на нього сили тяжіння mg.

Розв'язання



По другому закону Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{тер.} = m\vec{a}$ *або в проекції на вісь* x: $F - F_{тер.} = ma$, *звідки* $F = ma + F_{тер.}$. *Оскільки рух рівноприскорений і* v_0*=0, то шлях* $S = at^2/2$, *звідки* $a = \frac{2S}{t^2}$.

За умовою $F_{тер.}$*=0,05mg, тоді* $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0{,}05mg; F = 8{,}2кН.$

Приклад 5. Тіло масою m=0,5 кг рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де C=5 м/с^2 і D=1 м/с^3. Знайти силу F, що діє на тіло в кінці першої секунди руху.

Розв'язання

По другому закону Ньютона $F = ma$, *де* $a = d^2s/dt^2$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$;

$\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a$ *звідси* $F = m(2c - 6Dt); F = 2Н.$

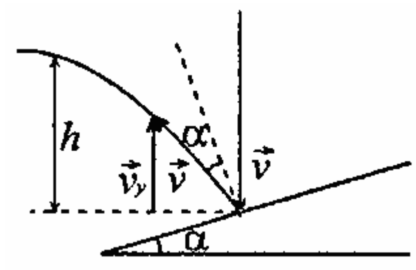
Приклад 6. Молекула масою m=4,65·10^{-26} кг, що летить із швидкістю v=600 м/с, ударяється об стінку судини під кутом α=60° до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили *FΔt,* отриманий стінкою під час удару.

Розв'язання

По другому закону Ньютона FΔt=mΔv. Вважаючи позитивним напрям нормалі, зовнішній до стінки, отримаємо: $\Delta v = v_2 \cos\alpha - (-v_1 \cos\alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos\alpha + v_1 \cos\alpha$.

Таким чином, отримаємо $F\Delta t = 2mv\cos\alpha$; *FΔt=2,8·10-23Н·с.*

Приклад 7. Струмінь води перерізом S=6 см^2 ударяється об стінку під кутом α=60° до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти силу F, що діє на стінку, якщо відомо, що швидкість руху води в струмені v=12 м/с.



Розв'язання

За час Δt об стінку ударяється маса води:

$$m = lS\rho = Sv\Delta t\rho, \qquad (1)$$

де S – поперечний переріз струменя, ρ – густина води. За законом збереження імпульсу FΔt=mΔv, звідки:

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}. \qquad (2)$$

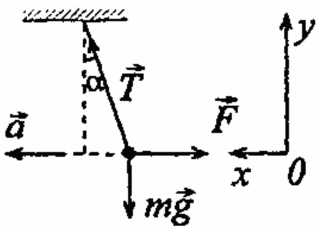
Маємо $\Delta v = v_1 \cos\alpha - (-v_2 \cos\alpha) = \cos\alpha(v_1 + v_2)$. *За умовою* $v_1 = v_2 = v$, *звідси:*

$$\Delta v = 2v\cos\alpha. \qquad (3)$$

Підставляючи (1) і (3) в (2), отримаємо $F = \dfrac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v\cos\alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho\cos\alpha = 86\,H.$

Приклад 8. Куля на нитці підвішена до стелі трамвайного вагону. Вагон гальмує, і його швидкість за час t=3 с рівномірно зменшується від v_1=18км/ч до v_2=6км/ч. На який кут відхилиться при цьому нитка з кулею?

Розв'язання



Розглянемо положення кулі щодо системи відліку, пов'язаної із стелею вагону. Оскільки вагон рухається з прискоренням, то система є неінерціальною. Рівняння руху у векторній формі:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0, \qquad (1)$$

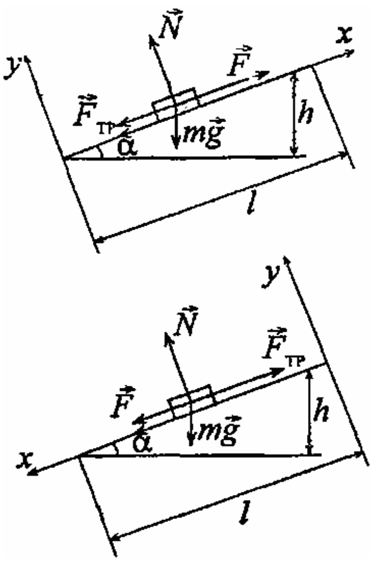
де $F = -ma$*, тоді рівняння (1) в проекціях на вісь x:*

$$T\sin\alpha = ma \qquad (2)$$

і на вісь y:

$$T\cos\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Розділивши (2) на (3), отримаємо $tg\alpha = \dfrac{a}{g}$*, звідки* $\alpha = arctg\dfrac{a}{g}$ *або враховуючи, що* $a = \dfrac{\Delta v}{t}, \alpha = arctg(\Delta v / gt)$*. Підставляючи числові данні, отримаємо* $\alpha \approx 6^\circ$*.*



Приклад 9. На автомобіль масою m=1 т під час руху діє сила тертя $F_{тер}$, рівна 0,1 його ваги. Знайти силу тяги F, що розвивається мотором автомобіля, якщо автомобіль рухається з постійною швидкістю: а) в гору з ухилом 1 м на кожних 25 м шляху; б) під гору з тим же ухилом.

Розв'язання

Рівняння руху автомобіля у векторній формі $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + F_{тер} + \vec{F}$; $v = const$*, отже a=0.*

а) У проекції на вісь x: $0 = -mg\sin\alpha - F_{тер.} + F$*; на вісь y:* $0 = N - mg\cos\alpha$*,*

де $\sin\alpha = \dfrac{h}{l} = 0{,}04$*,* $\cos\alpha = 0{,}999$*, звідки* $N = mg\cos\alpha$*.* $F_{тер.} = kN = kmg\cos\alpha$*;*

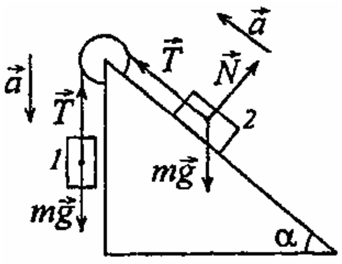
$F = mg\sin\alpha + kmg\cos\alpha$*;* $F = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)$ *або F=1,37 кН.*

б) У проекції на вісь x: $0 = F + mg\sin\alpha - F_{тер.}$, *на вісь y:* $N = mg\cos\alpha$.

$F = F_{тер.} - mg\sin\alpha$; $F = kmg\cos\alpha - mg\sin\alpha$; $F = mg(k\cos\alpha - \sin\alpha)$. *F=590Н.*

Приклад 10. Невагомий блок укріплений у вершині похилої площини, що складає з горизонтом кут α=30°. Гирі 1 і 2 однакової маса m_1=m_2=1 кг звязані ниткою і перекинуті через блок. Знайти прискорення a, з яким рухаються гирі, і силу натягнення нитки T. Тертям гирі об похилу площину і тертям в блоці нехтувати.

Розв'язання:



Нехай m_1=m_2=m. *Запишемо рівняння другого закону Ньютона для першої і другої гирі в проекціях на напрям їх руху з урахуванням* T_1=T_2=T:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg\sin\alpha = ma \end{cases}. \qquad (1)$$

З першого рівняння системи (1) маємо:

$$T = m(g - a). \qquad (2)$$

Підставимо (2) в (1), отримаємо: $g(1 - \sin\alpha) + 2a$, *звідки* $a = g(1 - \sin\alpha)/2$. *Підставимо числові значення, отримаємо: a=2,45м/с*^{2} *і T=7,35Н.*

Приклад 11. При підйомі вантажу масою m=2 кг на висоту h=1 м сила F здійснює роботу A=78,5 Дж. З яким прискоренням a піднімається вантаж?

Розв'язання

По другому закону Ньютона в проекції на напрям рухи вантажу маємо $ma = F - mg$, *звідки* $F = ma + mg$.

За умовою роботу A здійснює сила F, отже

$$A = Fh\cos 0 = Fh = mah + mgh, \qquad (1)$$

тобто робота А йде на збільшення потенційної енергії вантажу і на надання йому прискорення. З рівняння (1) знайдемо $a = \dfrac{A - mgh}{hm}$*; а=29,4 м/с*^{2}.

Приклад 12. Яку роботу *A* необхідно виконати, щоб змусити тіло масою *m*=2кг: а) збільшити швидкість v_1=2 м/с до v_2=5 м/с; б) зупинитися при початковій швидкості v_0=8 м/с?

Розв'язання

Виконана робота піде па приріст кінетичної енергії:

а) $A_1 = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2}$; $A_1 = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$; $A_1 = 21$ *Дж.*

б) $A_2 = W_{k2} - W_{k1}$. *Оскільки* $W_{k2} = 0$ *то* $A_2 = -W_{k1} = -mv_0^2 / 2$; $A = -6{,}4$. *Знак «-» говорить про те, що робота здійснюється силою тертя.*

Приклад 13. Знайти роботу А, яку необхідно виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла масою *m*=1 т від v_1=2 м/с до v_2=6 м/с на шляху s=10м. На всьому шляху діє сила тертя $F_{тер.}$=2 Н.

Розв'язання

Частина виконаної роботи піде на приріст кінетичної енергії, а інша частина – на подолання сили тертя. $A = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} + A_{тер.}$, *де* $A_{тер.} = F_{тер.} \cdot s$

тоді $A = \dfrac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + F_{тер.}s$; $A = 16{,}02$ *кДж.*

Приклад 14. Яку масу *m* бензину витрачає двигун автомобіля на шляху s= 100 км, якщо при потужності двигуна *N*=11 кВт швидкість його руху *v*=30 км/ч? К.п.д. двигуна η=0,22, питома теплота згорання бензину *q*=46 МДж/кг.

Розв'язання

При переміщенні автомобіля на відстань s його двигун здійснює роботу $A = \dfrac{Nt}{\eta} = \dfrac{Ns}{\eta v}$*. При цьому витрачається маса бензину* $m = \dfrac{A}{q} = \dfrac{Ns}{q\eta v}$*;* $m = 13$ *кг.*

Приклад 15. Камінь падає з деякої висоти протягом часу t=1,43 с. Знайти кінетичну $W_к$ і потенційну $W_п$ енергії каменя в середній точці шляху. Маса каменя m=2кг

Розв'язання

У верхній точці камінь володів потенційною енергією $W_n = mgH$ *де* $H = \dfrac{gt^2}{2}$ *(t – час падіння до землі). Потенційна енергія каменя в середній точці шляху* $W_n = mgh$ *де* $h = \dfrac{H}{2}$*. Таким чином* $W_n = mg\dfrac{H}{2} = \dfrac{mg^2t^2}{4}$*;*$W_n = 98$*Дж. Кінетичну енергію камінь набув за рахунок спаду потенційної енергії. У середній точці шляху* $W_к$=$W_п$=98 *Дж, оскільки* $mgH - mgh = mg\dfrac{H}{2} = W_k$.

Приклад 16. Тіло масою m=10г рухається по колу радіусом R=6,4 см. Знайти тангенціальне прискорення a_τ тіла, якщо відомо, що до кінця другого обороту після початку руху його кінетична енергія $W_к$=0,8 МДж.

Розв'язання

Знайдемо кутове прискорення:

$$a_\tau = \varepsilon R; \qquad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \qquad (2)$$

Кутова швидкість $\omega = 2\pi n = \dfrac{2\pi N}{t}$*, звідси*

$$t = \frac{2\pi N}{\omega}. \qquad (3)$$

З іншої сторони:

$$\omega = \frac{v}{R}. \qquad (4)$$

Швидкість знайдемо з рівняння кинетичної енергії: $W_k = \frac{mv^2}{2}$, *звідси*

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}. \qquad (5)$$

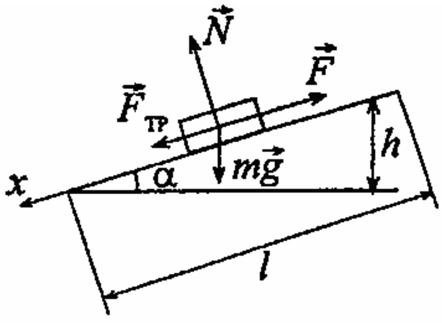
Підставивши рівняння (5) в (4), отримаємо

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_k}{mR^2}}. \qquad (6)$$

Підставивши рівняння (3) в (2), з урахуванням (6), знайдемо: $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\pi N} = \frac{2W_k}{mR\pi N}$. *Тоді з (1):* $a_\tau = \frac{W_k R}{mR^2\pi N} = \frac{W_k}{mR\pi N}$; $a_\tau \approx 0{,}2$ *м/с*^{2}.

Приклад 17. Автомобіль масою m=2 т рухається в гору з ухилом 4 м на кожних 100м шляху. Коефіцієнт тертя k=0,08. Знайти роботу А, що здійснюється двигуном автомобіля на шляху s=3км., і потужність N що розвивається двигуном, якщо відомо, що шлях s =3 км був пройдений за час t=4 хв.

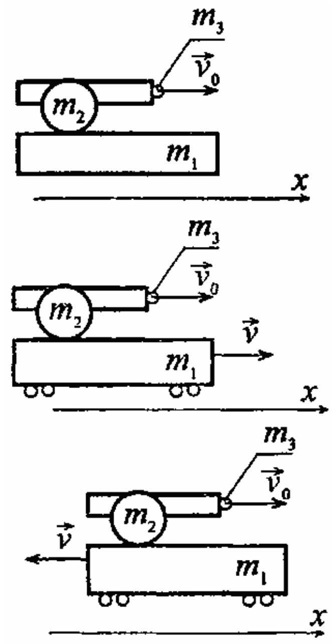
Розв'язання



У разі рівномірного руху автомобіля a=0, тоді згідно другому закону Ньютона сила тяги двигуна $F = F_{тер.} + mg\sin\alpha$ *або* $F = mg(k\cos\alpha + \sin\alpha)$ *де* $\sin\alpha = h/l$; $\sin\alpha$ *=0,04;* $\cos\alpha$ *=0,999. Робота сили F на шляху s:* $A = Fs = mgs(k\cos\alpha + \sin\alpha)$; *A=7МДж. Потужність двигуна* $N = A/t$; *N=29,2кВт.*

Приклад 18. На рейках стоїть платформа масою m_1=10т. На платформі закріплено гармата масою m_2=5т, з якого робиться постріл уздовж рейок. Маса снаряда m_3=100 кг; його початкова швидкість відносно гармати v_0=500м/с. Знайти швидкість *u* платформи в перший момент після пострілу, якщо: а) платформа стоїть нерухомо; б) платформа рухалася із швидкістю *v*=18 км/год і постріл був зроблений в напрямі, протилежному напряму її руху.

Розв'язання:



а) При нерухомій платформі початкова швидкість снаряда відносно землі рівна його швидкості v_0 відносно гармати. Систему «платформа-гармата-снаряд» можна вважати замкненою в проекції на вісь x за умови, що силою тертя кочення платформи можна нехтувати. Тоді в проекції на вісь x імпульс системи до пострілу $p=(m_1+m_2+m_3)v=0$, *оскільки* $v=0$. *Імпульс системи після пострілу* $p'=m_3v_0+(m_1+m_2+)u$. *За законом збереження імпульсу* $p=p'$ *або* $m_3v_0+(m_1+m_2)u=0$, *звідки* $u=\dfrac{m_3v_0}{m_1+m_2}=5{,}14\,{км}/{год}$. *Знак «-» вказує, що платформа почала рухатися в напрямі, протилежному напряму руху снаряда.*

б) Якщо постріл був зроблений у напрямі руху платформи, то початкова швидкість снаряда відносно землі рівна v_0+v. На підставі закону збереження імпульсу маємо:

$$(m_1+m_2+m_3)v=m_3(v_0+v)+(m_1+m_2)u \qquad (1),$$

звідки $u=\dfrac{(m_1+m_2+m_3)v-m_3(v_0+v)}{m_1+m_2};u=6км/год$.

в) Якщо постріл був зроблений в напрямі, протилежному напряму руху платформи, то при v_0>0 маємо v<0 . Тоді рівняння (1) має вигляд: $-(m_1+m_2+m_3)v=m_3(v_0-v)+(m_1+m_2)u$, *звідки*

$$u=-\frac{(m_1+m_2+m_3)v+m_3(v_0-v)}{m_1+m_2}=-30\,{км}/{год}$$

Приклад 19. Ковзаняр масою *М=70кг*, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямі камінь масою *m=3кг* із швидкістю *v=8 м/с*. На яку відстань *s* відкотиться при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід *k=0,02*?

Розв'язання

Рух ковзаняра є рівноуповільненим, пройдений ним шлях $s = \frac{v_0^2}{2a}$. *За законом збереження імпульсу* $Mv_0 = mv$, *звідки* $v_0 = \frac{mv}{M}$.

Прискорення а можна знайти по другому закону Ньютона: $F_{тер} = ma$. *Оскільки* $F_{тер} = kmg$, *то* $ma = kmg$; $a = kg$. *Підставивши отримані вирази в перше рівняння, отримаємо* $s = \frac{m^2 v^2}{2M^2 kg}$; $s = 0{,}3м$.

Приклад 20. Із гармати масою m_1*=5* т вилітає снаряд масою m_2*=100* кг. Кінетична енергія снаряда при вильоті W_{k2}*=7,5 Мдж*. Яку кінетичну енергію W_{k1} отримує гармата унаслідок віддачі?

Розв'язання

Згідно закону збереження імпульсу $m_1 v_1 = m_2 v_2$. *Кінетична енергія гармати відразу після пострілу* $W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$. *Кінетична енергія снаряда* $W_{k2} = \frac{m_1 v_2^2}{2}$;

$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$, *а* $v_2^2 = \frac{2W_{k2}}{m_2}$ *тоді* $v_1^2 = \frac{m_2^2 2W_{k2}}{m_1^2 \cdot m_2}$. *Таким чином, отримаємо*

$$W_{k1} = \frac{m_1 2 m_2 W_{k2}}{2m_1^2} = \frac{m_2}{m_1} W_{k2}; W_{k1} = 150кДж$$

Приклад 21. Тіло масою m_1=5 кг ударяється об нерухоме тіло масою m_1=2,5 кг Кінетична енергія системи двох тіл безпосередньо після удару стала

$W_к$=5 Дж. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кінетичну енергію $W_{к1}$ першого тіла до удару.

Розв'язання

Рух здійснюється уздовж горизонтальної осі. Згідно закону збереження імпульсу

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u, \qquad (1)$$

де v_1 *– швидкість першого тіла до удару,* u *– швидкість системи двох тіл після удару.*

Кінетична енергія першого тіла до удару:

$$W_{k1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} \qquad (2)$$

З (1) $v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}$.

Знайдемо u із виразу для кінетичної енергії системи двох тіл після удару: $W_k = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$, *звідки* $u = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}$, *тоді*

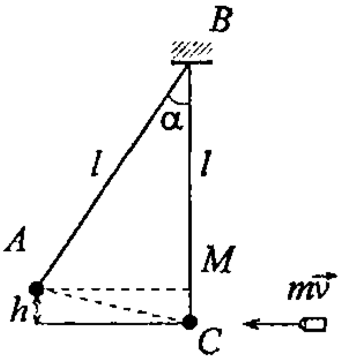
$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}}{m_1}, \text{ або } v_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}}{m_1}. \qquad (3)$$

Підставивши (3) в (2) отримаємо $W_{k1} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1^2}$;

$W_{k1} = \frac{W_k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}$. $W_{k1} = 7{,}5$ *Дж.*

Приклад 22. Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, підвішене на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше за масу тіла. Відстань від центру тіла до точки підвісу стрижня *l*=1 м. Знайти швидкість *v* кулі, якщо відомо, що стрижень з тілом відхилився від удару кулі на кут α=10°.

Розв’язання



Силу опору повітря не враховуємо, отже, систему «куля - тіло» можна вважати замкнутою. Запишемо закон збереження імпульсу і закон збереження енергії для даної системи:

$$mv=(m+M)\cdot u\,, \qquad (1)$$

де u – швидкість тіла разом з кулею після удару. В результаті взаємодії тіла з кулею, він набув кінетичну енергію, яка після відхилення стрижня на кут α перейшла в потенціальну енергію:

$$\frac{(m+M)\cdot u^2}{2}=(M+m)\cdot g\cdot h \qquad (2)$$

З (1) виразимо u: $u=\frac{mv}{(m+M)}$, *або* $u=\frac{mv}{1001\cdot m}=\frac{v}{1001}$. *З (2) отримаємо* $\frac{u^2}{2}=g\cdot h$. $\frac{v^2}{2\cdot(1001)^2}=g\cdot h$. *Знайдемо h:* $BM=l\cdot cos\,\alpha$; $h=l-l\cdot cos\,\alpha=l\cdot(1-cos\,\alpha)$. *Тоді* $v=1001\cdot\sqrt{2\cdot g\cdot l\cdot(1-cos\,\alpha)}$.

$v\approx 550$ *м/с*

Приклад 23. На яку частину зменшиться вага тіла на екваторі унаслідок обертання Землі навколо осі?

Розв’язання

На екваторі на тіло діє сила тяжіння:

$$F=G\cdot\frac{m\cdot M}{R^2}, \qquad (1)$$

(M – маса Землі; m – маса тіла; R – радіус Землі; G – гравітаційна постійна) та сила реакції опори, при цьому тіло бере участь у добовому обертанні Землі і рухається по колу радіусом R. Запишемо рівняння на підставі другого закону

Ньютона $F - N = m\omega^2 R$, *де* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ *– кутова швидкість; T – період обертання Землі навколо своєї осі (T=86400 с). Тоді* $F - N = m\left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 R$, *звідки:*

$$N = F - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R. \quad (2)$$

По третьому закону Ньютона вага тіла на екваторі:

$$P_E = N \quad (3)$$

Вага тіла, що покоїться, для будь-якої точки Землі чисельно рівний силі тяжіння:

$$P = mg. \quad (4)$$

Відносна зміна ваги тіла:

$$\delta = \frac{P - P_E}{P} \quad (5)$$

Вирішуючи спільно рівняння (1) - (3), отримаємо

$$P_E = G\frac{m \cdot M}{R^2} - \frac{4\pi^2 mR}{T^2}. \quad (6)$$

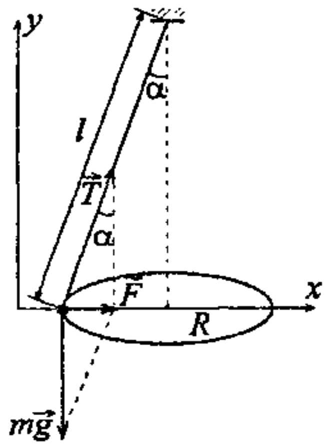
Підставляючи (4) і (6) в (5) отримаємо:

$$\delta = 1 - \frac{G \cdot M}{gR^2} - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}. \quad (7)$$

Приймемо прискорення вільного падіння g=9,8 м/с. Підставляючи числові дані в (7), отримаємо δ=0,34%.

Приклад 24. Гирка масою m=50 г, прив’язана до нитки завдовжки *l*=25 см, описує в горизонтальній площині коло. Частота обертання гирки n=2 об/с. Знайти силу натягнення нитки Т.

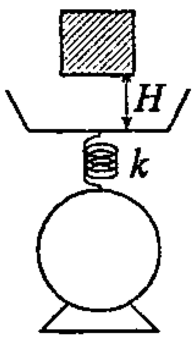
Розв'язання



У горизонтальній площині на гирку діє сила $F = T \cdot \sin\alpha$. Тоді за другим законом Ньютона $T \cdot \sin\alpha = ma_n$, де $\sin\alpha = \frac{R}{l}$. Враховуючи, що $a_n = \omega^2 R = (2\pi \cdot n)^2 R$, запишемо: $(2\pi \cdot n)^2 Rm = T\frac{R}{l}$, звідки $T = (2\pi \cdot n)^2 lm$. T=1,96 Н.

Приклад 25. Груз масою m=1 кг падає на чашку вагів з висоти H=10 см. Які показання вагів F у момент удару, якщо після заспокоєння гойдань чашка вагів опускається на h=0,5 см?

Розв'язання



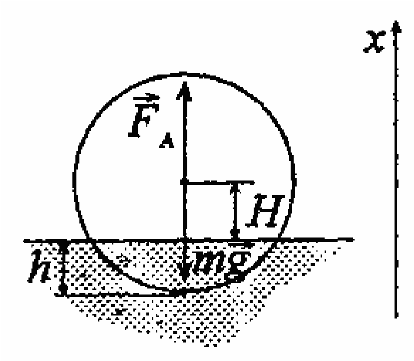
За законом збереження енергії у момент удару $W_{n1} = W_{n2}$, де $W_{n1} = mgH$, а $W_{n2} = \frac{kx_1^2}{2}$. Звідси $mgH = \frac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ – деформація пружини вагів у момент удару. Після заспокоєння гойдань наступає рівновага $mg = F_2$, де $F_2 = kx_2$, за законом Гука, причому $x_2 = h$. Тоді $mg = kh$; $k = \frac{mg}{h}$. Свідчення вагів у момент удару $F = mg + F_1$, де $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ – за законом Гука

$F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$; $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg + \sqrt{2mgH\frac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}$;

$F = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{h}}\right)$. *Звідки* $F = 72{,}5\,H$.

Приклад 26. М’яч радіусом R=10 см плаває у воді так, що його центр мас знаходиться на H=9 см вище за поверхню води. Яку роботу необхідно виконати, щоб занурити м’яч у воду до діаметральної площини?

Розв’язання



М’яч плаває, якщо сила тяжіння, що діє на нього, врівноважується силою Архімеда, тобто $mg = F_A$*, або:*

$$mg = \rho_0 V_0 g \qquad (1)$$

V_0 *– об’єм сегменту заввишки h, що знаходиться у воді в рівновазі,* ρ_0 *– щільність води, m – маса м’яча.*

Очевидно, що $H + h = R$*, тобто радіусу м’яча. Якщо тепер занурити м’яч у воду на глибину x, то сила Архімеда перевищить силу тяжіння, що діє на м’яч, і результуюча сила, що виштовхує м’яч з води, буде:*

$$F_x = F_A^{/} - mg\,. \qquad (2)$$

Проти цієї сили F_x *і повинна бути виконана робота. Сила Архімеда:*

$$F_A^{/} = \rho_0 V g\,, \qquad (3)$$

де V – об’єм сегменту заввишки $h + x$*. З (1) - (3) маємо* $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g (V - V_0) = \rho_0 g V_x$*,* V_x *– об’єм кульового шару висотою x. Кульовий сегмент заввишки x має об’єм кульового шару* $V_x = V - V_0 = \dfrac{\pi (x+h)^2}{3}\left(3R - (x+h)\right) - \dfrac{\pi h^2}{3}(3R - h)$*. Тоді:*

$$F_x = \rho_0 g V_x = \frac{\pi \rho_0 g}{3}\left(3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R - h)\right). \qquad (4)$$

Робота, яку необхідно виконати при зануренні м’яча до діаметральної площини, буде:

$$A = \int_0^H F_x dx\,. \qquad (5)$$

Підставимо (4) в (5), проінтегруємо і врахуємо, що $H + h = R$, отримаємо, після підстановки даних завдання, A=0,74 Дж.

Приклад 27. Знайти силу гравітаційної взаємодії F між двома протонами, що знаходяться на відстані $r = 10^{-6}$ м один від одного. Маса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Розв'язання

Сила гравітаційної взаємодії виражається $F = G\dfrac{m^2}{r^2}$. Підставляючи числові дані, отримаємо: $F = 1{,}86 \cdot 10^{-11}$.

Приклад 28. Порівняти прискорення вільного падіння у поверхні Місяця $g_Л$ з прискоренням вільного падіння у поверхні Землі $g_З$.

Розв'язання

Відповідно до закону усесвітнього тяжіння, тіло масою m, що знаходиться у поверхні Землі, притягується нею з силою $P = G\dfrac{m \cdot M_З}{R_З^2}$, де $M_З$ – маса Землі, $R_З$ – її радіус. З іншого боку, $P = mg$. Прирівнюючи ці величини, знайдемо, що $g_З = G\dfrac{M_З}{R_З^2}$. Прискорення вільного падіння у поверхні Місяця: $g_M = G\dfrac{M_M}{R_M^2}$, де M_M і R_M – маса і радіус Місяця. Звідси $\dfrac{g_M}{g_З} = \dfrac{M_M \cdot R_З^2}{R_M^2 \cdot M_З}$, $g_M = 0{,}165 \cdot g_З$.

Приклад 29. Знайти лінійну швидкість *v* руху Землі по круговій орбіті.

Розв'язання

Лінійна швидкість руху по колу $v = \omega \cdot R$, де ω – частота обертання, R – відстань до Сонця. $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, де T – період обертання Землі навколо Сонця. Звідси $v = 30$ км/с.

Приклад 30. На якій висоті до від поверхні Землі прискорення вільного падіння $g = 1 \, {}^{м}\!/_{c^2}$?

Розв'язання

У поверхні Землі на тіло масою m діє сила $P = mg = G\dfrac{m \cdot M}{R^2}$*, де M та R – маса та радіус Землі, а на висоті h –* $P_h = mg_h = G\dfrac{m \cdot M}{(R+h)^2}$*. Тоді* $\dfrac{g_h}{g} = \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$*.*

Виразимо h: $(R+h)^2 = \dfrac{g \cdot R^2}{g_h}$*;* $h = \sqrt{\dfrac{g \cdot R^2}{g_h}} - R$*. Підставимо числові значення та отримаємо:* $h = 13590 \, км$*.*

Динаміка обертального руху

Приклад 1. Знайти момент інерції J і момент імпульсу L земної кулі відносно осі обертання.

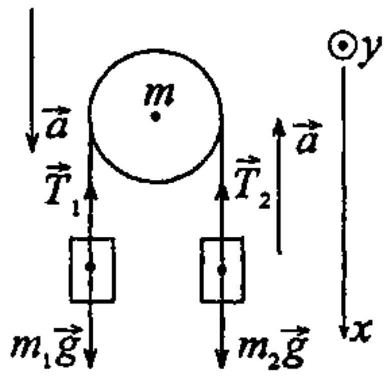
Розв'язання

Момент інерції кулі $J = \dfrac{2}{5}MR^2$*, підставляючи значення маси і радіусу Землі, отримаємо* $J = 97{,}36 \cdot 10^{36}$ *кг·м². Момент імпульсу* $L = J \cdot \omega$*, де* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$*, отже* $L = \dfrac{2J\pi}{T}$*. Період обертання Землі T=24 години. Підставляючи числові дані, отримаємо* $L = 7 \cdot 10^{33} \, {}^{кг \cdot м^2}\!/_{c}$ *.*

Приклад 2 Маховик, момент інерції якого $J = 63{,}6 \, кг \cdot м^2$ обертається з кутовою швидкістю ω=31,4 рад/с. Знайти момент сил гальмування М, під дією якого маховик зупиняється через час t=20 с. Маховик вважати однорідним диском.

Розв'язання

Момент сил гальмування $M = J \cdot \varepsilon$*, де* ε *– кутове прискорення, яке дорівнює* $\varepsilon = \dfrac{\omega}{t}$*, оскільки маховик обертається рівносповільнено. Тоді* $M = \dfrac{\omega \cdot J}{t}$*;* $M \approx 100\, H \cdot м$.



Приклад 3. Дві гирі з масами m_1=2 кг і m_2=1 кг зв'язані ниткою, перекинутою через блок масою m=1 кг Знайти прискорення *a*, з яким рухаються гирі, і сили натягнення T_1 і T_2 ниток, до яких підвішені гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

Розв'язання

Запишемо у векторній формі рівняння поступального руху першої і другої гирі: $m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$*;* $m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$ *і рівняння обертального руху диска* $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$*, де* M_1 *– момент сили натягнення нитки* T_1*,* M_2 *– момент сили натягнення нитки* T_2*. Спроектуємо перші два рівняння на вісь x, а останнє на вісь y і додамо рівняння кінематичного зв'язку. Отримаємо систему 4 рівнянь:*

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \qquad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \qquad (2)$$

$$J\varepsilon = RT_1 - RT_2; \qquad (3)$$

$$a = \varepsilon R. \qquad (4)$$

Підставимо (4) в (3):

$$J\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2). \qquad (5)$$

Віднімемо (2) з (1), підставимо в отриманий вираз (5) і знайдемо:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + {}^{m}\!/_{2}} = 2{,}8\ {}^{м}\!/_{с^2}. \qquad (6)$$

Підставляючи (6) в (1) і (2), отримаємо $T_1 = m_1(g-a)$*; T_1=14 Н.* $T_2 = m_2(g-a)$*; T_2=12,6 Н.*

Приклад 4. Диск масою m=2 кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю v=4 м/с. Знайти кінетичну енергію $W_к$ диска.

Розв'язання

У завданні розглядається так званий «плоский рух». Повна кінетична енергія диска складається з кінетичної енергії поступальної руху точки центру мас і кінетичної енергії обертання відносно осі, що проходить через центр мас: $W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$*. Оскільки* $J = \frac{mR^2}{2}$ *і* $\omega = \frac{v}{R}$*, де* $m -$ *маса диска,* $R -$ *радіус диска, то* $W_k = \frac{3mv^2}{4}$*.* $W_k = 24$ *Дж.*

Приклад 5. Обруч та диск однакової маси $m_1 = m_2$ котяться без ковзання з однією і тією ж швидкістю *v*. Кінетична енергія обруча $W_{k1} = 40$ Н. Знайти кінетичну енергію W_{k2} диска.

Розв'язання

Припустимо $m_1 = m_2 = m$*. Кінетична енергія обруча і диска складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертання:*

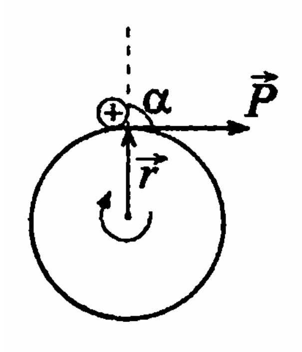
$$W_{k1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2}, \qquad (1)$$

$$W_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Момент інерції обруча $J = mR_1^2$*. Кутова швидкість* $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$*. Момент інерції диска* $J = \frac{1}{2}mR_2^2$*; частота* $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$*. Проведемо наступні перетворення:*

$J_1\omega_1^2 = mR_1^2 \dfrac{v^2}{R_1^2} = mv^2$; $J_2\omega_2^2 = \dfrac{1}{2} mR_2^2 \dfrac{v^2}{R_2^2} = \dfrac{1}{2} mv^2$. *Тоді, з урахуванням (1) та (2), можна записати* $W_{k1} = mv^2$, $W_{k2} = \dfrac{3mv^2}{4}$ *або* $W_{k2} = \dfrac{3W_{k1}}{4}$. $W_{k2} = 30$ *Дж.*

Приклад 6. Кінетична енергія валу, що обертається з частотою n=5 об/с, $W_k = 60$ Дж. Знайти момент імпульсу L валу.



Розв'язання

Момент імпульсу – вектор, напрям якого визначається за правилом векторного добутку $\vec{L} = \lfloor \vec{R} \times \vec{p} \rfloor$, *де* $\vec{p} = m\vec{v}$, *а модуль рівний:*

$$L = Rp\sin\alpha = mvR, \qquad (1)$$

оскільки $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. *Кінетична енергія валу:*

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad (2)$$

де

$$J = \frac{mR^2}{2}, \qquad (3)$$

$$\omega = 2\pi n. \qquad (4).$$

Вирішуючи спільно рівняння (2)-(4) отримаємо: $W_k = mR^2\pi^2 n^2$, *звідки:*

$$m = \frac{W_k}{R^2\pi^2 n^2}, \qquad (5)$$

$$v = 2\pi n R. \qquad (6).$$

Підставивши (5) і (6) в (1), знайдемо $L = \dfrac{2W_k}{\pi n}$; $L = 7{,}6 \dfrac{кг \cdot м^2}{с}$.

Приклад 7. Мідна куля радіусом R=10 см обертається з частотою n=2 об/с навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу A необхідно виконати, щоб збільшити кутову швидкість ω обертання кулі удвічі?

Розв'язання

Кінетична енергія обертання кулі $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$, *де момент інерції кулі* $J = \frac{2}{5} mR^2$. *Робота зі збільшення кутової швидкості обертання кулі буде дорівнювати приросту її кінетичної енергії.* $A = W_{k2} - W_{k1}$, *де* $W_{k1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$; $W_{k2} = \frac{J\omega_2^2}{2} = \frac{4J\omega_1^2}{2}$. *Звідси:*

$$A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2} J\omega_1^2; \qquad (1)$$

$$\omega_1 = 2\pi n. \qquad (2)$$

Маса кулі $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, $\rho = 8{,}6 \cdot 10^3$ $кг/м^3$, *тоді*

$$J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^2 \rho. \qquad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), отримаємо $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15}\pi R^5 \rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{15}\pi^3 R^5 \rho n^2$; *A=34,1 Дж.*

Приклад 8. Колесо, обертаючись равноуповільнено, зменшило за час *t*=1 хв. частоту обертання від n_1=300 об/хв. до n_2=180 об/хв. Момент інерції колеса $J = 2\,кг \cdot м^2$. Знайти кутове прискорення ε колеса, момент сил гальмування *M*, роботу *A* сил гальмування і число обертів *N*, зроблених колесом за час t=1 хв.

Розв'язання

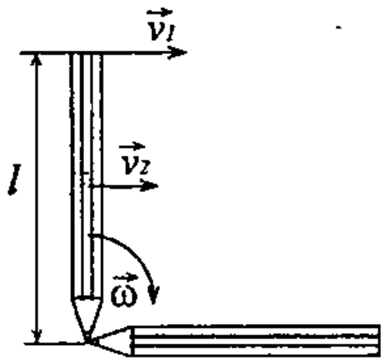
Перетворимо числові одиниці в систему СІ: t=60 с, n_1*=5 об/с,* n_2*=3 об/с. Оскільки обертання рівноуповільнене, то число обертів можна визначити так:*

$N = \frac{n_1 + n_2}{2} t$; $N = 240\,об.$ *Кутове прискорення* $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}$. *Маємо:* $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$, *таким чином,* $\varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}$. *Підставивши числові значення, отримаємо* $\varepsilon = -0{,}21\,рад/с^2$. *Момент сил гальмування* $M = J\varepsilon$; *M=0,42 Н·м. Робота сил гальмування дорівнює приросту кінетичної енергії* $A = W_{k1} - W_{k2} = \frac{J\omega_2^2 - J\omega_1^2}{2}$;

$A = \frac{J}{2}\left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2\right) = 2\pi^2 J\left(n_1^2 - n_2^2\right)$; *A=630 Дж.*

Приклад 9. Олівець завдовжки *l*=15 см, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову швидкість ω і лінійну швидкість v матиме в кінці падіння середина і верхній кінець олівця?

Розв'язання



Розглянемо рух центру мас олівця. У вертикальному положенні він має потенціальну енергію, яка при падінні переходить в кінетичну енергію обертання:

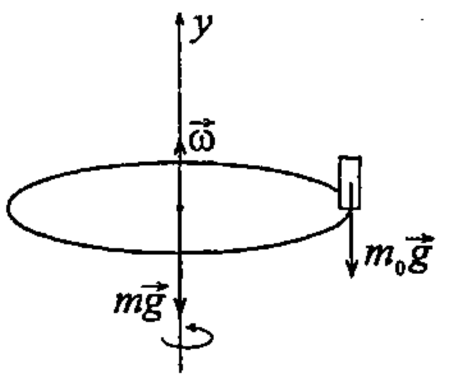
$$\frac{J\omega_1^2}{2} = mg\frac{l}{2}. \qquad (1)$$

Момент інерції олівця відносно осі, що проходить через його кінець, знайдемо за теоремою Штейнера:

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2. \qquad (2)$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$, *звідки* $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ *;* $\omega_1 = 14\,{}^{рад}\!/_{с}$.
Оскільки $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, *а лінійна швидкість* $v = \omega R$ *V, то швидкість кінця олівця* $v_1 = \omega \cdot l = 2{,}1\,{}^{м}\!/_{с}$. *Швидкість середини* $v_2 = \omega \cdot \frac{l}{2} = 1{,}05\,{}^{м}\!/_{с}$.

Приклад 10. Горизонтальна платформа масою m=100 кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою n_1=10 об/хв. Людина масою m_0=60 кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою n_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.



Розв'язання

Система «людина - платформа» замкнута в проекції на вісь у, оскільки моменти сил $M_{mg} = 0$ *та* $M_{m_0 g} = 0$ *в проекції на цю вісь. Отже, можна скористатися законом збереження моменту імпульсу. У проекції на вісь у:* $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, *де* J_1 *– момент інерції платформи з людиною, що стоїть на її краю,* J_2 *– момент інерції платформи з людиною, що стоїть в центрі,* ω_1 *та* ω_2 *– кутові швидкості платформи в обох випадках. Причому:*

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0 R^2, \qquad (1)$$

$$J_2 = \frac{mR^2}{2}, \qquad (2)$$

де R − радіус платформи. Підставляючи (2) в (1) і враховуючи, що $\omega = 2\pi n$, *де* n *− частота обертання платформи, отримаємо* $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0 R^2\right) 2\pi n_1 = 2\pi n_2 \frac{mR^2}{2}$;

$n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0 R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m}$; $n_2 = 22$ *об/хв.*

Приклад 11. Обруч діаметром D=56,5 см висить на цвяху, вбитому в стінку, і здійснює малі коливання в площині, паралельній стіні. Знайти період коливань *T* обруча.

Розв'язання

Центр мас знаходиться в центрі обруча, тоді період малих коливань $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mRg}} = 2\pi\sqrt{\frac{2J}{mDg}}$, *де* $J = \frac{1}{2}m\left(R_1^2 + R_2^2\right)$, $R_1 = R_2$, *таким чином,* $J = mR^2 = m\frac{D^2}{4}$. *Звідси* $T = 2\pi\sqrt{\frac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi\sqrt{\frac{D}{2g}}$; *T=1,5 с.*

Механіка газів та рідин

Приклад 1. Знайти швидкість *v* руху вуглекислого газу по трубі, якщо відомо, що за час t=30 хв. через поперечний переріз труби протікає маса газу m=0,51 кг. Густина газу ρ=7,5 кг/м^3. Діаметр труби D=2 см.

Розв'язання

За час t через поперечний переріз труби проходить деякий об'єм газу циліндричної форми (маса цього об'єму газу нам відома):

$$V = \pi\frac{D^2}{4}l = \frac{m}{\rho}. \qquad (1)$$

Швидкість течії вуглекислого газу $v = \frac{l}{t}$. *З рівняння (1) знайдемо* $l = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}$, *тоді* $v = \frac{4m}{\pi D^2 \rho t}$; *v=0,12 м/с.*

Приклад 2. В дні циліндричного сосуду діаметром D=0,5 м є круглий отвір діаметром d=1 см. Знайти залежність швидкості пониження рівня води в сосуді від висоти h. Знайти значення цієї швидкості для висоти h=0,2 м.

Розв'язання

За теоремою Бернуллі $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = \frac{\rho v_2^2}{2}$ *або*

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \tag{1}$$

де v_1 *– швидкість пониження рівня води в сосуді,* v_2 *– швидкість витікання води з отвору. В силу нерозривності струменя* $v_1 S_1 = v_2 S_2$, *звідки*

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}, \tag{2}$$

де S_1 *– площа поперечного перерізу сосуду,* S_2 *– площа поперечного перерізу отвору. Підставляючи (2) в (1), отримаємо* $v_1 = \frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. *Оскільки* $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ *і* $S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, *то* $v_1 = \frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. *Оскільки а* $d^4 << D^4$, *то* $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}$. *При h=0,2 м швидкість v=0,8 мм/с.*

Приклад 3. Кулька спливає з постійною швидкістю v в рідині, густина ρ_1, якої в 4 рази більше густини матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя $F_{тер}$, що діє на спливаючу кульку, більше сили тяжіння mg, що діє на цю кульку?

Розв'язання

По другому закону Ньютона:

$$F_A - mg - F_{тер} = 0, \tag{1}$$

де $F_A = \rho_1 V g$ *– сила Архімеда. Враховуючи, що*

$$m = \rho_2 V, \tag{2}$$

із (2) $V = \dfrac{m}{\rho_2}$*, тоді:*

$$F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg. \qquad (3)$$

Перетворюючи (1) з урахуванням (3) отримаємо $F_{тер} = 3mg$ *або* $\dfrac{F_{тер}}{mg} = 3$.

Приклад 4. Сталева кулька діаметром d=1 мм падає з постійною швидкістю *v*=0,185 см/с у великому сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну в'язкість η касторової олії.

Розв'язання

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона

$$mg - F_A - F = 0, \qquad (1)$$

де маса кульки

$$m = p_c V = p_c \frac{\pi d^3}{6}. \qquad (2)$$

Сила Архімеда

$$F_A = p_M V g = p_M g \times \frac{\pi d^3}{6}. \qquad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса

$$F = 3\pi\eta d v. \qquad (4)$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо: $18\eta v = d^2 g \times (p_c - p_M)$*, звідси* $\eta = \dfrac{d^2 g (p_c - p_M)}{18v}$*;* $\eta = 2$ *Па·с.*

Приклад 5. Пробкова кулька радіусом r=5мм спливає в сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну і кінематичну в'язкість касторової олії, якщо кулька спливає з постійною швидкістю *v*=3,5 см/с.

Розв'язання:

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона:

$$F_A - F - mg = 0, \tag{1}$$

де маса кульки:

$$m = p_n V = p_n \frac{4\pi r^3}{3}. \tag{2}$$

Сила Архімеда:

$$F_A = p_M V g = p_M \frac{4\pi r^3}{3}. \tag{3}$$

Сила опору масла за законом Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v. \tag{4}$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо $18\eta v = 4r^2 g(p_n - p_M)$, *звідки динамічна в'язкість:* $\eta = \dfrac{2r^2 g(p_n - p_M)}{9v}$; $\eta = 1,09$ *Па·с. Кінематична в'язкість масла:* $\nu = \eta / p_M$; $\nu = 12,1$ *см²/с.*