6. Пат. 2216595. Российская Федерация, МКП С12Р19/04, С08В37/00, С12N1/16 А61К31/716. Способ получения бета-глюкана клеточной стенки дрожжей / Тонева-Давидова Е. Г. ; заявитель и патентообладатель ЗАО "Торгово-закупочная фирма ВАИГ". – № 2002130728/13 ; заявл. 18.11.2002 ; опубл. 20.11.2003.
7. Пат. 2374901. Российская Федерация МПК А23L1/00 (2006.01). Способ получения биологически активной добавки / Римарева Л. В., Оверченко М. Б., Серба Е. М., Хричикова Г. Н., Поляков В. А. ; заявитель и патентообладатель гос. науч. учреждение Всерос. науч.-иссл. ин-т. пищ. биотехн. Рос. с/х акад. – № 2007134977/13 ; заявл. 20.09.2007 ; опубл. 10.12.2009.
8. Методы химии углеводов / под ред. Н. К. Кочеткова. – М. : Мир, 1967. – 125 с.
9. (1→3)-β-D-glucan from *Saccharomyces cerevisiae*, preparation, characterization and chemical modification – introducing carbonyl groups into the polysaccharide chain / D. Zekovic [et al.] // Mikrobiologja. – 2006. – Vol. 43. – P. 15–30.
10. Практические работы по химии древесины и целлюлозы / А. В. Оболеская [и др.]. – М. : Лесная пром-сть, 1965. – 411 с.

Отримано 30.10.2012. ХДУХТ, Харків.

УДК 514.748.4

М.С. Софронова, канд. фіз.-мат. наук

ЗАДАЧА РОЗМІЩЕННЯ N-ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІВ. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ТА ЇЇ ОСОБЛИВОСТІ

Розглянуто задачу розміщення n-вимірних паралелепіпедів. На основі математичного апарату Ф-функцій формалізуються умови взаємного неперетину, дотику та перетину n-вимірних паралелепіпедів. Будується математична модель задачі розміщення заданого числа n-вимірних паралелепіпедів в області (n-вимірному паралелепіпеді). Пропонується головна ідея розв'язання задачі.

Рассмотрена задача размещения n-мерных параллелепипедов. На основании математического аппарата Ф-функций формализуются условия взаимного непересечения, касания и пересечения n-мерных параллелепипедов. Строится математическая модель задачи размещения заданного числа n-мерных параллелепипедов в области (n-мерном параллелепипеде). Предлагается основная идея решения задачи.

The problem of packing n-dimensional parallelepipeds is considered. Based on the mathematical apparatus of the F-functions are formalized conditions of mutual non-intersection, touching and crossing n-dimensional parallelepipeds. The mathematical model of the packaging specified number of n-dimensional parallelepipeds in the domain (n-dimensional parallelepiped). Proposed to the basic idea of solving the problem.

Постановка проблеми у загальному вигляді. У багатьох галузях науки і техніки виникають задачі, пов’язані з розміщенням геометричних об’єктів різноманітних просторових форм. Ці задачі у загальному випадку зводяться до моделювання оптимального розміщення геометричних об’єктів у заданих областях за наявності різних обмежень і деяких критеріїв якості розміщення та належать до класу задач геометричного проектування [1]. На цей час побудовані математичні моделі та розроблені ефективні методи точного і наближеного розв’язання задач розміщення дво- та тривимірних геометричних об’єктів. Природним продовженням досліджень у цьому напрямі став перехід до розв’язання задач розміщення об’єктів у просторах розмірності більше ніж три. Розгляд таких задач є перспективним, оскільки існує низка не лише теоретичних, але і прикладних задач, пов’язаних з оптимізацією розміщення багатовимірних об’єктів. До них можна віднести задачі ресурсозбереження, планування експериментів, оптимізації розкладів робіт (наприклад, на підприємствах харчової промисловості під час вирішення проблеми оптимізації послідовності виконання робіт із урахуванням обмежень на ресурси).

Суть однієї з таких задач полягає у наступному.

Існує деяка кількість однотипних робіт P_i, i=1, 2,..., N, які, взагалі кажучи, можуть виконуватися одночасно. Для виконання кожної роботи P_i потрібно n видів ресурсів a_{ik}, $k = 1, 2,\dots, n,$ у тому числі a_{i1} – ресурс за часом. Для виконання всіх робіт P_i, i=1, 2,…, N, є ті ж види ресурсів $b_{0k}, k = 1, 2,\dots, n,$ у тому числі b_{01} – ресурс за часом, яких, проте, недостатньо, щоб виконувати всі роботи одночасно.

У зв’язку з цим виникає задача побудови та оптимізації послідовності виконання робіт із мінімізацією загального часу виконання всіх робіт.

Співвіднесемо ресурси a_{ik} (b_{0k}), $k = 1, 2,\dots, n,$ з осями декартової системи координат простору R^n. Тоді роботу P_i можна подати у вигляді n-вимірного паралелепіпеда (n-паралелепіпеда) з розмірами a_{ik}, $k = 1, 2,\dots, n,$ об’єм якого характеризує об'єм цієї роботи. Значення ресурсів b_{0k}, $k=1,\ 2,...,\ n,$ визначають деяку область D_0 у вигляді n-паралелепіпеда з відповідними розмірами b_{0k}, $k=1,\ 2,...,\ n$.

Таким чином, задача визначення послідовності виконання робіт із урахуванням обмежень на ресурси та мінімізацією загального часу виконання всіх робіт зводиться до задачі розміщення n-паралелепіпедів P_i, i=1, 2,…, N, в області D_0 з мінімізацією довжини зайнятої частини області D_0 уздовж ребра з розміром b_{01}.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На цей час задачі розміщення багатовимірних об'єктів мало вивчені, а існуючі методи не дозволяють ефективно розв'язувати ці задачі через їхню велику розмірність та складність [2-4]. Тому є актуальним продовження вивчення задач розміщення багатовимірних об'єктів та проведення подальших досліджень у сфері розробки нових підходів для їхнього розв'язання на базі сучасних ПЕОМ.

Мета та завдання статті. Побудова математичної моделі оптимізаційної задачі розміщення n-паралелепіпедів (n>3) в області, що має форму n-паралелепіпеда, з різними критеріями якості; вивчення особливостей побудованої математичної моделі; розробка методу наближеного розв'язання задачі згідно з особливостями побудованої математичної моделі задачі.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нагадаємо [5], що n-вимірна поліедральна множина називається n-паралелепіпедом, якщо в деякій прямокутній системі координат вона задається нерівностями

$$a_i \le x_i \le b_i, i=1,\ 2,...,\ n,\ a_i, b_i \in R^1.$$

Задачу моделювання розміщення n-паралелепіпедів у n-паралелепіпеді сформулюємо наступним чином.

Нехай є N однаково орієнтованих n-паралелепіпедів P_i, що не допускають поворотів, і задана область D_0 у вигляді n-паралелепіпеда:

$$P_i=\{x_i \in R^n, x_i=(x_{i1}, x_{i2},..., x_{in}): 0 \le x_{ik} \le a_{ik}, k=1,2,...,n\},\ i=1,\ 2,\dots,\ N,$$

$$D_0=\{x \in R^n,\ x=(x_1, x_2,..., x_n): 0 \le x_k \le b_{0k}, k=1,\ 2,...,\ n\},$$

де R^n – n-вимірний евклідовий арифметичний простір, величина $b_{01}=d$ є змінною.

Вважаємо, що розміри області D_0 такі, що всі n-паралелепіпеди P_i, i=1, 2,…, N, напевно можуть розміститися в області D_0, тобто, $a_{ik} \le b_{0k}$, $k = 2,\ 3,\ldots,\ n$.

Необхідно розмістити n-паралелепіпеди P_i, i=1, 2,…, N, у n-паралелепіпеді D_0 таким чином, щоб n-паралелепіпеди попарно не перетиналися, а довжина d зайнятої частини області D_0 у напрямі ребра b_{01} була мінімальною.

Початок O_i власної (рухомої) системи координат $O_ix_i(O_ix_{i1}\ldots x_{in})$ n-паралелепіпеда P_i приймемо за полюс P_i, i=1, 2,…, N. Координати $u_i=(u_{i1},\ u_{i2},\ldots,\ u_{in})$ полюса n-паралелепіпеда P_i, i=1, 2,…, N, відносно нерухомої системи координат $Ox(Ox_1\ldots x_n)$ є його параметрами розміщення [6] і визначають положення n-паралелепіпеда в просторі R^n. Таким чином, вектор $u=(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_N)\in R^{Nn}$ визначає положення n- паралелепіпедів $P_1, P_2,\ldots, P_N$ у просторі R^n.

Позначимо через $P_i(u_i)$ – n-паралелепіпед P_i, що транслюється на вектор параметрів розміщення u_i, i=1, 2,…, N.

Математична модель задачі включає аналітичний опис функції мети і області припустимих розв'язків (значень параметрів розміщення). В якості функції мети виберемо функцію $F(X)=d$, де $X=(u,d)=(u_1,\ u_2,\ldots,\ u_N,\ d)$. Для формалізації основних умов, що визначають область припустимих розвязків, тобто умов розміщення n-паралелепіпедів в області і умов їх взаємного неперетину, скористаємося апаратом Φ-функцій [7].

Тоді математична модель задачі може бути представлена у вигляді

$$\min_{X\in W\subset R^m} F(X), \tag{1}$$

де $F(X)=d,\ X=(u,d),\ m=Nn+1$.

Область припустимих розв'язків W описується системою нерівностей:

$$\begin{cases} \Phi_{ij}(u_i,u_j)\ge 0,\ i=1,2,\ldots,N-1,\ \ j=i+1,\ldots,N, \\ \Phi_{0j}(u_0,u_j)\ge 0,\ \ j=1,2,\ldots,N. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(u_i,u_j) = \max\{ & u_{j1}-u_{i1}-a_{i1},-u_{j1}+u_{i1}-a_{j1},\ldots \\ & \ldots,u_{jn}-u_{in}-a_{in},-u_{jn}+u_{in}-a_{jn}\}, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Phi_{0j}(u_0, u_j) = \min\{u_{j1}, -u_{j1} + b_{01} - a_{j1}, \ldots, u_{jn}, -u_{jn} + b_{0n} - a_{jn}\} \quad (4)$$

.

де $\Phi_{ij}(u_i, u_j)$ – Φ-функція n-паралелепіпедів $P_i(u_i)$ і $P_j(u_j)$, $\Phi_{0j}(u_0, u_j)$ – Φ-функція n-паралелепіпеда $P_j(u_j)$ і множини $D_0^*(0) = \mathrm{cl}(R^n \setminus D_0(0))$.

Виконання умови $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ гарантує неперетинання n-паралелепіпедів $P_i(u_i)$ і $P_j(u_j)$, виконання умови $\Phi_{0j}(u_0, u_j) \geq 0$ – розміщення n-паралелепіпеда $P_j(u_j)$ в області D_0.

Таким чином, із співвідношення (3) виходить, що нерівність $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$ насправді визначається набором (не системою) нерівностей вигляду

$$\langle A\mathrm{U}_{ij} - A_{ij} = \left\langle \begin{array}{l} -u_{i1} + u_{j1} - a_{i1} \geq 0, \\ u_{i1} - u_{j1} - a_{j1} \geq 0, \\ \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \\ -u_{in} + u_{jn} - a_{in} \geq 0, \\ u_{in} - u_{jn} - a_{jn} \geq 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

де $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U_{ij} = (u_i \;\; u_j)^{\mathrm{T}}$, $u_s = (u_{s1}\, u_{s2} \ldots u_{sn})$, $A_{ij} = (a_i \;\; a_j)^{\mathrm{T}}$, $a_s = (a_{s1}\, a_{s2} \ldots a_{sn})$, $s \in \{i, j\}$.

Тобто нерівність $\Phi_{ij}(u_i, u_j) \geq 0$, i=1, 2,…, N–1, j=i+1,…, N, виконується, якщо виконується хоча б одна з нерівностей набору (5).

Аналогічно із співвідношення (4) виходить, що нерівність $\Phi_{0j}(u_0, u_j) \geq 0$, j=1,2,…,N, визначається системою нерівностей:

$$Bu_j + C(b_0 - a_j) = \left\{ \begin{array}{l} u_{j1} \geq 0, \\ -u_{j1} + d - a_{j1} \geq 0, \\ \ldots \;\; \ldots \;\; \ldots \\ u_{jn} \geq 0, \\ -u_{jn} + b_{0n} - a_{jn} \geq 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

де $b_0 = (b_{01}\, b_{02} ... b_{0n})$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким чином, n-паралелепіпеди $P_{i_0}(u_{i_0})$ і $P_{j_0}(u_{j_0})$, $i_0, j_0 \in \{1, 2, ..., N\}$, $i_0 \neq j_0$, не перетинаються, якщо хоча б одна з нерівностей набору $\langle AU_{i_0 j_0} - A_{i_0 j_0} \geq 0$ виконується; n-паралелепіпед $P_{i_0}(u_{i_0})$ міститься в області D_0, якщо координати вектора u_{i_0} задовольняють нерівностям системи $B_{i_0} + C(b_0 - a_{i_0}) \geq 0$.

Позначимо

$$Bu + C(b_0 - a) = \begin{cases} Bu_1 + C(b_0 - a_1) \geq 0, \\ ... \;\; ... \;\; ... \\ Bu_N + C(b_0 - a_N) \geq 0. \end{cases} \tag{7}$$

Отже, область припустимих розв’язків W визначається системою нерівностей

$$\begin{cases} \langle AU_{m_{12}} - A_{m_{12}} \geq 0, \\ ... \;\; ... \;\; ... \\ \langle AU_{m_{(N-1)N}} - A_{m_{(N-1)N}} \geq 0, \\ Bu + C(b_0 - a) \geq 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $\langle AU_{ij} - A_{ij} \geq 0$ – набір нерівностей вигляду (5), i=1, 2,…, N–1, j=i+1,…,N.

Математична модель задачі розміщення n-паралелепіпедів має ряд особливостей. Серед них:

1. Функція мети $F(X) = d$ є лінійною, її значення знаходиться у межах: $\max\limits_{i=1,2,...,N} a_{i1} \leq d \leq \sum\limits_{i=1}^{N} a_{i1}$.

2. Простір незалежних змінних R^m, в якому проводиться мінімізація $F(X)$, має вимірність Nn+1.

3. Область припустимих розв’язків W неопукла, описується лінійними нерівностями, тобто має кусково-лінійну межу.

4. Область W обмежена. Це витікає з того, що функція мети може бути обмежена, не втрачаючи загальності, деякою достатньо великою величиною d^0, наприклад, $d^0 = \sum_{i=1}^{N} a_{i1}$.

5. Кожен з C_N^2 наборів (5) містить $2n$ нерівностей, а система (7) – $2Nn$ нерівностей. Отже, загальна кількість нерівностей в системі (8) (а також і в (2)) – $2n\left(N(N-1)/2+N\right) \approx mN$.

6. Система (8), що визначає область W, включає C_N^2 наборів (5) і систему (7). Таким чином, для виконання системи (8) необхідно, щоб виконувалися принаймні по одній нерівності з кожного набору (5) і система (7) одночасно, тобто щоб виконувалася одна з систем вигляду

$$\begin{cases} \varphi_{12}^{\mu}(u_1,u_2) \geq 0, \\ \dots\ \dots\ \dots \\ \varphi_{(N\text{-}1)N}^{\mu}(u_{N-1},u_N) \geq 0, \\ Bu + C(b_0 - a) \geq 0, \end{cases} \tag{9}$$

де $\varphi_{ij}^{\mu}(u_i,u_j) \geq 0$, i=1, 2,…, N–1, j=i+1,…,N, – одна з нерівностей набору (5).

Таким чином, область W можна еквівалентно описати набором з μ_0 відповідних систем нерівностей вигляду (9)

7. Кожна система (9) містить $C_N^2 + 2Nn$ нерівностей, тобто маємо квадратичну залежність числа нерівностей від кількості n-паралелепіпедів, що розміщуються. Загальна кількість систем вигляду (9) складає $(2n)^{(N^2-N)/2}$. Проте внаслідок того, що деякі зі сформованих систем є несумісними або містяться одна в іншій, $\mu_0 < (2n)^{(N^2-N)/2}$.

8. На підставі особливості 6, область W можна представити як $W = \cup W_\mu$, μ=1, 2,…, μ_0, де підобласть W_μ – опукла і описується системою (9).

9. Область W у загальному випадку незв’язна, а кожна складова області багатозв’язна.

10. Локальний екстремум у загальному випадку є нестрогим (у подальшому слово "нестрогий" опускатиметься).

11. Для кожного локального мінімуму $X^* = (u^*,\ d^*)$ завжди знайдеться вершина $X' = (u', d')$ області *W*, що визначається системою (*Nn*+1) рівнянь, така, що $F(X^*) = F(X')$.

12. Кількість локальних екстремумів функції мети *F*(*X*) − не менше N, тобто дана задача є NP − важкою [8].

Отже, згідно з особливостями 8 і 11, для отримання глобального мінімуму функції мети *F*(*X*) досить розглянути μ_0 систем в наборі (9). На теперішній час не існує методу, що дозволяє перебрати усі системи вигляду (8), при досить великих *n* або *N*. Тому пропонується пошук деякого наближення до глобального мінімуму.

Можлива стратегія наближеного розв’язання задачі містить у собі такі етапи:

– знаходження локальних екстремумів, з огляду на їхню нестрогість, на базі модифікованого методу оптимізації за групами змінних (побудова припустимих варіантів розміщення) [6];

– перебір локальних екстремумів за допомогою модифікованого методу околів, що звужуються [1; 9];

– краще значення локального екстремуму приймається як наближення до глобального екстремуму функції мети.

Висновки. У даній статті на основі математичного апарату *Ф*-функцій формалізовані умови взаємного неперетину, дотику та перетину *n*-паралелепіпедів. Побудована математична модель задачі розміщення *n*-паралелепіпедів в області (*n*-паралелепіпеді). Надана можлива стратегія розв’язання задачі.

Список літератури

1. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. – К. : Наук. думка, 1986. – 266 с.

2. Lins L. An n-tet graph approach for nonguillotine packings of n-dimensional boxes into an n-container / L. Lins, S. Lins, R. Morabito // Centr. Europ. J. of Operational Research. – 2002. – Vol. 141. – P. 421–439.

3. Mukhacheva E. A. Exact Algorithms for solving n-dimensional Bin-Packing Problem / E. A. Mukhacheva, V. M. Kartak, L. I. Vasilyeva // Informs-2000 : Annual Meeting– San Antonio, 2000. – P. 38.

4. Schepers J. A new exact algorithms for general orthogonal d-dimensional knapsack problems / J. Schepers // Lecture Notes in Computer Science. – 1997. – Vol. 1284. – P. 144–156.

5. Софронова М. С. N-паралелепіпеди та *n*-політопи як об'єкти багатовимірних задач оптимізаційного геометричного проектування / М. С. Софронова // Прогресивні техніка та технології харчових виробництв ресторанного господарства і торгівлі : зб. наук. пр. / ХДУХТ. − Харків, 2011. – Вип. 2. – С. 390–396.
6. Стоян Ю. Г. Размещение геометрических объектов / Ю. Г. Стоян. – Київ : Наук. думка, 1975. – 239 с.
7. Φ-functions for primary 3D-objects / Yu. G. Stoyan, G [et al.]. – Dresden, 2002. – 24 p. (Prepr. / Technical University of Dresden ; MATH – NM –15).
8. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. – М. : Мир, 1985. – 512 с.
9. Stoyan Y. Packing of various radii solid spheres into a parallelepiped / Y. Stoyan, G. Yaskov, G. Scheithauer. – Dresden, 2001. – P. 21. (Preprint / Techn. Univ. of Dresden ; MATH – NM – 17).

Отримано 30.10.2012. ХДУХТ, Харків.

УДК 664.8/9:635.6:658.512:613.20:577.16

І.К. Мазуренко, канд. техн. наук *(ВП НУБіП України «НДПІ стандартизації і технологій екобезпечної та органічної продукції», Одеса)*
Л.Ю. Філіпова *(ВП НУБіП України «НДПІ стандартизації і технологій екобезпечної та органічної продукції», Одеса)*
Н.А. Ракуленко *(ВП НУБіП України «НДПІ стандартизації і технологій екобезпечної та органічної продукції», Одеса)*

НАУКОВІ АСПЕКТИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕРОБЛЕННЯ ОВОЧЕВИХ ТА БАШТАННИХ КУЛЬТУР

Проаналізовано хімічний склад овочевих і баштанних культур, вирощування яких поширене в Україні, із метою визначення перспективних напрямів їх промислового використання, розроблено технологічні схеми комплексного перероблення рослинної сировини та встановлено асортимент готової продукції.

Проанализирован химический состав овощных и бахчевых культур, выращивание которых распространено в Украине, с целью определения перспективных направлений их промышленного использования, разработаны технологические схемы комплексной переработки растительного сырья и установлен ассортимент готовой продукции.