

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РЕЗАНИЯ УПРУГОГО ТЕЛА ЛЕЗВИЕМ

Нанка А.В., доцент

*(Харьковский национальный технический университет сельского
хозяйства им. Петра Василенка)*

В результате математического моделирования процесса резания упругого тела лезвием, определены интенсивности касательных напряжений для различных значений угла резания.

Постановка проблемы. Разрушение твердых тел – это процесс деления тела на более мелкие его части [1-3]. Несмотря на большое количество способов дробления (резание, раздавливание, скалывание, удар и т.п.), в основе его лежит одно и то же явление – это возникновение в теле при его нагрузке внешними силами предельных напряжений, приводящих к нарушению целостности тела, разрыву связей атомов и молекул между собой. При этом разрыв этих связей возможен двумя способами: первый, хрупкое разрушение, когда напряжения в теле вплоть до предельных связаны с деформациями законом Гука, и, второй, «квасихрупкое» разрушение, когда в точке разрушения появляются пластические деформации.

Следует заметить, что физическая картина разрушения твердого тела на части до настоящего времени не вполне ясна. Некоторые авторы предлагают рассматривать процесс разрушения как процесс развития микротрещин, имеющих в теле [1,2]. Другая точка зрения опирается на понятие предельного равновесия, связанного с образованием пластических зон, приводящих к разрушению тела [3-5].

Таким образом, в любом случае требуется изначальное определение напряженного состояние, приводящего к пластическим деформациям, и дальнейшее рассмотрение совместного упругопластического состояния. Если остановиться на процессе резания тела на части, то схематически его можно представить в виде внедрения некоторого «абсолютно твердого» клинообразного тела I (резца) в некоторое менее прочное тело II. В окрестности острия резца при достижении предельных напряжений образуется зона пластичности P.

Результаты исследований. Для резца, имеющего идеально острую клинообразную форму, теоретически в окрестности контакта острия, очевидно, будут возникать бесконечно большие напряжения при любом силовом воздействии лезвия. Практически идеально острые лезвия в действительности не встречаются, всегда лезвие заканчивается поверхностью, обладающей большой кривизной (или малым радиусом кривизны ϵ). Поэтому состояние с

бесконечно большими напряжениями можно рассматривать как предельное состояние, к которому асимптотически стремится решение задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассмотрим ниже первый вариант, когда лезвие является идеально острым, а внедрение лезвия в тело еще незначительное. Ему соответствует плоская задача теории упругости в следующей постановке [6].

Массовые силы отсутствуют, рассматривается плоское деформированное состояние упругого полупространства $x_1 > 0$ под действием сосредоточенной силы \vec{P} , направленной под углом α относительно оси Ox_1 , приложенной на границе упругого тела $x_1 = 0$ в начале координат O (рисунок 1).

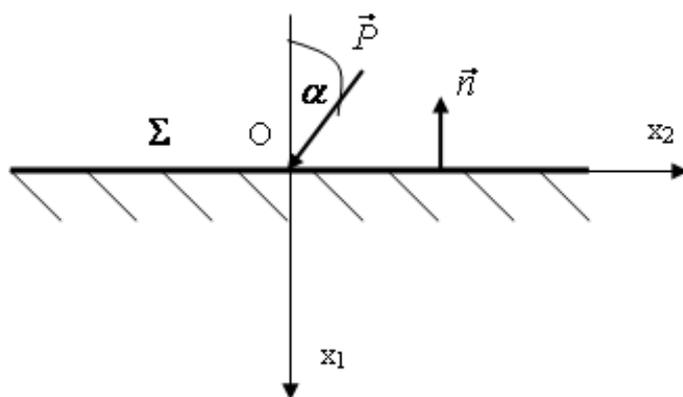


Рисунок 1 - Схема сосредоточенной силы действующей на границе твердого тела

При плоском напряженном состоянии вектор перемещений $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ зависит только от двух переменных x_1, x_2 . В этом случае тензоры деформаций δ и напряжений σ имеют следующую структуру

$$\delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{11} & 0 \\ \sigma_{11} & \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

и связаны между собой законом Гука [6]

$$\varepsilon_{ik} = 2\mu \left(\sigma_{ik} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{mm} \right) \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (3)$$

где μ - коэффициент Ляме равный $2\mu = \frac{E}{1+\nu}$;

$$\sigma_{mm} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

E - модуль Юнга;

ν - коэффициент Пуассона.

Уравнения равновесия в данном случае сводятся к двум уравнениям в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Данная система уравнений замыкается привлечением уравнения совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (5)$$

выражающее собой необходимое условие разрешимости уравнений для вектора перемещений через тензор деформаций

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 2\varepsilon_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Привлекая закон Гука **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, после простых преобразований получим необходимое замыкающее соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \sigma_{11} + \frac{2}{3} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \sigma_{11} - \frac{\nu}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \sigma_{22} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \sigma_{22} + \\ + \frac{2}{3} \nu \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \sigma_{22} - \frac{\nu}{3} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \sigma_{11} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \sigma_{12} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения однозначного решения системы уравнений **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** необходимо дополнить их граничными условиями на границе $x_1 = 0$ и на бесконечности при $x_1 \rightarrow \infty$. На бесконечности, как это ясно из физических соображений, решение задачи должно стремиться к нулю

$$|\sigma_{ik}| \xrightarrow{x_1 \rightarrow \infty} 0. \quad (7)$$

На границе упругого полупространства заданы напряжения \vec{p}_n , имеющие распределение, содержащее функцию Дирака, в виде

$$\vec{p}_n = (P \cos \alpha \vec{e}_1 - P \sin \alpha \vec{e}_2) \delta(x_2). \quad (8)$$

где \vec{e}_1, \vec{e}_2 орты декартовой системы координат (x_1, x_2, x_3) ;

$\delta(x_2)$ - одномерная дельта-функция [7].

Введем единичную нормаль $\vec{n} = (-1, 0, 0)$ к Σ , внешнюю по отношению к упругому телу (рис.2). Тогда векторное граничное условие, как это следует из соотношения Коши $\vec{n} \cdot \sigma = \vec{p}_n$ эквивалентно двум скалярным соотношениям

$$\begin{aligned} -\sigma_{11}(\theta, x_2) &= P \cos \alpha \delta(x_2) \\ -\sigma_{12}(\theta, x_2) &= P \sin \alpha \delta(x_2) \end{aligned} \quad (9)$$

Для решения поставленной краевой задачи воспользуемся преобразованием Фурье по переменной x_2 [8]. Фурье-образ функции $f(x_2)$, определенной на бесконечном интервале $(-\infty < x_2 < \infty)$, определяется интегралом

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_2) e^{-isx_2} dx_2, \quad (10)$$

а обратное преобразование соотношением

$$f(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{isx_2} ds. \quad (11)$$

Здесь «i» – мнимая единица, s - вещественная переменная.

Применяя преобразование **Ошибка! Источник ссылки не найден.** к уравнениям **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и граничным условиям **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получим следующую краевую задачу для образов компонент тензора напряжений $\tilde{\sigma}_{ik} = \tilde{\sigma}_{ik}(x_1, s)$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_1} \tilde{\sigma}_{11} + is \tilde{\sigma}_{12} &= 0 \\ \frac{d}{dx_1} \tilde{\sigma}_{21} + is \tilde{\sigma}_{22} &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}+ \frac{d^2}{dx_1^2} [(1-\nu) \tilde{\sigma}_{22} - \nu \tilde{\sigma}_{11}] - 2is \frac{d}{dx_1} \tilde{\sigma}_{12} - s^2 [(1-\nu) \tilde{\sigma}_{11} - \nu \tilde{\sigma}_{22}] &= 0 \\ - \frac{\nu}{3} \frac{d^2}{dx_1^2} \tilde{\sigma}_{11} + \frac{d^2}{dx_1^2} \tilde{\sigma}_{22} + \frac{2\nu}{3} \frac{d^2}{dx_1^2} \tilde{\sigma}_{22} - 4is \frac{d}{dx_1} \tilde{\sigma}_{12} - s^2 \left(1 + \frac{2\nu}{3}\right) \tilde{\sigma}_{11} + \frac{\nu}{3} s^2 \tilde{\sigma}_{22} &= 0 \\ - \tilde{\sigma}_{11}(0, s) &= P \cos \alpha \\ - \sigma_{12}(0, s) &= -P \cos \alpha.\end{aligned}\tag{13}$$

$$\left. \tilde{\sigma}_{ik} \right|_{x_1 \rightarrow \infty}$$

Первые два уравнения **Ошибка! Источник ссылки не найден.** позволяют выразить $\tilde{\sigma}_{12}, \tilde{\sigma}_{22}$ через $\tilde{\sigma}_{11}$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{12} &= \frac{i}{s} \frac{d}{dx_1} \tilde{\sigma}_{11} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{s} \frac{d}{dx_1^2} \tilde{\sigma}_{11}\end{aligned}\tag{14}$$

Используя полученные соотношения, можно третье уравнение **Ошибка! Источник ссылки не найден.** привести к виду

$$\frac{d^4 \tilde{\sigma}_{11}}{dx_1^4} - 2s^2 \frac{d^2 \tilde{\sigma}_{11}}{dx_1^2} + s^4 \tilde{\sigma}_{11} = 0,\tag{15}$$

имеющему общее решение, содержащее четыре произвольных параметра $A(s), B(s), C(s), D(s)$

$$\tilde{\sigma}_{11}(x_1, s) = (A(s) + x_1 B(s)) e^{-|s|x_1} + (C(s) + x_1 D(s)) e^{|s|x_1}.\tag{16}$$

Для решения, ограниченного на бесконечности, параметры C, D обращаются в нуль, а параметры A, B , согласно граничным условиям **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, должны удовлетворять системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A(s) + P \cos(\alpha) = 0 \\ \frac{i}{s} [B(s) - A(s)|s|] - P \sin(\alpha) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Окончательно, выражения для образов компонент тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= (-\cos\alpha s - i s x_1 \sin\alpha - \cos\alpha |s|) e^{-|s|x_1} P \\ \tilde{\sigma}_{12} &= i \frac{(-s i \sin\alpha + i |s| x_1 \sin\alpha s + |s|^2 x_1 \cos\alpha)}{s} e^{-|s|x_1} P \\ \tilde{\sigma}_{22} &= |s| \frac{(-2s i \sin\alpha - |s| \cos\alpha + i s |s| x_1 \sin\alpha + |s|^2 x_1 \cos\alpha)}{s^2} e^{-|s|x_1} P \end{aligned} \quad (18)$$

После применения обратного преобразования Фурье **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получаем выражения для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{11} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1^2 (x_1 \cos(\alpha) - x_2 \sin(\alpha))}{(x_2^2 + x_1^2)^2}. \quad (19)$$

$$\sigma_{22} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x_2^2 (x_1 \cos(\alpha) - x_2 \sin(\alpha))}{(x_2^2 + x_1^2)^2}. \quad (20)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{2P}{\pi} \frac{x_1 x_2 (x_1 \cos(\alpha) - x_2 \sin(\alpha))}{(2x_1^2 x_2^2 + x_1^4 + x_2^4)}. \quad (21)$$

Как и предполагалось выше решение обладает особенностью вблизи точки приложения сосредоточенной силы \vec{P} .

Теория пластического деформирования тел основывается на условии текучести – некоторого предельного состояния, при котором в теле возникают пластические деформации [3-5]. Соответствующие условия носят аксиоматический характер и опираются на опытные данные. Наиболее используемыми являются условия текучести Сен-Венана и Мизеса. Так условие Мизеса выражает собой условие достижения предельного значения τ интенсивностью касательных напряжений T

$$T = \tau_s, \quad (22)$$

где T^2 представляет второй инвариант девиатора тензора напряжений σ

$$\sigma^0 = \sigma - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \delta,$$

$$T = \sqrt{I \left(\begin{matrix} \sigma \\ \sigma \end{matrix} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_{mn}^0 \sigma_{mn}^0} \quad (23)$$

(по повторяющимся индексам суммирование от 1 до 3 !). В применении к рассматриваемому в работе случаю имеем для девиатора тензора напряжений

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sigma_{11} - \frac{1}{3} \sigma_{22} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \frac{2}{3} \sigma_{22} - \frac{1}{3} \sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{pmatrix} \quad (24)$$

и интенсивности касательных напряжений, соответственно

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22}^2) + \sigma_{12}^2 = \\ &= \frac{4P^2}{\pi^2 (x_1^2 + x_2^2)} (x_2^4 + x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2) (\cos \alpha (x_2^2 - x_1^2) + 2x_1 x_2 \sin \alpha \cos \alpha - x_2^2) \end{aligned} \quad (25)$$

Результаты численного решения уравнения (25), изображены на рисунке 2 в виде графических зависимостей, изображающие интенсивности касательных напряжений $T(x_1, x_2)$ для различных значений угла резания $\alpha = [0, 90^\circ]$ в виде поверхности $T = T(x_1, x_2)$ и линий уровня этой же поверхности.

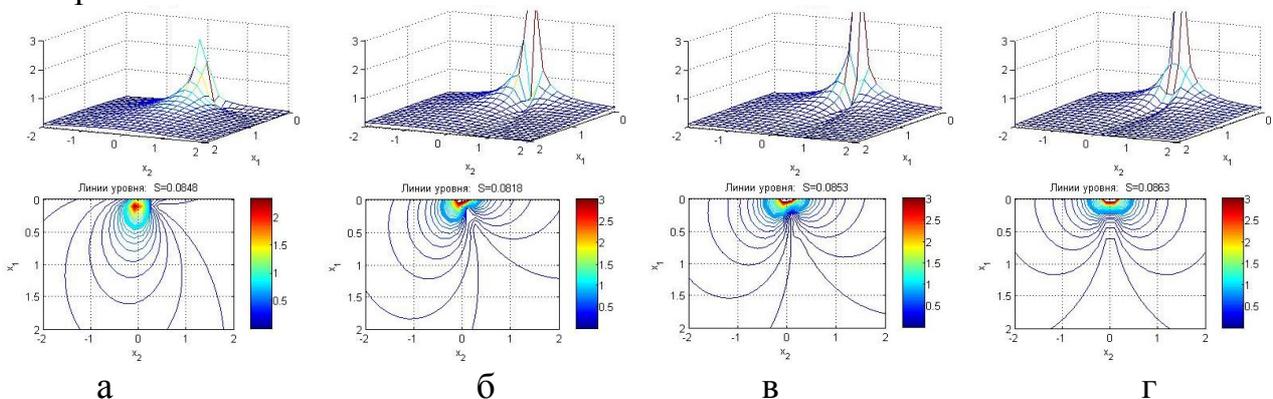


Рис. 3 Графические зависимости интенсивности касательных напряжений для различных значений угла резания: а - $\alpha = 15^\circ$; б - $\alpha = 60^\circ$; в - $\alpha = 75^\circ$; г - $\alpha = 90^\circ$

Из приведенных графических зависимостей следует, что линии уровня интенсивности касательных напряжений представляют собой замкнутые линии с общей точкой пересечения, совпадающей с точкой приложения силы. Соотношения **Ошибка! Источник ссылки не найден.- Ошибка! Источник ссылки не найден.** свидетельствуют, об асимптотическом поведении напряжений в окрестности точки приложения силы \vec{P} имеет место рост абсолютных значений напряжений порядка $O(r^{-1})$.

В качестве критерия эффективности действия силы (целевая функция) можно выбрать величину площади плоскости $x_1 O x_2$, ограниченную контуром линии уровня для $T(x_1, x_2)$, соответствующей некоторому значению $T = T_{max}$ (на рисунках эта линия выделена жирной линией). Положим, что эффективность действия силы тем выше, чем больше соответствующая площадь. Значения соответствующих площадей для различных значений угла α приведены в виде графика на рис.4.

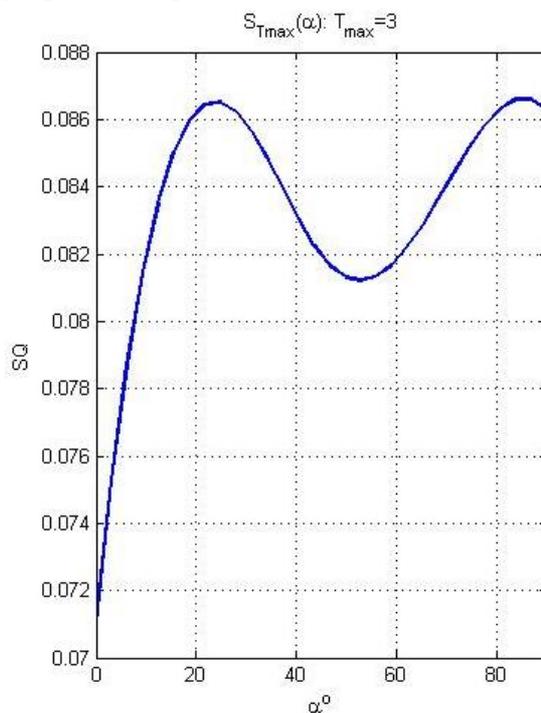


Рис.4. Эффективность действия силы в виде соответствующих площадей для различных значений угла α

Из графика видно, что соответствующая зависимость имеет два максимума: один вблизи $\alpha = 25^\circ$ и вблизи $\alpha = 85^\circ$.

Выводы. В результате математического моделирования процесса внедрения «абсолютно твердого» клинообразного тела (резца) в менее прочное тело, определены интенсивности касательных напряжений для различных значений угла резания.

Список использованных литературных источников

1. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г.П. Черепанов. - М.: Наука, 1974. - 640 с.
2. Либовиц, Г. К. Разрушение [Текст] / Г.К. Либович. - Мир, 1975. - 766 с.
3. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел [Текст] / А. Надаи . - М.: Мир, 1969. - 863 с.
4. Ильюшин А. А. Пластичность [Текст] / А.А. Ильюшин. - М.: Изд-во АН СССР, 1961. - 271 с.
5. Качанов Л. М. Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов. - М.: Наука, 1969. - 420 с.
6. Новацкий, В. К. Теория упругости [Текст] / В. К. Новацкий. - М.: Мир, - 1975. 872 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. - М.: Наука, 1970. - 720 с.
8. Диткин, В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление [Текст] / В.А. Диткин, А. П. Прудников. - М.: ФМЛ, 1961. - 524 с.

Анотація

Моделювання процесу різання пружного тіла лезом

Нанка О.В.

В результаті математичного моделювання процесу різання пружного тіла лезом, визначені інтенсивності дотичної напруги для різних значень кута різання.

Abstract

Design of process of cutting resilient bodies by a blade

A.Nanka

As a result of mathematical design of process of cutting of resilient body by a blade, intensities of tangent tension are certain for the different values of cutting corner.